

# EXPERIMENTOS NUMERICOS EN TURBULENCIA HOMOGENEA, NO ISOTROPICA Y BIDIMENSIONAL

FRANCESC X. GRAU VIDAL

*Dpto. de Ing. Química y Electromecánica,  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería,  
Universidad Rovira i Virgili,  
Ctra. Salou s/n, 43007 Tarragona.*

## RESUMEN

A partir del programa original de Rogallo (1981) y del derivado por Lee y Reynolds (1985), se ha elaborado un programa de simulación directa de la turbulencia homogénea bidimensional. Este programa se ha usado para medir la velocidad de retorno a la isotropía en un flujo turbulento homogéneo inicialmente no isotrópico y para deducir el efecto de los esfuerzos normales sobre la turbulencia bidimensional isotrópica. Los resultados obtenidos han permitido observar que (1) sí que existe retorno a la isotropía cuando se relaja un campo inicialmente no isotrópico y se mantiene la bidimensionalidad y (2) la deformación de un campo bidimensional isotrópico no introduce ninguna anisotropía.

## SUMMARY

The effects of anisotropy on the decay of two-dimensional turbulence have been studied using a computer code for the direct numerical simulation of homogeneous two-dimensional turbulence, developed from the original code of Rogallo (1981) and the subsequent code of Lee and Reynolds (1985). Also, the effects of normal strain on isotropic two-dimensional turbulence have been established. Results show that (1) it exists return to isotropy during the relaxation process of an initially non isotropic, two-dimensional, homogeneous flow and (2) the deformation of an isotropic two-dimensional field by means of a plane strain does not produce any anisotropic effect.

## INTRODUCCION

El régimen de flujo turbulento es el más común en la mayoría de flujos a escala ingenieril o geofísica. La importancia práctica de la turbulencia, juntamente con el desafío intelectual que representa el hecho de constituir el único problema no resuelto de la mecánica clásica, ha atraído la atención de muchos investigadores desde los campos de la física, la ingeniería y las ciencias matemáticas.

Actualmente, se puede considerar que el estudio de los flujos turbulentos tiene abiertos tres frentes de ataque, el experimental, el teórico y el computacional, siendo

Recibido: Noviembre 1991

este último el que, impulsado por el advenimiento y posterior desarrollo de los ordenadores digitales, ofrece más perspectivas de crecimiento.

La turbulencia consiste en un movimiento caótico, a menudo coexistente con estructuras persistentes (remolinos y similares), con un rango de escalas que crece muy rápidamente con el número de Reynolds, de tal manera que la resolución numérica completa de las ecuaciones que rigen el flujo turbulento solamente sea posible actualmente a números de Reynolds muy bajos, con un valor límite que depende de la capacidad del ordenador. Cuando el rango de escalas excede el permitido por la capacidad del ordenador algunas se han de eliminar del cálculo, modelizándose su efecto mediante consideraciones teóricas y/o empíricas. En este sentido se puede hablar, pues, de simulaciones "directas" o "completas", DNS o FNS (Direct o Full Numerical Simulation), y de simulaciones de "grandes remolinos", LES (Large-eddy simulation).

El aumento continuado de las prestaciones de los ordenadores permite, de hecho, la simulación de flujos turbulentos a números de Reynolds cada vez más elevados y, por tanto, de mayor interés industrial directo. Sin embargo, no es la utilidad industrial de las simulaciones lo que las impulsa sino su utilidad como complemento, y en algún caso sustitución, de la experimentación. Efectivamente, los resultados aportados por la DNS o la LES sirven primordialmente para suministrar "medidas" de cantidades difícilmente obtenibles experimentalmente, magnitudes que los modelizadores utilizan a posteriori para el desarrollo y mejora de modelos aplicables a nivel industrial. En este sentido, los cálculos efectuados a números de Reynolds inferiores a los encontrados en el mundo real tienen más bien una aplicación teórica.

El concepto de turbulencia homogénea tal y como Batchelor (1953) la define, movimiento caótico cuyas propiedades estadísticas son independientes de la posición en el fluido, es en sí una idealización dado que no existe ningún método conocido de síntesis rigurosa de este flujo en el laboratorio ni ha sido detectado, de manera exacta, en la naturaleza. De hecho, los flujos reales objeto de estudio tanto en la naturaleza como en la aeronáutica, la hidráulica o la ingeniería química son, a menudo, más complicados ya que cualquier inhomogeneidad, siendo las principales las introducidas por la presencia de límites físicos, da lugar a términos de transporte debidos a la diferente intensidad del movimiento fluctuante en diferentes puntos del espacio. A pesar de que el estudio de la turbulencia homogénea no tenga una aplicación práctica inmediata, ha sido y es una piedra angular en la construcción de modelos para flujos turbulentos más generales.

La turbulencia tampoco es nunca bidimensional; muchos investigadores (MacWilliams 1983-84; Lesieur 1983; Basdevant et al 1984; Sommeria 1986; Lesieur et al 1988; etc...) justifican el estudio teórico de la "turbulencia bidimensional" en base a las diferentes situaciones naturales o ingenieriles en que las fuerzas de volumen o las condiciones de contorno impiden el crecimiento de perturbaciones en una dirección (flujos rotativos, flujos en película, metales fundidos sometidos a campos magnéticos, flujos atmosféricos u oceánicos ...), pero el verdadero interés del estudio de una abstracción como la turbulencia bidimensional reside, en opinión de este autor, en que los resultados que se derivan de la resolución completa de su modelo matemático pueden ser utilizados como restricciones que tienen que cumplir los diferentes modelos de turbulencia en el límite de la bidimensionalidad.

Finalmente, la turbulencia, homogénea o inhomogénea, generalmente es no

isotrópica. En un campo inicialmente isotrópico, la anisotropía puede ser producida por la acción del esfuerzo medio, de manera que cuando se suprime este esfuerzo es de esperar que el flujo retorne a la isotropía. Debido a la dificultad en medir la escala fina de la turbulencia no hay aún suficiente evidencia experimental, y menos en el límite de la bidimensionalidad, que soporte esta hipótesis, así que la simulación directa de la turbulencia constituye hoy en día la mejor herramienta para obtener información que permita modelizar la velocidad de retorno a la isotropía en función de la escala del movimiento.

Tras el trabajo original de Patterson y Orszag (1971, 1972), la turbulencia homogénea isotrópica ha sido profundamente estudiada mediante técnicas DNS (Clark et al 1977, 1979; Schumann y Patterson 1978; etc...) o LES (Kwak et al 1975; Shaanan et al 1975; etc...). El caso no isotrópico ha sido también objeto de estudio, entre otros, por Kwak et al (1975) mediante LES y por Rogallo (1981), Lee y Reynolds (1985), Wu et al (1985). En cuanto a la turbulencia bidimensional, sólo el caso isotrópico ha merecido atención mediante DNS: Lilly, 1969; Batchelor, 1969; Herring et al, 1974; Fornberg, 1977; MacWilliams, 1983-84; Lesieur, 1983; Basdevant y Sadourny, 1983; Brachet et al, 1984; Brachet et Sulem, 1984; Basdevant et al, 1984; Herring y MacWilliams, 1985; Sommeria, 1986; Legras et al, 1988, entre otros. Así, el presente trabajo representa un primer paso en el estudio numérico del efecto de la anisotropía, en la evolución de la turbulencia homogénea bidimensional.

## FUNDAMENTOS

### Ecuaciones básicas de transporte

Se considera un fluido newtoniano de propiedades físicas constantes, densidad  $\rho$  y viscosidad  $\nu$ , moviéndose en régimen turbulento en un dominio infinito (sin fronteras). Suponiendo válidas las hipótesis de Stokes, los campos instantáneos de velocidad y presión satisfacen la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

y las de Navier-Stokes

$$\frac{D'U'_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2)$$

donde  $D'/dt$  simboliza la derivada substantiva, siguiendo el movimiento instantáneo del fluido.

Utilizando la descomposición de Reynolds entre campo medio (mayúsculas o sobrebarra) y campo fluctuante:

$$u' = U + u \quad p' = P + p \quad (3)$$

se obtiene que el campo medio cumple

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{DU_i}{Dt} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_j} \quad (5)$$

donde  $R_{ij} = \overline{u_i u_j}$  es el tensor de Reynolds.

Por su parte, el campo fluctuante responde a

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{DU_i}{Dt} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial (u_i u_j - R_{ij})}{\partial x_j} - u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (7)$$

Evidentemente, se cumple que (1) = (4) + (6) y que (2) = (5) + (7). El término medio hace referencia, aquí, a una media de conjunto, i.e. valor medio obtenido con un gran conjunto de (usualmente hipotéticos) experimentos análogos (Batchelor §2.1, 1953).

En un flujo homogéneo las magnitudes estadísticas tienen que ser independientes de la posición (si fuesen además independientes de la orientación del sistema de referencia el flujo sería isotrópico) y una condición necesaria para cumplir esta restricción es que el gradiente de velocidad media dependa únicamente del tiempo, i.e. la velocidad media es una función lineal de las coordenadas, condición que puede deducirse, por ejemplo, de la ecuación de transporte de los tensores de Reynolds (Reynolds, 1987). De manera que, en turbulencia homogénea, (7) queda como

$$\frac{DU_i}{Dt} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (8)$$

### Correlaciones y espectros

Las propiedades estadísticas de los campos homogéneos aleatorios se describen mediante correlaciones y espectros. En turbulencia homogénea el tensor correlación de velocidad, i.e. la media del producto diádico de la velocidad en dos puntos, y su transformada de Fourier tienen gran importancia. El tensor correlación de velocidad en dos puntos separados por el vector  $\mathbf{r}$  es

$$Q_{ij}(\mathbf{r}) = \overline{u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r})} \quad (9)$$

El tensor  $Q_{ij}$  puede ser expresado como la transformada de Fourier de un tensor complejo (Batchelor, §2.4, 1953)

$$Q_{ij}(\mathbf{r}) = \int E_{ij}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k} \quad (10)$$

donde  $E_{ij}(\mathbf{k})$  es el tensor espectro tridimensional de energía, igual a la transformada inversa de Fourier del tensor correlación de velocidad:

$$E_{ij}(\mathbf{k}) = (1/2\pi)^3 \int Q_{ij}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (11)$$

Cuando  $\mathbf{r} = 0$  el tensor correlación de velocidad queda reducido al tensor de Reynolds, de manera que:

$$R_{ij} = Q_{ij}(0) = \int E_{ij}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (12)$$

El tensor espectro unidimensional de energía, o tensor espectro radial  $E_{ij}(k)$ , se define como una función de la distancia radial  $k = |\mathbf{k}|$  en el espacio transformado de Fourier:

$$E_{ij}(k) = \int_{k=|\mathbf{k}|} E_{ij}(\mathbf{k}) dS(\mathbf{k}) \quad (13)$$

Evidentemente, se cumple que

$$R_{ij} = \int E_{ij}(k) dk \quad (14)$$

La contribución de cada número de onda a la energía cinética turbulenta viene dada por la mitad de la traza de  $E_{ij}(k)$ :

$$E(k) = (1/2)E_{ii}(k) \quad (15)$$

La función  $E(k)$ , llamada espectro de energía, cumple, por lo tanto,

$$q^2/2 = R_{ii}/2 = \int E(k) dk \quad (16)$$

### Tensor anisotrópico e invariantes

Una medida del nivel de anisotropía la da el tensor anisotrópico del esfuerzo de Reynolds (de aquí en adelante únicamente tensor anisotrópico):

$$b_{ij} = (R_{ij} - q^2\delta_{ij}/3)/q^2 \quad (17)$$

Por definición, el tensor anisotrópico tiene traza nula

$$b_{ii} = 0 \quad (18)$$

de manera que, en coordenadas principales de  $b_{ij}$  únicamente dos elementos del tensor son independientes. Esto implica que la anisotropía puede caracterizarse por dos invariantes independientes (Reynolds, §6.1, 1987)

$$II = -b_{ij}b_{ji}/2 \quad III = b_{ij}b_{jk}b_{ki}/3 \quad (19)$$

Evidentemente, el primer invariante, I es igual al determinante y es, por tanto, nulo.

En turbulencia bidimensional existirán únicamente dos componentes de la velocidad, de manera que el componente nulo,  $\alpha$ , no contribuye al esfuerzo de Reynolds:

$$R_{\alpha\alpha} = 0 \quad b_{\alpha\alpha} = -1/3 \quad (20)$$

En el caso límite de la turbulencia unidimensional toda la energía se concentra en un solo componente:

$$R_{\alpha\alpha} = q^2 \quad b_{\alpha\alpha} = 2/3 \quad (21)$$

Puede verse, así, que los componentes de  $b_{ij}$  pueden tener valores comprendidos entre  $-1/3$  y  $2/3$ .

Una manera más general de caracterizar el estado de anisotropía, y también la turbulencia, es mediante el mapa invariante de anisotropía (Lumley, 1970) en el cual todos los estados posibles de turbulencia caen en el interior de una región encerrada en el mapa  $-II = f(III)$ . En este mapa, el límite de la turbulencia bidimensional viene dado por una línea recta que satisface

$$II + 3III + 1/9 = 0 \quad (22)$$

y que se extiende desde el punto de isotropía bidimensional,  $II = -1/12$  y  $III = -1/108$  hasta el punto de turbulencia unidimensional,  $II = 2/27$  y  $III = 1/3$ .

## PROCEDIMIENTO NUMERICO

El programa de cálculo desarrollado en este trabajo es la versión bidimensional del programa de Lee y Reynolds (1985), derivado asimismo del programa original de Rogallo (1981) para el estudio de la turbulencia homogénea tridimensional. A continuación se enumeran las características principales del esquema de cálculo y se explicita la forma final del sistema de ecuaciones resuelto en este trabajo. El detalle de estas características puede encontrarse en las referencias citadas.

a) El programa es pseudo-espectral: se simula la evolución temporal en el espacio transformado de Fourier. Para aproximar las derivadas espaciales que aparecen en el modelo matemático presentado, todas las variables físicas son expandidas en series truncadas de Fourier. Considerando únicamente una variable  $a(x)$  unidimensional y  $N$  (finito) números de onda,

$$a(x_n) = \sum_m \hat{a}(k_m) e^{ik_m x_n} \quad (23)$$

la amplitud de Fourier  $\hat{a}(k_m)$  viene dada por

$$\hat{a}(k_m) = \frac{1}{N} \sum_n a(x_n) e^{-ik_m x_n} \quad (24)$$

Para un espaciado de red constante  $\Delta$ , las posiciones de los puntos de cálculo en los espacios físico y transformado son

$$x_n = n\Delta, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (25a)$$

$$k_m = 2\pi/N\Delta, \quad m = -N/2, \dots, -1, 0, 1, N/2 \quad (25b)$$

Y, finalmente, la derivada espacial en el punto  $x_n$  se aproxima mediante

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \sum_m ik_m \hat{a}(k_m) e^{ik_m x_n} \quad (26)$$

b) Por definición, la turbulencia bidimensional homogénea se extiende hasta el infinito. Desde un punto de vista computacional es necesario confinar el estudio a una caja finita e imponer condiciones de contorno periódicas. Es obvio que la caja tiene que ser suficientemente grande, i.e. significativamente más grande que la distancia a la que las correlaciones de velocidad en dos puntos se anulan, para que esta condición de contorno artificial pueda ser aplicada. Otra condición es que explícitamente desaparezca la velocidad media, que únicamente depende de la posición; ello es posible mediante el uso de un sistema de coordenadas móvil solidario al flujo medio (Rogallo, 1981). El sistema de coordenadas móvil se relaciona linealmente con el sistema de referencia inercial según:

$$\xi_i = B_{ij}(t)x_j \quad (27)$$

donde el tensor transformación  $B_{ij}$  se selecciona de tal manera que se cumpla

$$\frac{dB_{ij}}{dt} + B_{ik} \frac{\partial U_k}{\partial \xi_j} = 0 \quad (28)$$

y las ecuaciones de continuidad y de transporte de cantidad de movimiento turbulenta (6) y (8) pueden ser expresadas como

$$B_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} = 0 \quad (29)$$

$$\frac{du_i}{dt} + u_j \frac{\partial U_i}{\partial \xi_j} + B_{mi} \frac{\partial p/\rho}{\partial \xi_m} = \nu B_{mj} B_{nj} \frac{\partial^2 u_j}{\partial \xi_m \partial \xi_n} \quad (30)$$

c) Para que la simulación numérica sea capaz de captar una distorsión rápida y, por lo tanto, evitar limitaciones de estabilidad en el paso de tiempo, se define una nueva variable dependiente

$$v_\alpha = u_\alpha / B_{\alpha\alpha} \quad (31)$$

d) A su vez, se define una nueva variable  $\psi$

$$\psi = p/\rho + (B_{22}v_2)^2 \quad (32)$$

que permite reducir el número de variables a utilizar en cada punto de cálculo.

e) Finalmente, los términos viscosos son tratados de manera implícita mediante el uso de un factor integrante  $F$ .

$$F = \exp[\nu k_m k_n \int B_{mj} B_{nj} dt] \quad (33)$$

que en nuestro caso bidimensional equivale a:

$$\nu [(k_1 B_{11})^2 + (k_2 B_{22})^2] = \frac{1}{F} \frac{dF}{dt} \quad (34)$$

Una vez introducidas estas definiciones y cambios de variables en el modelo matemático descrito y trabajando en el dominio transformado de Fourier se obtiene que para simular numéricamente la evolución de un flujo turbulento homogéneo y bidimensional, el sistema de ecuaciones a resolver es:

$$B_{11}^2 k_1 \hat{v}_1 + B_{22}^2 k_2 \hat{v}_2 = 0 \quad (35)$$

$$\frac{d(F \hat{X}_1)}{dt} = -F \hat{N}_1 \quad (36a)$$

$$\frac{d(F \hat{X}_2)}{dt} = -F \hat{N}_2 \quad (36b)$$

donde

$$\hat{X}_1 = \hat{v}_1 + ik_1 \hat{\psi} \quad (37a)$$

$$\hat{X}_2 = \hat{v}_2 + ik_2 \hat{\psi} \quad (37b)$$

$$\hat{N}_1 = \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial [(v_1 B_{11})^2 - (v_2 B_{22})^2]}{\partial \xi_1} + B_{22}^2 \frac{\partial v_1 v_2}{\partial \xi_2} \right\} \quad (37c)$$

$$\hat{N}_2 = \mathcal{F} \left\{ B_{11}^2 \frac{\partial v_1 v_2}{\partial \xi_1} \right\} \quad (37d)$$

siendo  $\mathcal{F}$  el operador transformada de Fourier y

$$\psi = (1/F) \int F \psi dt \quad (38)$$

Las ecuaciones (36) se han resuelto simultáneamente mediante un esquema predictor-corrector Runge-Kutta de segundo orden. En cada paso de tiempo se utiliza la relación

$$\hat{\psi} = -i \frac{B_{11}^2 k_1 \hat{X}_1 + B_{22}^2 k_2 \hat{X}_2}{(B_{11} k_1)^2 + (B_{22} k_2)^2} \quad (39)$$

combinación de (35) y (37), para calcular los nuevos valores de velocidad que satisfacen la ecuación de continuidad.

Finalmente, es preciso remarcar que los errores de solapamiento que se producen a elevados números de onda (Patterson y Orszag, 1971) se han suprimido utilizando el método mixto de truncamiento ( a  $k^2 = 2/9N^2$ ) y desplazamiento descrito por Rogallo (1981).

## CONDICIONES INICIALES

Para proceder a la integración del modelo matemático descrito es necesario disponer de unas condiciones iniciales que satisfagan la ecuación de continuidad y que correspondan al espectro inicial de energía deseado.

### Turbulencia isotrópica

Siguiendo un procedimiento paralelo al utilizado por Batchelor (1952) o Reynolds (1987) para turbulencia isotrópica tridimensional se llega a que, en el caso bidimensional isotrópico, el espectro de energía responde al siguiente modelo:

$$E_{ij}(k) = E(k) \left[ \delta_{ij} - k_i k_j / k^2 \right] / \pi k \quad (40)$$

el cual satisface simultáneamente las condiciones de isotropía

$$R_{11} = R_{22} = q^2/2 = \int E(k) dk \quad (41a)$$

$$R_{12} = 0 \quad (41b)$$

y la ecuación de continuidad

$$k_j E_{ij} = 0 \quad (42)$$

Para generar un campo de velocidades que esté de acuerdo con (40) es preciso, tan solo, imponer que

$$\hat{u}_1 = \sqrt{E_{11}} \exp(i\varphi_1) \quad (43a)$$

$$\hat{u}_2 = \sqrt{E_{22}} \exp(i\varphi_2) \quad (43b)$$

donde  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son valores aleatorios distribuidos uniformemente entre 0 y  $2\pi$ .

El cumplimiento de la ecuación de continuidad implica también que  $\phi_1 = \phi_2 = \phi$ . Así, se obtiene que la distribución inicial de velocidades en un campo bidimensional isotrópico es función únicamente del espectro de energía  $E(k)$  deseado:

$$\hat{u}_1 = \sqrt{\frac{E(k)}{\pi k} \frac{k_2}{k}} \exp(i\varphi) \quad (44a)$$

$$\hat{u}_2 = \sqrt{\frac{E(k)}{\pi k} \frac{-k_1}{k}} \exp(i\varphi) \quad (44b)$$

Este resultado resulta idéntico al que se obtiene siguiendo el procedimiento alternativo descrito por Rogallo (1981) y también seguido por Lee y Reynolds (1985).

### Turbulencia ligeramente no isotrópica

Una gran parte del trabajo en modelización de la turbulencia se dedica al establecimiento de un buen modelo para el espectro tridimensional de energía, a partir del cual se pueden evaluar directamente los tensores de Reynolds así como importantes términos de sus correspondientes ecuaciones de transporte. A continuación se desarrolla uno de dichos modelos para sintetizar un campo de velocidad bidimensional que presente, ya inicialmente, un nivel deseado de anisotropía. Suponiendo que  $E_{ij}$  puede ser expresado en función de los tensores  $\delta_{ij}$ ,  $k_i$  y  $b_{ij}$ , Reynolds (1989) propuso que para niveles bajos de anisotropía únicamente fueran tomados en consideración los términos lineales en  $b$ . De este modo, la forma más general posible para  $E_{ij}$  es:

$$E_{ij}(\mathbf{k}) = C_1\delta_{ij} + C_2k_ik_j/k^2 + C_3b_{ij} + C_4(b_{in}k_nk_j - b_{jn}k_nk_i)/k^2 + C_5\delta_{ij}b_{nm}k_nk_m/k^2 + C_6b_{nm}k_nk_mk_ik_j/k^4 + O(b^2) \quad (45)$$

donde las  $C_i$  son funciones de  $k$ , módulo de  $\mathbf{k}$ .

Al tener en cuenta la restricción de incompresibilidad (ecuación de continuidad) se obtiene

$$C_2 = -C_1 \quad (46.a)$$

$$C_4 = -C_3 \quad (46.b)$$

$$C_5 + C_6 = C_3 \quad (46.c)$$

y, consecuentemente,

$$C_5 = \alpha C_3; \quad C_6 = (1 - \alpha)C_3 \quad (46.d)$$

Quedando, pues, 3 coeficientes,  $C_1$ ,  $C_3$  y  $\alpha$ , por determinar. Así, la ecuación (45) se reescribe como:

$$E_{ij}(\mathbf{k}) = C_1(\delta_{ij} - k_ik_j/k^2) + C_3[b_{ij} - (b_{in}k_nk_j + b_{jn}k_nk_i)/k^2 + \alpha\delta_{ij}b_{nm}k_nk_m/k^2 + (1 - \alpha)b_{nm}k_nk_mk_ik_j/k^4] + O(b^2) \quad (47)$$

Para evaluar  $C_1$ ,  $C_3$  y  $\alpha$  es preciso tener en cuenta que

$$\int E_{ij}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = R_{ij} = q^2(\delta_{ij}/3 + b_{ij}) \quad (48)$$

Centrándose en el caso bidimensional conviene redefinir, únicamente en este apartado, los tensores  $\delta_{ij}$  y  $b_{ij}$  de acuerdo con

$$\delta_{ii} = 2 \quad (49.a)$$

$$b_{ij} = (R_{ij} - q^2\delta_{ij}/2)q^2 \quad (49.b)$$

y hacer uso de las siguientes relaciones:

$$\int C(k)dk = \int \int C(k) d k d \theta = 2\pi \int k C(k) d k = I \quad (49.c)$$

$$\int C(k)(k_i k_j/k^2)dk = (1/2)I\delta_{ij} \quad (49.d)$$

$$\int C(k)(k_n k_m k_i k_j/k^4)dk = (1/8)I\Delta_{ijmn} \quad (49.e)$$

donde

$$\Delta_{ijmn} = \delta_{ij}\delta_{mn} + \delta_{in}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jn} \quad (49.f)$$

Con lo cual, e integrando la ecuación (47), se obtiene finalmente

$$I_1 = q^2 \text{ y } I_3 = 4q^2/(1 - \alpha) \quad (50)$$

de donde se deduce que  $C_1 = E(k)/\pi k$ .

Estos resultados permiten observar que el primer termino de (47) corresponde exactamente a la parte isotrópica del espectro. Por otra parte, los resultados sugieren una relación de proporcionalidad directa entre  $C_3$  y  $C_1$ :

$$C_3 = 4 E(k)/\pi k(1 - \alpha) \quad (51)$$

Finalmente, si se expresa (47) en los ejes principales de  $b_{ij}$  ( $b_{11} = -b_{22}$  y  $b_{12} = 0$ ) la dependencia del parámetro  $\alpha$  desaparece:

$$E_{11} = (E(k)/\pi k)[1 - 4b_{11}(k_1^2 - k_2^2)/k^2](k_2^2/k^2) \quad (52.a)$$

$$E_{22} = (E(k)/\pi k)[1 - 4b_{11}(k_1^2 - k_2^2)/k^2](k_1^2/k^2) \quad (52.b)$$

$$E_{12} = (E(k)/\pi k)[1 - 4b_{11}(k_1^2 - k_2^2)/k^2](-k_1 k_2/k^2) \quad (52.c)$$

La ecuación (52) sugiere que el modelo para el espectro de energía en turbulencia lineal débilmente no isotrópica se puede expresar como el producto del espectro de energía para el caso isotrópico y una función de anisotropía  $\phi(b_{11}, \theta)$ , donde

$$\begin{aligned} \phi &= 1 - 4b_{11}(k_1^2 - k_2^2)/k^2 \\ &= 1 - 4b_{11}(\cos^2\Theta - \sin^2\Theta) = 1 - 4b_{11}\cos 2\Theta \end{aligned} \quad (53)$$

De manera que, finalmente, se obtiene

$$E_{ij}(k) = (E(k)/\pi k)[\delta_{ij} - k_i k_j/k^2]\phi(b_{11}, \Theta) \quad (54)$$

Nótese que, sea cual sea el nivel de anisotropía, en el caso bidimensional únicamente un componente del tensor espectro de energía es independiente, ya que el cumplimiento de la ecuación de continuidad implica

$$E_{22} = E_{11}(k_1^2/k_2^2) \text{ y } E_{12} = E_{11}(-k_1/k_2) \quad (55)$$

El modelo (54) ha sido obtenido bajo la hipótesis de anisotropía débil pero cabe preguntarse, ¿cuál es el nivel máximo de anisotropía que el modelo puede admitir?. Para responder a esta cuestión es preciso invocar una de las condiciones de factibilidad de la turbulencia, en particular, se ha de tener en cuenta que  $E_{\alpha\alpha}$  no puede tomar nunca un valor negativo, lo cual implica que  $\phi \geq 0 \forall \theta$ , o, en terminos bidimensionales, que

$$|b_{11}| \leq 0.25 \quad (56)$$

Niveles superiores de anisotropía (conviene recordar que de su definición bidimensional  $b_{11}$  puede tomar valores comprendidos entre 0 y 0.5) corresponderían a esfuerzos de Reynolds físicamente posibles pero no tratables con este modelo.

Como en el caso isotrópico, el campo de velocidad inicial se calcula una vez escogido el espectro de energía  $E(k)$  deseado:

$$\hat{u}_1 = \sqrt{\frac{E(k)\phi}{\pi k} \frac{k_2}{k}} \exp(i\varphi) \quad (57.a)$$

$$\hat{u}_2 = \sqrt{\frac{E(k)\phi}{\pi k} \frac{-k_1}{k}} \exp(i\varphi) \quad (57.b)$$

### Espectro inicial de energía

El espectro de energía  $E(k)$  inicial tiene una importancia clave en la simulación de la turbulencia bidimensional. Como ya puntualizó Batchelor (1969), la dinámica de la turbulencia bidimensional está caracterizada por la ausencia del mecanismo de estiramiento de los remolinos ("vortex stretching"), propio del caso general tridimensional, de manera que la enstrofia (cuadrado de la vorticidad) únicamente puede ser destruida por la viscosidad. En la relajación de la turbulencia bidimensional la energía y la enstrofia decaen continuamente, transfiriéndose energía desde las escalas finas hacia las más grandes, i.e. disipándose los pequeños remolinos y creciendo los más grandes, de manera que el número de remolinos contenidos en la "caja" de simulación decrece con el tiempo. Por lo tanto, conviene tener la previsión de que el número inicial de remolinos sea lo suficientemente grande como para permitir la simulación de la evolución temporal de la turbulencia durante un lapso de tiempo significativo.

Por otra parte, de acuerdo con Herring et al (1974), para simular correctamente la dinámica de la turbulencia bidimensional es necesario resolver adecuadamente todas las escalas del movimiento que contribuyen significativamente a la disipación de enstrofia, condición ésta que es análoga a la de resolver las escalas disipativas de energía (escalas de Kolmogorov) en turbulencia tridimensional.

Las dos condiciones enunciadas, tomadas en consideración conjuntamente, llevan a un compromiso para el reparto inicial de energía entre los modos de vibración. Si ésta

se concentra en los bajos números de onda, para así resolver adecuadamente las escalas disipativas de enstrofia, entonces la simulación tiene validez durante poco tiempo ya que disminuye muy rápidamente el número de "muestras", de remolinos en la caja de cálculo. Si, en cambio, se concentra la energía en los grandes números de onda, para así permitir un mayor tiempo de simulación, entonces las escalas de disipación de enstrofia no quedan bien resueltas ya que forzosamente se ha de cortar el espectro a números de onda con nivel de enstrofia significativo.

El árbitro en esta cuestión lo constituye la cantidad de números de onda a utilizar en la simulación. En este trabajo se han usado 256 números de onda en cada dirección, límite de la memoria central disponible en los ordenadores utilizados. Aún siendo posible usar un número superior de puntos de cálculo, se ha evitado recurrir al uso de dispositivos de memoria auxiliar de acceso muy rápido (la SSD, Solid-State Storage Device, del NAS), para que el programa de cálculo no fuese excesivamente dependiente de los sistemas de ordenadores de NASA Ames, centro en el que ha sido ejecutado, y tuviese así una mayor portabilidad.

En cuanto a la forma concreta del espectro de energía, diferentes trabajos de simulación directa han utilizado diferentes  $E(k)$ . Sin embargo, todos los casos se caracterizan por dar un máximo de energía a las escalas intermedias, usualmente mediante algún tipo de función exponencial. Como referencia, en este trabajo se ha utilizado uno de los modelos utilizados por Herring et al (1974):

$$E(k, t = 0) = (k/1.5) \exp(-k/1.5) \quad (58)$$

y, finalmente ha sido propuesta una distribución inicial de  $E(k)$  que está de acuerdo con las directrices generales señaladas en la bibliografía. En particular se impone un crecimiento inicial según una ley  $k^3$ , tal como recomienda Batchelor (1969), para, a partir de un máximo deseado, decaer según  $k^{-4}$ . Esta segunda región es la más conflictiva ya que se argumenta que el estadio final de equilibrio lleva a una funcionalidad  $k^{-3}$  (Batchelor, 1969; Lily, 1969; Herring et al 1974; Lesieur, 1983;..), aunque parece que se llegue a él a partir de pendientes superiores. En este trabajo se ha adoptado el exponente -4, recomendado por Saffman (1971), para así permitir, en su caso, una evolución temporal hacia el -3 y a la vez una mejor definición inicial de las escalas disipativas de enstrofia. A partir de un cierto número de onda, inferior al de corte (cut-off) del espectro, se hace decaer el espectro de energía según una ley  $k^{-8}$ .

## ESCALAS DEL FLUJO BIDIMENSIONAL

En el apartado anterior se ha hablado de energía, enstrofia y disipación de la energía y de la enstrofia. Estas magnitudes son las utilizadas para tener una idea de cuáles son las diferentes escalas del flujo. En este apartado se muestra como se procede a su cálculo, tanto en el espacio físico como en el transformado, y como se utilizan en el caso particular de la turbulencia bidimensional para conocer el tamaño de las grandes escalas y de las escalas disipativas.

En la relajación de la turbulencia bidimensional se puede demostrar (Batchelor, 1969; Herring et al 1974) que

$$\frac{d(q^2/2)}{dt} = -2\nu\Omega \equiv \varepsilon \quad (59.a)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\eta \quad (59.b)$$

donde  $q^2/2$  es la energía cinética turbulenta,  $\varepsilon$  la velocidad de disipación de energía,  $\Omega$  la enstrofia y  $\eta$  su velocidad de disipación. Usando magnitudes del espacio físico se cumple que

$$q^2/2 = 1/2 \langle u_i u_i \rangle \quad (60.a)$$

$$\Omega = 1/2 \langle \omega_i \omega_i \rangle \quad (60.b)$$

$$\eta = \nu \langle (\varepsilon_{ijk} \omega_k, j)(\varepsilon_{imn} \omega_{n,m}) \rangle \quad (60.c)$$

donde  $\omega_i$ , la vorticidad, se define como

$$\omega_i = \varepsilon_{ijk} u_{k,j} \quad (60.d)$$

y  $\varepsilon_{ijk}$  representa el tensor permutación. Todas estas cantidades pueden ser evaluadas, también, desde el espacio transformado de Fourier según

$$q^2/2 = \int E(k) dk \quad (61.a)$$

$$\Omega = \int k^2 E(k) dk \quad (61.b)$$

$$\eta = 2\nu \int k^4 E(k) dk \quad (61.c)$$

De acuerdo con Herring et al (1974), la escala de longitud asociada con los grandes remolinos se puede calcular como

$$L = \frac{1}{k_L} = \frac{\sqrt{q^2/2}}{\eta^{1/3}} \quad (62)$$

y puede interpretarse como la escala de los remolinos que contribuyen a la cantidad total de enstrofia. El número de Reynolds de grandes escalas será, pues,

$$R_L = \frac{q^2/2}{\nu \eta^{1/3}} \quad (63)$$

En turbulencia bidimensional se puede, también, definir una micro-escala y el correspondiente número de Reynolds, de manera análoga a como se hace en el caso general tridimensional:

$$\mathcal{L} = \sqrt{\frac{\nu \Omega}{\eta}} \quad (64)$$

$$R_{\mathcal{L}} = \frac{(\mathcal{L}\Omega^{1/2})\mathcal{L}}{\nu} = \frac{\Omega^{3/2}}{\nu} \quad (65)$$

Finalmente, el número de onda asociado a las escalas disipativas de enstrofia, análogo a la escala de Kolmogorov en tres dimensiones (disipativas de energía) se define como

$$k_{\eta} = (\eta/\nu^3)^{1/6} \quad (66)$$

Este número de onda tiene, ciertamente, importancia porque representa un límite inferior para el corte del espectro. Se ha de procurar que este corte, necesario para evitar los errores de solapamiento, se produzca a  $k > k_{\eta}$ , para que las escalas disipativas de enstrofia estén bien calculadas. Según Herring et al (1974) los números de onda con  $k \gg k_{\eta}$  no tienen efectos importantes sobre la región  $k \leq k_{\eta}$ , de manera que la turbulencia bidimensional puede ser estudiada como un sistema dinámico con excitación significativa únicamente en la región  $0 < k \leq k_{\eta}$ . Esta simplificación tiene su analogía en tres dimensiones, donde el estudio se ciñe a la región de números de onda inferiores al número de onda de la escala disipativa de Kolmogorov.

## RESULTADOS Y DISCUSION

Los resultados obtenidos con el programa de cálculo desarrollado se pueden clasificar en tres grupos: los obtenidos en la búsqueda de condiciones iniciales óptimas, en los cuales únicamente se han estudiado un número limitado de parámetros durante la relajación de la turbulencia isotrópica; los obtenidos, una vez escogidas las condiciones iniciales, en el estudio del efecto del nivel inicial de anisotropía y, finalmente, los correspondientes al estudio del efecto de la distorsión sobre un campo inicialmente isotrópico.

### Elección de las condiciones iniciales

Como ya se ha expuesto, la elección de las condiciones iniciales resulta de relevante importancia en el estudio de la turbulencia bidimensional, ya que se ha de procurar una descripción adecuada de las escalas disipativas de enstrofia y, simultáneamente, se ha de conseguir que el tiempo de cálculo sea suficiente.

Dado que las escalas del flujo vienen afectadas directamente por las condiciones iniciales, las diferentes evoluciones temporales obtenidas se han comparado mediante el uso de una escala de tiempo característica de la turbulencia bidimensional:

$$t^* = t\eta^{1/3} \quad (67)$$

Los parámetros más significativos usados en la elección de las condiciones iniciales han sido:

- 1) La evolución temporal del segundo invariante del tensor anisotrópico  $b_{ij}$  durante la relajación isotrópica, puesto que idealmente este parámetro tendría que mantenerse

constantemente igual a  $-1/12$ . Una separación ostensible de este valor durante la simulación sería debida a la aparición de anisotropía asociada a un tamaño de remolino del mismo orden que el de la caja de simulación.

- 2) El espectro de disipación de la enstrofia. El punto de corte del espectro tendría que corresponder a un valor de  $\eta$  significativamente menor que el de los remolinos con elevada disipación de enstrofia. Un valor significativo de  $\eta$  en el corte,  $k_c$ , implicaría una deficiente resolución del espectro de disipación de la enstrofia y, por lo tanto, de las escalas del flujo que disipan esta enstrofia.
- 3) La evolución temporal del total de energía, enstrofia y disipación de la enstrofia. Dado que en este problema el tiempo de simulación es una variable de elevado valor económico, se ha de procurar que desde el principio la evolución desafortunada de las condiciones iniciales puede comportar la pérdida el tiempo de cálculo necesario por el establecimiento de un estado de relajación "normal".

Con estos criterios, se han estudiado las siguientes condiciones iniciales:

$$\text{Caso 1: } E(k) = (k/1.5) \exp(-k/10)$$

$$\text{Caso 2: } E(k) = (k/10) \exp(-k/10)$$

$$\text{Caso 3: } E(k) = (k/1.5) \exp(-k/1.5)$$

$$\text{Caso 4: } E(k) = E_1 k^3 \quad k \leq k_I$$

$$E_1 k_I^7 k^{-4} \quad k_I \leq k \leq k_F$$

$$E_1 k_I^7 k_F^4 k^{-8} \quad k_F \leq k$$

$$\text{con } k_I = 10, k_F = 80 \text{ y } E_1 = (12/7)(1/k_I^4)$$

$$\text{Caso 5: } E(k) = E_1 k^3 \quad k \leq k_I$$

$$E_1 k_I^7 k^{-4} \quad k_I \leq k \leq k_F$$

$$E_1 k_I^7 k_F^4 k^{-8} \quad k_F \leq k$$

$$\text{con } k_I = 8, k_F = 60 \text{ y } E_1 = (12/7)(1/k_I^4)$$

El caso 3, o "caso Herring", ha sido tomado como referencia para validar los resultados obtenidos, ya que los obtenidos con este espectro se corresponden perfectamente con los de Herring et al (1974). En todos los casos, excepto en el de Herring y el caso 1, se ha utilizado inicialmente un coeficiente de viscosidad de 0.001. Como se verá más adelante, el valor final adoptado ha sido el de 0.0025, valor también utilizado en los casos 1 y 3.

En la Figura 1 se presenta la evolución temporal del segundo invariante obtenida en los cinco casos. Teniendo en cuenta que  $\Pi(b_{ij})$  en ningún caso puede alcanzar valores superiores a  $-1/12$  y que, idealmente, se tendría que mantener en este valor durante todo el proceso de relajación isotrópica, vemos que en todos los casos propuestos en este trabajo la turbulencia se puede considerar isotrópica durante todo el tiempo de simulación. En cuanto al caso 3, o "caso Herring", se observa como desde el inicio el flujo se separa ostensiblemente del estado de isotropía, lo que únicamente puede ser debido a la concentración de energía en las grandes escalas, es decir, al tamaño excesivamente grande, dada la caja de cálculo, de los remolinos presentes.

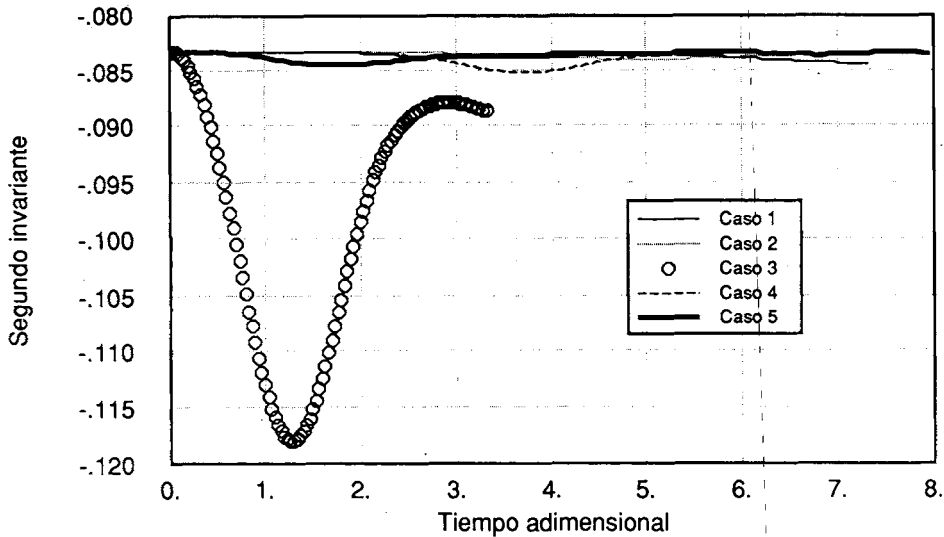


Figura 1. Evolución temporal del segundo invariante del tensor de anisotropía. Casos 1-5.

La Figura 1 pone de manifiesto la utilidad de  $\Pi (b_{ij})$  como medida del nivel de anisotropía. El Caso de Herring et al no es único, son muchos los autores que mantienen haber realizado simulaciones directas del proceso de relajación isotrópica y que no han comprobado, de hecho, el mantenimiento de la isotropía a lo largo del proceso de simulación.

En las Figuras 2a y 2b se han representado los espectros de disipación de la enstrofia en el instante inicial y a tiempos finales comparables. En la 2a se han agrupado los tres primeros casos mientras que el 4 y el 5 se muestran en la 2b. También aquí merece mención especial el caso Herring; al concentrar la energía inicialmente en los números de onda pequeños, la disipación de enstrofia ( $k^4 E(k)$ ) correspondiente a números de onda grande resulta exageradamente pequeña, de manera que a lo largo de la simulación se "genera" enstrofia a nivel de las pequeñas escalas. Las otras curvas de esta figura corresponden a los casos propuestos, análogos al de Herring. Como se observa, el simple desplazamiento del espectro hacia grandes números de onda no representa una buena solución ya que se llega al punto de corte del espectro con niveles de disipación de la enstrofia demasiado elevados (incluso crecientes en el caso 1).

Frente a la necesidad de permitir la disminución de  $\eta$  antes de llegar a  $k_c$ , se ha propuesto el modelo de espectro correspondiente a los casos 4 y 5, con el cual se dispone de una mayor gobernabilidad sobre la distribución inicial del nivel de disipación de enstrofia entre los diferentes números de onda. La Figura 2b muestra los espectros correspondientes a estos casos, donde resaltan las respectivas zonas centrales de los espectros iniciales, perfectamente llanas, de acuerdo con un espectro inicial de energía con una pendiente -4. Una vez construido el modelo correspondiente al caso 4, el caso 5 fue propuesto con el propósito de obtener unas condiciones iniciales con una disminución más acusada del nivel de disipación de enstrofia en los grandes números de onda. Como se puede observar en la figura, inicialmente la diferencia entre el máximo

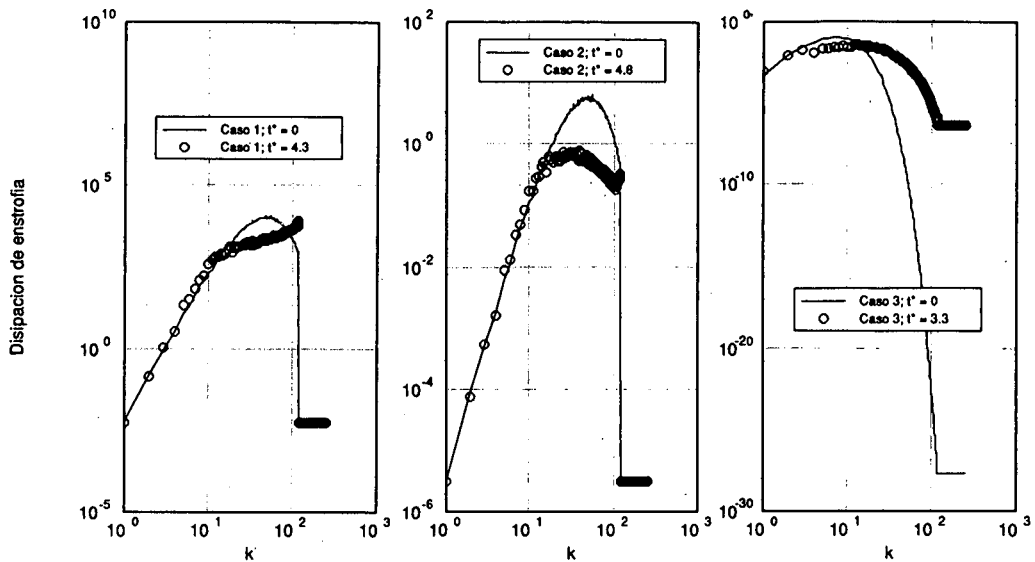


Figura 2a. Espectros de disipación de la enstrofia. Casos 1, 2 y 3.

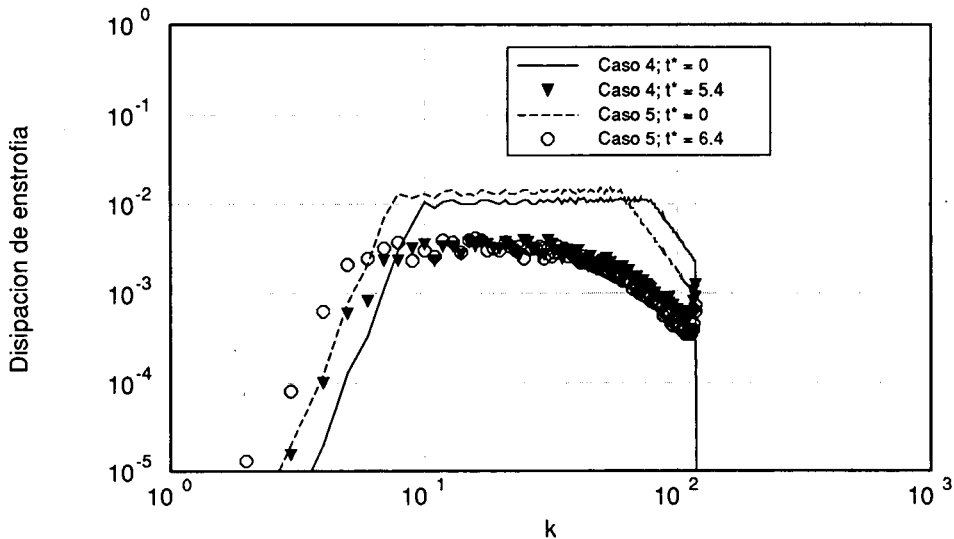


Figura 2b. Espectros de disipación de la enstrofia. Casos 4 y 5.

de  $\eta$  y su valor a  $k_c$  es inferior a un orden de magnitud en el caso 4 mientras que es prácticamente el doble en el caso 5.

La evolución temporal del total de disipación de enstrofia, representada en la Figura 3 para los cinco casos citados, pone en evidencia un punto comentado en el apartado anterior. Una mala descripción inicial del nivel de disipación de la enstrofia provoca el crecimiento inicial del total de disipación de enstrofia por “generarse” ésta a números de onda elevados, hasta que se alcanza un estado de equilibrio a partir del cual  $\eta$  decae

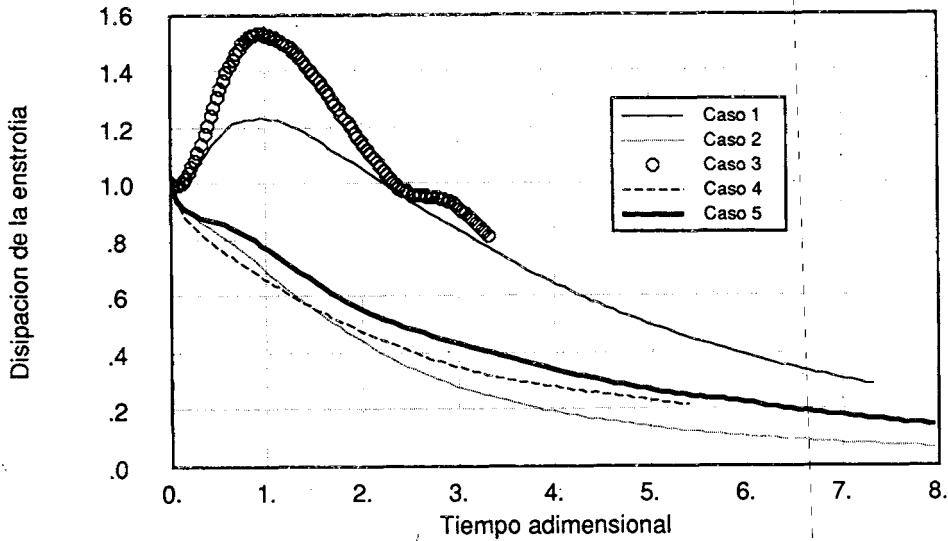


Figura 3. Evolución temporal del total de disipación de la enstrofia. Casos 1-5.

en una forma auto-similar. Esto ocurre en el caso 3, donde  $\eta$  a grandes números de onda era prácticamente inexistente, y también en el caso 1, donde el espectro de  $\eta$  era cortado cuando aún tendía a crecer. Sugiere, pues, esta figura que conviene "acertar" las condiciones iniciales para poder partir, ya de entrada, de un flujo en el que tanto la energía como la enstrofia y la disipación de enstrofia decaigan de una manera auto-similar.

Para corroborar esta hipótesis se ha llevado a cabo un experimento adicional, caso 6, consistente en partir de las condiciones iniciales del caso 5 modificadas de manera que para  $k > k_F$  ( $k_F = 60$ )  $E(k) = 0$ , es decir, para  $k > 60$  tanto la energía como la enstrofia y la disipación de enstrofia se consideran nulas. Esta modificación, no demasiado significativa en términos de energía, da como resultado una pérdida considerable del nivel inicial de disipación de la enstrofia ( $k^4 E(k)$ ).

En la Figura 4 se muestran los espectros iniciales y finales (a tiempos comparables) de disipación de la enstrofia para los casos 5 y 6. Resulta evidente que a lo largo de la simulación se reducen las diferencias entre ambos casos ya que se produce una "generación" neta de disipación de enstrofia en las escalas donde inicialmente no había sido adjudicada. Este fenómeno queda perfectamente reflejado en la Figura 5, donde se comparan la evolución temporal del total de enstrofia en ambos casos.

Como se observa, en el caso 6 se produce un crecimiento inicial del total de enstrofia para más adelante decaer de manera auto-similar.

Una segunda visita a las Figuras 3 y 5 permite constatar que, de hecho, la evolución temporal observada en el caso 5 también muestra ciertas irregularidades iniciales, sin llegar al extremo de aumentar con el tiempo. El nivel de disipación de la enstrofia parece que también en este caso 5 se reajusta hasta que aproximadamente  $t^* = 1$  empieza a decaer de manera normal. Atribuyendo esta "anormalidad" a una distribución inicial de energía no suficientemente realista, se ha estudiado un nuevo caso, caso 5b, en el cual la única diferencia con el caso 5, a partir de ahora 5a, radica en el valor de la

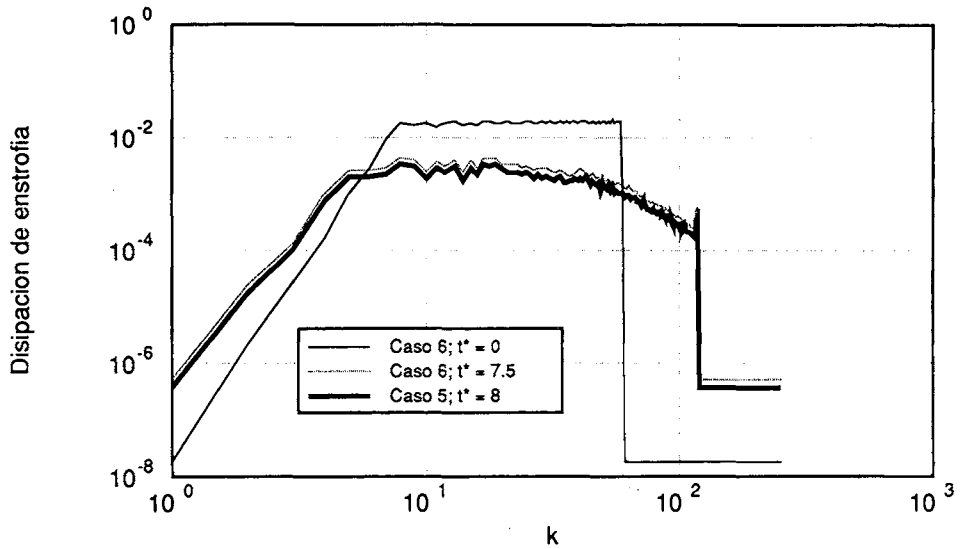


Figura 4. Espectros de disipación de la enstrofia. Casos 5 y 6.

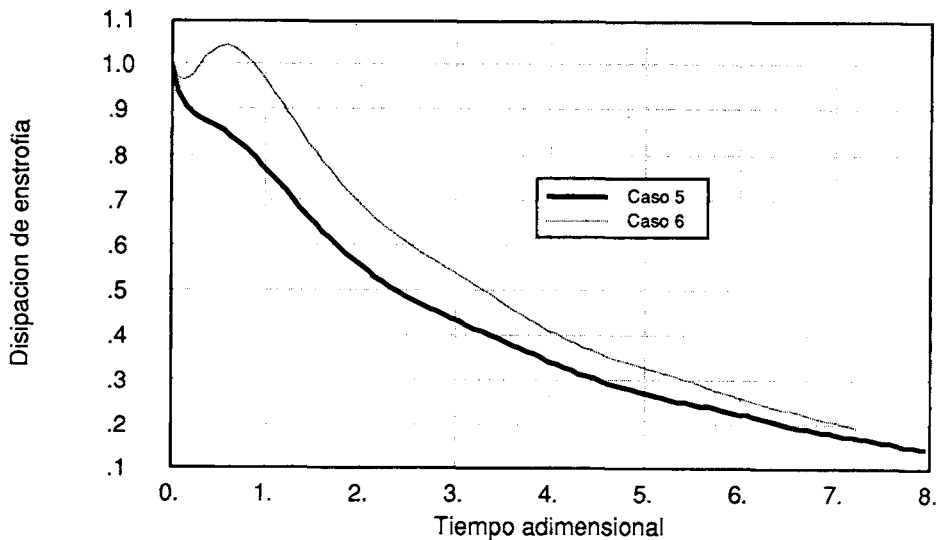


Figura 5. Evolución temporal del total de disipación de enstrofia. Casos 5 y 6.

viscosidad: 0.001 en 5a y 0.0025 en 5b. Una mayor viscosidad debería traducirse en una disminución más rápida de los niveles de energía, enstrofia y disipación de la enstrofia, conjuntamente con un estrechamiento del margen de números de onda significativos, lo cual ha de conllevar una mejora en la calidad de la simulación, claro que a expensas de resolver un flujo a número de Reynolds menor.

La Figura 6 muestra una comparación de la evolución de los espectros de energía y de disipación de la enstrofia en los casos 5a y 5b. La principal conclusión que se puede extraer de la lectura de estos gráficos es que el aumento de la viscosidad mejora

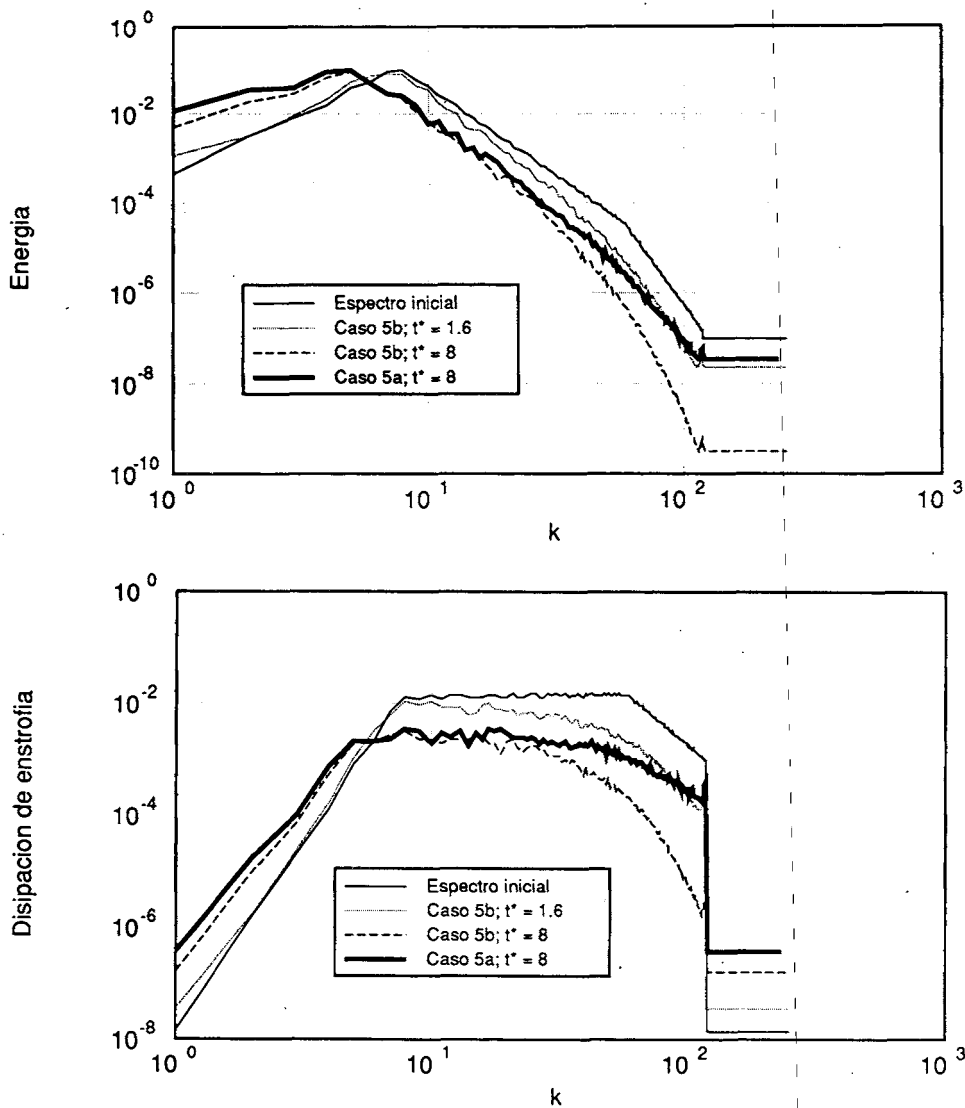


Figura 6. Comparación de espectros. Casos 5a y 5b. Superior: Espectros de energía. Inferior: Espectros de disipación de enstrofia.

la calidad de la simulación ya que aumenta la diferencia entre el valor de  $\eta$  en las escalas disipativas de enstrofia y su valor en el punto de corte del espectro.

En la Figura 7 se presenta la evolución temporal del segundo invariante del tensor de anisotropía en los casos 1, 2, 4, 5a y 5b, sin presentar el caso 3, claramente no isotrópico. Como se observa, todos los casos presentan eventuales separaciones del punto de isotropía ( $II = -0.0833$ ), todas ellas de órdenes comparables; en este sentido no se puede hablar de ninguna diferencia entre los casos 5a y 5b.

Finalmente, en la Figura 8 se muestra la evolución temporal del total de disipación de enstrofia para todos los casos, excepción hecha del caso 6. Aquí sí que se observa una diferencia notable entre 5a y 5b ya que mientras el caso 5a presenta ciertas irregularidades en los estadios iniciales, 5b decae, desde el principio, de manera auto-

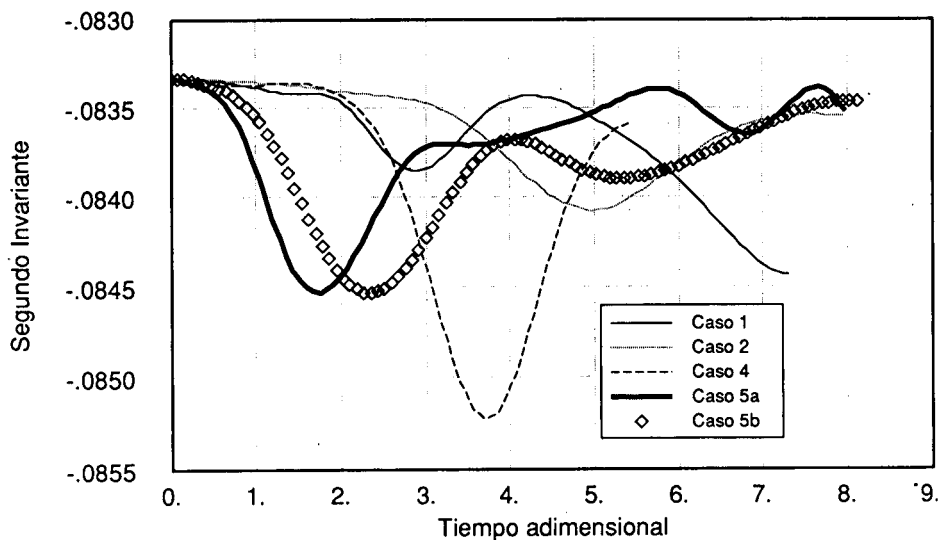


Figura 7. Evolución temporal del segundo invariante del tensor de anisotropía. Casos 1, 2, 4, 5a y 5b.

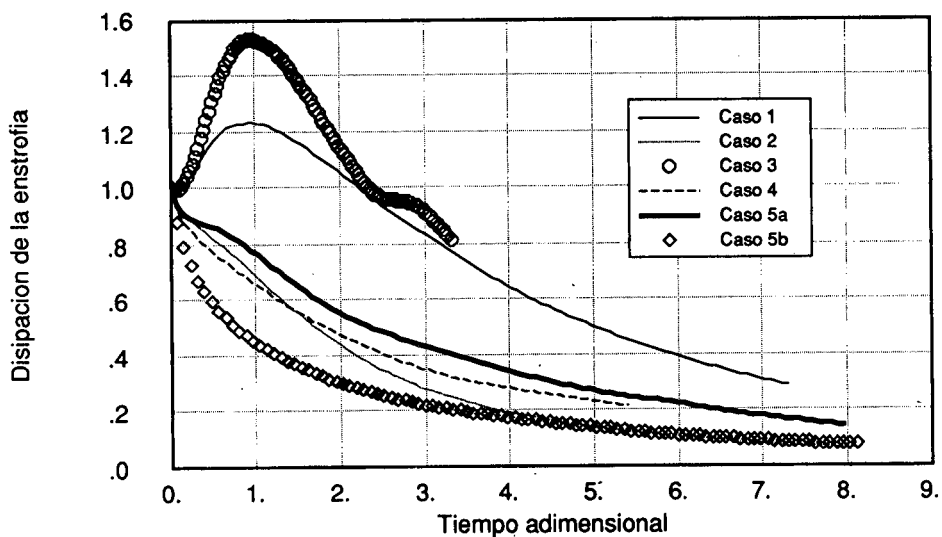


Figura 8. Evolución temporal del total de disipación de entropía. Casos 1-5a,b.

similar.

A modo de resumen, la Tabla I recoge las magnitudes significativas, escalas y números de Reynolds de los diferentes casos estudiados.

La conclusión final de este apartado es la elección del caso 5b como sistema de trabajo dado que presenta los mejores resultados frente a las exigencias que se se habían planteado:

- Permite un tiempo de simulación máximo ya que se minimiza el tiempo de adaptación inicial y se mantiene en el punto de isotropía durante la relajación.

	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5a	Caso 5b	Caso 6
$\nu$	0.0025	0.001	0.0025	0.001	0.001	0.0025	0.001
$q^2$	133.10	1.25	2.82	2.00	2.00	2.00	2.00
$\Omega$	39913.0	374.18	20.25	182.50	11.36	1136	113.51
$\varepsilon$	199.60	0.748	0.101	0.365	0.233	0.582	0.22
$\eta$	392201.0	1470.75	4.556	309.12	123.85	309.63	92.96
$\eta^{-1/3}$	0.014	0.088	0.603	0.148	0.201	0.148	0.221
$k_L$	9	14	1.4	8	4.98	76	4.53
$k_n$	171	107	25.8	82.2	70.6	52.0	67.3
$\mathcal{L}$	0.016	0.016	0.105	0.024	0.031	0.031	0.035
$R_L$	363.7	2081.1	31417	10985	17237	2758	17649
$R_{\mathcal{L}}$	20.33	4.92	20.00	7.98	10.13	4.05	13.01

Tabla I. Magnitudes significativas, escalas y números de Reynolds de los casos estudiados.

- Presenta un margen estrecho de números de onda significativos en términos de disipación de la enstrofia, lo cual garantiza, con  $256 \times 256$  puntos de cálculo, una adecuada descripción de los espectros de energía, enstrofia y disipación de la enstrofia.

### Turbulencia inicialmente no isotrópica

Utilizando el espectro de energía y la viscosidad correspondiente al caso 5b, se ha estudiado la evolución de 4 casos más, además del caso de relajación isotrópica descrito, correspondientes a condiciones iniciales ligeramente no isotrópicas, descritas por el modelo (52). El nivel anisotropía de los cinco casos se diferencia, de acuerdo con (53), mediante un único parámetro,  $b_{11}(0)$ . Conviene recordar en este punto que los valores de  $b_{11}$  en la ecuación (53), y por lo tanto en el modelo (52) corresponden a una descripción bidimensional, (49f), del tensor  $b_{ij}$  y que basta con sumar 1/6 a un valor dado de  $b_{ij}$  para obtener el valor correspondiente a la descripción tridimensional (17). Así, los cinco casos considerados en este apartado son:

$$\text{Caso 5b0 } b_{11}(0) = 0.0$$

$$\text{Caso 5b1 } b_{11}(0) = 0.05$$

$$\text{Caso 5b3 } b_{11}(0) = 0.15$$

$$\text{Caso 5b4 } b_{11}(0) = 0.20$$

$$\text{Caso 5b5 } b_{11}(0) = 0.25$$

La Figura 9 muestra la evolución temporal del segundo invariante de  $b_{ij}$  para los cinco casos. Esta figura da, directamente, respuesta a uno de los interrogantes que impulsaron el trabajo: en todos los casos con anisotropía inicial el flujo evoluciona hacia a la isotropía.

La Figura 10 presenta los espectros de disipación de la enstrofia obtenidos a un mismo tiempo ( $t^* = 8$ ) para dos de los casos estudiados (únicamente dos por dar

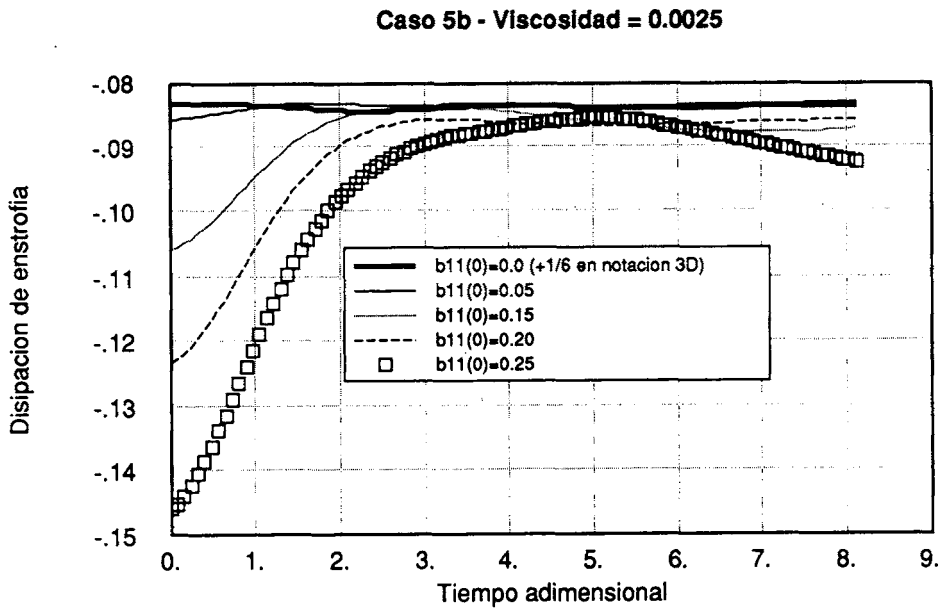


Figura 9. Evolución temporal del segundo invariante del tensor de anisotropía. Efecto del nivel inicial de anisotropía.

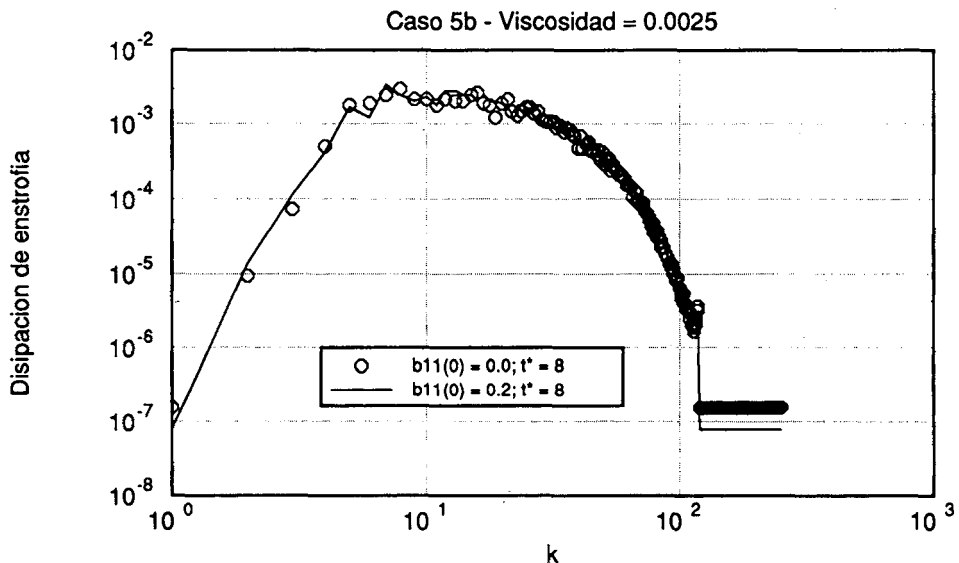


Figura 10. Espectros de disipación de la enstrofia. Efecto del nivel inicial de anisotropía.

más claridad al gráfico). Esta figura da una información inicialmente no buscada y, por lo tanto, no esperada: los espectros de energía, enstrofia y disipación de la enstrofia evolucionan de la misma manera, independientemente del nivel de anisotropía. La generalización de los resultados de esta simulación significaría que cualquier modelo para el tensor espectro de energía se tendría que expresar, en el límite de

la bidimensionalidad, de acuerdo con la ecuación (52).

Finalmente, la Figura 11 muestra, consecuentemente con el párrafo anterior, como el total de disipación de la enstrofia (igual que ocurre con la energía y la enstrofia) decae en la misma medida y con la misma velocidad en todos los casos estudiados, es decir, resulta independiente del nivel de anisotropía.

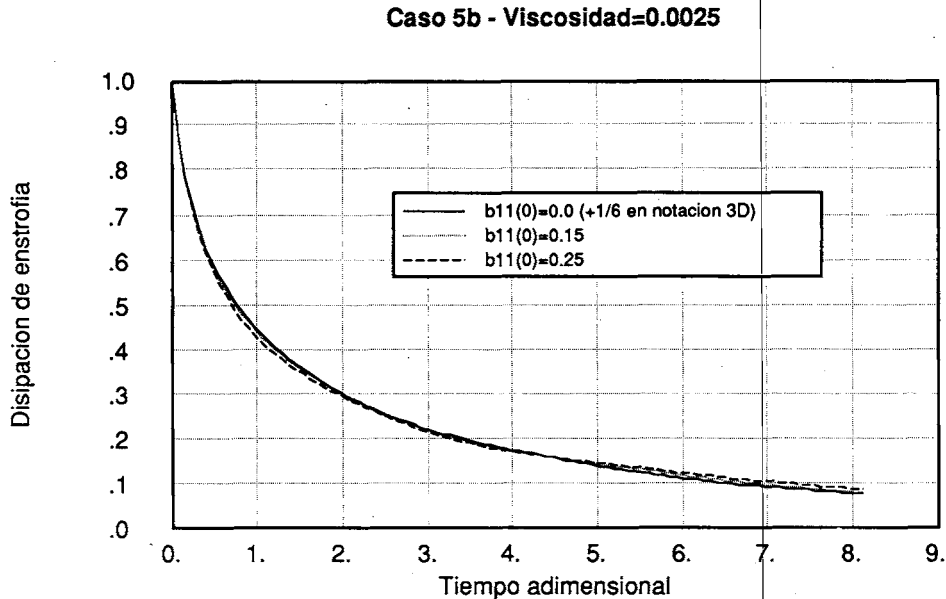


Figura 11. Evolución temporal del total de disipación de enstrofia. Efecto del nivel inicial de anisotropía.

### Distorsión de la turbulencia isotrópica

La segunda cuestión a la que se quería dar respuesta con este trabajo es si un esfuerzo normal provocaría en un flujo turbulento bidimensional isotrópico una separación de la isotropía. Con esta finalidad, se ha estudiado el efecto de un esfuerzo normal plano,  $S_{11} = -S_{22} = s^2 = 10$ , sobre el flujo inicial descrito para el caso 5b.

Como que el efecto prolongado de un esfuerzo normal plano provoca la distorsión proporcional de la red de cálculo empleada, debido al uso de las coordenadas transformadas de Rogallo (Rogallo, 1981), es necesario prevenir que el esfuerzo total administrado no sea excesivo. Definiendo el esfuerzo total, de  $t = 0$  a  $t = t$ , como

$$S_T = e^{s^2 t} \quad (68)$$

se obtiene, de (28), que en el mismo lapso de tiempo la red se habrá deformado de acuerdo con

$$B_{11}(t)/B_{11}(0) = S_T \quad (69)$$

Caso	$S_T$	Caja Inicial	Caja Final
7a	1.82	1:1	0.55:1.82
7b	3.32	1:1	0.30:3.32
7c	3.32	1.82:0.55	0.55:1.82

Tabla II. Casos estudiados: Esfuerzo total administrado y deformación producida.

En la Tabla II se resumen los 3 casos estudiados, tomando siempre como base el caso 5b.

En los tres casos el esfuerzo se ha empezado a aplicar en el mismo momento (200 intervalos de tiempo desde el inicio del cálculo) y con la misma intensidad ( $s^2 = 10$ ). Las únicas diferencias entre los tres radican en la duración: para el caso 7a el esfuerzo se aplica durante 100 pasos de tiempo y para los casos 7b y 7c durante 200 pasos; y en el aspecto de la caja inicial: para los casos 7a y 7b se ha utilizado la misma caja computacional que en el caso 5b, es decir, una caja cuadrada (1:1), mientras que en el caso 7c se ha utilizado una caja rectangular (1.82:0.55), es decir, inicialmente ya distorsionada en el sentido contrario a la deformación que habrá de producir el esfuerzo. Como referencia, se ha repetido el caso 5b con la misma caja inicial que 7c.

Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 12. Estos resultados permiten responder la cuestión planteada ya que, como se observa, únicamente el caso 7b presenta separación de la isotropía, lo cual sólo puede ser atribuible a la distorsión exagerada

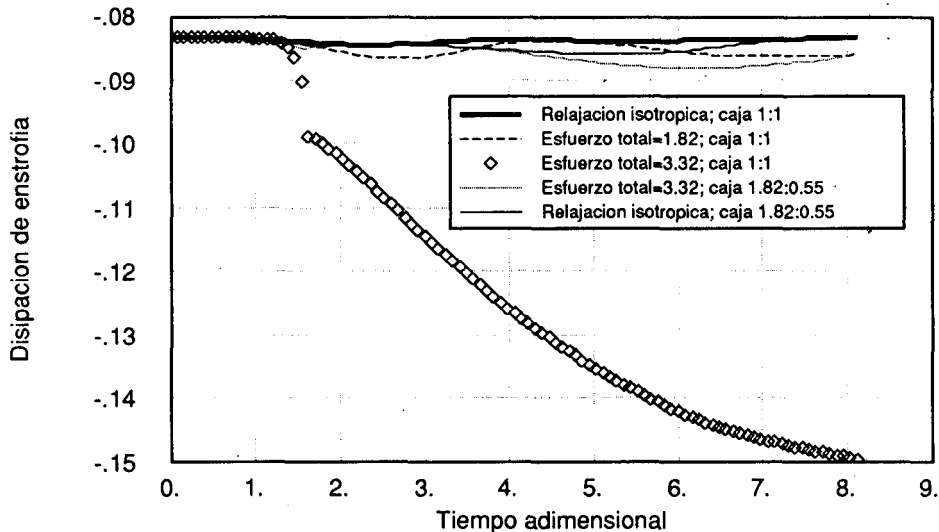


Figura 12. Evolución temporal del segundo invariante del tensor de anisotropía. Efecto de un esfuerzo normal.

que sufre esta caja de cálculo, de manera que en la dirección de aplicación del esfuerzo se hace demasiado pequeña (hasta llegar a una relación de 1:10 entre las dos direcciones del plano) dado el tamaño de los remolinos que contiene. Por contra, en el caso 7c,

con el mismo esfuerzo total administrado, el flujo no se separa de la isotropía porque la caja de cálculo en ningún momento se hace demasiado distorsionada (la relación máxima entre direcciones es de 1:3). Lo mismo sucede en el caso 7a, donde, con una caja inicialmente cuadrada, la distorsión final no es excesiva y, por lo tanto, el flujo permanece isotrópico.

## CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos permiten responder las cuestiones inicialmente formuladas, lo cual constituía el objetivo de este trabajo, y, al mismo tiempo, permiten plantear una nueva hipótesis.

Concretamente, de los resultados obtenidos y analizados en el apartado anterior se puede concluir que

- 1) Un flujo turbulento bidimensional inicialmente no isotrópico evoluciona hacia la isotropía si se le deja relajar libremente.
- 2) Un flujo turbulento bidimensional isotrópico no se ve afectado por la acción de un esfuerzo normal plano.

Finalmente, los resultados relativos a la independencia de la evolución de los espectros de energía, enstrofía y disipación de la enstrofía respecto del nivel inicial de anisotropía permiten, de acuerdo con la demostración incluida en el anexo, formular la siguiente hipótesis:

- 3) Cualquier modelo para el tensor espectro de energía ha de poder ser expresado, en el límite de la bidimensionalidad, como el producto del espectro isotrópico y de una función de anisotropía, la integración de la cual, para cualquier número de onda fijado, da un valor constante.

## AGRADECIMIENTOS

El autor desea mostrar su agradecimiento al Dr. Moon Joo Lee y al Profesor Williams C. Reynolds por los comentarios y ayuda recibidos durante el desarrollo del presente trabajo, así como al Mechanical Engineering Department de la Universidad de Stanford (EEUU) y al Center for Turbulence Research (NASA-Ames Research Center y Universidad de Stanford) por acogerlo como Profesor Visitante y facilitarle el acceso a los recursos informáticos propios y de NASA-Ames. Por otra parte, este trabajo no hubiera sido posible sin el soporte económico de la CIRIT (Generalitat de Catalunya) y del Proyecto CICYT PB88-0218.

## ANEXO.- ESPECTRO DE ENERGIA EN TURBULENCIA BIDIMENSIONAL ANISOTROPICA

En turbulencia bidimensional, la ecuación de continuidad

$$k_i E_{ij} = 0 \quad (A.1)$$

se expresa como

$$k_1 E_{11} + k_2 E_{12} = 0 \quad (\text{A.2a})$$

ó

$$k_1 E_{12} + k_2 E_{22} = 0 \quad (\text{A.2b})$$

lo cual implica que

$$E_{12} = (-k_1/k_2) E_{11} = 0 \quad (\text{A.3a})$$

$$E_{22} = (k_1/k_2)^2 E_{11} = 0 \quad (\text{A.3b})$$

De manera que el espectro de energía  $E(\mathbf{k})$  puede escribirse como

$$\begin{aligned} E(\mathbf{k}) = E_{ii}/2 &= 1/2[E_{11}(\mathbf{k}) + E_{22}(\mathbf{k})] = \\ &= 1/2(k/k_2)^2 E_{11}(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

mientras que el espectro unidimensional de energía,  $E(k)$ , es

$$E(k) = \int_{k=|\mathbf{k}|} E(\mathbf{k}) dS(\mathbf{k}) = \int^{2\pi} E(\mathbf{k}) k d\theta \quad (\text{A.5})$$

o bien

$$1 = \int^{2\pi} [E(\mathbf{k})k/E(k)] d\theta \quad (\text{A.6})$$

Si  $E(k)$  es invariante respecto del nivel de anisotropía y es función exclusivamente de  $k$ , reexpresando (A.6)

$$1 = [k/E(k)] \int^{2\pi} E(\mathbf{k}) d\theta \quad (\text{A.6})$$

se observa que  $E(\mathbf{k})$  se ha de poder expresar como  $[E(k)/k]\phi$  donde  $\phi$  es una función del nivel de anisotropía  $\Pi$  y de  $k$ , de manera que se cumple

$$E(\mathbf{k}) = [E(k)/k]\phi \quad (\text{A.8})$$

$$1 = \int^{2\pi} \phi(\Pi, k) d\theta \quad (\text{A.9})$$

La combinación de (A.8), (A.4) y (A.3) lleva a poder afirmar que, en turbulencia bidimensional, si  $E(k)$  no depende del nivel de anisotropía, el espectro tridimensional de energía  $E_{ij}(\mathbf{k})$  se puede expresar como

$$E_{11} = 2(E(k)/k)\phi(k_2^2/k^2) \quad (A.10a)$$

$$E_{22} = 2(E(k)/k)\phi(k_1^2/k^2) \quad (A.10b)$$

$$E_{12} = 2(E(k)/k)\phi(-k_1k_2/k^2) \quad (A.10c)$$

o, en notación tensorial,

$$E_{ij}(\mathbf{k}) = (2E(k)/k[\delta_{ij} - k_i k_j/k^2])\phi(\mathbf{II}, \mathbf{k}) \quad (A.11)$$

Si se compara (A.11) con el espectro correspondiente al caso isotrópico ( $E_{ij}^o$ ),

$$E_{ij}^o(\mathbf{k}) = (E(k)/\pi k)[\delta_{ij} - k_i k_j/k^2] \quad (A.12)$$

se puede escribir, finalmente, que

$$E_{ij}(\mathbf{k}) = E_{ij}^o(\mathbf{k})\varphi(\mathbf{II}, \mathbf{k}) \quad (A.13)$$

donde  $\varphi = 2\pi\phi$ , es decir

$$2\pi = \int^{2\pi} \varphi(\mathbf{II}, \mathbf{k})d\theta, \quad \forall \mathbf{II}, \mathbf{k} \quad (A.14)$$

De la función  $\varphi$  se sabe, únicamente, que ha de satisfacer (A.14) y que para  $\mathbf{II} = -1/12$ , valor de  $\mathbf{II}$  en el punto de isotropía bidimensional, se ha de cumplir que

$$\varphi(-1/12, \mathbf{k}) = 1, \quad \forall \mathbf{k} \quad (A.15)$$

Por integración de (A.13) se pueden evaluar los esfuerzos de Reynolds,  $R_{ij}$ :

$$\begin{aligned} \int E_{11}d\mathbf{k} &= \int_{\mathbf{k}} \int^{2\pi} (E(k)/\pi k)\varphi(k_2^2/k^2)kdkd\theta = \\ &= (1/\pi) \int_{\mathbf{k}} E(k) \left[ \int^{2\pi} \varphi(k_2^2/k^2)d\theta \right] dk = (1/\pi) \int_{\mathbf{k}} E(k) \left[ \int^{2\pi} \varphi \sin^2\theta d\theta \right] dk = \\ &= (1/\pi) \int_{\mathbf{k}} E(k) \left[ \pi - 1/2 \int^{2\pi} \varphi \cos 2\theta d\theta \right] dk, \end{aligned} \quad (A.16)$$

ya que  $2\pi = \int^{2\pi} \varphi d\theta$ .

Finalmente, (A.16) implica que

$$R_{11} = (q^2/2) - 1/2\pi \int_{\mathbf{k}} (E(k)/k)\varphi \cos 2\theta dk \quad (A.17a)$$

y, también,

$$R_{22} = (q^2/2) + 1/2\pi \int_{\mathbf{k}} (E(k)/k)\varphi \cos 2\theta dk \quad (A.17b)$$

$$R_{12} = -1/2\pi \int_{\mathbf{k}} (E(k)/k) \varphi \sin 2\theta dk \quad (\text{A.17c})$$

Resulta interesante, también ver como se expresa el tensor anisotrópico (en notación bidimensional):

$$b_{11} = -1/2q^2\pi \int_{\mathbf{k}} (E(k)/k) \varphi \cos 2\theta dk \quad (\text{A.18a})$$

$$b_{22} = +1/2q^2\pi \int_{\mathbf{k}} (E(k)/k) \varphi \cos 2\theta dk \quad (\text{A.18b})$$

$$b_{12} = -1/2q^2\pi \int_{\mathbf{k}} (E(k)/k) \varphi \sin 2\theta dk \quad (\text{A.18c})$$

Finalmente, se puede comprobar que el modelo lineal propuesto para turbulencia débilmente anisotrópica cumple todas las relaciones expuestas:

$$\varphi = 1 - 4b_{11} \cos 2\theta \quad (\text{A.19a})$$

$$\varphi^{\circ} = 1 \quad (\text{A.19b})$$

$$\int^{2\pi} \varphi d\theta = 2\pi \quad (\text{A.19c})$$

$$b_{11} = -1/4\pi \int^{2\pi} \varphi \cos 2\theta d\theta \quad (\text{A.19d})$$

El modelo (A.19) no puede constituir un modelo general ya que las condiciones de factibilidad de la turbulencia limitan los valores posibles de  $b_{11}$  al margen (0,0.25) mientras que el margen de variación posible de  $b_{11}$  es de 0 a 0.5. Pero, ¿puede esperarse encontrar una función  $\varphi$  general que satisfaga (A.19b), (A.19c) y (A.18)? La cuestión está abierta.

## REFERENCIAS

1. C. Basdevat y R. Sadourny, "Modélisation des échelles virtuelles dans la simulation numérique des écoulements turbulents bidimensionnels", *J. Méc. Théor. Appl.*, pp. 243-269, (1983).
2. C. Basdevant, Y. Couder y R. Sadourny, "Vortices and vortex-couples in two-dimensional turbulence or Long-lived couples are Batchelor's couples. Proc. Macroscopic Modelling of Turbulent Flows", *Lecture Notes in Physics-Springer*, Vol. 230, pp. 327-334, (1984).
3. G.K. Batchelor e I. Proudman, "The effect of rapid distortion of a fluid in turbulent motion", *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, Vol. 7, pp. 83-103, (1954).
4. G.K. Batchelor, "*The Theory of homogeneous turbulence*", C.U.P., Cambridge, U.K. (1953).
5. G.K. Batchelor, "Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence", *Phys. Fluids Suppl. II*, pp. 233-239, (1969).

6. M.E. Brachet y P.L. Sulem, "Direct numerical simulation of two-dimensional turbulence", *4th Beer-Sheva Seminar on MHD Flows and Turbulence*, Israel, (1984).
7. M.E. Brachet y P.L. Sulem, "Free decay of high Reynolds number two-dimensional turbulence", *9th. Int. Conf. Num. meth. Fluid Dynamics, Lecture Notes in Physics-Springer*, Vol. 218, pp. 103-108, France, (1984).
8. M.E. Brachet, M. Meneguzzi y P.L. Sulem, "Numerical simulation of decaying two-dimensional turbulence: comparison between general periodic and Taylor-Green like flows", *Proc. Macroscopic Modelling of Turbulent Flows, Lecture Notes in Physics-Springer*, Vol. 230, pp. 347-355, France, (1984).
9. R.A. Clark, J.H. Ferziger, y W.C. Reynolds, "Evaluation of subgrid-scale models using a fully simulated turbulent flow," *Report TF-9*, Dept. Mech. Engng., Stanford University, (1977).
10. R.A. Clark, J.H. Ferziger y W.C. Reynolds, "Evaluation of subgrid-scale models using an accurately simulated turbulent flow", *J. Fluid Mech.*, Vol. 91, pp. 1-17, (1979).
11. B. Fornberg, "A numerical study of 2-D turbulence", *J. Comp. Phys.*, Vol. 25, pp. 1-31 (1977).
12. J.R. Herring y J.C. McWilliams, "Comparison of direct numerical simulation of two-dimensional turbulence with two-point closure: the effects of intermittency", *J. Fluid Mech.*, Vol. 153, pp. 229-242, (1985).
13. J.R. Herring, S.A. Orszag, R.H. Kraichnan y Fox, "Decay of two-dimensional homogeneous turbulence", *J. Fluid Mech.*, Vol. 66, pp. 417-46, (1974).
14. D. Kwak, W.C. Reynolds y J.H. Ferziger, "Three-dimensional time-dependent computation of turbulent flows", *Report TF-5*, Dept. Mech. Engng. Stanford University, (1975).
15. M.J. Lee y W.C. Reynolds, "Numerical experiments on the structure of homogeneous turbulence", *Report TF-24*, Dept. Mech. Engng. Stanford University, (1985).
16. B. Legras, P. Santangelo y R. Benzi, "High-resolution numerical experiments for forced two-dimensional turbulence", *Europhys. Lett.*, Vol. 5, no. 1, pp. 37-42, (1988).
17. M. Lesieur, "Introduction á la turbulence bidimensionelle", *J. Méc. Théor. Appl.*, pp. 243-269, (1983).
18. M. Lesieur, C. Staquet, P. LeRoy y P. Comte, "The mixing layer and its coherence examined from the point of view two-dimensional turbulence", *J. Fluid Mech.*, Vol. 192, pp. 511-534, (1988).
19. D.K. Lilly, "Numerical simulation of two-dimensional turbulence", *Phys. Fluids Suppl. II*, pp. 240-249, (1969).
20. J.L. Lumley, *Stochastic tools in turbulence*, Academic Press, Inc., (1970).
21. J.C. McWilliams, "On the relevance of two-dimensional turbulence to geophysical motions", *J. Méc.*, pp. 83, (1983).
22. J.C. McWilliams, "The emergence of isolated, coherent vortices in turbulent flow", *J. Fluid Mech.*, Vol. 146, pp. 21, (1984).
23. S.A. Orszag y G.S. Patterson, "Numerical simulation of three-dimensional isotropic turbulence", *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 28, no. 2, pp. 76-79, (1972).
24. G.S. Patterson y S.A. Orszag, "Spectral calculations of isotropic turbulence: efficient removal of aliasing interactions", *Phys. Fluids*, Vol. 14, pp. 2538-2541, (1971).
25. W.C. Reynolds, "Fundamentals of turbulence for turbulence modeling and simulation", *Lecture Notes for Von Karman Institute*, (1987).
26. W.C. Reynolds, "Fundamentals of turbulence for turbulence modeling and simulation", *Revision of Lecture Notes for Von Karman Institute*, (1989).
27. R.S. Rogallo, "Numerical experiments in homogeneous turbulence", *NASA Technical*

- Memorandum 81915*, (1981).
28. P.G. Saffman, "On the spectrum and decay of random two-dimensional vorticity distributions at large Reynolds number", *Stud. Appl. Math*, Vol. 50, pp. 377-383, (1971).
  29. A.M. Savill, "Recent developments in rapid-distortion theory", *Ann. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 19, pp. 531-575, (1987).
  30. U. Schumann y G.S. Patterson, "Numerical study of pressure and velocity fluctuation in nearly isotropic turbulence", *J. Fluid Mech.*, Vol. 88, pp. 685-709, (1978).
  31. U. Schumann y G.S. Patterson, "Numerical study of return of axisymmetric turbulence to isotropy", *J. Fluid Mech.*, Vol. 88, pp. 711-735, (1978).
  32. S. Shaanan, J.H. Ferziger y W.C. Reynolds, "Numerical simulation of turbulence in the presence of shear", *Report TF-6*, Dept. Mech. Engng., Stanford University, (1975).
  33. J. Sommeria, "Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box", *J. Fluid Mech.*, Vol. 170, pp. 139-168, (1986).
  34. C.T. Wu, J.H. Ferziger y D.R. Chapman, "Simulation and modeling of homogeneous, compressed turbulence", *Report TF-21*, Dept. Mech Engng., Stanford University, (1985).