

# ESTRUCTURAS DE VIGAS SOBRE SUELOS ELÁSTICOS DE RIGIDEZ VARIABLE

J. Darío Aristizábal-Ochoa<sup>1</sup>

Resumen: Se presenta un método analítico que evalúa la respuesta de estructuras de vigas soportadas sobre suelos elásticos de rigidez variable. Se derivan ecuaciones matriciales que pueden ser fácilmente incluidas en programas de computadora existentes de análisis de estructuras aporticadas. El método incluye vigas acarteladas, prismáticas y no prismáticas soportadas sobre suelos elásticos de naturaleza uniforme o variable. El método propuesto es adaptable con los modelos disponibles en la literatura técnica de fundaciones en un medio semi-infinito en el plano e independientes del tiempo. Estos modelos incluyen: 1) el modelo clásico de Winkler y sus modelos de extensión de dos parámetros: el de Filonenko-Borodich, Hetenyi, Pasternak, y el de Kerr; y 2) los modelos de la Teoría de la Elasticidad propuestos por Reissner, Vlazov y Leontiev. Un resumen de estos modelos se incluye en esta publicación como referencia de fácil acceso al lector. Además, el algoritmo propuesto permite que los parámetros de estos modelos de fundación varíen de cualquier forma en el plano. El algoritmo propuesto tiene un gran rango de aplicación en los análisis de: 1) vigas sobre suelos difíciles de rigidez variable; 2) tanques cilíndricos acartelados o de espesor de pared variable; 3) estructuras aporticadas soportadas sobre pilas acarteladas en las cuales la rigidez del suelo varía con la profundidad; y 4) la estabilidad de estructuras aporticadas sobre fundaciones elásticas variables. Se presentan cuatro ejemplos y los resultados calculados son comparados con los obtenidos por otros métodos analíticos.

## BEAM STRUCTURES ON NONUNIFORM TWO-PARAMETER ELASTIC FOUNDATION

Abstract: An analytical method that evaluates the response of beam structures that are supported on elastic soils (foundation) of variable stiffness is presented. Matrix equations are derived that can be readily included in existing computer programs on the analysis of framed structures. The proposed method includes prismatic and non-prismatic tapered beams on non-uniform elastic foundations. The proposed algorithm is adaptable and works with any of the available half-space time-independent foundation models, including: 1) the classic model of Winkler and its two-parameter extension models: Filonenko-Borodich, Hetenyi, Pasternak, and Kerr; and 2) the Theory of Elasticity models proposed by Reissner, Vlazov and Leontiev. A brief summary of these models is presented for easy reference. In addition, the proposed algorithm permits that the parameters of these foundation models vary in any fashion. The proposed algorithm finds great applicability in the analyses of: 1) beams on difficult soils; 2) cylindrical tanks of variable wall thickness; 3) framed structures supported on tapered piles in which the soil stiffness varies with its depth; and 4) the stability of framed structures on variable elastic foundations. Four examples are presented and the calculated results compared with those obtained from other analytical methods.

### INTRODUCCIÓN

#### Definición del problema

El análisis de marcos estructurales o aporticados no es una tarea fácil ni directa, especialmente cuando sus miembros son acartelados, o parcialmente restringidos, o soportados sobre suelos o medios difíciles, tales como suelos de rigidez variable. La estática, la estabilidad y la dinámica de estructuras de vigas no prismáticas y la respuesta inelástica de columnas acarteladas de concreto reforzado han sido expuestas en forma detallada por el autor (1987 y 1994) y Head y Aristizábal-Ochoa (1987), respectivamente. Sin embargo, como se demostrará en esta publicación, estructuras de vigas prismáticas o no prismáticas bajo cualquier tipo de carga y condiciones de soporte pueden ser analizadas con la ayuda de métodos numéricos adecuados. Métodos analíticos que requieren la solución de ecuaciones diferenciales son usualmente

---

<sup>1</sup> Profesor Generación 125-años, Facultad de Minas, Universidad Nacional, Medellín-Colombia

bastante tediosos y carecen de generalidad; por lo tanto, en la mayoría de los casos, es recomendable su solución por medio de métodos numéricos. El análisis de estructuras de vigas bajo condiciones de soporte y de carga complejas se puede llevar a cabo en forma matricial, y de esta manera, el analista evita la necesidad de resolver, para cada caso particular, las ecuaciones diferenciales gobernantes particulares que fuera de sus dificultades en hallar la solución son también difíciles de plantear.

### **Métodos disponibles**

El análisis clásico de vigas prismáticas sobre fundaciones elásticas fue desarrollado por Hetenyi (1946). Eisenberger y Clastornik (1987) desarrollaron un método analítico que trata el comportamiento elástico de una viga prismática sobre un medio elástico variable de "dos parámetros". Estos investigadores descubrieron que la formulación basada en las matrices consistentes de masa y la geométrica produce mejores resultados, a un costo computacional menor que el basado en funciones de desplazamiento exacto. Ya antes Zhashua y Cook (1983) habían tratado el mismo problema pero de una manera más limitada. El trabajo aquí presentado es similar al de Eisenberger y Clastornik (1987), pero es mucho más general incluyendo no solamente el caso de vigas rectas acarteladas o no prismáticas, sino también variaciones en los dos parámetros del suelo soportante a lo largo de la luz de la viga.

### **Objetivos**

El objetivo principal de esta publicación es presentar un algoritmo general y simple de aplicar basado en el método clásico matricial de desplazamientos. Por medio de éste las matrices de rigidez y de fuerzas y momentos de empotramiento de cualquier tipo de viga recta sobre un suelo elástico variable de uno o dos parámetros pueden ser obtenidas que luego de ser ensambladas pueden ser resueltas en forma algebraica. En esta formulación se incluyen vigas prismáticas y no prismáticas sujetas a cualquier tipo de condición de carga y soporte. Las fórmulas derivadas se pueden aplicar en el análisis estático y de estabilidad de estructuras aperticadas soportadas sobre suelos elásticos uniformes o no uniformes. La matriz consistente de masa, la matriz geométrica, y la matriz incremental de rigidez son formuladas como lo ha sugerido previamente el autor (Aristizábal-Ochoa 1993), esto es, las matrices están basadas en el desplazamiento exacto de la viga sola sin soporte del suelo. Se incluyen cuatro ejemplos para la verificación del algoritmo propuesto y sus resultados son comparados con los de otros métodos analíticos.

### **MODELOS DE MEDIOS DE FUNDACIÓN ELÁSTICA**

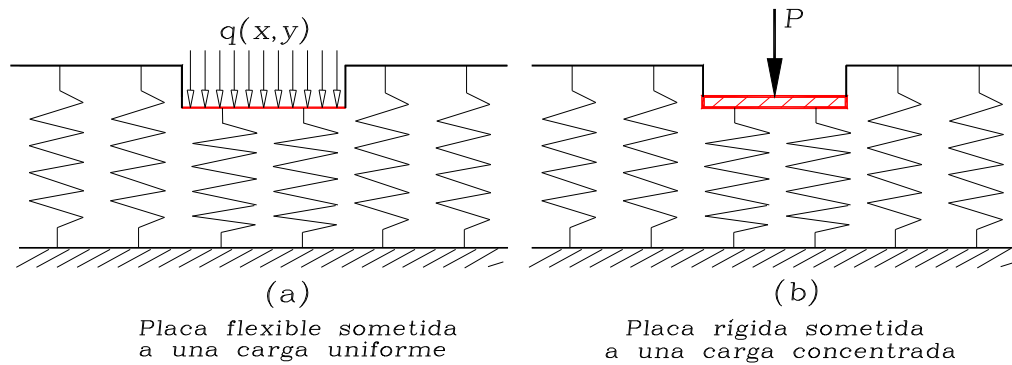
En esta sección se presenta una discusión breve sobre los modelos ideales de vigas sobre suelos o medios elásticos independientes del tiempo más conocidos en la literatura técnica. Estos modelos indican el desplazamiento del suelo de soporte que está en contacto con la viga cuando ésta es cargada transversalmente. Se debe enfatizar que estos modelos tienen como objetivo modelar el comportamiento de la viga y de la condición del borde superior del suelo de soporte, y no del comportamiento a mayor profundidad del suelo mismo.

#### **El modelo de Winkler**

Winkler propone que la deflexión,  $w$ , en cualquier punto de la superficie del suelo de soporte es linealmente proporcional a la presión de contacto  $q$  en ese punto, e independiente de los esfuerzos de contacto en otros puntos (esto es, el suelo de soporte consiste en un sistema de elementos resortes lineales mutuamente independientes como se muestra en la fig. 1), es decir:

$$q(x, y) = k_1 w(x, y) \quad (1)$$

Donde:  $k_1$  = módulo de balasto del suelo o medio soportante (su unidad es esfuerzo por unidad de longitud). En este modelo los desplazamientos de una región cargada uniformemente serían constantes, independientes si la viga es infinitamente flexible o infinitamente rígida, como lo muestra las figuras 1a y 1b. La inhabilidad de este modelo para deformarse fuera del área cargada restringe su aplicabilidad a los suelos o medios con alguna cohesión o con capacidad a cortante. Sin embargo, existen muchos problemas en la ingeniería para los cuales este modelo representa una idealización adecuada y precisa de las condiciones de soporte existentes, tales como miembros flotantes (vigas, entramados, capas de hielo) los cuales son una consecuencia simple del principio de Arquímedes.



**Figura 1: Modelo de Winkler.**

### Modelos de dos parámetros

La deficiencia del modelo de Winkler en representar el comportamiento continuo de los suelos reales por una parte, y las complejidades matemáticas de los modelos elásticos del continuo por otra, ha llevado al desarrollo de modelos de respuesta de suelo de dos parámetros. El término "dos parámetros" indica que los modelos son definidos por dos constantes elásticas independientes.

El desarrollo de los modelos de dos parámetros ha sido abordado desde dos filosofías distintas. Los modelos propuestos por Filonenko-Borodich en 1940, Hetenyi en 1946, Pasternak en 1954, y Kerr en 1964 son extensiones del modelo de Winkler en donde la interacción entre los elementos de resorte es representada ya sea por membranas elásticas, vigas elásticas o por capas elásticas a cortante o cizalladura pura. Los modelos de suelo propuestos por Reissner en 1958, Vlazov y Leontiev en 1966 representan la segunda forma de abordar el desarrollo de estos modelos de dos parámetros, empezando con la Teoría de la Elasticidad e introduciendo las simplificaciones en las suposiciones y en las restricciones con respecto a la distribución de esfuerzos, deformaciones unitarias y desplazamientos. Véase el libro de Scott (1981) para mayores detalles.

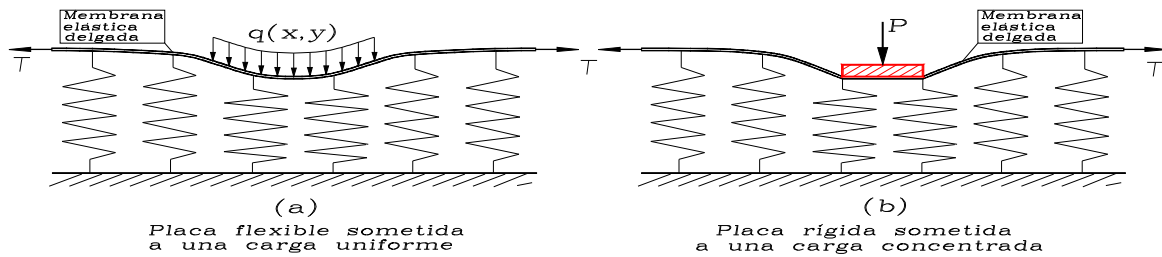
- (a) **Modelo de Filonenko-Borodich.** En este modelo el resorte  $k_1$  del modelo de Winkler es conectado a una membrana delgada sometida a una tracción constante  $T$  (figs. 2a y 2b). Considerando el equilibrio estático de un elemento diferencial del sistema resorte-membrana se obtiene que para fundaciones planas (placas, zapatas, losas flotantes, etc.) la deflexión superficial debida a una carga normal por unidad de área  $q$  es:

$$q(x, y) = k_1 w(x, y) - T \nabla^2(x, y) \quad (2a)$$

Donde:  $\nabla^2(x, y) = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  es el operador diferencial Laplace en coordenadas cartesianas. Para fundaciones en vigas, la ecuación (2a) se reduce a:

$$q(x) = k_1 w(x, y) - T \partial^2 w / \partial x^2 \quad (2b)$$

Para caracterizar este modelo de suelo, solo un parámetro adicional, la constante de la membrana,  $T$ , debe ser determinada, suponiendo que el primer parámetro  $k_1$  es conocido. Ejemplos de perfiles de deflexión de viga de este modelo en particular debido a una carga uniforme y a una carga concentrada se muestran en las figs. 2a y 2b, respectivamente.



**Figura 2: Modelo de Filonenko-Borodich.**

- (b) **Modelo de Hetenyi.** Hetenyi (1946, pág.180) propuso que el elemento de resorte independiente  $k_1$  llega a ser interactivo con una placa elástica embebida en el caso de fundaciones en el plano (zapatas, losas flotantes, etc.), o con una viga elástica embebida, en el caso de fundaciones en vigas. La ecuación de la deflexión en el caso plano llega a ser:

$$\mathbf{q}(x, y) = k_1 w(x, y) - D^* \nabla^4(x, y) \quad (3a)$$

Donde:  $\nabla^4(x, y) = \partial^4/\partial x^4 + 2\partial^4/(\partial x^2\partial y^2) + \partial^4/\partial y^4$ ; y  $D^*$  = rigidez a flexión de la placa elástica embebida.

Para fundaciones en vigas ecuación (3a) se reduce a:

$$\mathbf{q}(x) = k_1 w(x, y) - (EI/b) d^4w/dx^4 \quad (3b)$$

Donde  $I$  y  $b$  son el momento de inercia y el ancho de la sección de la viga embebida, respectivamente.

- (c) **Modelo de Pasternak.** Pasternak propuso un modelo con interacción de cortante entre los elementos de resorte  $k_1$  como lo muestra la Fig. 3a. Esto se logra conectando a los resortes  $k_1$  una capa de elementos verticales incompresibles de grosor unitario ( $t = 1$ ) la cual se deforma a cortante pura. Los esfuerzos y deformaciones unitarias en un elemento placa se pueden ver en las figs. 3a y 3b. Suponiendo condiciones isotrópicas en las capas a cortante en el plano  $xy$  con módulos de cortante  $G_x = G_y = G_p$  se obtienen las ecuaciones (4).

$$\tau_{xz} = G_p \gamma_{xz} = G_p \partial w / \partial x \quad (4a)$$

$$\tau_{yz} = G_p \gamma_{yz} = G_p \partial w / \partial y \quad (4b)$$

Aplicando equilibrio a un elemento diferencial del medio a cortante (fig. 3c) en  $Z$ :

$$\mathbf{q}(x, y) - k_1 w(x, y) - (\partial \tau_{xz} / \partial x + \partial \tau_{yz} / \partial y) = 0 \quad (5a)$$

y reemplazando las expresiones para  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$  de las ecuaciones (4a-b) en la (5a):

$$\mathbf{q}(x, y) = k_1 w(x, y) - G_p (\partial^2 w / \partial x^2 + \partial^2 w / \partial y^2) \quad (5b)$$

o,

$$\mathbf{q}(x, y) = k_1 w(x, y) - G_p \nabla^2 w(x, y) \quad (5c)$$

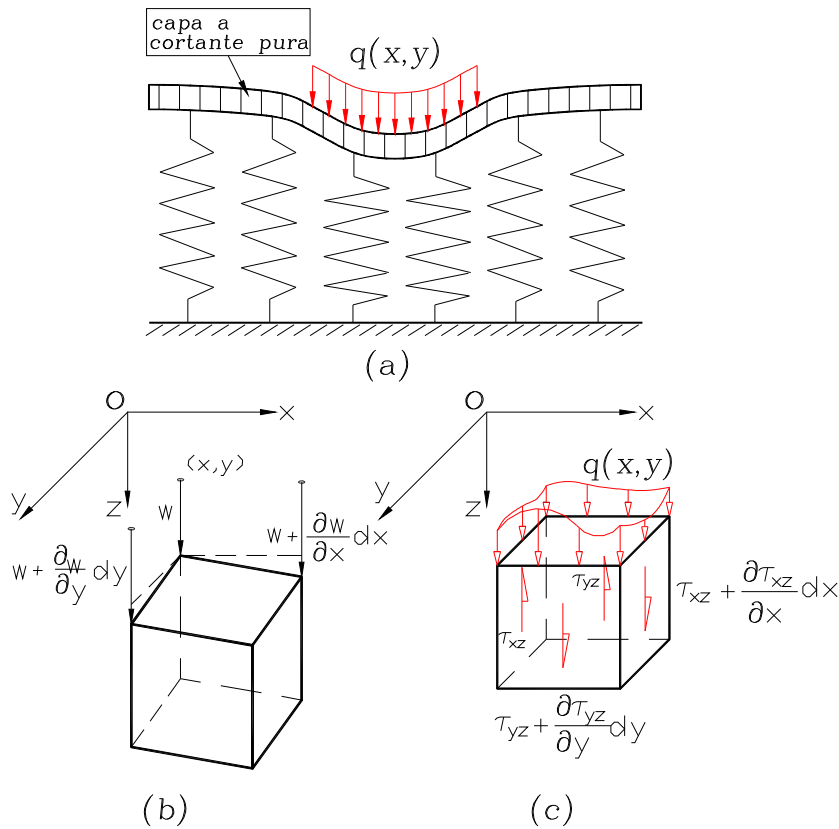


Figura 3: Modelo de Pasternak.

Nótese que las ecuaciones (2b) y (5c) son idénticas cuando la constante resorte-cortante  $G_p$  es reemplazada por la  $T$  de la resorte-membrana. Por lo tanto, el modelo de Filonenko-Borodich es matemáticamente idéntico al de Pasternak. Ahora, en el caso límite cuando  $T$ ,  $G_p$  y  $D^*$  tienden a cero, todos estos tres últimos modelos convergen al modelo de Winkler.

Para fundaciones en vigas ecuación (5c) se reduce a:

$$q(x, y) = k_1 w(x, y) - G_p d^2 w/dx^2 \quad (5d)$$

(d) **Modelo de Vlazov-Leontiev.** La forma como Vlazov y Leontiev abordaron la formulación del modelo de suelo se basa en la teoría de la elasticidad y en el método variacional. Ellos obtuvieron una ecuación similar a la (2b) o a la (5c) suponiendo deformaciones unitarias en el plano (figs. 4a y 4b) y ciertas restricciones en la distribución de desplazamientos en el medio elástico semi-infinito  $\underline{s}$  con  $E_s$  (módulo elástico) y  $\nu_s$  (relación de Poisson).

$$q(x) = k_1 w(x, y) - t \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (6)$$

Donde:  $k_1 = \frac{(1-\nu_s)E_s b}{(1+\nu_s)(1-2\nu_s)} \int_0^H \left(\frac{dg}{dz}\right)^2 dz$ ;  $t = \frac{E_s b}{2(1+\nu_s)} \int_0^H g^2 dz$ ;  $b$ = ancho de viga; y  $g(z)$ =función supuesta que describe la variación del desplazamiento vertical con la profundidad  $z$  en el suelo o medio soportante de espesor total  $H$  (fig. 4a). La función  $g(z)$  es escogida de tal manera que cumpla las condiciones en los extremos o bordes, las cuales son las de tener un valor unitario en la superficie ( $g = 1$  en  $z = 0$ ) y cero a la profundidad  $H$  en una capa finita ( $g = 0$  en  $z = H$ ) o en el infinito en el caso de un semi-espacio ( $g = 0$  en  $z = \infty$ ). Vlasov y Leontiev adoptaron la siguiente función:

$$g(z) = [\sinh \eta(H-z)] / \sinh \eta H \quad (7)$$

La ecuación (7) es basada, como ellos lo indican, en evidencia experimental.  $\eta$  es un parámetro experimental que indica la tasa de reducción del desplazamiento vertical con la profundidad  $z$ . Scott en su libro (1981, capítulo 5 p. 143) sugiere varias funciones admisibles, tales como: para capas de suelo poco profundas  $g(z) = 1 - z/H$ ; para suelos o medios muy profundos o semi-infinito  $g(z) = e^{-\mu z}$  donde  $\mu$  es una constante de dimensión  $L^{-1}$  similar a  $\eta$  que también expresa la tasa de disminución del desplazamiento vertical con la profundidad  $z$ . En este último caso  $k_1$  y  $t$  llegan a ser

$$k_1 = \frac{(1 - \nu_s) E_s b \mu}{2(1 + \nu_s)(1 - 2\nu_s)} \quad (8a)$$

$$t = \frac{E_s b}{4(1 + \nu_s)\mu} \quad (8b)$$

El modelo de Vlasov-Leontiev presenta una base analítica para la presencia de la segunda derivada en las ecuaciones (2), (5) y (6) y también presenta un criterio de cómo los coeficientes están relacionados con las propiedades elásticas específicas del suelo o medio soportante. Como en el modelo anterior,  $k_1$  es una medida de la capacidad de deformación a compresión del suelo y  $t$  de la transmisibilidad de la fuerza aplicada a los elementos de suelos vecinos o mejor de la capacidad de la carga de esparcirse alrededor del suelo que rodea la viga. Más detalles de este modelo se presentan en el libro de Scott (1981).

## MODELO ESTRUCTURAL PROPUESTO

### Suposiciones

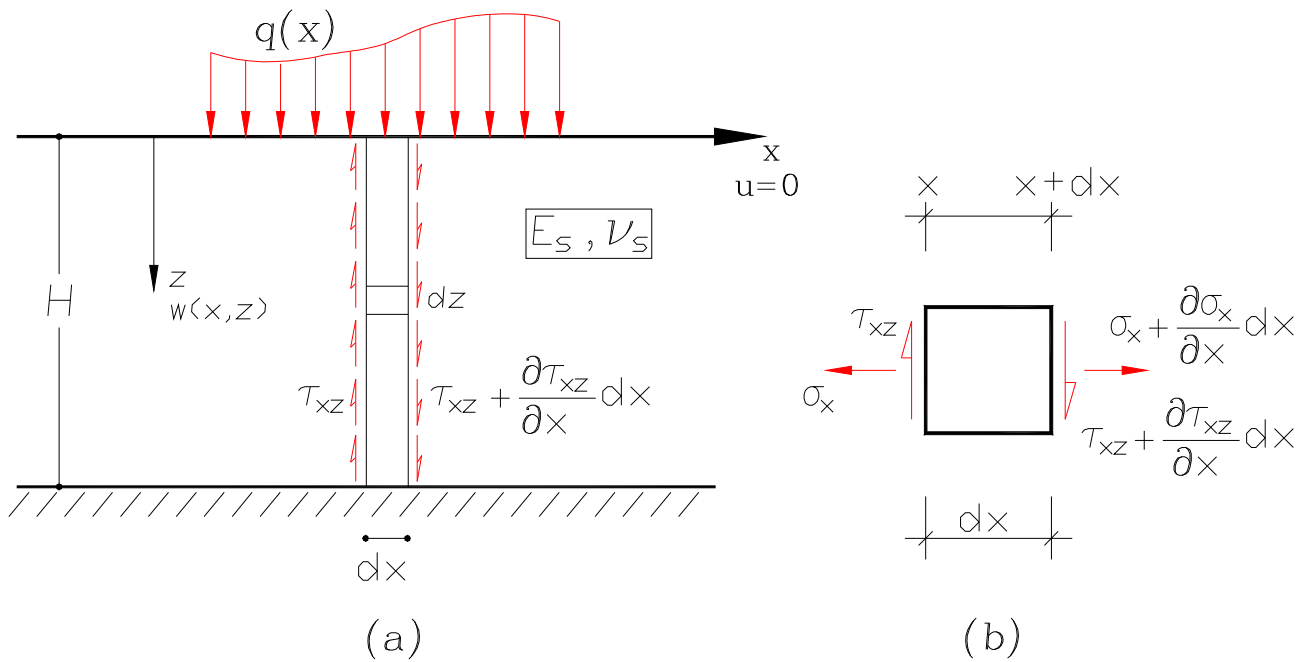
Considere el elemento viga-columna que se muestra en fig. 5a el cual conecta los puntos A y B. El elemento se compone de la misma viga AB, y la fundación elástica variable de dos parámetros o **FEv-2p**. El número total de grados de libertad (GDL) de la viga es 6 como lo muestra la fig. 5b. Nótese que los GDL se toman en los extremos A y B. Se supone que el elemento AB: 1) está hecho de material elástico lineal homogéneo con un módulo de elasticidad  $E$ ; 2) su eje centroidal es una línea recta; 3) está cargado a lo largo de uno de los planos principales de la sección transversal con momentos de inercia  $I_a$  y  $I_b$  y áreas de sección transversal  $A_a$  y  $A_b$  en los extremos A y B, respectivamente; 4) sus deformaciones son pequeñas, así que los principios de superposición y el de la viga conjugada son aplicables.

En la fig. 5b se pueden ver los GDL y la convención de signos en los extremos A y B. Los GDL 1 y 2 representan rotaciones a flexión de los extremos A y B, respectivamente; mientras los GDL 3 y 4 representan los desplazamientos verticales, y 5 y 6 los desplazamientos axiales.

### Ecuaciones de Equilibrio

La fuerza de reacción de la fundación **FEv-2p** denominada  $q(x)$  es la siguiente:

$$q(x) = k_1 w(x, y) - \frac{d}{dx} [k_2(x) y'] \quad (9)$$



**Figura 4: Modelo de Vlasov-Leontiev.**

Donde  $k_1(x)$  y  $k_2(x)$  son el primero y segundo parámetros de la fundación, respectivamente (Eisenberger y Clastornik 1987). El superíndice prima indica la primera derivada total con respecto a la variable independiente  $x$ . La ecuación diferencial resultante de cuarto orden que gobierna el equilibrio elástico vertical de la viga es la siguiente:

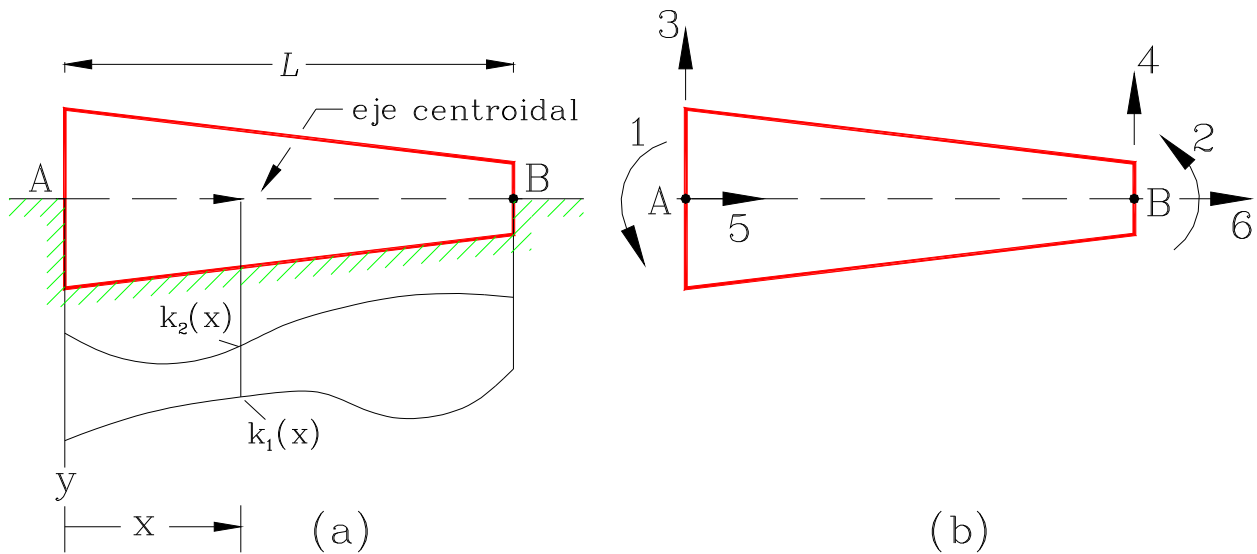
$$\frac{d^2}{dx^2} [EI(x) y''] - \frac{d}{dx} [k_2(x) y'] + k_1(x) y = p(x) \quad (10)$$

La ecuación (10) ha sido resuelta analíticamente por Eisenberger y Clastornik (1987) para el caso de viga-columnas prismáticas ( $EI = \text{constante}$ ) usando las funciones exactas de desplazamiento. Sin embargo, ambos investigadores concluyeron que los métodos matriciales basados en funciones de desplazamiento cúbicas y en la formulación consistente dan resultados muy precisos y su solución es más expedita y económica.

En el caso de las vigas no-prismáticas, cada coeficiente en la ecuación (10) varía con  $x$ , y su solución analítica es, en general, extremadamente tediosa de obtener para cada una de las condiciones particulares de carga y de borde. Lo más práctico es resolver la ecuación (10) utilizando el método de elementos finitos (esto es, por análisis matricial) de la siguiente manera:

$$[[K] + [K_s] + [K_s']]\{Y\} = \{F\} \quad (11)$$

Donde:  $[K]$  representa la matriz de rigidez global de la viga sola;  $[K_s]$  y  $[K_g]$  son las matrices de rigidez global de la fundación elástica correspondiente al primer y segundo parámetros;  $\{Y\}$  y  $\{F\}$  son los vectores de desplazamientos y de cargas equivalentes en los nudos A y B con respecto al sistema de referencia global, respectivamente. Para determinar las matrices de rigidez global y el vector de carga, se deben evaluar las mismas matrices, pero a nivel del miembro. Por conveniencia, las matrices al nivel del miembro son designadas utilizando letras minúsculas así:  $[k]$ ,  $[k_s]$ ,  $[k_g]$ ,  $\{y\}$ , y  $\{f\}$ .



**Figura 5: Modelo Estructural: a) Viga acartelada sobre un suelo elástico variable de dos parámetros; y b) Grados de libertad.**

Lo que sigue a continuación es la formulación general de las matrices de rigidez y del vector de carga al nivel del miembro. Es importante anotar que para determinar la matriz de rigidez básica  $[k]$  y el vector de cargas equivalentes  $\{f\}$ , la forma exacta de la deflexada del miembro es evaluada numéricamente usando los principios de la viga conjugada. Las matrices de rigidez correspondientes al primero y segundo parámetros del suelo de soporte se denominan también como la matriz de rigidez elástica  $[k_s]$ , y la matriz de rigidez geométrica  $[k_g]$ , respectivamente. Ambas son evaluadas usando la formulación consistente.

### Matrices de rigidez al nivel miembro

- a) **La Matriz de rigidez básica.** Cuando el elemento AB está sujeto a momentos flectores  $M_a$  y  $M_b$ , sus extremos A y B rotan  $\theta_a$  y  $\theta_b$ , respectivamente, como lo muestra la fig. 6a. Las siguientes relaciones pueden obtenerse aplicando el principio de la viga conjugada (fig. 6b):

$$\theta_a = (f_{11} M_a + f_{12} M_b) L / (EI_a) \quad (12a)$$

$$\theta_b = (f_{12} M_a + f_{22} M_b) L / (EI_a) \quad (12b)$$

Donde:  $f_{11}$ ,  $f_{12}$  y  $f_{22}$  son los coeficientes de flexibilidad del miembro AB, los cuales pueden ser determinados analíticamente o numéricamente de las siguientes integrales (Aristizábal-Ochoa 1994):

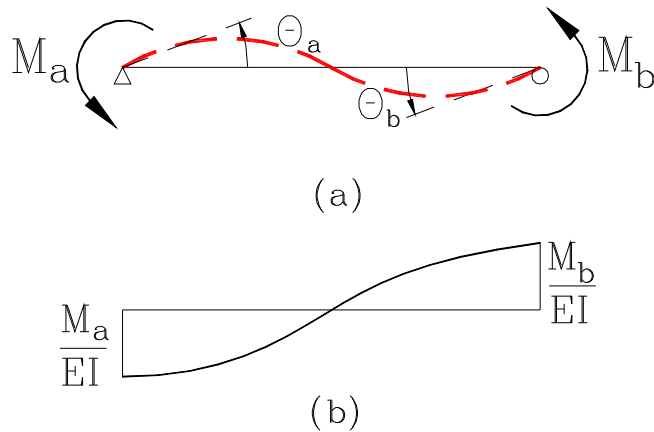


Figura 6: Elemento Viga: a) Momentos ( $M_a$  y  $M_b$ ) y rotaciones ( $\theta_a$  y  $\theta_b$ ) en los nudos A y B; y b) Viga conjugada.

$$f_{11} = \frac{I_a}{L^3} \int_0^L \frac{(L-x)^2}{I_x} dx = (1/3 \text{ para vigas prismáticas}); \quad (13)$$

$$f_{12} = \frac{I_a}{L^3} \int_0^L \frac{x(L-x)}{I_x} dx = \square (1/6 \text{ para vigas prismáticas}) \quad (14)$$

$$f_{22} = \frac{I_a}{L^3} \int_0^L \frac{x^2}{I_x} dx = (1/3 \text{ para vigas prismáticas}) \quad (15)$$

Las ecuaciones (12a) y (12b) pueden ser reducidas en forma matricial a:

$$\begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_b \end{bmatrix} = \frac{L}{EI_a} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_a \\ M_b \end{bmatrix} \quad (12c)$$

Al invertir la matriz de flexibilidad en la ecuación (12c), se obtiene la siguiente ecuación matricial de rigidez:

$$\begin{bmatrix} M_a \\ M_b \end{bmatrix} = \frac{EI_a}{L} \frac{1}{f_{11}f_{22} - f_{12}^2} \begin{bmatrix} f_{22} & -f_{12} \\ -f_{12} & f_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_b \end{bmatrix} \quad (16)$$

Por lo tanto, los coeficientes de rigidez a flexión del miembro AB son:

$$k_{11} = \frac{EI_a}{L} \frac{f_{22}}{f_{11}f_{22} - f_{12}^2} \quad (17a)$$

$$k_{12} = -\frac{EI_a}{L} \frac{f_{12}}{f_{11}f_{22} - f_{12}^2} \quad (17b)$$



propuesto un método novedoso basado en el método clásico de la viga conjugada por medio del cual las diferentes matrices de rigidez, incluyendo la de masa y las matrices de amortiguamiento de vigas prismáticas y no-prismáticas pueden ser evaluadas directamente de una forma consistente sin necesidad de resolver ecuaciones diferenciales complejas. Los detalles de las derivaciones y de los procedimientos numéricos no están dentro del enfoque de esta publicación, pero si son tratados por Aristizábal-Ochoa (1994). Las funciones de forma resultantes y sus derivadas han sido extraídas del artículo de Aristizábal-Ochoa (1994) y están resumidas abajo.

$$\phi_1(x) = x + \int_0^x \frac{1}{EI(z)} [z(k_{11} + k_{12})/L - k_{11}] (x - z) dz \quad (21a)$$

$$\phi_1'(x) = 1 + \int_0^x \frac{1}{EI(z)} [z(k_{11} + k_{12})/L - k_{11}] dz \quad (21b)$$

$$\phi_2(x) = \int_0^x \frac{1}{EI(z)} [z(k_{22} + k_{12})/L - k_{22}] (x - z) dz \quad (22a)$$

$$\phi_2'(x) = \int_0^x \frac{1}{EI(z)} [z(k_{22} + k_{12})/L - k_{22}] dz \quad (22b)$$

$$\phi_3(x) = 1 + \int_0^x \frac{1}{EI(z)} [z(k_{13} + k_{23})/L - k_{13}] (x - z) dz \quad (23a)$$

$$\phi_3'(x) = \int_0^x \frac{1}{EI(z)} [z(k_{13} + k_{23})/L - k_{13}] dz \quad (23b)$$

$$\phi_4(x) = 1 + \int_0^x \frac{1}{EI(z)} [z(k_{14} + k_{24})/L - k_{14}] (x - z) dz \quad (24a)$$

$$\phi_4'(x) = \int_0^x \frac{1}{EI(z)} [z(k_{14} + k_{24})/L - k_{14}] dz \quad (24b)$$

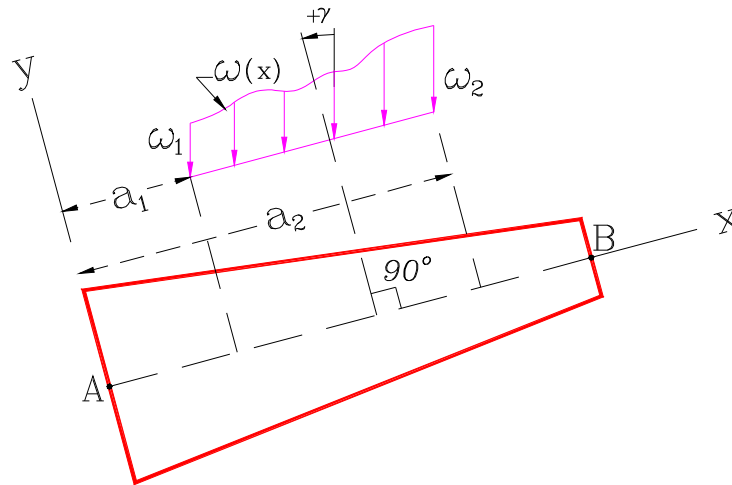
$$\phi_5(x) = 1 - \int_0^x \frac{k_{55}}{EA(z)} dz ; \text{ y } \phi_6(x) = \int_0^x \frac{k_{66}}{EA(z)} dz \quad (25)$$

Nótese que:  $\phi_3(x) + \phi_4(x) = 1$ ;  $\phi_3'(x) + \phi_4'(x) = 0$ ; y  $\phi_5(x) + \phi_6(x) = 1$

Una vez que los coeficientes de rigidez  $k_{11}$ ,  $k_{22}$ , y  $k_{12}$  son calculados usando las ecuaciones (17a)-(17c), el resto de los coeficientes de rigidez a flexión pueden ser determinados de la ecuación (18). Luego, utilizando integración

numérica, se pueden determinar las funciones de forma y sus derivadas, las cuales producen otra vez los coeficientes matriciales de rigidez elástica y geométrica cuando son reemplazadas en las ecuaciones (20b) y (20c) [para más detalles véase Aristizábal-Ochoa (1994)].

- c) **Matriz de carga consistente.** Considere el elemento AB bajo una carga parcial distribuida linealmente, como lo muestra la fig. 7. La carga aplicada varía de  $w_1$  a  $w_2$  desde  $a_1$  hasta  $a_2$  a lo largo del eje centroidal del elemento y forma un ángulo  $A$  con la normal al eje de la viga. La carga puede ser dividida en dos componentes, una normal que produce flexión y cortante, y la componente axial que produce deformaciones axiales solamente (acción cercha). La convención de signos para la carga aplicada y del ángulo  $\gamma$  se puede ver en la fig. 7.



**Figura 7: Elemento Viga sometida a una carga parcial no uniformemente distribuida.**

La matriz de carga equivalente  $6 \times 1$  tiene la misma convención de signos que se utiliza para los grados de libertad que se muestran en la fig. 5b. Los primeros cuatro componentes de la matriz de carga son los momentos y las fuerzas de cortante equivalentes, respectivamente. Estos componentes se pueden obtener directamente aplicando equilibrio estático y los principios de área-momento [esto es, que las rotaciones de las tangentes en los extremos de la viga se pueden obtener directamente de la viga cargada con el diagrama  $M/(EI)$ ]. Ya que se supone que los dos extremos son empotrados, estas reacciones con cero. De ahí que se puedan obtener las siguientes dos ecuaciones:

$$\left( \int_A^B \frac{x^2}{EI_x} dx \right) M_a + \left( \int_A^B \frac{x(L-x)}{EI_x} dx \right) M_b + L \left( \int_A^B \frac{M_x x}{EI_x} dx \right) = 0 \quad (26a)$$

$$\left( \int_A^B \frac{x(L-x)}{EI_x} dx \right) M_a + \left( \int_A^B \frac{(L-x)^2}{EI_x} dx \right) M_b + L \left( \int_A^B \frac{M_x (L-x)}{EI_x} dx \right) = 0 \quad (26b)$$

Donde:  $M_a$  y  $M_b$  son los momentos fijos de flexión en A y B, respectivamente;  $M_x$ =momento flector en la viga a una distancia  $x$  del extremo A debido a la carga aplicada. Nótese que de las ecuaciones (26a) y (26b), los momentos fijos  $M_a$  y  $M_b$  pueden ser obtenidos una vez que se evalúen las integrales. Afortunadamente, las primeras dos integrales en las ecuaciones (26a) y (26b) ya han sido calculadas [véase los coeficientes de flexibilidad, ecuaciones (13), (14) y (15)]. Por lo tanto, solamente las integrales que contienen  $M_x$  quedan por ser evaluadas. Una vez que se obtienen  $M_a$  y  $M_b$ , las cortantes finales fijas  $V_a$  y  $V_b$  se determinan directamente aplicando equilibrio estático.

## VERIFICACIÓN Y EJEMPLOS

Para demostrar la efectividad del método propuesto, se incluyen cuatro ejemplos en detalle. El primer ejemplo es el de una viga prismática apoyada sobre un suelo elástico de Winkler con un módulo variable lineal (tomado del libro de Hetenyi 1946, pág. 108). El segundo ejemplo es sobre el análisis estático de una viga en voladizo sobre un medio elástico variable de dos parámetros (tomado del artículo de Eisenberger y Clastornik 1987, pág. 1461). El tercer ejemplo es sobre el análisis de una viga de ancho variable lineal apoyada sobre un suelo de Winkler. Este problema es discutido por Hetenyi (1946, pág. 100-108) el cual representa una aproximación de una placa circular apoyada sobre un suelo elástico, cargada simétricamente con respecto a su propio centro. Finalmente, el cuarto ejemplo trata del análisis estático de un tanque cilíndrico con la base fija y con paredes de espesor variable lineal bajo presión hidrostática cuya solución es comparada con la de Hetenyi (1946, pág. 114-119).

### Ejemplo 1. Viga prismática sobre un suelo de módulo linealmente variable

Considere la viga prismática que se muestra en la fig. 8a apoyada sobre un suelo elástico, cuyo módulo varía de acuerdo con  $k_1(x)=k_a-cx$ . Determine las deflexiones en ambos extremos suponiendo que:  $I=144 \text{ pulg.}^4$  ( $0.59937 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ );  $E=2.5 \times 10^6 \text{ lb/pulg.}^2$  ( $1.72375 \times 10^7 \text{ kPa}$ );  $k_a=700 \text{ lb/pulg.}^2$  ( $4826.5 \text{ kPa}$ );  $c=5 \text{ lb/pulg.}^3$  ( $1357.3 \text{ kPa/m}$ );  $L=120 \text{ pulg.}$  ( $3.048 \text{ m}$ ); y  $P=1000 \text{ lb.}$  ( $4.448 \text{ kN}$ ). Compare los resultados utilizando un solo elemento con los de Hetenyi (1946, pág. 111).

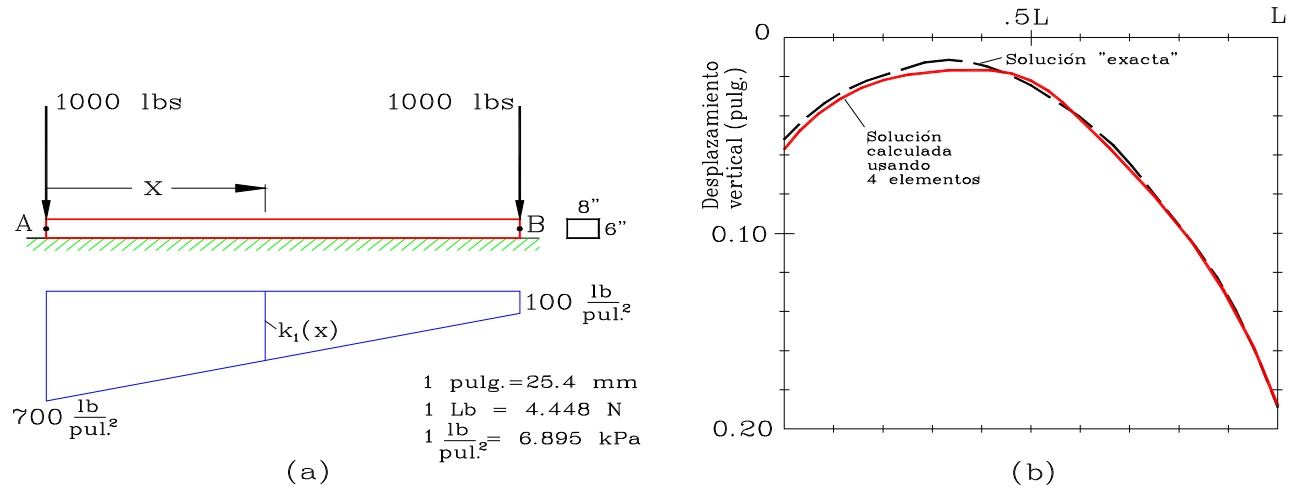
**Solución.** La matriz de rigidez básica (sin desplazamientos axiales), y la matriz de rigidez elástica consistente  $[K_s]$  de la viga ya evaluada, utilizando el método propuesto, son:

$$[K] = \begin{bmatrix} 1.2 \times 10^7 & & & & \text{Simétrico} \\ 0.6 \times 10^7 & 1.2 \times 10^7 & & & \\ 0.015 \times 10^7 & 0.015 \times 10^7 & 2500 & & \\ -0.015 \times 10^7 & -0.015 \times 10^7 & -2500 & 2500 & \end{bmatrix}$$

$$[K_s] = \begin{bmatrix} 0.7817132 \times 10^7 & & & & \text{Simétrico} \\ -0.493714 \times 10^7 & 0.534851 \times 10^7 & & & \\ 0.0384 \times 10^7 & -0.01886 \times 10^7 & 25028.57 & & \\ 0.0168 \times 10^7 & 0.02194 \times 10^7 & 6171.43 & 10628.58 & \end{bmatrix}$$

Aplicando la ecuación (3) y considerando que los grados de libertad 1, 2, 3 y 4 son libres (esto es, las rotaciones y deflexiones verticales en A y B), se obtiene la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} 1.981713 \times 10^7 & & & & \text{Simétrico} \\ 0.106286 \times 10^7 & 1.734858 \times 10^7 & & & \\ 0.0534 \times 10^7 & -38571.44 & 27528.57 & & \\ 17999.66 & -369428.9 & 3671.43 & 13128.582 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \\ P \end{bmatrix}$$



**Figura 8: Ejemplo 1: Viga Prismática sobre un suelo cuyo módulo varía linealmente (Tomado de Hetenyi 1946, pág. 111): a) Modelo Estructural; b) Resultados calculados-versus-los "exactos"**

La solución a este sistema de ecuaciones es:  $\theta_1 = 1.82 \times 10^{-6} P$ ;  $\theta_2 = 3.86 \times 10^{-6} P$ ;  $\delta_1 = 5.393 \times 10^{-5}$ ; y  $\delta_2 = 17.493 \times 10^{-5} P$  (Nótese que P debe ser expresado en libras y los resultados son en radianes y pulgadas, respectivamente). Utilizando un solo elemento de viga estos resultados son comparables con los presentados por Hetenyi, ( $\delta_1 = 5.183 \times 10^{-5} P$  y  $\delta_2 = 18.903 \times 10^{-5} P$ ). Los resultados de las deflexiones verticales de análisis llevado a cabo con 4 elementos son presentados en la fig. 8b, mostrando excelentes acuerdos con los resultados teóricos (discrepancias del 1%).

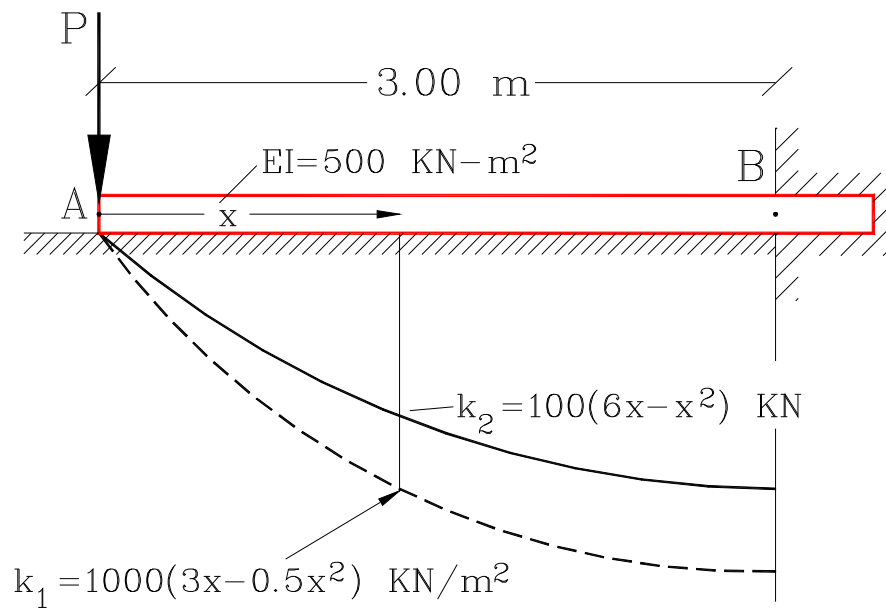
**Ejemplo 2. Viga prismática en voladizo soportada por un suelo variable de dos parámetros**

Determinar la deflexión de la viga prismática que se muestra en la fig. 9. La viga descansa sobre un suelo variable de dos parámetros. Utilizando un solo elemento, evalúe las diferentes matrices de rigidez y compare la deflexión con la presentada por Eisenberger y Clastornik (1987, pág. 1462). Suponga que:  $EI=500 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$ ;  $L = 3.0 \text{ m}$ ;  $k_1 = (3x-x^2/2) \times 10^3 \text{ kN/m}$ ;  $k_2 = (6x-x^2) \times 100 \text{ kN}$ ;  $P = 10 \text{ kN}$ .

**Solución.** La matriz de rigidez básica de la viga (ignorando las deformaciones axiales) y las matrices del suelo fueron calculadas y los resultados son los siguientes:

$$[K] = \begin{bmatrix} 666.66 & & & \text{Simétrico} \\ 333.33 & 666.66 & & \\ 333.33 & 333.33 & 222.22 & \\ -333.33 & -333.33 & -222.22 & 222.22 \end{bmatrix}$$

$$[K_s] = \begin{bmatrix} 744.94 & & & \text{Simétrico} \\ -691.73 & 1064.19 & & \\ 1188.35 & -940.04 & 2104.74 & \\ 1046.46 & -2039.70 & 1371.63 & 5084.48 \end{bmatrix}$$



**Figura 9: Ejemplo 2: Viga prismática sobre un suelo elástico variable de dos parámetros (Tomado de Eisenberger y Clastornick 1987, pág.1462).**

$$[K_s] = \begin{bmatrix} 128.57 & \text{Simétrico} & & \\ -51.43 & 308.57 & & \\ 115.71 & 25.71 & 257.14 & \\ 115.71 & -25.71 & -257.14 & 257.14 \end{bmatrix}$$

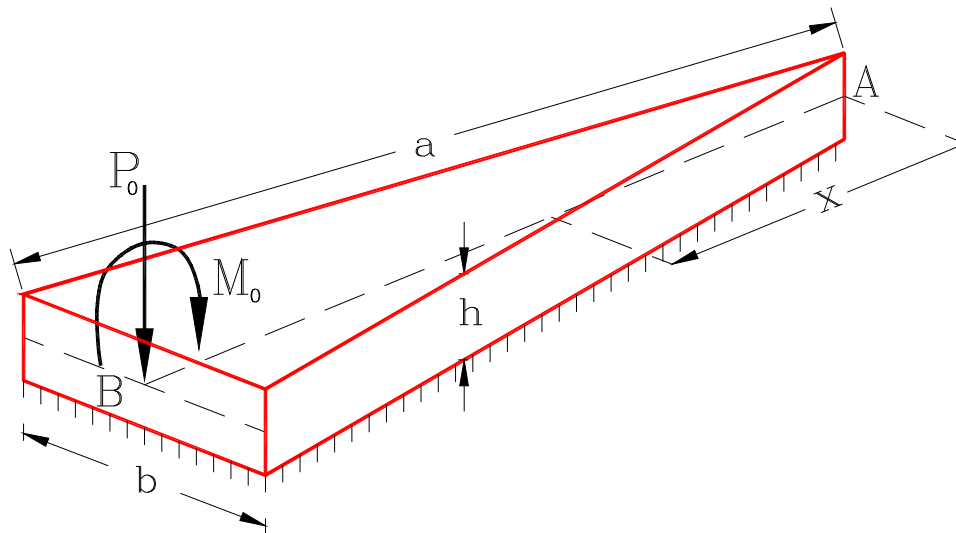
Aplicando la ecuación (3) y considerando que sólo los grados de libertad 1 y 3 son libres (esto es, la rotación y la deflexión vertical en A), se obtiene la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} 666.66 + 744.94 + 128.57 & \text{Simétrico} \\ 333.33 + 1188.35 + 115.71 & 222.22 + 2104.74 + 257.14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \end{bmatrix}$$

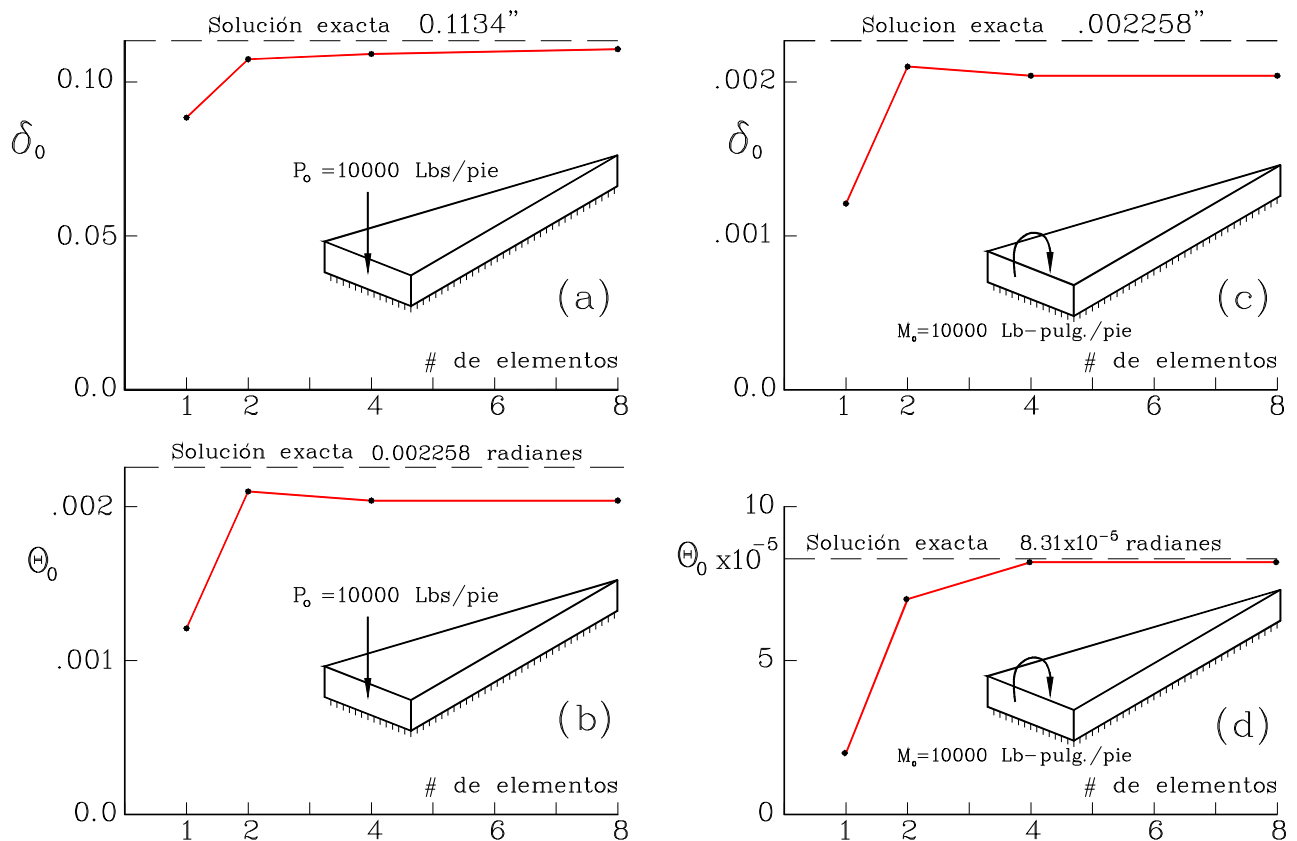
La solución de este sistema de ecuaciones es:  $\theta_a = 1.06309$  rad, y  $\theta_b = 1.19$  cm, la cual es sólo 10.5% más baja que la solución de 1.33 cm presentada por Eisenberger y Clastornik (1987). Nótese que el efecto de  $[K_s]$  en la matriz de rigidez total es significativo en este ejemplo.

### Ejemplo 3. Viga de ancho variable (cuña) sobre un medio elástico tipo Winkler

Determinar los desplazamientos a lo largo de la orilla de una placa circular sujeta a cargas de orilla uniformemente distribuidas  $P_o$  y  $M_o$  por unidad de longitud circunferencial. Suponga que una buena aproximación al problema sería la solución de una cuña de ancho linealmente variable, como lo sugiere Hetenyi (1946, pág. 100) y que se muestra en la fig. 10. Compare los resultados obtenidos con las expresiones presentadas por Hetenyi (1946, pág. 108). Resuelva para el caso cuando:  $E = 4.25 \times 10^6$  lb/pulg.<sup>2</sup> ( $2.930 \times 10^7$  kPa);  $\nu$  = relación de Poisson = 1/4;  $a$  = radio de la placa = 360 pulg. (9.144 m);  $t$  = espesor de losa = 12 pulg. (0.3048 m);  $k_1$  = módulo de la fundación = 300 lb/pulg.<sup>3</sup> (81437 kPa/m).



**Figura 10: Ejemplo 3: Viga de ancho linealmente variable sujeta a una carga uniformemente distribuida  $P_0$  y a un momento flector uniforme  $M_0$  (Tomado de Hetenyi 1946, págs. 100-108).**

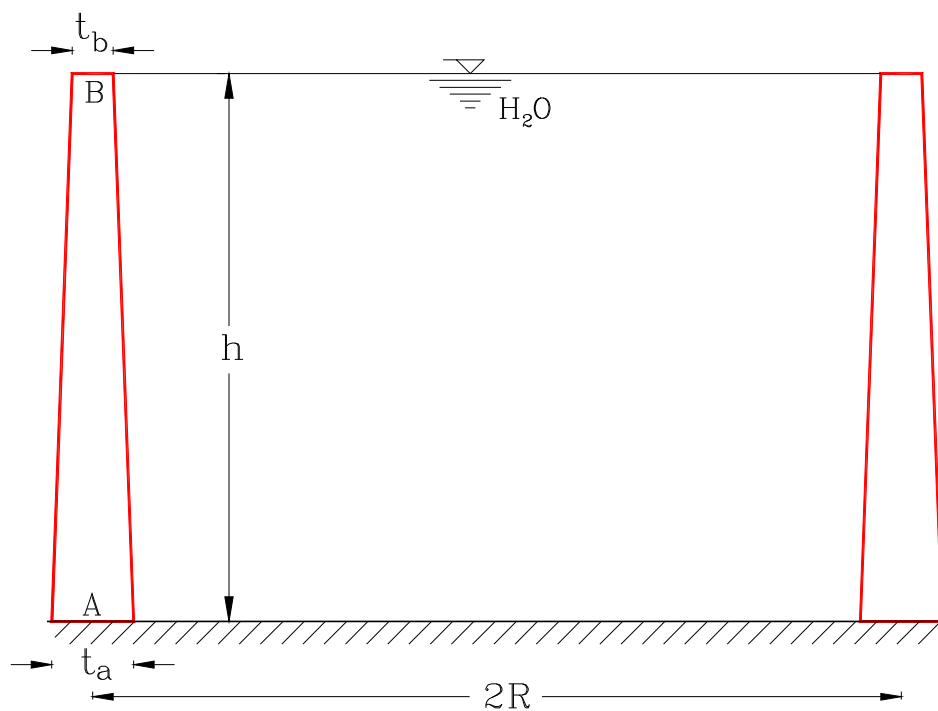


**Figura 11: Ejemplo 3: a) Desplazamientos en el extremo (para  $P_0=10,000$  lbs/pie); b) Rotaciones en el extremo (para  $P_0=10,000$  lbs/pie); c) Desplazamientos en el extremo (para  $M_0=10,000$  lb-pulg./pie); d) Rotaciones en el extremo (para  $M_0=10,000$  lb-pulg./pie).**

**Solución.** Este problema fue resuelto utilizando cuatro modelos de 1, 2, 4, y 8 segmentos de viga, respectivamente. Los desplazamientos y rotaciones finales que se obtienen utilizando estos cuatro modelos son comparados con los valores "exactos" calculados de las expresiones simples de Hetenyi en las figs. 11a-d. Nótese que la rata de convergencia es excelente ya que con solo dos segmentos de viga, los errores en el desplazamiento final y en la rotación son menos del 6% y 15%, respectivamente.

#### Ejemplo 4: Tanque cilíndrico de espesor de pared variable

Determinar el momento flector y la distribución de la fuerza a cortante a lo largo de la pared de un tanque cilíndrico sometido a presión hidrostática (fig. 12). Suponga las siguientes dimensiones:  $R$ = radio del tanque= 360 pulg. (9.144 m);  $h$ = altura de la pared=312 pulg. (7.925 m);  $t_a$ = espesor de pared en la base=14 pulg. (0.356 m);  $t_b$ = espesor de pared en la parte superior= 3.5 pulg.(0.089 m). El material es concreto reforzado con:  $E= 4.25 \times 10^6$  lb/pulg.<sup>2</sup> ( $2.930 \times 10^7$  kPa);  $\nu$ = relación de Poisson=1/4, y el tanque esta lleno de agua con gravedad específica=0.0361 lbs/pulg.<sup>3</sup> ( $9.8$  kN/m<sup>3</sup>).



**Figura 12: Ejemplo 4: Tanque cilíndrico con espesor de pared linealmente variable (Tomado de Hetenyi 1946, págs. 100-108).**

**Solución.** Este problema fue resuelto utilizando cuatro modelos diferentes de 1, 2, 4, y 8 segmentos de viga, respectivamente. La distribución del momento flector y de la fuerza cortante a lo largo de la altura de la pared obtenida para los cuatro modelos son presentados en una lista en la Tabla 1.

El momento flector y la fuerza cortante por unidad circunferencial en la base de 14547 lb-pulg./pulg., y 548 lb/pulg. (obtenidos utilizando 8 segmentos de viga), respectivamente, son sólo 5% y 4% mayores que los calculados por Hetenyi de 13860 lb-pulg./pulg. y 527 lb/pulg.

Tabla 1

	Momento Flector (Lb-pul./pul.)				Fuerza Cortante (Lb/pul.)			
	# de Elementos				# de Elementos			
puntos	1	2	4	8	1	2	4	8
h	0	0	0	0	0	0	0	0
7/8h				54				-1
3/4h		0	-66	-69			0.4	0.3
5/8h				-96				-3
1/2h		-259	-423	-428		-26	-16	-16
3/8h				-1,339				-29
1/4h			-2,017	2,069			4	6
1/8h				929				179
base	49,380	19,010	14,801	14,547	1,039	6.58	558	548

## CONCLUSIONES

Un algoritmo que determina la matriz de rigidez básica, las matrices correspondientes a un suelo de fundación elástica variable de "dos parámetros" (esto es, las matrices de rigidez elásticas y geométricas) y los momentos y fuerzas fijas equivalentes de una viga-columna sobre un suelo o medio elástico variable de dos parámetros se discuten en su totalidad. Estos incluyen vigas acarteladas y prismáticas sometidas a cargas transversales soportadas en un suelo elástico no uniforme de "dos parámetros". El algoritmo propuesto encuentra gran aplicabilidad en el análisis de: 1) tanques cilíndricos de espesor variable; 2) marcos estructurales apoyados sobre condiciones de suelo complejas, tales como pilas, en las que la rigidez del suelo varía con la profundidad; y 3) estabilidad de marcos estructurales o pórticos sobre fundaciones elásticas. Se presentan cuatro métodos analíticos reconocidos.

Este estudio indica que: 1) por intermedio del método de la viga conjugada y de un método de integración numérica adecuado, el análisis de estructuras de vigas prismáticas y no prismáticas, tanques cilíndricos de espesor variable, y sistemas de pilas sobre condiciones de suelo no uniformes, se pueden llevar a cabo de una forma sistemática utilizando el método clásico matricial de análisis de estructuras; 2) la formulación consistente del Método de Elementos Finitos es una manera conveniente de analizar estructuras de vigas sobre fundaciones elásticas no uniformes desde el punto de vista computacional tal como lo concluyó Eisenberger y Clastornik (1987).

## REFERENCIAS

- Aristizábal-Ochoa, J. Darío (1987). "Tapered beam and column elements in unbraced frame structures," *Journal of Computing in Civil Engineering*, 1 (1), 35-49.
- Aristizábal-Ochoa, J. Darío (1993). "Static, stability and vibration of nonprismatic beams and columns," *Journal of Sound and Vibration*, 162 (3), 441-455.
- Eisenberger, M. and Clastornik J. (1987). "Beams on variable two-parameter elastic foundation," *Journal of Engineering Mechanics*, 113 (10), 1454-1466.
- Head, M. C. and Aristizábal-Ochoa J. Darío (1987). "Analysis of nonprismatic and linearly tapered reinforced concrete columns," *Journal of Structural Engineering*, 113 (3), 575-589.
- Hetenyi, M., (1946). "Beams on Elastic Foundation," *The University of Michigan Press*, Ann Arbor, Mich., 100-111.
- Scott, R. F., (1981). *Foundation Analysis*, Prentice Hall, 88 -114.
- Zhaohua, F. and Cook D. R., (1983). "Beam elements on two-parameter elastic foundations," *Journal of Engineering Mechanics*, 109 (6), 1390-1402.