

# Cálculo de inestabilidades de un proceso de solidificación en dominios a simetría cilíndrica. Parte II: Resultados numéricos

Arnoldo Badillo y Mario Durán

Centro de Minería, Facultad de Ingeniería  
Pontificia Universidad Católica de Chile  
Av. Vicuña Mackenna 4860, Macul  
Casilla 306, Santiago 22, Chile  
Tel.: 56-2-354 58 94; Fax: 56-2-354 58 05  
e-mail: abadillo@ing.puc.cl; mduran@ing.pucl.cl

Elva Ortega-Torres

Departamento de Matemáticas  
Universidad de Antofagasta  
Casilla 170, Antofagasta, Chile  
Tel.: 56-55-637 864; Fax: 56-55-637 803  
e-mail: eortega@uantof.cl

## Resumen

Mediante la simulación numérica de un modelo estacionario que describe un proceso de solidificación de una aleación binaria en un dominio a simetría cilíndrica, estudiamos el fenómeno de bifurcación o pérdida de estabilidad, que está en la base de un sinnúmero de problemas en el ámbito del diseño industrial y en las aplicaciones de nuevas tecnologías. Combinando la técnica numérica de diferencias finitas y el análisis espectral, se obtienen óptimas aproximaciones para los valores numéricos de los parámetros que gobiernan dichos fenómenos de inestabilidad.

## COMPUTATION OF INSTABILITIES OF A SOLIDIFICATION PROCESS IN AXISYMMETRICAL DOMAINS. PART II: NUMERICAL RESULTS

## Summary

Through the numerical simulation of a stationary model that describes the solidification process of a binary alloy considered on an axisymmetrical domain, we study the bifurcation phenomenon or loss of stability, which it is the basis of a lot problems in the field of industrial design and applications on new technologies. Considering the numerical method of finite differences together the spectral analysis, we obtain optimum approximations for values of parameter which describes the instability phenomenon.

## INTRODUCCIÓN

La solidificación de metales y aleaciones involucra una gran cantidad de variables y fenómenos físicos, que generan complicaciones tanto desde el punto de vista metalúrgico como desde su modelación matemática. A modo de concepto general, el proceso de solidificación puede considerarse como un cambio en el ordenamiento atómico desde un estado amorfo a una estructura ordenada, conocida como estructura cristalina, que incluye dos fenómenos fundamentales tales como la nucleación y el crecimiento de cristales, las cuales producen diferencias en el proceso cuando se trata de sustancias puras o mezclas. Cuando se está en presencia de sustancias puras, podemos citar la solidificación de metales, en la cual se genera un frente de solidificación plano, el cambio de fase se produce a la temperatura de solidificación. Esta temperatura no es una propiedad del metal, puesto que depende de

las condiciones de enfriamiento y del tipo de nucleación (homogénea o heterogénea). En la solidificación de mezclas nos podemos referir a la solidificación de aleaciones, donde no existe un frente de solidificación plano, sino más bien se genera un crecimiento dendrítico, debido a la diferencia de solubilidad de la zona en estado líquido y la zona en estado sólido. Este crecimiento dendrítico produce una zona de coexistencia de sólido y líquido, llamada zona pastosa, en la cual el conocimiento de las propiedades físicas representa un gran desafío científico e ingenieril.

Para modelar el proceso de solidificación, es necesario tener en cuenta diversos conceptos, que van desde la termodinámica clásica hasta los modelos de mecánica de fluidos en medios porosos, pasando por la transferencia de calor y la transferencia de materia. Más aún, para estudiar el problema y estimar a priori si la solución obtenida es representativa del proceso en estudio, es necesario conocer las condiciones bajo las cuales los modelos matemáticos de solidificación tienen solución única. En vista de esto, nuestro objetivo en este artículo es proponer un método numérico eficaz para determinar los valores de ciertos parámetros físicos que pueden crear inestabilidades, y, por lo tanto, producir bifurcación de la(s) solución(es) de un modelo matemático que intenta describir un proceso de solidificación de una aleación binaria confinada en un dominio a simetría cilíndrica.

### El modelo de solidificación para una aleación binaria

El proceso de solidificación en una mezcla binaria está controlado por diversas variables, tales como las variables termodinámicas de concentración de soluto y la temperatura en el molde y de adherencia, las cuales determinan el estado de la materia a través del diagrama de fase (Figura 2). Como referencia podemos citar 19, 21, 1, 15, 17 y 18.

En el dominio se pueden distinguir tres regiones, dependientes de la concentración  $c$  y de la temperatura  $\theta$ . Denotando por  $\Omega$  el molde en el cual se ha vertido la materia fundida,  $\Omega_l$ ,  $\Omega_m$  y  $\Omega_s$  representan a las regiones ocupadas por la materia en estado líquido, mezcla (coexistencia de sólido y líquido conocida como zona pastosa) y sólido, respectivamente. Además, se identifican las interfases entre estos tres subdominios, llamando  $\Gamma_{ml}$  la interfase mezcla-líquido y  $\Gamma_{sm}$  la interfase sólido-mezcla y con el objeto de considerar condiciones en los límites, se fijan notaciones para tres regiones de la frontera exterior  $\partial\Omega$ .

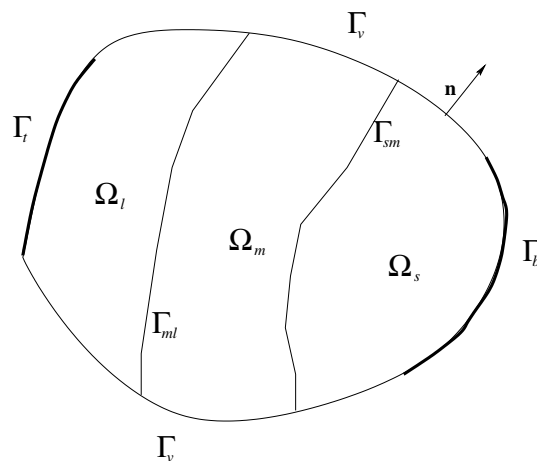


Figura 1. Molde de solidificación

En la región mezcla sólido-líquido se define una función que indica la fracción de materia que se encuentra aún en estado sólido  $f_s$  (fracción sólida) y líquido  $f_l$  (fracción líquida) por unidad de volumen. Claramente,  $f_l = 1 - f_s$  y  $f_s$  depende de la concentración  $c$  y de la temperatura  $\theta$ .

Para modelar el fenómeno de transporte en la región mezcla, se definen las funciones de concentración de soluto en fase líquida  $c_l$  y en fase sólida  $c_s$ , y entonces la función incógnita de concentración  $c$  que interviene en las ecuaciones es definida como  $c = c_l(1 - f_s) + c_s f_s$ .

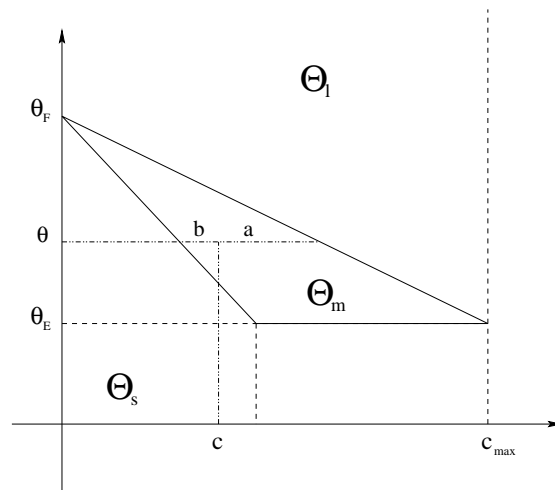


Figura 2. Diagrama de fase

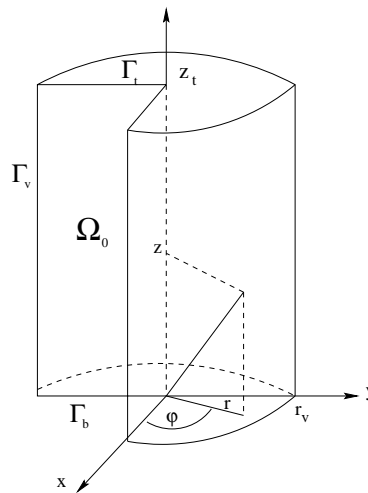


Figura 3. Molde de solidificación con simetría cilíndrica

De hecho, las funciones  $f_l$ ,  $f_s$ ,  $c_l$ ,  $c_s$  y la descripción de las diferentes regiones del molde  $\Omega$  son determinadas de manera precisa utilizando el diagrama de fase<sup>10</sup>.

Durante el proceso de solidificación, a medida que pasa el tiempo, las zonas  $\Omega_l$ ,  $\Omega_m$  y  $\Omega_s$  irán apareciendo, evolucionando y desapareciendo. De esta manera se generará un gradiente de concentración y de temperatura, que sumado a la acción de la fuerza de gravedad, que actúa sobre la aleación, puede desarrollar un movimiento de velocidad  $\mathbf{v}$  y campo de presión

$p$  en el interior de la mezcla,  $\Omega_{ml} \equiv \Omega_l \cup \Gamma_{ml} \cup \Omega_m$ . Así el fenómeno de transporte en la región de mezcla es modelado mediante las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles acopladas con términos de fuerzas (externa e interna), esto es<sup>15</sup>

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{v} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{F}_i(c, \theta, \mathbf{v}) + \nabla p = \mathbf{F}_e(c, \theta) \quad \text{en } \Omega_{ml} \times (0, T] \quad (1)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad \text{en } \Omega_{ml} \times (0, T] \quad (2)$$

donde  $\rho$  es la densidad media de la mezcla (considerada constante) y  $\nu$  la viscosidad dinámica. La fuerza externa neta  $\mathbf{F}_e(\cdot, \cdot)$  es la flotación del fluido y está dada por la diferencia entre la fuerza ascendente o empuje, que es representada por la aproximación de Boussinesq, y el peso específico del fluido\*

$$\mathbf{F}_e(c, \theta) = \rho \mathbf{g}(\alpha(\theta - \theta_r) + \beta(c_l(c, \theta) - c_r))$$

siendo  $\mathbf{g} = (0, 0, -g)^t$  la fuerza gravitacional,  $\alpha$  y  $\beta$  constantes reales conocidas y  $(c_r, \theta_r)$  valores de referencia para la temperatura y la concentración.

El término  $\mathbf{F}_i(\cdot, \cdot, \cdot)$  representa la fuerza en el interior de un material poroso que se opone al movimiento del fluido. Es conocida como la ley de Carman-Kozeny y está dada por ( $C_0 > 0$ )

$$\mathbf{F}_i(c, \theta, \mathbf{v}) = \mathcal{K}(c, \theta) \mathbf{v} \quad \text{donde} \quad \mathcal{K}(c, \theta) = C_0 \frac{f_s^2(c, \theta)}{[1 - f_s(c, \theta)]^3}$$

Los procesos de difusión de la concentración y de transferencia de calor en una aleación binaria se deducen considerando las leyes de conservación de soluto en la mezcla y de la energía, descrita por un sistema no lineal de ecuaciones parabólicas, que involucran como variables la concentración, la temperatura y la velocidad. Estas ecuaciones toman en cuenta los fenómenos de difusión y transporte y son simplificadas usando las leyes de Fourier y Fick<sup>19,21</sup>. Así se tiene el sistema

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \eta \Delta c + \mathbf{v} \cdot \nabla c_\ell(c, \theta) = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, T] \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} H(c, \theta) - \kappa \Delta \theta + \rho C_p \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, T] \quad (4)$$

donde  $\eta$  y  $\kappa$  son dos constantes reales estrictamente positivas representando el coeficiente de difusión del soluto y la conductividad térmica, respectivamente. La función  $c_\ell(\cdot, \cdot)$  es la concentración líquida y la función  $H(\cdot, \cdot)$  es la entalpía, las cuales dependen de manera no lineal de  $(c, \theta)$ .

Las condiciones iniciales son funciones regulares, las cuales son determinadas a partir del momento en que se vierte la materia fundida en el molde de solidificación.

Las condiciones en los límites consideradas son: adherencia del fluido sobre  $\Gamma_t \cup \Gamma_b$ , el flujo normal y el esfuerzo tangencial nulos sobre  $\Gamma_v$ ; el flujo normal de concentración nulo sobre  $\partial\Omega$ ; la concentración total de soluto fija en el dominio; la temperatura conocida sobre  $\Gamma_t \cup \Gamma_b$  y la pared adiabática en  $\Gamma_v$ .

Para el modelo estacionario asociado se tienen varios trabajos sobre la existencia y unicidad de solución. Podemos citar algunos de ellos: 2, 6, 7, 8, 9, 17 y 16.

\* En el artículo<sup>10</sup> se escribió  $F_e(\cdot, \cdot)$  erróneamente como la aproximación de Boussinesq y no como la variación de ésta en torno del equilibrio.

## EL MODELO ESTACIONARIO EN UN DOMINIO CILÍNDRICO

Considerando las hipótesis geométricas sobre el dominio, el modelo estacionario de solidificación en coordenadas cilíndricas está dado como sigue<sup>10</sup>: encontrar funciones  $(c, \theta, \mathbf{v}, p) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^6$ , no todas nulas, satisfaciendo las ecuaciones:

*Difusión de la concentración*

$$-\eta \Delta c + \mathbf{v} \cdot \nabla c_\ell(c, \theta) = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (5)$$

$$\frac{\partial c}{\partial n} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad (6)$$

$$\int_{\Omega} c \, dx = c_g \quad (7)$$

*Transferencia de calor*

$$-\kappa \Delta \theta + \rho C_p \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (8)$$

$$\theta = \theta_b \quad \text{sobre } \Gamma_b \quad (9)$$

$$\theta = \theta_t \quad \text{sobre } \Gamma_t \quad (10)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_v \quad (11)$$

*Ecuaciones de transporte*

$$-\nu \Delta \mathbf{v} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathcal{K}(c, \theta) \mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{F}_e(c, \theta) \quad \text{en } \Omega_{ml} \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial z}(rv_z) = 0 \quad \text{en } \Omega_{ml} \quad (13)$$

$$\mathbf{v} = 0 \quad \text{en } \Omega_s \quad (14)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_b \cup \Gamma_t \quad (15)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_v \quad (16)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_v \quad (17)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - v_\varphi = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_v \quad (18)$$

siendo  $c_g$  la cantidad total de soluto en la mezcla;  $C_p$  la capacidad calórica,  $\theta_b(\cdot)$ ,  $\theta_t(\cdot)$  funciones conocidas que entregan la temperatura inferior y superior en el molde de solidificación;  $\mathbf{n}$  denota el vector normal exterior unitario a la superficie  $\partial\Omega$ .

## PERTURBACIÓN LINEAL DEL PROBLEMA

Asumiendo que el sistema es homogéneo, se determina una solución trivial  $U_{ob} = (c_{ob}, \theta_{ob}, \mathbf{v}_{ob}, p_{ob})$  del problema (5)–(18). Entonces, considerando la perturbación  $U = (c, \theta, \mathbf{v}, p)$  y reemplazando  $U_{ob} + U$  en las ecuaciones (5)–(18), teniendo en cuenta solamente los términos de primer orden, se obtiene el problema perturbado asociado, el cual es formulado como un problema de bifurcación(es) en función de la constante física  $\mu = \theta_t - \theta_b$ .

Es importante resaltar que la solución trivial  $U_{ob}$  depende explícitamente del parámetro  $\mu$ <sup>10</sup>, lo cual nos llevará a obtener problema de valores propios no estándar, puesto que el valor propio a ser determinado dependerá de  $\mu$ .

### El problema perturbado

El problema perturbado o estudio de estabilidad lineal del sistema (5)–(18) es encontrar los valores de  $\mu \in \mathbb{C}$  para los cuales existan funciones  $(c, \theta, \mathbf{v}, p) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^6$ , no todas nulas, satisfaciendo las ecuaciones

$$-\eta \Delta c + \mu S \mathbf{v} \cdot \hat{k} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (19)$$

$$\frac{\partial c}{\partial n} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \quad (20)$$

$$\int_{\Omega} c \, dx = 0 \quad (21)$$

$$-\kappa \Delta \theta + \mu P \mathbf{v} \cdot \hat{k} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (22)$$

$$\theta = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_b \cup \Gamma_t, \quad (23)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_v \quad (24)$$

$$-\nu \Delta \mathbf{v} + \nabla p + \mathcal{K}(c_{ob}, \theta_{ob}) \mathbf{v} = G_{\theta} \theta \cdot \hat{k} + G_c c \cdot \hat{k} \quad \text{en } \Omega_{ml} \quad (25)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial z}(rv_z) = 0 \quad \text{en } \Omega_{ml} \quad (26)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega_s \quad (27)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_b \cup \Gamma_t \quad (28)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_v \quad (29)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_v \quad (30)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial r} - v_{\varphi} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_v \quad (31)$$

$$\text{siendo } P = \frac{\rho C_p}{h}, \quad S = \begin{cases} 0 & \text{si } (r, \varphi, z) \in \Omega_s \cup \Omega_l \\ -\frac{k_{\max}}{h} & \text{si } (r, \varphi, z) \in \Omega_m \end{cases}$$

$$G_{\theta} = \begin{cases} -\rho g \alpha & \text{si } (r, \varphi, z) \in \Omega_l \\ -\rho g (\alpha - \beta k_{\max}) & \text{si } (r, \varphi, z) \in \Omega_m \end{cases}$$

$$G_c = \begin{cases} -\rho g \beta & \text{si } (r, \varphi, z) \in \Omega_l \\ 0 & \text{si } (r, \varphi, z) \in \Omega_m \cup \Omega_s \end{cases}$$

### MODELO PERTURBADO EN UN DOMINIO A SIMETRÍA CILÍNDRICA

Para describir una sección transversal, generando todo el volumen  $\Omega$ , adoptamos la siguiente descripción geométrica

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_0 \times [0, 2\pi), & \Gamma_t &= \Gamma_t \times [0, 2\pi) \\ \Gamma_v &= \Gamma_v \times [0, 2\pi), & \Gamma_b &= \Gamma_b \times [0, 2\pi) \end{aligned}$$

donde  $\Omega_0 = \{(r, z) \mid 0 < r < r_v, \quad 0 < z < z_t\}$  y  $\partial\Omega_0 = \Gamma_0 \cup \Gamma_b \cup \Gamma_t \cup \Gamma_v$  siendo  $\Gamma_0 = \{(r, z) \mid r = 0, \quad 0 < z < z_t\}$ .

Entonces, aprovechando la simetría cilíndrica del dominio, las funciones  $(c, \theta, \mathbf{v}, p)$  del modelo perturbado (19)–(31) son descompuestas en sus respectivas series de Fourier en torno del eje azimutal. Así las funciones incógnitas son obtenidas como suma de elementos más simples, en el sentido de que se reduce el número de coordenadas espaciales a dos, que son  $r$  y  $z$ . Más precisamente, considerando la base de funciones pares de  $L^2(0, 2\pi)$ ,  $\{1/\sqrt{2\pi}, ((1/\sqrt{\pi}) \cos kx)_{k \geq 1}\}$ , se tiene

$$c(r, \varphi, z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(r, z) \cos k\varphi \quad (32)$$

$$\theta(r, \varphi, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k(r, z) \cos k\varphi \quad (33)$$

$$\mathbf{v}(r, \varphi, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{v}_k(r, z) \cos k\varphi \quad (34)$$

$$p(r, \varphi, z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(r, z) \cos k\varphi \quad (35)$$

donde  $\forall (r, z) \in \Omega_0$ ,  $\forall k > 0$  los coeficientes se obtienen como sigue

$$\Lambda_k(r, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Lambda(r, z) \cos(k\varphi) d\varphi, \quad \Lambda \in \{c, \theta, v_1, v_2, v_3, p\}$$

Luego, al aplicar (32)–(35) en las ecuaciones (19)–(31)<sup>10</sup>, se obtiene  $\forall k \geq 0$

$$-\eta \Delta_{(r,z)} c_k + \eta \frac{k^2}{r^2} c_k + \mu S \mathbf{v}_k \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0 \quad \text{en } \Omega_0 \quad (36)$$

$$\nabla_{(r,z)} c_k \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega_0 \quad (37)$$

$$\int_{\Omega_0} c_k(r, z) r dr dz = 0 \quad (38)$$

$$-\kappa \Delta_{(r,z)} \theta_k + \kappa \frac{k^2}{r^2} \theta_k + \mu P \mathbf{v}_k \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0 \quad \text{en } \Omega_0 \quad (39)$$

$$\theta_k = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_b \cup \Gamma_t \quad (40)$$

$$\nabla_{(r,z)} \theta_k \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_v \cup \Gamma_0 \quad (41)$$

$$-\nu \left( \Delta_{(r,z)} - \frac{1}{r^2} \right) v_{kr} + \frac{\nu k^2}{r^2} v_{kr} + \frac{\partial p_k}{\partial r} + \mathcal{K}(c_{ob}, \theta_{ob}) v_{kr} = 0 \quad (42)$$

$$-\nu \left( \Delta_{(r,z)} - \frac{1}{r^2} \right) v_{k\varphi} + \mathcal{K}(c_{ob}, \theta_{ob}) v_{k\varphi} = 0 \quad (43)$$

$$-\nu \Delta_{(r,z)} v_{kz} + \frac{\nu k^2}{r^2} v_{kz} + \frac{\partial p_k}{\partial z} + \mathcal{K}(c_{ob}, \theta_{ob}) v_{kz} = G_c c_k + G_\theta \theta_k \quad (44)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r v_{kr}) + \frac{\partial}{\partial z} (r v_{kz}) = 0 \quad \text{en } \Omega_{ml} \quad (45)$$

$$v_{kr} = 0, \quad v_{k\varphi} = 0, \quad v_{kz} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_b \cup \Gamma_t \quad (46)$$

$$v_{kr} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_v \quad (47)$$

$$\frac{\partial v_{kr}}{\partial z} + \frac{\partial v_{kz}}{\partial r} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_v \quad (48)$$

$$\frac{\partial v_{kr}}{\partial \varphi} + r \frac{\partial v_{k\varphi}}{\partial r} - v_{k\varphi} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_v \quad (49)$$

$$k v_{k\varphi} = 0 \quad \text{en } \Omega_{ml} \quad (50)$$

$$k \left( \frac{2\nu}{r} v_{kr} - p_k \right) = 0 \quad \text{en } \Omega_{ml} \quad (51)$$

donde  $\mathbf{v}_k(r, z) = (v_{kr}, v_{k\varphi}, v_{kz})$  y los operadores diferenciales  $\nabla_{(r,z)}$ ,  $\Delta_{(r,z)}$  son definidos como

$$\nabla_{(r,z)} = \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \Delta_{(r,z)} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Además, observando (50) se tiene que cuando  $k = 0$ ,  $v_{k\varphi}$  existe y de (50)–(51) se tiene que cuando  $k \neq 0$ ,  $v_{k\varphi} = 0$  y  $p_k = \frac{2\nu}{r} v_{kr}$ .

Seguidamente, eliminando la presión  $p_k$  de las ecuaciones (42) y (44), haciendo el cambio de variable considerando las funciones escalares  $\psi_k, w_k, \phi_k : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$  tales que

$$\begin{aligned} (v_{kr}, v_{kz}) &= \frac{1}{r} \left( -\frac{\partial \psi_k}{\partial z}, \frac{\partial \psi_k}{\partial r} \right) = -\frac{1}{r} \text{rot } \psi_k \\ w_k &= -r(\text{rot } \mathbf{v}_k)_\varphi = -r \left( \frac{\partial v_{kr}}{\partial z} - \frac{\partial v_{kz}}{\partial r} \right) \\ \phi_k &= r v_{k\varphi} \end{aligned}$$

y denotando el operador diferencial

$$L = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

se tiene que, resolver el problema (36)–(51), es equivalente a encontrar los valores de  $\mu \in \mathbb{C}$  para los cuales existan funciones  $(c_k, \theta_k, \psi_k, w_k, \phi_k) : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^5$ , no todas nulas<sup>10</sup>, tales que

$$-\eta \Delta_{(r,z)} c_k + \eta \frac{k^2}{r^2} c_k + \mu S \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_k}{\partial r} = 0 \quad \text{en } \Omega_0 \quad (52)$$

$$\nabla_{(r,z)} c_k \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \partial \Omega_0 \quad (53)$$

$$\int_{\Omega_0} c_k(r, z) r \, dr \, dz = 0 \quad (54)$$

$$-\kappa \Delta_{(r,z)} \theta_k + \kappa \frac{k^2}{r^2} \theta_k + \mu P \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_k}{\partial r} = 0 \quad \text{en } \Omega_0 \quad (55)$$

$$\theta_k = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_b \cup \Gamma_t \quad (56)$$

$$\nabla_{(r,z)} \theta_k \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_v \cup \Gamma_0 \quad (57)$$

$$\begin{aligned} -\nu L w_k + \left( \frac{\nu k^2}{r^3} + \frac{\mathcal{K}(c_{ob}, \theta_{ob})}{r} \right) w_k - \frac{2\nu k^2}{r^4} \frac{\partial \psi_k}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{K}(c_{ob}, \theta_{ob})}{\partial z} \frac{\partial \psi_k}{\partial z} \\ - G_c \frac{\partial c_k}{\partial r} - G_\theta \frac{\partial \theta_k}{\partial r} = 0 \quad \text{en } \Omega_0 \end{aligned} \quad (58)$$



$$-L\psi_k + \frac{w_k}{r} = 0 \quad \text{en } \Omega_0 \quad (59)$$

$$-\nu L\phi_k + \mathcal{K}(c_{ob}, \theta_{ob}) \frac{\phi_k}{r} = 0 \quad \text{en } \Omega_0 \quad (60)$$

$$\psi_k = 0, \quad w_k = 0, \quad \phi_k = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_0 \cup \Gamma_b \cup \Gamma_t \quad (61)$$

$$\psi_k = 0, \quad w_k = 0, \quad \frac{\partial \phi_k}{\partial r} = \frac{2}{r_v} \phi_k \quad \text{sobre } \Gamma_v \quad (62)$$

$$\frac{k}{r} \phi_k = 0 \quad \text{en } \Omega_0 \quad (63)$$

## MÉTODO DE RESOLUCIÓN

Dado que la solución trivial del modelo (19)–(31), denotada  $U_{ob}$ , contempla el parámetro  $\mu$  en su definición, el modelo perturbado (52)–(63) resulta ser un problema de valores propios no estándar. En efecto, el problema (52)–(63) equivale a encontrar valores de  $\mu \in \mathbb{R}_+$  para los cuales existen funciones  $V = (c_k, \theta_k, \psi_k, w_k, \phi_k) : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^5$ , no todas nulas, tales que

$$A(\mu)V = \mu B(\mu)V \quad (64)$$

donde  $A(\mu)$  y  $B(\mu)$  son las matrices asociadas al sistema que dependen de  $\mu$ . Más aún, si designamos  $M(\mu) = A(\mu) - \mu B(\mu)$ , la ecuación (64) es equivalente a

$$M(\mu)V = 0 \quad (65)$$

La metodología para resolver el problema (52)–(63) consiste en fijar  $\mu \in \mathbb{R}^+$  y resolver el problema

$$M(\mu)V = \lambda(\mu)V \quad (66)$$

Una vez encontrados los valores propios  $\lambda(\mu)$  de (66), se trazan las curvas continuas  $\lambda(\cdot)$  en función de  $\mu$ . Es claro que el vector propio  $V$  correspondiente también dependerá continuamente de  $\mu$ . Así si el valor  $\mu^*$  es tal que

$$\lambda(\mu^*) = 0$$

entonces  $\mu^*$  es solución de (65) y el correspondiente vector propio será solución del problema (52)–(63) y luego solución del problema original (19)–(31).

## MODELO DISCRETO EN UN DOMINIO A SIMETRÍA CILÍNDRICA

Para formular el modelo discreto del problema (52)–(63) es necesario, previamente hacer un análisis detallado sobre las condiciones de borde. En particular, para las condiciones (53) y (57) consideraremos las aproximaciones de segundo orden

$$f'(x) = \frac{-f(x+2h) + 4f(x+h) - 3f(x)}{2h} + O(h^2) \quad (67)$$

$$f'(x) = \frac{3f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{2h} + O(h^2) \quad (68)$$

Condiciones de borde para la concentración  $c_k$

i) Sobre  $\Gamma_v \cup \Gamma_0$ , la normal exterior unitaria  $\mathbf{n}$  es dada como  $\mathbf{n} = (\pm 1, 0)$ , entonces  $\forall z \in (0, z_t)$ , la condición (53) implica

$$\frac{\partial c_k(r_v, z)}{\partial r} = 0 \quad \text{y} \quad -\frac{\partial c_k(0, z)}{\partial r} = 0 \quad (69)$$

Luego, usando las aproximaciones (65) y (64) en (66), se obtiene

$$\frac{3c_k(r_v, z) - 4c_k(r_v - h_1, z) + c_k(r_v - 2h_1, z)}{2h_1} = 0 \quad (70)$$

$$\frac{3c_k(0, z) - 4c_k(h_1, z) + c_k(2h_1, z)}{2h_1} = 0 \quad (71)$$

ii) Sobre  $\Gamma_b \cup \Gamma_t$ , la normal exterior unitaria  $\mathbf{n}$  correspondiente es  $\mathbf{n} = (0, \pm 1)$ , luego  $\forall r \in (0, r_v)$ , la condición (53) implica

$$-\frac{\partial c_k(r, 0)}{\partial z} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial c_k(r, z_t)}{\partial z} = 0 \quad (72)$$

Entonces, usando las aproximaciones (64) y (65) en (69), se tiene

$$\frac{3c_k(r, 0) - 4c_k(r, h_2) + c_k(r, 2h_2)}{2h_2} = 0 \quad (73)$$

$$\frac{3c_k(r, z_t) - 4c_k(r, z_t - h_2) + c_k(r, z_t - 2h_2)}{2h_2} = 0 \quad (74)$$

iii) En las cuatro esquinas del dominio  $\Omega_0$  las condiciones deben ser analizadas cuidadosamente. Estos puntos son  $(0, 0)$ ,  $(r_v, 0)$ ,  $(r_v, z_t)$  y  $(0, z_t)$ .

a) En el punto  $(0, 0)$ , la condición es definida como nivel cero relativo de concentración, por lo que su valor está dado como

$$c_k(0, 0) = 0 \quad (75)$$

b) En el punto  $(r_v, 0)$ , la aproximación de  $c_k$  es dada por (67) con  $z = 0$ , esto es

$$\frac{3c_k(r_v, 0) - 4c_k(r_v - h_1, 0) + c_k(r_v - 2h_1, 0)}{2h_1} = 0 \quad (76)$$

c) En el punto  $(r_v, z_t)$ , en forma similar como para el punto anterior, aproximamos  $c_k$  por (71) con  $r = r_v$ , así

$$\frac{3c_k(r_v, z_t) - 4c_k(r_v, z_t - h_2) + c_k(r_v, z_t - 2h_2)}{2h_2} = 0 \quad (77)$$

d) En el punto  $(0, z_t)$ , la aproximación de  $c_k$  es dada por (68) con  $z = z_t$ , es decir

$$\frac{3c_k(0, z_t) - 4c_k(h_1, z_t) + c_k(2h_1, z_t)}{2h_1} = 0 \quad (78)$$

*Condiciones de borde para la temperatura  $\theta_k$*

i) Sobre  $\Gamma_b \cup \Gamma_t$ , incluyendo las respectivas esquinas, la condición para la temperatura (56) implica que

$$\theta_k = 0 \quad (79)$$

ii) Sobre  $\Gamma_v \cup \Gamma_0$ , la condición (57) es tratada de manera similar que para la concentración, pero sin consideraciones especiales para las esquinas. Así se tiene

$$\frac{3\theta_k(r_v, z) - 4\theta_k(r_v - h_1, z) + \theta_k(r_v - 2h_1, z)}{2h_1} = 0 \quad (80)$$

$$\frac{3\theta_k(0, z) - 4\theta_k(h_1, z) + \theta_k(2h_1, z)}{2h_1} = 0 \quad (81)$$

*Condiciones de borde para  $\phi_k$  sobre  $\Gamma_v$*

De la condición (62) y la aproximación (65), se obtiene

$$\frac{3\phi_k(r_v, z) - 4\phi_k(r_v - h_1, z) + \phi_k(r_v - 2h_1, z)}{2h_1} = \frac{2}{r_v} \phi_k(r_v, z) \quad (82)$$

### Formulación del problema discreto

Para las variables espaciales  $r$  y  $z$  consideramos la discretización siguiente:

$$r_i = ih_1 \quad \text{donde } h_1 = \frac{r_v}{N+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N+1 \quad (83)$$

$$z_j = jh_2 \quad \text{donde } h_2 = \frac{z_t}{M+1}, \quad j = 0, 1, \dots, M+1 \quad (84)$$

Luego, denotando  $f^{i,j} = f(r_i, z_j)$ , por el método de diferencias finitas se tiene las siguientes aproximaciones

$$\frac{\partial f^{i,j}}{\partial r} \approx \frac{f^{i+1,j} - f^{i-1,j}}{2h_1}, \quad \frac{\partial^2 f^{i,j}}{\partial r^2} \approx \frac{f^{i+1,j} - 2f^{i,j} + f^{i-1,j}}{h_1^2} \quad (85)$$

$$\frac{\partial f^{i,j}}{\partial z} \approx \frac{f^{i,j+1} - f^{i,j-1}}{2h_2}, \quad \frac{\partial^2 f^{i,j}}{\partial z^2} \approx \frac{f^{i,j+1} - 2f^{i,j} + f^{i,j-1}}{h_2^2} \quad (86)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \right) f^{i,j} \approx \frac{f^{i,j+1} - 2f^{i,j} + f^{i,j-1}}{i h_1 h_2^2} \quad (87)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) f^{i,j} \approx \frac{1}{h_1^3} \left[ \frac{2}{2i-1} f^{i-1,j} - \left( \frac{2}{2i-1} + \frac{2}{2i+1} \right) f^{i,j} + \frac{2}{2i+1} f^{i+1,j} \right] \quad (88)$$

Entonces, con las notaciones (80)–(85), para obtener la ecuación discreta de la difusión de la concentración, discretizamos la ecuación (52) y las condiciones de borde (67), (68), (70)–(75); para obtener la ecuación discreta de transferencia de calor, discretizamos la ecuación (55) y las condiciones de borde (76)–(78) y para obtener la ecuación discreta de transporte discretizamos las ecuaciones (58)–(60) y las condiciones de borde (61)–(63) y (79). Así se obtiene el modelo perturbado discreto en un dominio a simetría cilíndrica:

*Difusión de la concentración*

$$\begin{aligned} \eta \left[ 2i h_1 \left( \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right) + \frac{k^2}{i h_1} \right] c_k^{i,j} + \eta \left( \frac{1-2i}{2h_1} \right) c_k^{i-1,j} - \eta \left( \frac{1+2i}{2h_1} \right) c_k^{i+1,j} \\ - \eta \left( \frac{i h_1}{h_2^2} \right) (c_k^{i,j-1} + c_k^{i,j+1}) + \frac{\mu S}{2h_1} (\psi_k^{i+1,j} - \psi_k^{i-1,j}) = 0 \quad \text{en } \Omega_0 \end{aligned} \quad (89)$$

$$c_0^{0,0} = 0 \quad (90)$$

$$\frac{3}{2h_2} c_k^{i,0} - \frac{4}{2h_2} c_k^{i,1} + \frac{1}{2h_2} c_k^{i,2} = 0 \quad 1 \leq i \leq N \quad (91)$$

$$\frac{3}{2h_1} c_k^{N+1,0} - \frac{4}{2h_1} c_k^{N,0} + \frac{1}{2h_1} c_k^{N-1,0} = 0 \quad (92)$$

$$\frac{3}{2h_1} c_k^{0,j} - \frac{4}{2h_1} c_k^{1,j} + \frac{1}{2h_1} c_k^{2,j} = 0 \quad 1 \leq j \leq M \quad (93)$$

$$\frac{3}{2h_1} c_k^{N+1,j} - \frac{4}{2h_1} c_k^{N,j} + \frac{1}{2h_1} c_k^{N-1,j} = 0 \quad 1 \leq j \leq M \quad (94)$$

$$\frac{3}{2h_1} c_k^{0,M+1} - \frac{4}{2h_1} c_k^{1,M+1} + \frac{1}{2h_1} c_k^{2,M+1} = 0 \quad (95)$$

$$\frac{3}{2h_2} c_k^{i,M+1} - \frac{4}{2h_2} c_k^{i,M} + \frac{1}{2h_2} c_k^{i,M-1} = 0 \quad 1 \leq i \leq N \quad (96)$$

$$\frac{3}{2h_2} c_k^{N+1,M+1} - \frac{4}{2h_2} c_k^{N+1,M} + \frac{1}{2h_2} c_k^{N+1,M-1} = 0 \quad (97)$$

*Transferencia de calor*

$$\begin{aligned} \kappa \left[ 2i h_1 \left( \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right) + \frac{k^2}{i h_1} \right] \theta_k^{i,j} + \kappa \left( \frac{1-2i}{2h_1} \right) \theta_k^{i-1,j} - \kappa \left( \frac{1+2i}{2h_1} \right) \theta_k^{i+1,j} \\ - \kappa \left( \frac{i h_1}{h_2^2} \right) (\theta_k^{i,j-1} + \theta_k^{i,j+1}) + \frac{\mu P}{2h_1} (\psi_k^{i+1,j} - \psi_k^{i-1,j}) = 0 \quad \text{en } \Omega_0 \end{aligned} \quad (98)$$

$$\theta_k^{i,0} = \theta_k^{i,M+1} = 0, \quad 0 \leq i \leq N+1 \quad (99)$$

$$\frac{3}{2h_1} \theta_k^{0,j} - \frac{4}{2h_1} \theta_k^{1,j} + \frac{1}{2h_1} \theta_k^{2,j} = 0 \quad 1 \leq j \leq M \quad (100)$$

$$\frac{3}{2h_1} \theta_k^{N+1,j} - \frac{4}{2h_1} \theta_k^{N,j} + \frac{1}{2h_1} \theta_k^{N-1,j} = 0 \quad 1 \leq j \leq M \quad (101)$$

*Ecuaciones de transporte*

$$\begin{aligned} & \nu \left[ \frac{1}{h_1^2} \left( \frac{2}{2i-1} + \frac{2}{2i+1} \right) + \frac{2}{ih_2^2} + \frac{\mathcal{K}^j}{i\nu} + \frac{k^2}{i^3 h_1^2} \right] w_k^{i,j} - \nu \left( \frac{2}{h_1^2(2i-1)} \right) w_k^{i-1,j} \\ & - \nu \left( \frac{2}{h_1^2(2i+1)} \right) w_k^{i+1,j} - \nu \frac{1}{ih_2^2} (w_k^{i,j-1} + w_k^{i,j+1}) - \nu \frac{k^2}{i^4 h_1^4} (\psi_k^{i+1,j} - \psi_k^{i-1,j}) \\ & + \frac{1}{4ih_2^2} (\mathcal{K}^{j+1} - \mathcal{K}^{j-1}) (\psi_k^{i,j+1} - \psi_k^{i,j-1}) - \frac{G_c}{2} (c_k^{i+1,j} - c_k^{i-1,j}) \\ & - \frac{G_\theta}{2} (\theta_k^{i+1,j} - \theta_k^{i-1,j}) = 0 \quad \text{en } \Omega_0 \end{aligned} \quad (102)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{h_1^2} \left( \frac{2}{2i-1} + \frac{2}{2i+1} \right) + \frac{2}{ih_2^2} \right] \psi_k^{i,j} - \left( \frac{2}{h_1^2(2i-1)} \right) \psi_k^{i-1,j} \\ & - \left( \frac{2}{h_1^2(2i+1)} \right) \psi_k^{i+1,j} - \frac{1}{ih_2^2} (\psi_k^{i,j-1} + \psi_k^{i,j+1}) + \frac{1}{i} w_k^{i,j} = 0 \quad \text{en } \Omega_0 \end{aligned} \quad (103)$$

$$\begin{aligned} & \nu \left[ \frac{1}{h_1^2} \left( \frac{2}{2i-1} + \frac{2}{2i+1} \right) + \frac{2}{ih_2^2} + \frac{\mathcal{K}^j}{i\nu} \right] \phi_k^{i,j} - \nu \left( \frac{2}{h_1^2(2i-1)} \right) \phi_k^{i-1,j} \\ & - \nu \left( \frac{2}{h_1^2(2i+1)} \right) \phi_k^{i+1,j} - \nu \frac{1}{ih_2^2} (\phi_k^{i,j-1} + \phi_k^{i,j+1}) = 0 \quad \text{en } \Omega_0 \end{aligned} \quad (104)$$

$$w_k^{i,0} = \psi_k^{i,0} = \phi_k^{i,0} = 0, \quad 1 \leq i \leq N+1 \quad (105)$$

$$w_k^{i,M+1} = \psi_k^{i,M+1} = \phi_k^{i,M+1} = 0, \quad 1 \leq i \leq N+1 \quad (106)$$

$$w_k^{0,j} = \psi_k^{0,j} = \phi_k^{0,j} = 0, \quad 0 \leq j \leq M+1 \quad (107)$$

$$w_k^{N+1,j} = \psi_k^{N+1,j} = 0, \quad 1 \leq j \leq M \quad (108)$$

$$\left( \frac{3N-1}{N+1} \right) \phi_k^{N+1,j} - 4\phi_k^{N,j} + \phi_k^{N-1,j} = 0, \quad 1 \leq j \leq M \quad (109)$$

## RESULTADOS NUMÉRICOS

Mediante el método de diferencias finitas y siguiendo la metodología (64) y (65), resolvemos el modelo matemático perturbado (52)–(63), cuya formulación discreta es dada en las ecuaciones (89)–(109). Los parámetros analizados fueron  $\mu$  y  $\theta_b$ . En las Figuras 4 y 5 se tienen los valores propios para  $k = 0$  y  $k = 1$  (primer y segundo armónico de Fourier), donde el primer cruce de  $\lambda(\mu)$  se produce aproximadamente en  $\mu = 142$ . Los vectores asociados a estos valores propios son presentados desde las Figuras 6 hasta la 13.

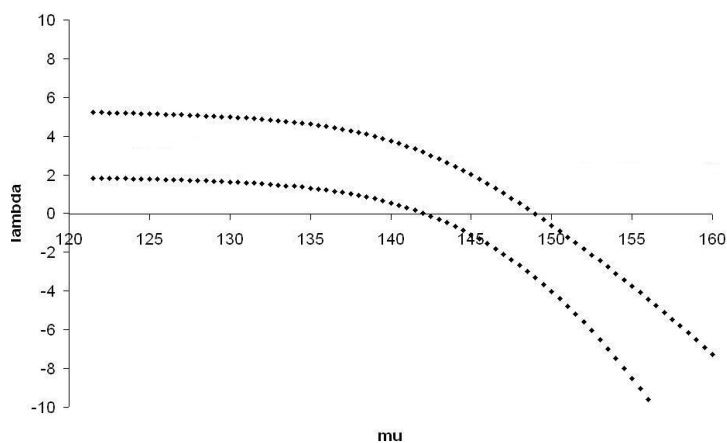


Figura 4. Valores propios para  $k = 0$  entregados por  $\lambda(\mu^*) = 0$

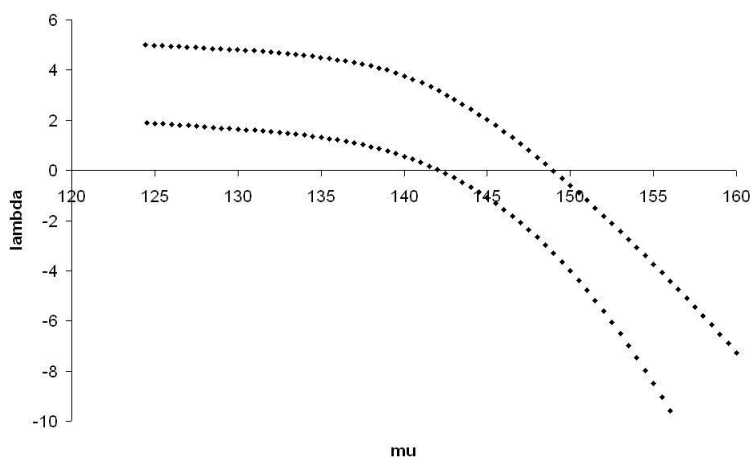


Figura 5. Valores propios para  $k = 1$  entregados por  $\lambda(\mu^*) = 0$

Considerando los vectores propios del modelo matemático perturbado, se tiene para la concentración una diferencia casi nula en la distribución de las líneas de isoconcentración entre el primer y segundo armónico, pero exhibiendo una magnitud de aproximadamente el doble para el segundo armónico en relación al primero (Figuras 6 y 8).

Una situación distinta ocurre en el caso de la temperatura, donde la diferencia radica en la distribución de las isothermas y no en su magnitud (Figuras 7 y 9).

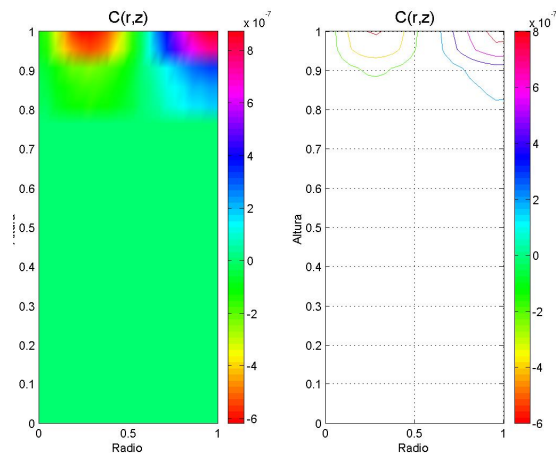


Figura 6. Perturbación para  $c, k = 0$

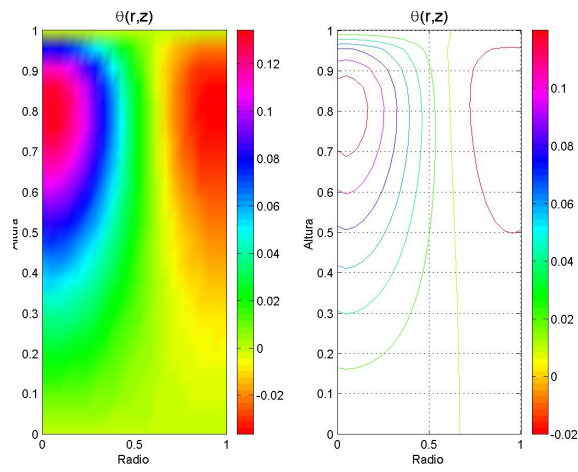


Figura 7. Perturbación para  $\theta, k = 0$

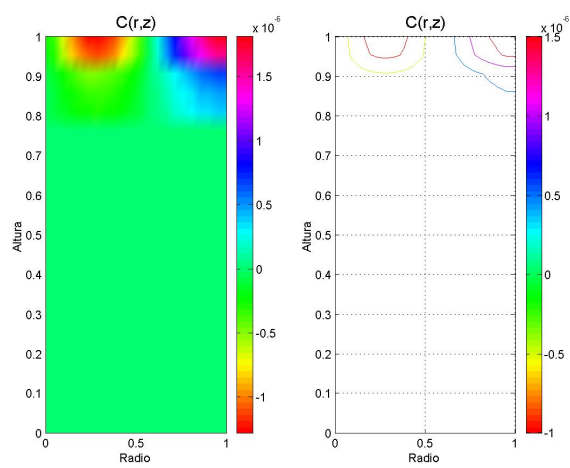


Figura 8. Perturbación para  $c, k = 1$

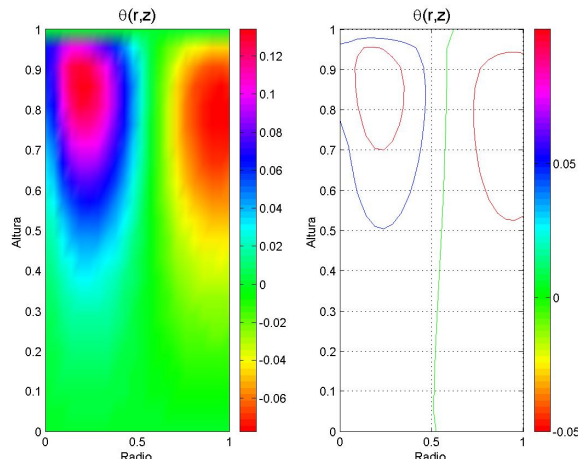


Figura 9. Perturbación para  $\theta$ ,  $k = 1$

Un caso similar al de la concentración  $c$  ocurre para la función  $\psi$ , donde la diferencia se presenta en la magnitud y no en la forma que adoptan las líneas de corriente (Figuras 10 y 12). Lo mismo sucede con la función  $w$ , siendo la magnitud de los resultados asociados al segundo armónico ( $k = 1$ ), aproximadamente el doble de los resultados obtenidos considerando el primer armónico de Fourier ( $k = 0$ ).

Además, en las Figuras 6–13 se aprecia claramente un vórtice en la parte superior de la cavidad girando en sentido horario, fenómeno que ocurre solamente en la parte superior, debido a que en la parte inferior la mezcla está en estado sólido. Otro aspecto importante a resaltar es la deformación de las líneas de corriente, evidenciando la existencia de una región de diferente característica que el de la región líquida, la cual se asocia a una zona de coexistencia de estado líquido y estado sólido, llamada zona pastosa, donde la mecánica de fluidos es más lenta y diferente a la de una región líquida, debido a la estructura dendrítica que se genera en el frente de solidificación de aleaciones, producto de la segregación de soluto.

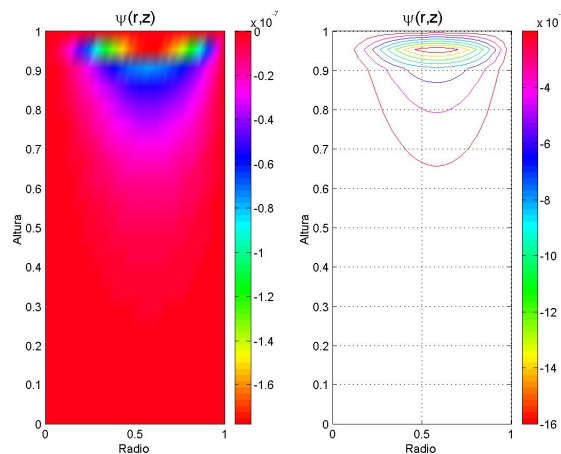


Figura 10. Perturbación para  $\psi$ ,  $k = 0$



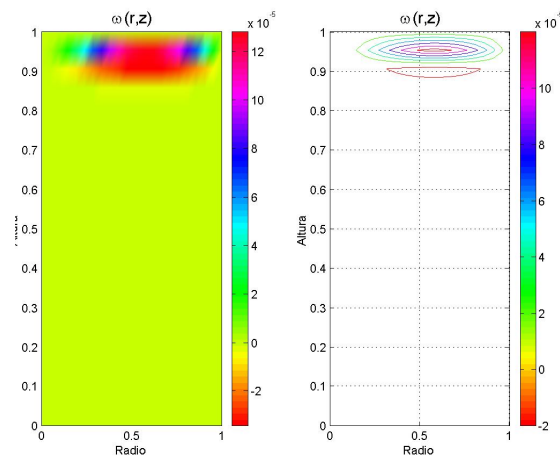


Figura 11. Perturbación para  $w$ ,  $k = 0$

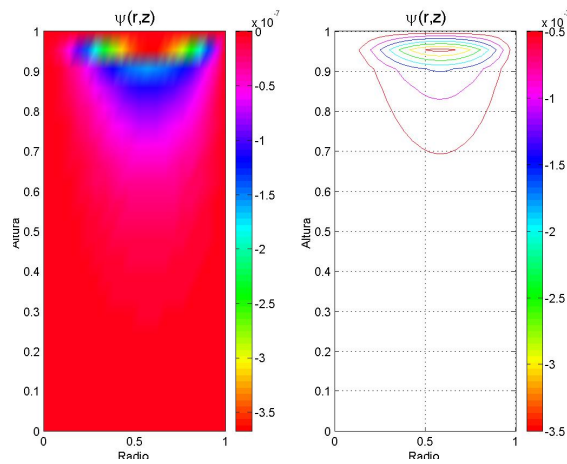


Figura 12. Perturbación para  $\psi$ ,  $k = 1$

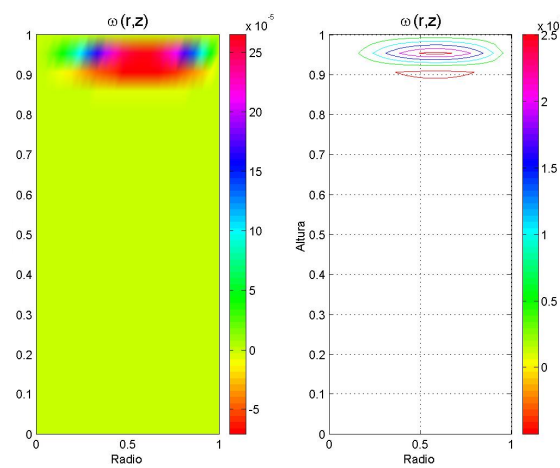


Figura 13. Perturbación para  $w$ ,  $k = 1$

## CONCLUSIONES

En este artículo se estudió un fenómeno de solidificación estacionario, incorporando la fluidodinámica y la transferencia de materia en el modelo clásico de transferencia de calor. La condición de fenómeno estacionario permite el uso de los diagramas de fase para determinar el intervalo de solidificación de la aleación (zona pastosa) y la fracción de sólido en función de la composición y la temperatura. Cuando los procesos de solidificación son transitorios, la información de los diagramas de fase no es totalmente extrapolable al problema en estudio, ya que la solidificación está estrechamente relacionada a las condiciones de enfriamiento del sistema y entran en juego parámetros metalúrgicos como el sub enfriamiento y la temperatura de solidificación (que no necesariamente es la misma que la temperatura de fusión, la cual es una propiedad de los metales).

La modelación matemática y simulación computacional del proceso de solidificación presenta grandes desafíos, debido a la gran cantidad de fenómenos físicos involucrados. La variación de las propiedades térmicas y físicas en función de la temperatura y/o la composición, introduce grandes no linealidades en el modelo matemático, lo cual sumado a lo anterior, dificulta la solución del problema. En el presente trabajo, se consideraron valores medios para las propiedades, eliminando así una dificultad adicional.

La solución del modelo matemático que describe el proceso de solidificación de una aleación binaria, puede obtenerse con diferentes métodos numéricos como, por ejemplo, diferencias finitas, elementos finitos, volúmenes finitos, etc. En nuestro caso, se utilizó diferencias finitas y además se estudió un modelo matemático perturbado y linealizado, asociado al problema original. Los resultados muestran una clara dependencia entre el parámetro de perturbación  $\mu$  y el primer cruce en cero del menor valor propio de la matriz del sistema discretizado. El vector propio asociado a ese  $\lambda$  crítico representa los resultados del *modelo matemático perturbado* para cada armónico de Fourier, los cuales concuerdan con la física del fenómeno, pero evidentemente no representan la solución final de un problema de solidificación. Este método puede considerarse como una buena primera aproximación para la solución de procesos de solidificación, y una alternativa de cálculo de los métodos tradicionales donde se discretizan las ecuaciones del modelo matemático directamente.

## AGRADECIMIENTOS

Financiado parcialmente por proyecto # 1000572 (FONDECYT) y por CONICYT a través de beca de apoyo a tesis doctoral 2002.

## REFERENCIAS

- 1 N.M. Ahmad, "Numerical simulation of transport processes in multicomponent systems related to solidification problems", Tesis doctoral, DMA-EPFL 1349, (1995).
- 2 Ph. Blanc, L. Gasser y J. Rappaz, "Existence for a stationary model of binary alloy solidification", *M2AN*, Vol. **29**, pp. 687-699, (1995).
- 3 M. Cervera, C. Agelet De Saracibar y M. Chiumenti, "Thermomechanical analysis of industrial solidification processes", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **46**, pp. 1557-1591, (1999).
- 4 H. Combeau y G. Lesoult, "Simulation of freckles formation and related segregation during directional solidification of metallic alloys", *Modelling of casting, welding and advanced solidification processes 6*, (V. Voller, T.S. Piwonka y L. Katgerman (eds.)), pp. 201-208, (1993).
- 5 M. Cruchaga y D. Celentano, "A finite element thermally coupled flow formulation for phase change problems", *Int. J. Methods Fluids*, Vol. **34**, pp. 279-305, (2000).
- 6 M. Durán y F. Gaillard, "Numerical analysis of a solidification process", *Proceeding 29<sup>th</sup> Congrès Nationale d'Analyse Numérique*, Francia, (1997).

- 7 M. Durán, F. Gaillard y J. Rappaz, “Analyse mathématique et numérique des mouvements de convection dans un alliage en cours de solidification”, *Proceeding 28<sup>th</sup> Congrès Nationale d’Analyse Numérique*, Francia, (1996).
- 8 M. Durán, E. Ortega-Torres y J. Rappaz, “On bifurcation in a convection-diffusion model describing a solidification process”, *Proceeding ECCOMAS 2000, Conference on Computational Fluid Dynamics*, Barcelona, España, (2000).
- 9 M. Durán, E. Ortega-Torres y J. Rappaz, “Weak solutions of a stationary convection-diffusion model describing binary alloy solidification processe”, *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. **42**, N° 11/12, pp. 1269–1286, (2005).
- 10 M. Durán, E. Ortega-Torres y R. Stein, “Cálculo de inestabilidades de un proceso de solidificación en dominios de simetría cilíndrica: I. Formulación del modelo”, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **17**, pp. 127–148, (2001).
- 11 S.D. Felicelli, J.C. Heinrich y D.R. Poirier, “Simulation of freckles during vertical solidification of binary alloys”, *Metall. Trans.*, Vol. **B 22B**, pp. 847–859, (1991).
- 12 S. Felicelli, J.C. Heinrich, P. Nandapurkar y D.R. Poirier, “Thermosolutal convection during dendritic solidification of alloys. Part 1: Linear stability analysis”, *Metall. Trans.*, Vol. **B 20B**, pp. 711–721, (1989).
- 13 S. Felicelli, J.C. Heinrich, P. Nandapurkar y D.R. Poirier, “Thermosolutal convection during dendritic solidification of alloys. Part 2: Non-linear convection”, *Metall. Trans.*, Vol. **B 20B**, pp. 883–891, (1989).
- 14 A.C. Fowler, “The formation of freckles in binary alloys”, *IMA J. Appl. Maths.*, Vol. **35**, pp. 159–174, (1985).
- 15 F. Gaillard, “Modélisation et analyse numérique d’instabilités développées lors de la solidification d’alliages binaires”, Tesis doctoral, DMA-EPFL, (1998).
- 16 F. Gaillard y J. Rappaz, “*Analysis and numerical simulation for models of binary alloy solidification*”, Periaux Contributed Book, John Wiley & Sons Ltd., (1997).
- 17 L. Gasser, “Existence analysis and numerical schemes for models of binary alloy solidification”, Tesis doctoral, DMA-EPFL 1421, (1995).
- 18 P.A. Gremaud, “Analyse numérique de problèmes de changements de phase liés à des phénomènes de solidification”, Tesis doctoral, DMA-EPFL 941, (1991).
- 19 L.M. Milne-Thomson, “*Theoretical hydrodynamics*”, Dover Publications Inc., New York, (1996).
- 20 C. Prakash y V.R. Voller, “A fixed grid numerical modelling methodology for convection-diffusion mushy region phase-change problems”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. **30**, pp. 1709–1719, (1987).
- 21 A.H. Shapiro, “*The dynamics and thermodynamics of compressible flow*”, Ronald Press, New York, (1953).