

# DEL DISEÑO CONVENCIONAL AL DISEÑO ÓPTIMO. POSIBILIDADES Y VARIANTES.

## Parte I. Análisis de sensibilidad y optimización local y global

SANTIAGO HERNANDEZ

*Departamento de Ingeniería Mecánica,  
Centro Politécnico Superior de Ingenieros,  
Universidad de Zaragoza,  
María de Luna, 3,  
50015 Zaragoza, España.*

### RESUMEN

Este trabajo comienza describiendo cómo se lleva a cabo el proceso de diseño en la ingeniería a través de métodos de prueba/error y de reglas basadas en la experiencia. Tras exponer casos que contradicen la común intuición de los proyectistas, recalca la necesidad de utilizar herramientas lógicas de diseño más racionales. La primera que se comenta son los análisis de sensibilidad, que logran guiar al diseñador en los cambios que deben realizarse para mejorar un diseño. A continuación se describen los métodos de optimización por asignación de criterios y los métodos de optimización local, entre ellos el novedoso método de Karmarkar para programación lineal. Esta primera parte del trabajo concluye con un método de optimización global que posibilita encontrar los habituales mínimos locales que existen en los problemas no lineales.

### SUMMARY

This work shows how engineering design has been carried out commonly, through trial/error techniques and experience based rules. Two examples are given to point out how very trustful rules may lead to wrong results, even in quite simple structures. Thus, the need to use more rational tools for modern engineering design is emphasized. Sensitivity analysis are first exposed and their ability to guide the designer to make design changes is emphasized. Then a complete landscape of optimality criteria methods and mathematical programming techniques is presented, including recent Karmarkar's linear programming method. Last, a global optimization approach that identifies every local minima arising in non linear problems is described.

Recibido: Marzo 1992

## EL DISEÑO CONVENCIONAL DE ESTRUCTURAS

El diseño de un sistema resistente en cualquier tipo de ingeniería consta de varias etapas que podrían ser resumidas en tres: Identificación de la lista de necesidades, selección y análisis de la tipología estructural y diseño de detalles estructurales. La etapa de definición y análisis de la estructuras es habitualmente la más complicada en estructuras reales, que suelen poseer gran complejidad. Las herramientas que un diseñador puede disponer son distintas dependiendo de su ámbito de trabajo y de su nivel de experiencia, pero en conjunto pueden ser agrupadas en:

- Programas de análisis basados en elementos finitos o elementos de contorno.
- Utilización generalizada de ordenadores electrónicos.
- Amplia experiencia en las tipologías más usuales.
- Técnicas experimentales de apoyo.

El esquema en el que se realiza el proceso de diseño puede ser resumido en el cuadro que aparece en la Figura 1.

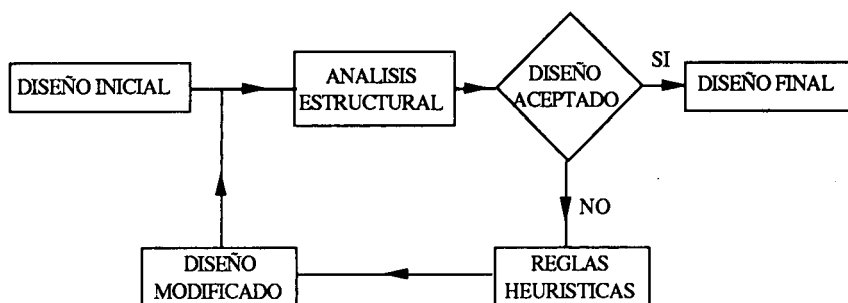


Figura 1. Diagrama de flujo en diseño convencional de estructuras.

Del esquema indicado se desprenden las siguientes preguntas:

- Cómo elegir el diseño inicial.
- Cómo mejorar cada diseño intermedio.
- Cuándo dar por terminado el proceso.

La bondad del diseño inicial será función de la intuición y práctica del ingeniero en cuestión y de su experiencia en el problema que esté considerando. Por tanto puede ser una decisión sencilla en problemas muy habituales y bastante complicado en aquellos casos que aparezcan por primera vez.

El proceso suele darse por finalizado cuando un diseño satisface de manera suficientemente satisfactoria el plan de necesidades. El nivel del cumplimiento que se exige puede cambiar de unos casos a otros, y en ocasiones la premura de tiempo u otros factores ajenos pueden contribuir a dar por terminada la etapa de diseño.

La modificación de un diseño a fin de mejorarlo exige que el ingeniero conozca de alguna forma cómo evoluciona la estructura en estudio ante cambios de sus

características mecánicas. En un proceso convencional de diseño esto suele concretarse en la existencia de reglas prácticas que se han mostrado eficaces anteriormente. Dichas reglas pueden ser distintas para cada problema o tipología, al ser de carácter subjetivo pueden ser distintas para cada diseñador, y de acuerdo con su comportamiento en cada situación concreta puede ser necesario actualizarlas si los resultados que proporcionan así lo indican.

Este tipo de reglas pueden tener una gran cantidad de casos resueltos que las avalen en problemas muy habituales, pero en problemas recientes puede ser necesario extrapolar criterios de otros tipos de problemas.

La validez de una regla de diseño que no tenga justificación racional debe ser cuestionada y a este respecto se va a comprobar el comportamiento de dos muy simples aplicándolas a un problema mucho más sencillo de lo que es habitual.

El problema en cuestión es diseñar eficazmente la estructura de tres barras indicada en la Figura 2 en las siguientes condiciones.

$$P = 20t \quad l = 100\text{cm} \quad 1.5t/\text{cm}^2 \leq \sigma \leq 2t/\text{cm}^2$$

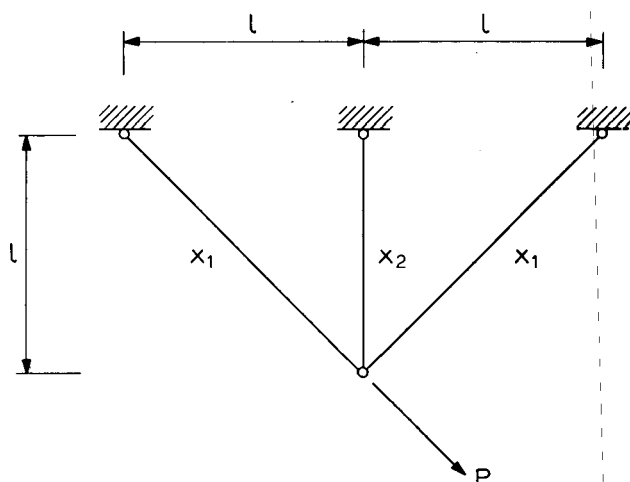


Figura 2. Ejemplo de estructura de tres barras.

La primera de las reglas podría ser enunciada como sigue.

*Cada elemento de una estructura debería estar solicitado al máximo valor de tensión admisible.*

Su aplicación conduce al diseño definido por el criterio de agotamiento que corresponde a:

$$x_1 = 1.0 \quad x_2 = 0.0 \quad V = 282$$

Sin embargo es conocido que esta estructura fue la primera a la que se aplicaron los métodos de optimización<sup>1</sup> y tiene un diseño de volumen mínimo que es

$$x_1 = 0.788 \quad x_2 = 0.41 \quad V = 264$$

En consecuencia esta regla produce buenos resultados pero puede ser mejorada.

La segunda regla es:

*La forma de disminuir (aumentar) el nivel tensional en los elementos de una estructura es incrementar (reducir) la cantidad de material.*

Supóngase que el diseño inicial corresponde a los valores  $x_1 = x_2 = 1.0$ . A continuación se indican los valores obtenidos tanto en este caso, como al aumentar solamente una de las dos variables asociadas a las secciones transversales de las barras.

| $x_1$ | $x_2$ | $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\sigma_3$ |
|-------|-------|------------|------------|------------|
| 1.0   | 1.0   | 0.71P      | 0.41P      | -0.29P     |
| 2.0   | 1.0   | 0.40P      | 0.29P      | -0.10P     |
| 1.0   | 2.0   | 0.63P      | 0.26P      | -0.37P     |

Tabla I.

De los resultados de la Tabla I se desprende que al aumentar la variable  $x_1$  las tensiones en todas las barras se reducen de acuerdo con lo que anticipa la regla propuesta. Sin embargo al incrementar  $x_2$  la tensión en las barras 1,2 sigue el comportamiento previsto mientras que se incrementa la tensión en la barra 3. En consecuencia el nuevo diseño, incluso a pesar de poseer más peso, resulta más perjudicial para algún elemento.

Los resultados anteriores muestran que estas reglas que aparecen adecuadas inicialmente no resultan siempre eficaces, incluso en estructuras sencillas. Por tanto su comportamiento en caso de estructuras complejas, o en aquellas en las que no se posea experiencia debe ser revisado cuidadosamente.

La consecuencia que se extrae es que el diseño en la ingeniería debería estar basado en técnicas mucho más racionales, de modo que al aplicarlas se obtuviera una modificación del diseño que incrementara siempre la eficacia del anterior. Este tipo de técnicas son las que se van a describir a lo largo de este artículo.

## TECNICAS DE DISEÑO EN INGENIERIA DE ESTRUCTURAS

De acuerdo con lo expuesto anteriormente el diseño de sistemas estructurales debería estar basado en criterios racionales. De esa forma se conseguirían dos objetivos: el resultado final satisfaría en mayor grado las necesidades previstas por el ingeniero y los criterios de diseño de éste podrían estar basados en reglas justificadas teóricamente.

En el esquema adjunto se indican un conjunto de técnicas en orden creciente de complejidad que proporcionan una magnífica ayuda al proceso de diseño, no solo en la ingeniería de estructuras sino también en cualquier campo de la tecnología. Estas técnicas extienden los métodos de Diseño Asistido por Computador (CAD) que constituyen actualmente la principal herramienta de diseño en la ingeniería.

Las distintas variantes que se presentan añaden métodos matemáticos para guiar al ingeniero a la solución óptima pero también requieren la participación del diseñador en el proceso. Por ello podrían denominarse técnicas de Diseño Optimo de Estructuras Asistido por Computador (CAOSD) y van a ser descritas a lo largo de este trabajo. (ver Figura 3).

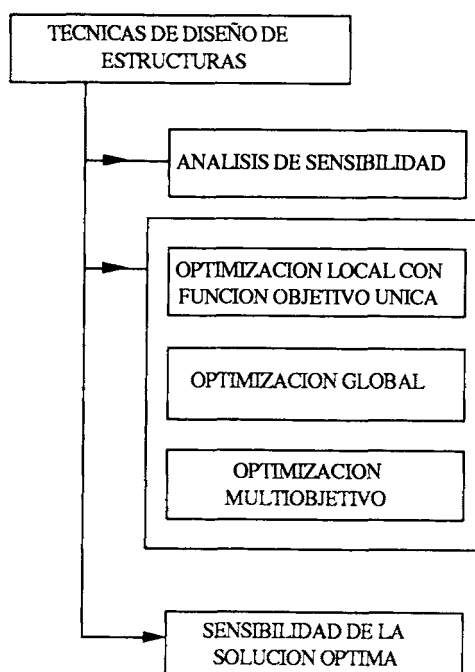


Figura 3. Técnicas de Diseño Optimo de Estructuras Asistido por computador (CAOSD).

### ANALISIS DE SENSIBILIDAD

Al hacer uso de los análisis de sensibilidad, el diagrama de flujo del proceso de diseño indicado en la Figura 1 queda modificado de la siguiente manera.

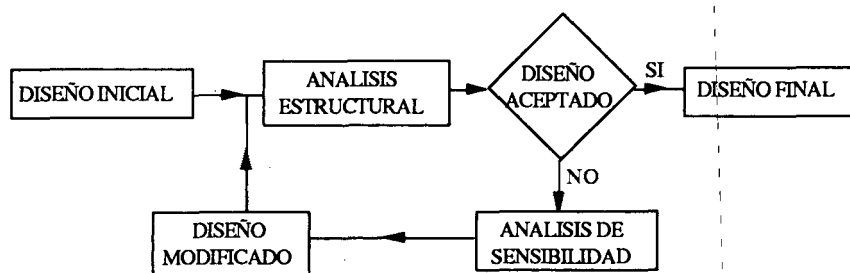


Figura 4. Diagrama de flujo de diseño de estructuras usando análisis de sensibilidad.

Considérese una estructura solicitada por unas cargas en las que tras el análisis correspondiente ya son conocidas el conjunto de movimientos de nudos, esfuerzos, etc.. Los análisis de sensibilidad de una respuesta estructural respecto a una o varias características mecánicas de la estructura proporcionan la tasa de variación de la respuesta estructural respecto a éstas. En esencia, los análisis de sensibilidad de una respuesta  $\psi$  consisten en encontrar los valores de expresiones como las siguientes:

$$\frac{d\psi}{dx_i}, \frac{d^2\psi}{dx_i dx_j}, \frac{d^2\psi}{dx_i^2}$$

Para la obtención de las expresiones anteriores pueden utilizarse las reglas de diferenciación, o aplicar unas técnicas asociadas a unas variables intermedias conocidas como variables adjuntas. Las referencias [2-3] contienen los textos más importantes sobre estudios de este tema y en la referencia [4] se describe el significado matemático de las variables adjuntas.

La aplicación de los análisis de sensibilidad permite anticipar el comportamiento de la estructura ante modificaciones. Para explicarlo supóngase que la variación de la derivada  $d\sigma_i/dx_j$  de la tensión en la barra  $i$ -ésima respecto al área de la barra  $j$ -ésima sea:

$$a) \frac{d\sigma_i}{dx_j} > 0 \quad b) \frac{d\sigma_i}{dx_j} = 0 \quad c) \frac{d\sigma_i}{dx_j} < 0 \quad (1)$$

El caso a) significa que un incremento positivo de la variable  $x_j$  aumentará la tensión en la barra citada; en b) es decir si  $d\sigma_i/dx_j = 0$  no se producirá variación en el valor de la tensión; finalmente si la situación es del tipo c) la tensión en la barra disminuirá. Analogamente se expresarían las consecuencias de disminuir el valor de  $x_j$ . La importancia cuantitativa del cambio vendrá marcada por el módulo de la derivada. Como ejemplo de aplicación puede utilizarse la estructura de tres barras de la Figura 2. La respuesta estructural a considerar será el valor absoluto de las tensiones en cada uno de los elementos y va a estudiarse su variación respecto a la sección de las barras. Las expresiones que se obtienen<sup>5</sup> son:

$$\frac{d(abs \sigma_1)}{dX} = -P \left| \frac{x_1^2 + x_2^2 + \sqrt{2}x_1x_2}{(x_1^2 + \sqrt{2}x_1x_2)^2} \frac{\sqrt{2}}{2(x_1 + \sqrt{2}x_2)^2} \right| \quad (2.a)$$

$$\frac{d(abs \sigma_1)}{dX} = -P \left| \frac{1}{(x_1 + \sqrt{2}x_2)^2} \frac{\sqrt{2}}{(x_1 + \sqrt{2}x_2)^2} \right| \quad (2.b)$$

$$\frac{d(abs \sigma_3)}{dX} = -P \left| \frac{\sqrt{2}x_1x_2 + x_2^2}{(x_1^2 + \sqrt{2}x_1x_2)^2} - \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}x_1 + 2x_2)^2} \right| \quad (2.c)$$

Supóngase que se parte del diseño inicial  $x_1 = x_2 = 1$  como se ha indicado en el primer apartado. Si se quiere estudiar la variación de las tensiones respecto a una de las variables, cada uno de los componentes de los vectores de las expresiones (1,2) pueden particularizarse para el valor de la variable que no se modifica. Si es  $x_2$  la que

se mantiene constante se obtienen las curvas de la Figura 5, y en ellas se observa que los valores de  $\frac{d(\text{abs } \sigma_i)}{dx_1}$  ( $i = 1, \dots, 3$ ) son negativos. Por tanto al aumentar la variable  $x_1$  las tensiones en las tres barras disminuyen, como se había comprobado en la Tabla I.

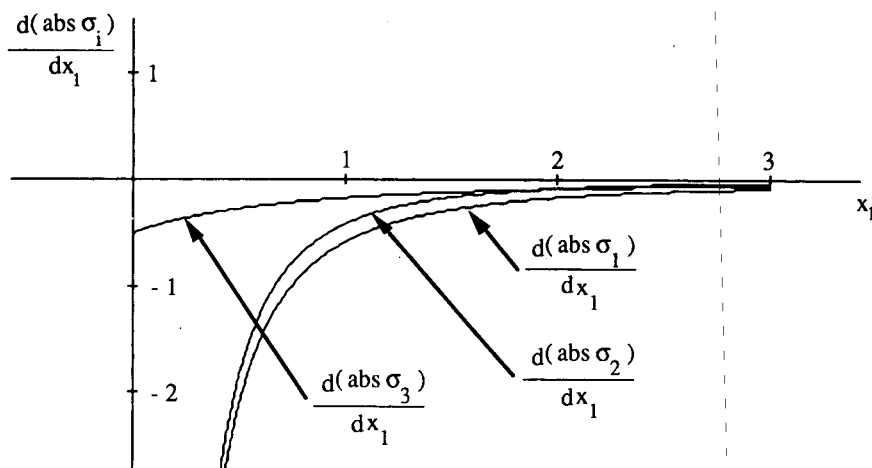


Figura 5. Sensibilidad del valor absoluto de la tensión en las barras con respecto a la variable  $x_1$ .

Si se mantiene constante la variable  $x_1$ , se obtendría de forma análoga la Figura 6.

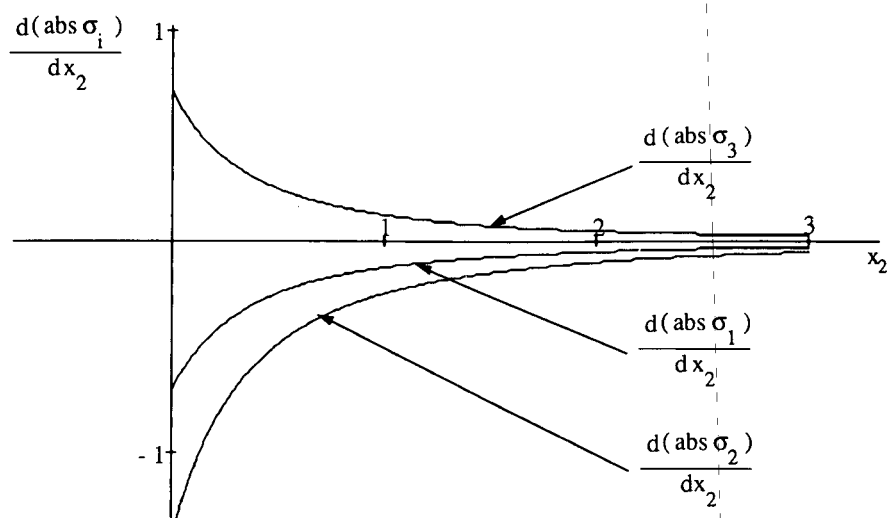


Figura 6. Sensibilidad del valor absoluto de la tensión en las barras con respecto a la variable  $x_2$ .

Se observa que mientras los valores de  $\frac{d(abs \sigma_i)}{dx_2} (i = 1, 2)$  son negativos, sucede lo contrario en  $\frac{d(abs \sigma_3)}{dx_2}$ . Esto justifica los resultados obtenidos en la Tabla I, y por tanto puede concluirse que la utilización de los análisis de sensibilidad previene sobre aquellas modificaciones que no mejoran el diseño existente.

## EL DISEÑO OPTIMO DE ESTRUCTURAS

La optimización de estructuras conduce al diagrama de flujo de la Figura 7.

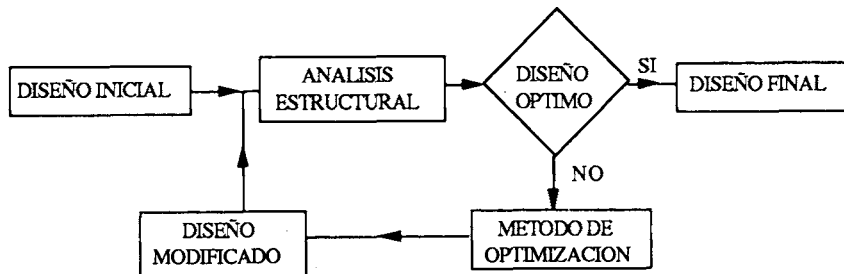


Figura 7. Diagrama de flujo del diseño óptimo de estructuras.

El diseño de una estructura queda definido de la siguiente manera:

- $\mathbf{X}$  vector de variables de diseño.
- $\mathbf{p}$  vector de parámetros fijos.
- $g_j(\mathbf{X}, \mathbf{p})$  conjunto de condiciones.
- $F(\mathbf{X}, \mathbf{p})$  función objetivo.

Habitualmente el problema puede escribirse

$$\min \text{ o } \max F(\mathbf{X}, \mathbf{p}) \quad (3.a)$$

sueto a

$$g_j(\mathbf{X}, \mathbf{p}) \leq 0 \quad (j = 1, \dots, m) \quad (3.b)$$

Las técnicas de optimización pueden agruparse en los tres grandes bloques siguientes:

- Técnicas de optimización por asignación de criterios.
- Técnicas de programación matemática.
- Técnicas de aproximación.

A continuación se realiza una descripción breve de cada uno de los grupos.



## Técnicas de optimización por asignación de criterios

Tradicionalmente estas técnicas asumen a priori los criterios que definen la estructura óptima, aunque no exista justificación teórica para ello. En consecuencia no siempre conducen a los resultados correctos, aunque su eficacia resulta adecuada en general. Dentro de ellas pueden establecerse las siguientes variantes.

### a) Criterio de agotamiento

Esta técnica asume que en una estructura solicitada por  $C$  estados de carga, el diseño óptimo es aquel que produce la máxima tensión en cada elemento para, al menos, un estado de carga. La expresión resultante es

$$\sigma_{il}(\mathbf{X}) = \sigma_M \quad l = 1, \dots, L \quad 1 \leq L \leq C \quad (4)$$

Existen también criterios similares para los valores de los movimientos de la estructura.

### b) Criterio de la energía de deformación

Este criterio, propuesto por Venkayya<sup>7</sup> plantea que el diseño óptimo era aquel en el que la energía de deformación de cada elemento representaba el mismo porcentaje de su energía de deformación máxima. Aunque el criterio se establecía para cualquier tipo de estructura, en el caso de elementos solicitados a esfuerzo axial la expresión resultante era:

$$\frac{N_i^2}{x_i^2(\sigma_{iM})^2} = \frac{1}{V^2}$$

siendo  $0 < V \leq 1$ . Cuando  $V=1$  este criterio es idéntico al criterio de agotamiento.

### c) Técnicas basadas en los multiplicadores de Lagrange

Partiendo del subconjunto  $J$  de condiciones que se asumen activas en el óptimo este método plantea la obtención del lagrangiano siguiente:

$$L = F(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^J \lambda_j g_j \quad (6.a)$$

sujeto a las condiciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} &= 0 & j &= 1, \dots, J \\ \frac{\partial L}{\partial x_i} &= 0 & i &= 1, \dots, m \end{aligned} \quad (6.b)$$

También existen otros procedimientos que no asumen inicialmente el subconjunto condiciones activas. Dan lugar a procesos iterativos y en cada etapa utilizan las condiciones de Kuhn-Tucker para identificar los multiplicadores asociados a condiciones activas. En ciertos casos producen problemas de convergencia si el grupo de condiciones activas tiene bastantes cambios a lo largo del proceso.

#### d) Técnicas basadas en la teoría de la información

Este método, desarrollado por Templeman<sup>9</sup> es un planteamiento probabilista de las técnicas de asignación de criterios. Parte del hecho de que llamando  $P_j$  a la probabilidad que existe de que una condición  $g_j$  sea activa en el óptimo se cumplirá en cada condición que:

$$P_j g_j = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (7)$$

dado que si la condición es activa  $g_j = 0$ , y en caso contrario se anula el valor  $P_j$ . De esta manera el problema asociado a la optimización de estructuras definido en (3) queda sustituido por:

$$\min F(\mathbf{X}) \quad (8.a)$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^m P_j g_j = 0 \quad (8.b)$$

La obtención del vector de probabilidades  $\mathbf{P}$  se hace de forma absolutamente objetiva. Como al comienzo del proceso no existe información los componentes del vector  $\mathbf{P}$  en la primera etapa serán

$$P_{j1} = \frac{1}{m} \quad (9)$$

y a partir de esos valores se resuelve el problema definido en (8).

Para actualizar el vector  $\mathbf{P}$  en las siguientes iteraciones, y a fin de hacerlo sin sesgo alguno, se utiliza el formalismo de la entropía máxima enunciado por Jaynes<sup>10</sup>, que establece que los valores que deben asignarse a cada probabilidad  $P_j$  en un proceso aleatorio, sin introducir ninguna subjetividad y por tanto contando únicamente con la información existente son lo que resultarían de la resolución del problema siguiente

$$\max S = - \sum_{j=1}^m P_{jk+1} \ln P_{jk+1} \quad (10.a)$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^m P_{jk+1} g_{jk} = \varepsilon_{k+1} \quad (10.b)$$

La función  $S$  es la entropía de la información definida por Shannon<sup>11</sup> y  $\varepsilon_{k+1}$  es un parámetro positivo asociado a cada iteración que debe anularse al final del proceso.

Tras resolver (10) se vuelve al problema (8) y así sucesivamente hasta que se alcanza la convergencia.

## Métodos de programación matemática

Estos métodos abordan el problema de la optimización de estructuras en la forma indicada por las expresiones (3). Los algoritmos matemáticos existentes son muy variados y su aplicación al diseño óptimo de estructuras puede encontrarse en las referencias<sup>12-14</sup>. A modo de resumen podrían agruparse en:

- Programación lineal.
- Programación cuadrática.
- Direcciones eficientes.
- Función penalty.
- Programación dinámica.
- Programación geométrica.
- Métodos duales.

Mientras la mayoría de estos métodos están bien descritos en los textos especializados existe una técnica de resolución de problemas lineales propuesta por Karmarkar<sup>15</sup> que, a juicio de su autor presenta ventajas computacionales, respecto al conocido método simplex<sup>10</sup> y por ello merece una descripción más detallada.

Se recordará que la formulación más habitual del método simplex se escribe como:

$$\min \mathbf{c}^T \mathbf{X} \quad (11.a)$$

sujeto a

$$\mathbf{A} \mathbf{X} > \mathbf{B} \quad (11.b)$$

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0} \quad (11.c)$$

Por el contrario el método propuesto por Karmarkar resuelve el problema definido por:

$$\min F = \mathbf{C}^T \mathbf{X} \quad (12.a)$$

sujeto a

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (12.b)$$

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0} \quad (12.c)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1 \quad (12.d)$$

En el óptimo el valor de la función objetivo es nulo.

Como la formulación asociada al diseño óptimo de estructuras es más similar a la que resuelve el método simplex, resulta necesario definir una forma de llegar a la formulación de Karmarkar. Para ello se plantea el siguiente problema lineal que combina las formulaciones primal y dual del simplex.

$$\min(c^T X - B^T \lambda) \quad (13.a)$$

sujeto a

$$A X \geq B \quad (13.b)$$

$$A^T \lambda \leq C \quad (13.c)$$

$$X, \lambda \geq 0 \quad (13.d)$$

introduciendo vectores de variables de holgura  $X'$ ,  $Y'$  y condensando la escritura puede llegarse a la expresión:

$$\min E^T Y \quad (14.a)$$

sujeto a

$$KY = D \quad (14.b)$$

$$y_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (14.c)$$

siendo

$$Y^T = |X^T X'^T \lambda \lambda'^T| \quad (15.a)$$

$$E^T = |C^T O - B^T O| \quad (15.b)$$

$$D^T = |B^T C^T| \quad (15.c)$$

$$K = \begin{vmatrix} A & -I & O & O \\ O & O & A^T & I \end{vmatrix} \quad (15.d)$$

A continuación se elige un diseño inicial  $Y_1$  y se define un sistema de coordenadas  $y'_j (j = 1, \dots, N + 1)$  que cumplen:

$$\sum_{j=1}^{N+1} y'_j = 1 \quad (16)$$

y se realiza la transformación

$$y_j = \frac{y_{1j} y'_j}{y'_{N+1}} = 1 \quad j = 1, \dots, N \quad (17)$$

introduciendo (17) en el problema de (14) se llega a

$$\min \frac{e_j y_{1j} y'_j}{y'_{N+1}} \quad (18.a)$$

sujeto a

$$\frac{k_{ij} y_{1j} y'_j}{y'_{N+1}} = d_i \quad (18.b)$$

$$\sum_{j=1}^{N+1} y'_j = 1 \quad (18.c)$$

$$y'_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, N+1 \quad (18.d)$$

Como la función objetivo de (18.a) se anulará en el óptimo, puede prescindirse del denominador, en las restantes expresiones se define:

$$k'_{ij} = k_{ij} y_{1j} \quad (19.a)$$

$$k'_{iN+1} = -d_i \quad (19.b)$$

y finalmente queda

$$\min \mathbf{E}'^T \mathbf{Y}' \quad (20.a)$$

$$\mathbf{K}' \mathbf{Y}' = \mathbf{O} \quad (20.b)$$

$$\sum_{j=1}^{N+1} y'_j = 1 \quad (20.c)$$

$$y'_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, N+1 \quad (20.d)$$

que es idéntica a (12).

Las condiciones de (20.b) y (20.c) pueden escribirse conjuntamente como:

$$\mathbf{W} \mathbf{Y}' = \begin{bmatrix} \mathbf{K}' \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{Y}' = \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

La obtención del óptimo del problema definido por (20) se, realiza como sigue:

1. Se proyecta el vector  $\mathbf{E}'$  en el núcleo del espacio vectorial definido por la matriz  $\mathbf{W}$

$$\mathbf{E}'_0 = \left[ \mathbf{I} - \mathbf{W}^T (\mathbf{W} \mathbf{W}^T)^{-1} \mathbf{W} \right] \mathbf{E}' \quad (22)$$

2. El nuevo diseño  $\mathbf{Y}'_2$  será de la forma

$$\mathbf{Y}'_2 = \mathbf{Y}'_1 - \alpha r \frac{\mathbf{E}'}{|\mathbf{E}'_0|} \quad (23)$$

siendo  $|\mathbf{E}'_0|$  el módulo del vector  $\mathbf{E}'_0$  y los parámetros  $\alpha, r$

$$\alpha = 0.5 \quad r = \frac{1}{\sqrt{N(N+1)}} \quad (24)$$

3. A partir de (23) el diseño  $Y_2$  en el espacio de las variables iniciales será de la forma

$$y_{2j} = \frac{y_{1j}y'_{2j}}{y'_{2N+1}} \quad j = 1, \dots, N \quad (25)$$

Los valores de las funciones objetivo proporcionados por  $Y_2, Y'_2$  son inferiores a los anteriores. El proceso se continua a partir de (18) y (19) hasta alcanzar la convergencia.

### Técnicas basadas en resolución de problemas simplificados

Estas técnicas aproximan el problema definido por (3), que es generalmente no lineal, en problemas más sencillos. Como la solución obtenida es únicamente una aproximación de la real se itera el proceso nuevamente hasta alcanzar la convergencia. Las técnicas más habituales son:

#### a) Secuencia de problemas lineales

El problema (3) se resuelve mediante una serie de problemas lineales que en la interacción  $i$ -ésima será como el siguiente:

$$\min F \cong F(X_i) + \nabla F^T(X_i)(X - X_i) \quad (26.a)$$

sujeto a

$$g_j(X) \cong g_j(X_i) + \nabla g_j^T(X_i)(X - X_i) \quad j = 1, \dots, n \quad (26.b)$$

#### b) Secuencia de problemas cuadráticos

En este caso la función objetivo contiene una aproximación cuadrática.

$$\min F \cong F(X_i) + \nabla F^T(X_i)(X - X_i) + \frac{1}{2}(X - X_i)^T H(X_i)(X - X_i) \quad (27.a)$$

sujeto a

$$g_j(X) \cong g_j(X_i) + \nabla g_j^T(X_i)(X - X_i) \quad j = 1, \dots, N \quad (27.b)$$

### c) Aproximación a problemas convexos

Aunque existen diferentes variantes, es muy eficaz la denominada aproximación híbrida.

$$\min F(\mathbf{X}) \cong F(\mathbf{X}_i) + \sum_{k=1}^{m_1} \left( \frac{\partial F_+}{\partial x_k} \right) (x_k - x_{ik}) - \sum_{k=1}^{m_2} \left( \frac{\partial F}{\partial x_k} \right) \frac{1}{x_{ik}^2} \left( \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{ik}} \right) \quad (28.a)$$

sujeto a

$$g_j(\mathbf{X}) \cong g_j(\mathbf{X}_i) + \sum_{k=1}^{m_1} \left( \frac{\partial g_{j+}}{\partial x_k} \right) (x_k - x_{ik}) - \sum_{k=1}^{m_2} \left( \frac{\partial g_{j-}}{\partial x_k} \right) \frac{1}{x_{ik}^2} \left( \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{ik}} \right) \quad (28.b)$$

donde los sumatorios en  $m_1$  y  $m_2$  se han definido para agrupar a las variables respecto a las cuales el gradiente es positivo y negativo respectivamente.

### d) Secuencia de problemas lineales con variables intermedias

La formulación habitual definida por (26) para la secuencia de problemas lineales puede producir variaciones muy bruscas en los valores de las variables entre iteraciones consecutivas y elimina zonas del espacio de diseño donde puede encontrarse la solución. Para eliminar estos inconvenientes el problema definido en (3) puede aproximarse linealmente utilizando variables que varíen más suavemente a lo largo del proceso, en el caso concreto de optimización de estructuras los esfuerzos en los elementos suelen poseer esta característica<sup>17</sup>. Por ello, una vez definido un vector  $\mathbf{Z}$  de variables intermedias y habiéndose establecido en cada etapa la relación entre variables.

$$z_i = z_i(\mathbf{X}) \quad i = 1, \dots, n \quad (29)$$

el problema real se aproxima en la iteración  $i$ -ésima a

$$\min F = F(\mathbf{Z}_i) + \nabla F^T(\mathbf{Z}_i)(\mathbf{Z} - \mathbf{Z}_i) \quad (30.a)$$

sujeto a

$$g_j(\mathbf{Z}) \cong g_j(\mathbf{Z}_i) + \nabla g_j^T(\mathbf{Z}_i)(\mathbf{Z} - \mathbf{Z}_i) \quad j = 1, \dots, m \quad (30.b)$$

## METODOS DE OPTIMIZACION GLOBAL

Es bien conocido que la optimización de estructuras ocasiona problemas de tipo no lineal cuya región de diseño en muchas ocasiones no es convexa. A consecuencia de ello pueden existir varios mínimos locales en un problema<sup>18</sup> y el menor de ellos es la solución del problema. En la Figura 8 aparece un ejemplo sencillo de optimización de peso de un emparrillado sujeto a condiciones tensionales<sup>19</sup>, y el espacio de diseño conteniendo los dos mínimos locales que resulta en un caso concreto.

$$P = 0.1 t \quad q_1 = q_2 = 1 t \quad L_1 = 100cm \quad L_2 = 300cm$$

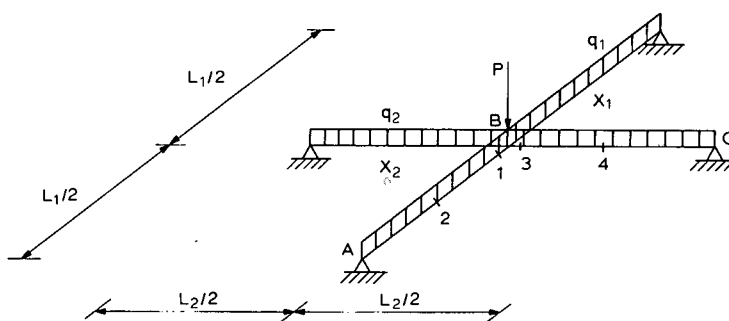


Figura 8a. Emparrillado simple y cargas actuantes.

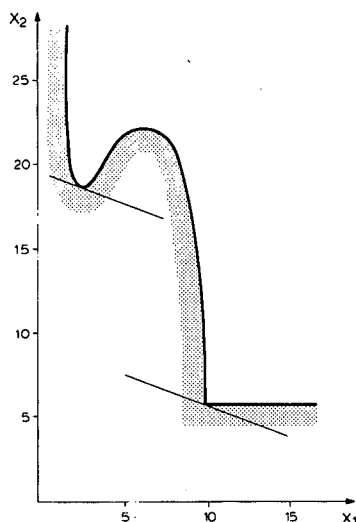


Figura 8b. Región de diseño resultante.

Otra dificultad existente es la aparición de regiones de diseño disjuntas entre sí, circunstancia que aparece en problemas con cargas y condiciones de tipo dinámico. En la Figura 9 pueden observarse las regiones de diseño en el caso de un pórtico simple sujeto a una carga distribuida y un movimiento del terreno de tipo senoidal<sup>20</sup>.



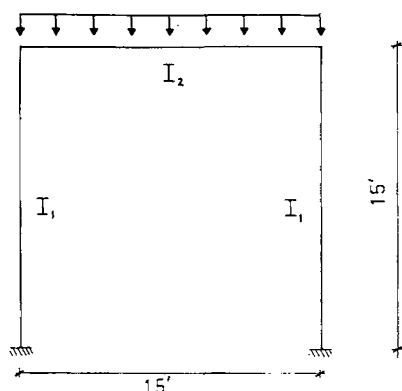


Figura 9a. Pórtico solicitado por una carga distribuida y un movimiento senoidal del terreno.

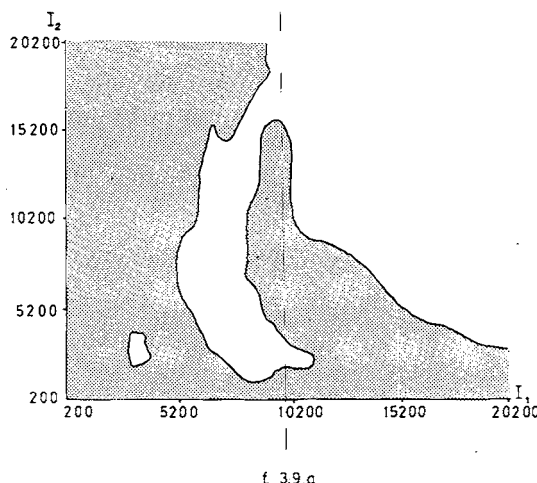


Figura 9b. Región de diseño dividida en dos subregiones.

Los métodos de optimización descritos hasta ahora solo garantizan la obtención de un mínimo local dentro de la subregión de diseño en la que se encontraba el diseño inicial. A fin de solucionar esta limitación el procedimiento habitual solía ser iniciar el problema con diseños iniciales muy distintos a fin de intentar identificar los posibles mínimos locales. Una alternativa más eficaz debe venir a través de métodos de optimización global, que se encuentran en estos momentos muy poco desarrollados; buena parte de ellos son índole probabilista e intentan encontrar la posición de cada mínimo local mediante procedimientos estocásticos<sup>21</sup>, en base a los valores de la función objetivo en diversos puntos del espacio de diseño. Un método determinista que ha presentado buenos resultados hasta el momento es el método de tunelización<sup>22</sup> cuyo funcionamiento aparece indicado en la Figura 10 y en el que tras elegir el diseño inicial  $X_1$ , se itera un proceso constituido por dos fases.

- a) Fase de minimización. Su objetivo es encontrar un mínimo local.
- b) Fase de obtención del diseño equivalente. Se intenta encontrar un diseño que proporcione el mismo valor de la función objetivo, sin que sea un mínimo local.

El diagrama de flujo correspondiente al proceso de optimización global será el indicado en la Figura 11.

La fase a) puede realizarse por cualquiera de los métodos indicados en el apartado 4. En la fase b) a partir de un mínimo local  $X^*$ , el diseño equivalente no se obtiene en la función objetivo inicial, sino en una función llamada de tunelización y definida por

$$T(X, X_i^*, t_i) = \frac{F(X) - F(X_i^*)}{[(X - X_i^*)^T (X - X_i^*)]^{t_i}} \quad (31)$$

El valor de parámetro  $t_i$  debe calcularse previamente por procedimientos numéricos y es el orden de la raíz del numerador de la expresión (31) en el punto  $X_i^*$ . El diseño

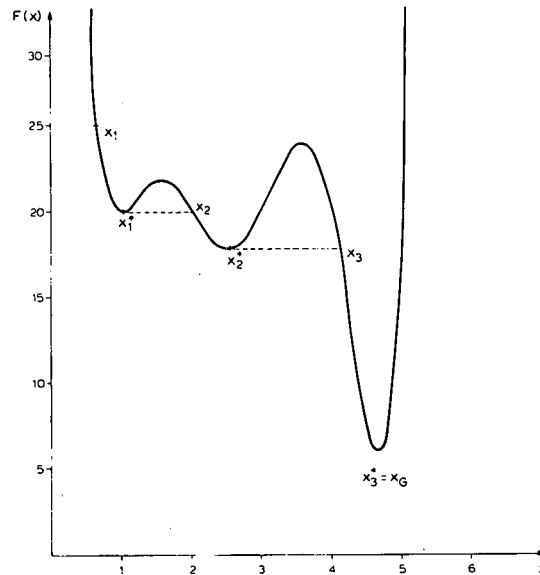


Figura 10. Descripción del método de tunelización en problemas de una variable.

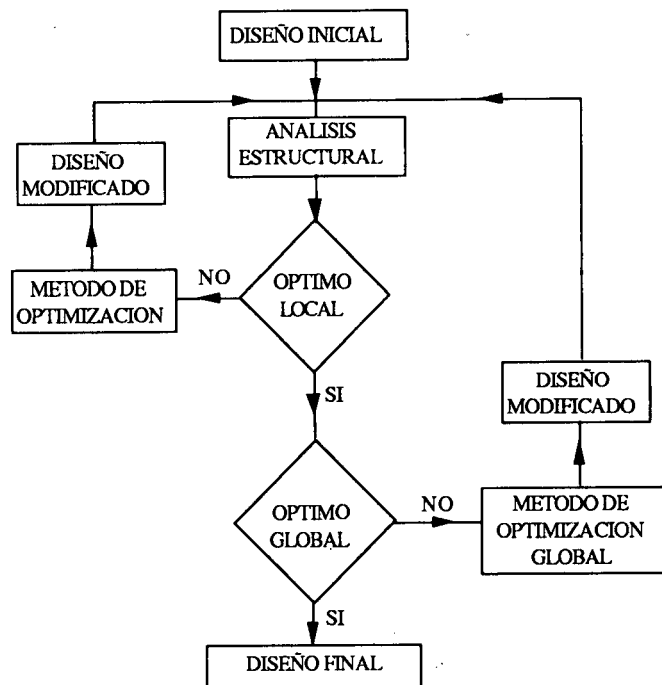


Figura 11. Diagrama de flujo en optimización global usando el método de tunelización.

equivalente  $X_{i+1}$  será una raíz de la función  $T(X, X_i^*, t_i)$ . Puede ocurrir que el nuevo punto sea también un mínimo local, es decir  $X_{i+1} = X_{i+1}^*$  como se observa en la Figura

12. En este caso se define en  $X_{i+1}^*$  una función de tunelización ampliada

$$T(X, X_i^*, t_i, X_{i+1}^*) = \frac{F(X) - F(X_i^*)}{((X - X_i^*)^T (X - X_i^*))^{t_i} ((X - X_{i+1}^*)^T (X - X_{i+1}^*))^{t_i}} \quad (31)$$

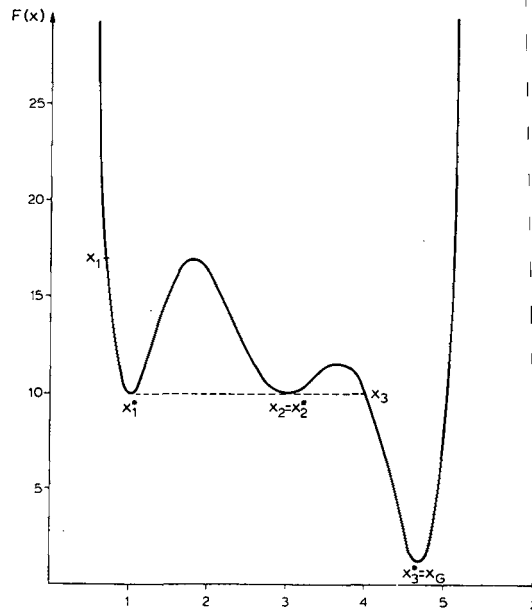


Figura 12. Función con dos mínimos locales consecutivos del mismo valor de función objetivo.

En esta nueva función debe evaluarse únicamente el valor del parámetro  $t_{i+1}$ , y se prosigue seguidamente el proceso. La función de tunelización puede ampliarse con nuevos términos en el denominador si se repite el caso anterior.

El método indicado maneja únicamente problemas sin condiciones, por ello una manera de utilizarlo en la optimización de estructuras es combinarlo con las técnicas de función penalty, que crean un problema incondicionado al indicado por (1.3) mediante la expresión:

$$\phi(X, r) = F(X) + \sum_{j=1}^m P(g_j(X), r) \quad (33)$$

siendo  $r$  un parámetro que varía a lo largo del proceso. Ejemplos de aplicación pueden encontrarse en Hernández<sup>23</sup>.

## REFERENCIAS

1. L.A. "Schmit, Design by Systematic Synthesis", *Second Conference on Electronic Computation*, ASCE, Pittsburg, pp. 105-132, (1960).
2. E. Haug, K.K. Choi y V. Komkov, "*Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*", Academic Press, (1986).
3. R.T. Haftka, Z. Gurdal y Kamat, "*Elements of Structural Optimization*", Kluwer, (1990).
4. A.D. Belengundu y J.S. Arora, "A Sensitivity Interpretation of Adjoint Variables in Optimun Design", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 48, pp. 81-89, (1985).
5. S. Hernández, "*Métodos de Diseño Óptimo de Estructuras*", Colegio de Ingenieros de C., C. y Puertos, (1990).
6. G.N. Rozvany, "*Structural Design via Optimality Criteria*", Kluwer, (1989).
7. U.B. Venkayya, "Design of Optimum Structures" *Comp. Struc.*, Vol. 1, pp. 265-309, (1971).
8. H.W. Kuhn y A.W. Tucker, "Nonlinear Programming", *Proc. 2nd, Berkeley Symp. Math. Stat. Prob.*, Berkerley. (Ca), pp. 481-492, (1950).
9. A.B Templeman y Li Xingsi, "Maximum Entropy Approach to Constrained Nonlinear Programming", *Egn. Opt.*, Vol. 12, pp. 191-205, (1987).
10. E.T. Jaynes, "Information Theory and Statistical Mechanics", *The Phisical Review*, Vol. 106, pp. 620-630 y 171-190, (1957).
11. C.E. Shannon, "A Mathematical Theory of Communication", *Bell System Technical Journal*, Vol. 27, no. 3, pp. 379-428, (1948).
12. U. Kirsch, "*Optimum Structural Design*", Mc Graw-Hill, (1981).
13. G.N. Vanderplaast, "*Numerical Optimization Techniques for Engineering Design. With Applications*", Mc Graw-Hill, (1984).
14. J.S. Arora, "*Introduction to Optimum Design*", Mc Graw-Hill, (1989).
15. N. Karmarkar, "A New Polinomian-Time Algorithm for Linear Programing", *Combinatorica*, Vol. 4, pp. 373-395, (1984).
16. G. Dantzig, "*Linear Programming and Extensions*", Princeton University Press, (1963).
17. H.L. Thomas y G.N. Vanderplaats, "An Improved Approximation for Stress Constraints in Plate Structures", *Optimization of Structural Systems and Industrial Applications*, Hernández, S. y Brebbia, C.A. (ed), Computational Mechanics Publications y Elsevier, (1991).
18. K. Svanberg, "On Local and Global Minima in Structural Optimization", *New Directions in Optimun Design*, Atrek, E. y otros (ed), John Wiley, (1984).
19. F. Moses y S. Onoda, "Minimum Weight Design of Structures with Application to Elastic Grillages", *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, Vol. 1, pp. 311-331, (1969).
20. J.H. Cassis, "Optimum Design of Structures Subjected to Dynamic Loads", *UCLA-ENG-7451, UCLA School of Engineering and Applied Science*, (Ca), (1974).
21. F. Schoen, "Stochastic Techniques for Global Optimization: A Survey of Recent Advances", *Journal of Global Optimization*, Vol. 1, no. 3, pp. 207-228, (1991).
22. A.V. Levy y S. Gomez, "The Tunneling Method Applied to Global Optimization", *Numerical Optimization 1984, Proceedigns of the SIAM Conference on Numerical Optimization*, Boulder (Co), (1984).
23. S. Hernández, "El Método de Tunelización: una técnica de optimización global en problemas no convexos de diseño en la ingeniería", *IX Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica*, Zaragoza, (1990).