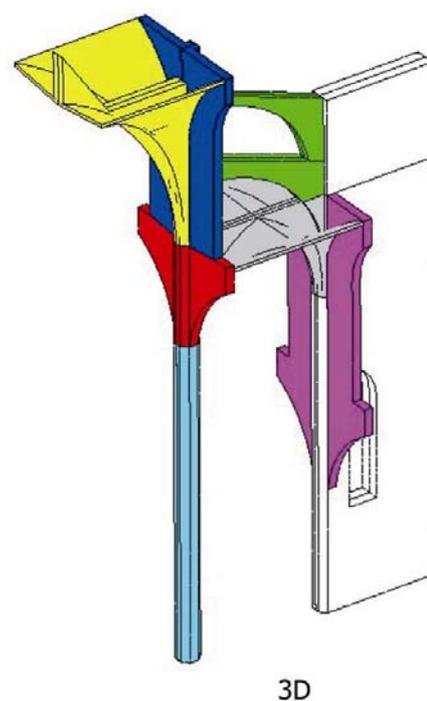
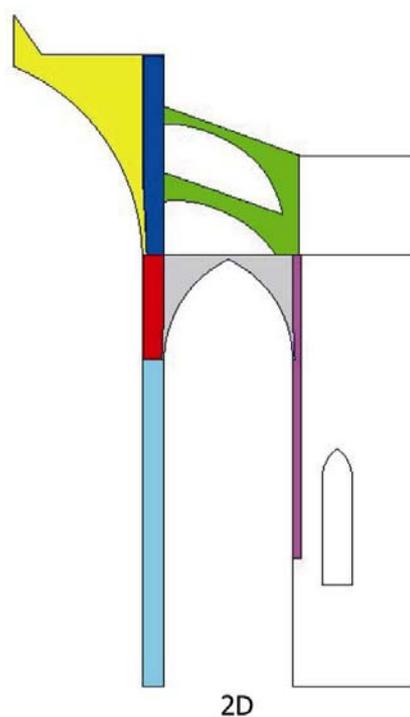


# Análisis estructural de edificios históricos mediante modelos localizados de fisuración

R. Clemente  
M. Cervera  
P. Roca



# **Análisis estructural de edificios históricos mediante modelos localizados de fisuración**

R. Clemente  
M. Cervera  
P. Roca

**Monografía CIMNE N°-102, Abril 2007**



**CENTRO INTERNACIONAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA**  
Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, España

CENTRO INTERNACIONAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA  
Edificio C1, Campus Norte UPC  
Gran Capitán s/n  
08034 Barcelona, España  
[www.cimne.upc.es](http://www.cimne.upc.es)

Primera edición: Abril 2007

**ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE EDIFICIOS HISTÓRICOS MEDIANTE MODELOS LOCALIZADOS DE FISURACIÓN**  
Monografía CIMNE M102  
© Los autores

ISBN: 978-84-96736-14-6

Depósito legal: B-39630-2007

# Contenido

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 1     | INTRODUCCIÓN .....  | 1  |
| 1.1   | Motivación.....   | 4  |
| 1.1.1 | Formación de fisuras discretas .....                                  | 4  |
| 1.1.2 | Colapso de la estructura originado por la fluencia del material ..... | 4  |
| 1.1.3 | Simulación del proceso constructivo.....                              | 4  |
| 1.1.4 | Aplicación en un caso real: La Catedral de Mallorca.....              | 5  |
| 1.2   | Objetivos .....   | 5  |
| 1.2.1 | Objetivo general .....  | 5  |
| 1.2.2 | Objetivos específicos.....  | 6  |
| 1.3   | Resumen de contenido.....   | 7  |
| 2     | LA OBRA DE FÁBRICA EN EDIFICIOS HISTÓRICOS.....                       | 9  |
| 2.1   | El comportamiento de la obra de fábrica .....                         | 9  |
| 2.1.1 | Comportamiento uniaxial.....  | 11 |
| 2.1.2 | Comportamiento biaxial.....   | 13 |
| 2.1.3 | Comportamiento de las juntas bajo esfuerzos cortantes .....           | 16 |

---

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 2.2   | Modelización de la obra de fábrica en edificios históricos .....      | 18 |
| 2.2.1 | Método Antifunicular, Línea de Empujes y Análisis Límite.....         | 18 |
| 2.2.2 | Micromodelos .....  | 22 |
| 2.2.3 | Macromodelos .....  | 24 |
| 2.3   | Resumen.....  | 28 |
| 3     | MODELO ESTRUCTURAL.....   | 31 |
| 3.1   | Principio de los trabajos virtuales .....                             | 32 |
| 3.2   | Método de los elementos finitos.....                                  | 33 |
| 3.2.1 | Caso lineal .....   | 33 |
| 3.2.2 | Caso no lineal.....   | 36 |
| 3.3   | Formulación constitutiva.....   | 45 |
| 3.3.1 | Modelo de viscoelasticidad.....                                       | 45 |
| 3.3.2 | Modelo de daño escalar.....   | 52 |
| 3.4   | Ejemplos ilustrativos y de validación .....                           | 61 |
| 3.4.1 | Viscoelasticidad .....  | 61 |
| 3.4.2 | Modelos de daño: isótropo y tracción/compresión .....                 | 64 |
| 3.4.3 | No linealidad geométrica. Viga empotrada en voladizo .....            | 68 |
| 3.4.4 | No linealidad geométrica. Placa empotrada con carga distribuida ..... | 70 |
| 4     | SIMULACIÓN DE LA FISURACIÓN A TRACCIÓN.....                           | 73 |
| 4.1   | Enfoque de fisura discreta .....                                      | 74 |
| 4.2   | Enfoque de fisura distribuida .....                                   | 76 |
| 4.2.1 | Descripción fenomenológica.....                                       | 76 |
| 4.2.2 | Estado del conocimiento .....   | 79 |
| 4.2.3 | Descripción cinemática.....   | 83 |
| 4.2.4 | Error local de aproximación.....                                      | 84 |
| 4.2.5 | Evaluación de la dirección de propagación: enfoque global.....        | 85 |
| 4.2.6 | Evaluación de la dirección de propagación: enfoque local .....        | 87 |
| 5     | ALGORITMO DE LOCALIZACIÓN.....  | 89 |
| 5.1   | Introducción .....  | 89 |
| 5.2   | Primera parte: detección de fisuras nuevas .....                      | 90 |

---

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 5.3   | Segunda parte: propagación de fisuras .....                                   | 91  |
| 5.4   | Criterio de curvatura máxima .....  | 94  |
| 5.5   | Alisado de tensiones .....  | 96  |
| 5.6   | Ejemplos ilustrativos y de validación .....                                   | 96  |
| 5.6.1 | Tracción pura .....   | 96  |
| 5.6.2 | Modo mixto .....  | 99  |
| 5.6.3 | Flexión simple .....  | 101 |
| 5.6.4 | Flexión en modo mixto .....   | 106 |
| 6     | ANÁLISIS DE UN ARCO SEMICIRCULAR CON CARGA ASIMÉTRICA .....                   | 113 |
| 6.1   | Geometría, materiales y carga .....   | 114 |
| 6.2   | Análisis límite .....   | 115 |
| 6.3   | Modelo de daño distribuido .....  | 116 |
| 6.3.1 | Análisis con control de cargas .....  | 117 |
| 6.3.2 | Análisis con control de desplazamientos .....                                 | 121 |
| 6.4   | Modelo de daño localizado .....   | 126 |
| 6.4.1 | Análisis con dirección de fisuras predefinida .....                           | 126 |
| 6.4.2 | Análisis con dirección de fisuras no predefinida .....                        | 133 |
| 6.5   | Análisis de sensibilidad .....  | 137 |
| 6.5.1 | Energía de fractura .....   | 137 |
| 6.5.2 | Resistencia a tracción .....  | 140 |
| 6.5.3 | Discretización espacial .....   | 142 |
| A     | ESTUDIO INELÁSTICO DE UNA SECCIÓN RECTANGULAR BAJO FLEXIÓN<br>COMPUESTA ..... | 149 |
| A.1   | Solución analítica en el estado límite .....                                  | 150 |
| A.2   | Análisis numérico .....   | 151 |
| B     | ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE LOS ELEMENTOS TRIANGULARES<br>LINEALES .....    | 155 |
| 7     | ANÁLISIS DE LA CATEDRAL DE MALLORCA .....                                     | 161 |
| 7.1   | Descripción del edificio .....  | 162 |
| 7.2   | Estudios previos efectuados sobre la Catedral de Mallorca .....               | 166 |

|        |  |     |
|--------|--|-----|
| 7.2.1  | Rubió (1912).....  | 166 |
| 7.2.2  | Mark (1982, 1998).....   | 167 |
| 7.2.3  | Maynou (2001) .....  | 168 |
| 7.2.4  | Salas (2002) .....   | 170 |
| 7.3    | Interpretación de las mediciones realizadas <i>in situ</i> .....                                 | 172 |
| 7.4    | Modelo numérico.....   | 177 |
| 7.5    | Planteamiento del análisis estructural.....  | 182 |
| 7.6    | Análisis instantáneo con no linealidad material .....  | 183 |
| 7.7    | Análisis secuencial para la simulación del proceso constructivo con no linealidad material ..... | 185 |
| 7.8    | Análisis secuencial diferido con no linealidad material .....                                    | 189 |
| 7.9    | Análisis secuencial diferido con no linealidad material y geométrica.....                        | 193 |
| 7.10   | Localización de fisuras. Análisis bajo cargas gravitatorias.....                                 | 198 |
| 7.11   | Análisis de sensibilidad .....   | 204 |
| 7.11.1 | Resistencia a tracción .....   | 204 |
| 7.11.2 | Energía de fractura a tracción.....  | 206 |
| 7.11.3 | Resistencia a compresión .....   | 208 |
| 7.12   | Análisis bajo cargas sísmicas.....   | 209 |
| 7.13   | Simulación de refuerzo sísmico.....  | 212 |
| C      | SOBRE EL ANÁLISIS SECUENCIAL DEL PROCESO CONSTRUCTIVO.....                                       | 215 |
| C.1    | Aspectos previos.....  | 215 |
| C.2    | Aspectos prácticos .....   | 216 |
| C.2.1  | Modificación de coordenadas de elementos pertenecientes a fases avanzadas de construcción.....   | 217 |
| C.2.2  | Consideraciones para el postproceso de los resultados.....                                       | 219 |
| 8      | CONCLUSIONES.....  | 221 |
| 8.1    | Recapitulación.....  | 221 |
| 8.2    | Conclusiones .....   | 222 |
| 8.2.1  | Sobre el estado del conocimiento.....  | 222 |
| 8.2.2  | Sobre el modelo de análisis.....   | 223 |
| 8.2.3  | Sobre la aplicación del modelo propuesto.....  | 223 |

---

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 8.2.4 | Sobre el estudio estructural de la Catedral de Mallorca..... | 224 |
| 8.3   | Principales contribuciones.....                              | 224 |
| 8.4   | Futuras líneas de investigación .....                        | 225 |



# 1

## Introducción

Los edificios históricos forman parte importante del patrimonio cultural, llegando incluso a convertirse en símbolos de la ciudad o el país donde se encuentran. A menudo se encuentran construcciones históricas que son centros de atracción turística, con las implicaciones económicas correspondientes. Muchos otros edificios antiguos aún conservan el uso para el que fueron concebidos, como lo demuestra la gran cantidad de iglesias góticas o románicas existentes en Europa. Y aun aquellos edificios de relativa poca importancia pueden poseer interés especial por el hecho de haber sido construidos hace cientos de años, ya que son testimonio histórico de la aptitud de los arquitectos e ingenieros de cada época.

Sea cual fuere el caso, si se desea preservar este legado histórico es imprescindible su mantenimiento y restauración.

Muchos factores pueden afectar a una edificación histórica desde su construcción hasta nuestros días: la degradación del material por el paso del tiempo, eventos naturales con largos períodos de retorno, acciones originadas por el hombre como cambios de uso, remodelaciones o guerras, entre otros. Por esta razón, muchas veces es necesario evaluar el estado de la estructura, ya no sólo por la preservación del patrimonio, sino también por la seguridad de las personas.

Antes de proceder a la evaluación del estado de la estructura es recomendable conocer al máximo la *historia de la edificación*, incluyendo las fechas de construcción, origen de materiales, motivaciones de los constructores, técnicas y proceso constructivo, acciones extraordinarias a las que ha estado sometida la estructura (como sismos, por ejemplo), etc. Todo este conocimiento es de vital importancia para comprender mejor el comportamiento de la estructura.

Tal es el caso de la Catedral de Mallorca, donde existen unos fuertes desplomes de los pilares que son difíciles de explicar si se obvia el proceso constructivo que se siguió para erigir las bóvedas laterales y centrales de la iglesia. Lamentablemente, rara vez se cuenta con la documentación necesaria para obtener toda esta información, aunque en todo caso siempre es provechoso llevar a cabo estas tareas de investigación histórica, hasta donde los recursos lo permitan, como primer paso en la evaluación estructural de un edificio antiguo.

Como otro paso previo al análisis estructural de un edificio histórico también se recomienda realizar una *inspección* detallada de la estructura en su estado actual, ya sea mediante la observación directa o a través de ensayos *in situ*. La inspección debe centrarse en el reconocimiento de deformaciones, grietas, pérdidas de material, etc., así como de todos aquellos signos de degradación, tanto a nivel de material como a nivel de estructura. Con esta información se pueden establecer conclusiones sobre el origen de dichas degradaciones, para comprender mejor el comportamiento de la estructura.

Una vez reconocida la condición actual del edificio, e identificadas las zonas donde se han producido daños, es necesario saber si el factor que propicia estos daños se encuentra aún activo y si es posible que exista evolución de los mismos. Así, también se recomienda, en la medida de lo posible, la *monitorización* de la estructura. Por ejemplo, determinar si una deformación o fisura dada se mantiene fija o si por el contrario evoluciona con el tiempo. Asimismo, puede ser de interés medir el comportamiento de la estructura ante movimientos sísmicos, cargas de viento o cambios de temperatura. A pesar de que normalmente estas campañas de monitorización suelen ser costosas, todos estos datos constituyen una información muy importante para el análisis estructural de la edificación.

Finalmente, la simulación mediante un *modelo computacional* de la estructura permite conocer mejor su funcionamiento, así como predecir el comportamiento bajo diferentes acciones. La elección del modelo depende de muchos factores, tales como la motivación del análisis estructural, el tipo de estructura, el tipo de material, las acciones bajo las cuales se desea analizar, etc.

No obstante, antes de entrar en detalles sobre el modelo propuesto en este trabajo, a continuación se hace un breve repaso sobre las principales características de los edificios históricos de obra de fábrica y sobre las dificultades que se presentan para su análisis estructural.

Por una parte, en ocasiones se encuentran edificios antiguos de fábrica en los que una parte o la totalidad del mortero de las juntas ha desaparecido. Esto, junto con la organización en aparejos de los elementos resistentes y la propia existencia de las juntas, se traduce en dos factores de relevancia: los elementos tienen alta resistencia a compresión, y poca o nula resistencia a tracción; y, observados desde el punto de vista de la mecánica del continuo, suelen mostrar un claro comportamiento anisótropo.

Por otro lado, el comportamiento de la obra de fábrica, ya sea compuesta de sillares, piedras o ladrillo, es marcadamente no lineal. Pueden existir fisuras o degradación del material, aun cuando la estructura se mantenga estable y segura. Ejemplos típicos de este comportamiento son la degradación de la rigidez del material y la formación de deformaciones plásticas, entre otros. Asimismo, en ocasiones las cargas sostenidas durante largos períodos pueden causar la fluencia del material, provocando, incluso, el colapso.

En la actualidad, una de las dificultades principales al intentar modelar la obra de fábrica antigua es la *caracterización* del material. Normalmente es difícil o costoso disponer de información sobre la rigidez o resistencia de los materiales que componen la fábrica, ya sea por separado o en conjunto. Asimismo, a veces se desconocen datos de la estructura de gran relevancia, como el tipo de material que no se encuentra a la vista, o el proceso constructivo seguido para erigir la estructura. Este desconocimiento dificulta de manera importante el análisis estructural mediante un modelo numérico.

Con relación a las técnicas de análisis estructural de edificios antiguos, se tiene que desde las primeras teorías de análisis estructural en el siglo XVII hasta la actualidad se han utilizado diversos métodos para intentar comprender y predecir el comportamiento de los edificios de obra de fábrica. Los primeros métodos (método antifunicular, línea de empujes), basados principalmente en las cargas gravitatorias y en los aspectos geométricos de la estructura, arrojan resultados relativos a la estabilidad de la misma. Más recientemente, sobre la base de esos métodos, se ha desarrollado la teoría del *análisis límite*, que es capaz de predecir la carga de colapso, y estimar algún factor de seguridad. Sin embargo, estos métodos no proveen de información que podría ser importante, como la evolución del daño en la estructura, la respuesta bajo cargas dinámicas, los efectos de cargas cíclicas, efectos reológicos, etc.

Entre las técnicas modernas de análisis destaca el Método de los Elementos Finitos, de amplio uso en diferentes campos de la ingeniería y de la física. Tal como se comenta en el capítulo 2 de este trabajo, una gran cantidad de autores ha empleado este método en el análisis estructural de edificios históricos.

El método de los elementos finitos presenta una gran versatilidad: permite análisis bajo cargas estáticas o dinámicas, se pueden modelar geometrías más o menos complejas, permite la simulación de efectos no lineales, tanto por el material como por la geometría, etc. Numerosos autores han empleado en mayor o menor medida estas prestaciones. Entre muchas otras, se encuentran aplicaciones de modelos de daño distribuido para predecir el colapso de las estructuras, modelos dependientes del tiempo para simular los

efectos de la fluencia del material o modelos que toman en cuenta los efectos dinámicos (ver capítulo 2).

En el presente trabajo se propone el empleo de un modelo numérico, basado en el Método de los Elementos Finitos, para la simulación estructural de edificios históricos. El material se define como un continuo, intentando simular el comportamiento de la obra de fábrica como un material homogéneo.

## **1.1 Motivación**

Visto lo anterior, y sobre la base del desarrollo de diversos modelos y las numerosas aplicaciones en el estudio estructural de edificios históricos, en el presente trabajo se pretende profundizar en los siguientes temas:

### **1.1.1 Formación de fisuras discretas**

Normalmente, el fallo en la obra de fábrica se manifiesta como una fisura discreta, ya sea a lo largo de las juntas o atravesando los ladrillos o bloques. En el presente trabajo se pretende implementar un modelo continuo, capaz de simular la aparición de este tipo de fisuras. Este es un enfoque novedoso en lo que se refiere al análisis estructural de edificios históricos de obra de fábrica.

### **1.1.2 Colapso de la estructura originado por la fluencia del material**

Algunos autores ya han aplicado modelos capaces de predecir el colapso causado por cargas aplicadas en largos períodos (ver capítulo 2). Sin embargo, en este trabajo el problema se enfoca de otra manera y por tanto también su solución: combinando un modelo de daño distribuido con un modelo de viscoelasticidad, bajo las hipótesis de no linealidad geométrica.

### **1.1.3 Simulación del proceso constructivo**

Existen construcciones históricas en las que su proceso constructivo puede haber influido de alguna manera en su estado tenso-deformacional que presentan en la actualidad. Así, puede ser importante la simulación de dicho proceso para entender y predecir el comportamiento de la estructura. El presente trabajo aborda por primera vez este tema, estudiando los posibles efectos que el proceso seguido para el levantamiento de la estructura tenga sobre su condición actual.

### 1.1.4 Aplicación en un caso real: La Catedral de Mallorca

Los aspectos anteriores se aplican al estudio de la Catedral de Mallorca. Tal como se ha comentado previamente con relación al estado actual del edificio, destaca la existencia de un fuerte desplome de los pilares, probablemente debido al proceso constructivo empleado. Además, y dada la magnitud de los desplazamientos observados en los desplomes, puede ser necesario un estudio que involucre los efectos geoméricamente no lineales, generalmente despreciados en este tipo de análisis. Una de las ventajas de aplicar los modelos propuestos en la Catedral de Mallorca es que se dispone de información proveniente de una reciente campaña de monitorización, por lo que se conocen datos relativos al material, magnitud de las deformaciones, etc.

Partiendo de esta base, en el siguiente apartado se trazan los objetivos del presente trabajo de investigación.

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Objetivo general

El objetivo general del trabajo de investigación consiste en elaborar un modelo no lineal de análisis estructural, basado en el Método de los Elementos Finitos, para el estudio de construcciones históricas de obra de fábrica de ladrillo o piedra. El modelo ha de permitir simular las propiedades mecánicas exhibidas en general por este material, entre las que se encuentran el comportamiento cuasi frágil con localización de fisuras, y las marcadas diferencias entre la resistencia a tracción y la resistencia a compresión.

Asimismo, el modelo debe contemplar otras características relativas a estructuras históricas, tales como el análisis secuencial para la simulación del proceso constructivo, la reología del material en largos períodos y los efectos geoméricamente no lineales.

La Catedral de Mallorca se toma como caso de referencia para plantear el problema y poner de manifiesto las necesidades de un análisis de una estructura de grandes dimensiones. En el mismo orden de ideas, el estudio de la catedral sirve para comprobar la aplicabilidad y el alcance potencial del modelo propuesto.

El modelo numérico se implementa dentro del programa COMET, un *software* para resolver problemas termo-mecánicos acoplados en sólidos, desarrollado en el Departamento de Resistencia de Materiales de la Universidad Politécnica de Cataluña. Este programa incluye, entre otras características, las siguientes: un algoritmo de resolución de sistemas de ecuaciones no lineales mediante el método de Newton-Raphson; la capacidad de activar o desactivar elementos durante el cálculo; formulación de grandes deformaciones, así como los modelos constitutivos de viscoelasticidad, viscoplasticidad y daño. Por esta razón, el programa presenta un marco idóneo para la implementación del modelo numérico propuesto.

Respecto a los modelos constitutivos, se eligen para el presente trabajo un modelo de daño para simular la degradación del material, y un modelo de viscoelasticidad para simular los efectos reológicos.

El modelo de daño es el llamado modelo de *daño distribuido tracción/compresión*, normalmente aplicado al estudio del hormigón. Este modelo puede simular la pérdida de rigidez del material que se origina tras la rotura, con comportamientos diferentes según el signo de las tensiones principales. Por tanto, es capaz de reproducir la diferencia de la respuesta del material a tracción y a compresión, aunque siempre de forma isótropa. Sin embargo, este modelo, en su formulación original, no es capaz de simular correctamente fisuras discretas. Cuando el material sufre ablandamiento (descarga tras la rotura) y el daño tiende a localizarse en una banda, la dirección de propagación del daño tiende a sufrir de una dependencia patológica del tamaño y orientación de la malla de elementos finitos.

Tal como se comentó anteriormente, la anisotropía del material es un elemento a tomar en cuenta al momento de la simulación numérica de la obra de fábrica. Sin embargo, el presente trabajo se concentra principalmente en la simulación de fisuras discretas mediante un modelo de daño localizado. El estudio de los efectos de la dirección de los esfuerzos con relación a las juntas de la fábrica se deja como futuro desarrollo para su aplicación conjunta con los temas tratados en este trabajo.

Para lograr lo anterior, se plantean los siguientes objetivos específicos.

### 1.2.2 Objetivos específicos

- i. Realizar un estudio del estado del conocimiento en los siguientes temas:
  - Comportamiento mecánico y resistente de la obra de fábrica.
  - Métodos de análisis empleados para el estudio estructural de la obra de fábrica, especialmente en edificios históricos.
  - Fundamentos del análisis estructural no lineal por el método de los elementos finitos. Estudio de los modelos de viscoelasticidad y daño. Formulación geoméricamente no lineal (grandes desplazamientos, pequeñas deformaciones).
  - Métodos de simulación de fisuras discretas en materiales cuasi frágiles.
- ii. Implementar el análisis no lineal por la geometría en la formulación (grandes desplazamientos, pequeñas deformaciones).
- iii. Formular e implementar un método para la simulación de fisuras discretas que funcione en combinación con el modelo de daño distribuido tracción/compresión.

- iv. Validar el modelo mediante su aplicación en el análisis de casos simples con resultados conocidos, tanto de tipo experimental como analítico.
- v. Validar la aplicabilidad del modelo para el estudio de construcciones históricas, en concreto la Catedral de Mallorca, a través de análisis comparativos con resultados obtenidos mediante otros métodos de cálculo o mediciones tomadas *in situ*.

### 1.3 Resumen de contenido

La estructura del trabajo se presenta de la siguiente manera. En el capítulo 2 se describen los resultados obtenidos de la investigación bibliográfica sobre el comportamiento de la obra de fábrica en general, y de los edificios históricos en particular. Allí se comentan diversos métodos de caracterización del material, así como una reseña histórica de los métodos de análisis de estructuras históricas más comúnmente utilizados, comparando sus diferentes características. Además, se hace un resumen de las diferentes aplicaciones del Método de los Elementos Finitos en el estudio de edificios históricos encontradas en la literatura.

En el capítulo 3 se plantea la formulación que sirve de base para el método propuesto en este trabajo. La expresión del Principio de los Trabajos Virtuales se desarrolla y resuelve mediante el Método de los Elementos Finitos, tanto en su forma lineal como no lineal, incluyendo detalles de su implementación en el programa. Asimismo, se formulan los modelos constitutivos básicos aplicados: el modelo de daño distribuido tracción/compresión y el modelo de viscoelasticidad. Se muestran además unos ejemplos simples para ilustrar las capacidades de estos modelos. Finalmente se incluyen ejemplos de validación de la formulación geoméricamente no lineal en grandes desplazamientos y pequeñas deformaciones, cuya implementación forma parte del presente trabajo.

El capítulo 4 trata sobre el fenómeno de la fisuración a tracción. Se presenta el estado del conocimiento de los dos enfoques principales utilizados en la simulación numérica de fisuras: enfoque de fisura discreta y enfoque de fisura distribuida. Se explica en qué consiste el fenómeno de la creación y propagación de fisuras desde el punto de vista de la fisura distribuida.

El capítulo 5 aborda la descripción completa del algoritmo empleado para la simulación de fisuras, comentando las principales dificultades encontradas. Se incluye una serie de ejemplos ilustrativos y de validación para estudiar el alcance y las limitaciones del método propuesto.

En el capítulo 6 se desarrolla un ejemplo de validación complejo: un arco semicircular con carga asimétrica. En primer lugar se obtiene la carga última y el mecanismo de colapso mediante el método del análisis límite, para ser usados como valores de referencia. Seguidamente se analiza la estructura con el modelo de daño distribuido, observando su

rendimiento con relación a los resultados del análisis límite. Luego se procede de la misma manera con el modelo de daño localizado, estudiando minuciosamente los efectos del algoritmo de localización propuesto en el capítulo anterior y comparando con los resultados obtenidos con el modelo de daño distribuido. En el capítulo también se hace un análisis de sensibilidad a los valores de energía de fractura, resistencia a tracción y al tamaño de la discretización espacial empleada. Finalmente se incluyen, a modo de apéndice, dos análisis relativos a ciertos detalles particulares encontrados durante el análisis del arco con el modelo de daño localizado. El primero de ellos (apéndice A) contempla el estudio inelástico de una sección rectangular bajo flexión compuesta. En el apéndice B se estudia el comportamiento de los elementos finitos triangulares lineales bajo el estado tensional que se crea cuando una fisura se acerca al borde comprimido de una sección sometida a flexión.

El capítulo 7 comprende el análisis estructural de la Catedral de Mallorca. Se parte de la descripción de la edificación, incluyendo una breve reseña histórica. Se presentan algunos estudios previos efectuados sobre la Catedral, comentando sobre las conclusiones alcanzadas por diversos autores. Luego se presenta el modelo numérico empleado en el análisis, presentando los detalles relativos a los materiales, condiciones de contorno, cargas y discretización espacial. Seguidamente se presentan los resultados de una secuencia de análisis bajo cargas gravitatorias sobre un pórtico tipo, que incluyen no linealidad material, proceso constructivo, fluencia del material y no linealidad geométrica, siempre con el modelo de daño distribuido. Luego se estudia el edificio con el modelo de daño localizado, comparando los resultados con aquellos obtenidos del modelo anterior. También se incluye un análisis de sensibilidad a los valores de resistencia a tracción, energía de fractura y resistencia a compresión en ambos modelos. Finalmente se hace un análisis bajo cargas sísmicas, simulando la presencia de un refuerzo metálico para estudiar la viabilidad de esa posible solución preventiva. En el apéndice C se comentan algunas consideraciones prácticas que se deben tener en cuenta al momento de simular el proceso constructivo de la Catedral de Mallorca, las cuales son extrapolables a cualquier análisis de características similares.

Una vez presentados los resultados obtenidos tras aplicar el modelo propuesto, se exponen en el capítulo 8 las conclusiones derivadas del trabajo de investigación, destacando las principales aportaciones del mismo. Asimismo, se mencionan las diversas líneas de investigación que se pueden seguir a partir de las conclusiones presentadas en el presente trabajo.

# 2

## La obra de fábrica en edificios históricos

En el presente capítulo se aborda el tema del análisis estructural de la obra de fábrica, haciendo énfasis en el estudio de las edificaciones históricas. En primer lugar, se trata el comportamiento de la obra de fábrica como material, sobre la base de observaciones experimentales encontradas en la literatura. Asimismo, se mencionan algunas técnicas para caracterizar dicho comportamiento. Luego se comentan los métodos más comunes para estudiar estructuralmente las construcciones antiguas, haciendo un repaso desde las técnicas medievales hasta los procedimientos computacionales modernos. Finalmente se hace un resumen sobre lo expuesto en el capítulo, planteando algunas conclusiones al respecto.

### 2.1 El comportamiento de la obra de fábrica

En las prescripciones técnicas del Instituto Eduardo Torroja (PIET 70) se define a la obra de fábrica como

*todo elemento de obra obtenido por colocación de ladrillos, bloques, piedras de cantería o adobes, unos junto a otros y sobre otros, ordenadamente y solapados de acuerdo con unas determinadas leyes de traba.*

La ley de traba (o aparejo) rige la disposición en que deben colocarse los materiales de una obra de fábrica para garantizar su unidad constructiva. Generalmente, las unidades que conforman la obra de fábrica están vinculadas entre sí por algún tipo de mortero, ya sea a base de arcilla, betún, limo, cemento o cal, entre otros.

Otras definiciones empleadas en este trabajo son las siguientes:

- *Unidad* es un término general para referirse a las piezas que conforman la fábrica: ladrillos, bloques, piedras o adobes.
- *Junta* es la interfaz entre dos unidades, muchas veces constituida por mortero. Se denomina *junta principal* aquella que es continua en toda la extensión de la fábrica; generalmente es horizontal y define las diferentes hiladas de unidades.
- *Mampostería* se refiere al tipo de obra de fábrica constituida por piedras de cantería, labrada o sin labrar.

La obra de fábrica puede tener diversos usos, desde elemento estructural hasta cerramientos o acabados. El presente trabajo se enfoca hacia el estudio del comportamiento de la obra de fábrica como elemento capaz de soportar cargas estructurales.

Dos rasgos principales destacan en las estructuras constituidas por este tipo de material. En primer lugar, los elementos de obra de fábrica (si se observan como un sólido continuo) son marcadamente anisótropos; es decir, presentan propiedades diferentes según la dirección de aplicación de las cargas. En segundo lugar, poseen relativa baja resistencia a la tracción. Ambos fenómenos se deben a la presencia de las juntas, que actúan como planos de debilidad en el supuesto continuo formado por las unidades.

A continuación se expone el comportamiento observado en la obra de fábrica bajo estados de carga uni y biaxial. En general, las observaciones se basan en ensayos experimentales hechos sobre paneles a escala compuestos por ladrillos macizos de arcilla. Cabe destacar que lo que se pretende es mostrar una tendencia general del comportamiento de la obra de fábrica, ya que la respuesta del material puede variar de manera importante si se cambian algunas condiciones. Existen muchos factores que influyen en el rendimiento de un elemento de obra de fábrica, como por ejemplo el tamaño y la disposición de las unidades, el material que compone las unidades o el tipo de mortero y la interacción entre ellos. En Hendry (1990) y Lourenço (1996), entre otros, se puede encontrar información detallada de estas observaciones, así como de los métodos de caracterización del material.

### 2.1.1 Comportamiento uniaxial

Los comportamientos uniaxiales a compresión y a tracción observados en los elementos de obra de fábrica tienen diferencias muy marcadas.

De acuerdo con lo observado experimentalmente, una estructura de obra de fábrica sometida a estados de *compresión uniaxial* alcanza el colapso en estados tensionales menores a la resistencia a compresión de las unidades, debido al efecto debilitador de las juntas. Asimismo, la resistencia del conjunto suele ser menor que la resistencia del mortero. En el Eurocódigo 6 (EC-6) se propone la siguiente expresión general para calcular la resistencia a compresión de la obra de fábrica  $f_k$ :

$$f_k = K f_b^{0.75} f_m^{0.25}$$

donde  $f_b$  es la resistencia a compresión de las unidades,  $f_m$  la resistencia a compresión del mortero y  $K$  es un factor que depende de estos dos valores y que varía entre 0.4 y 1. En la expresión se observa que en la mayoría de los casos la resistencia de la fábrica será menor que la de sus componentes por separado, y que la resistencia de las unidades es más determinante que la resistencia del mortero.

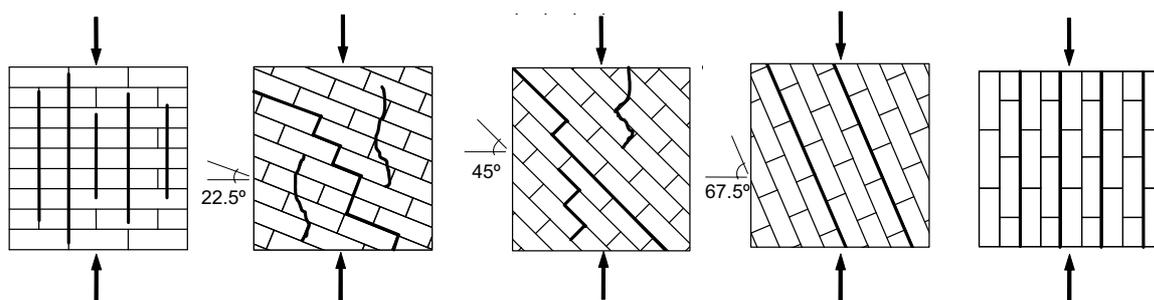
El colapso a compresión normalmente es causado por la rotura a tracción de las unidades. Lo anterior se puede explicar de la siguiente manera: si se aplica una carga de compresión perpendicular a las juntas horizontales, el mortero allí presente tenderá a expandirse lateralmente en mayor grado que las unidades que lo rodean, debido a la diferencia de rigideces entre ambos materiales. Sin embargo, cuando esta expansión trata de tener lugar, las unidades la impiden a causa de la adherencia existente entre la unidad y el mortero. Esto hace que el mortero genere tensiones de tracción en las unidades, al intentar desarrollar deformaciones mayores en el plano horizontal. Por esta razón, la falla bajo este estado de cargas tiende a manifestarse en la rotura de las unidades en dirección perpendicular a las juntas horizontales, por el estado de tracción que allí se crea (Molins, 1996a).

Sin embargo, el comportamiento observado tanto a niveles bajos de tensión como en rotura es muy diferente si se cambia el ángulo relativo entre la dirección de las fuerzas de compresión y la dirección de las juntas horizontales. Este fenómeno, que pone de manifiesto el carácter anisótropo del material, ha sido registrado por Samarasinghe y Hendry (1980), Page (1980, 1981, 1983), Samarasinghe et al. (1982), entre otros.

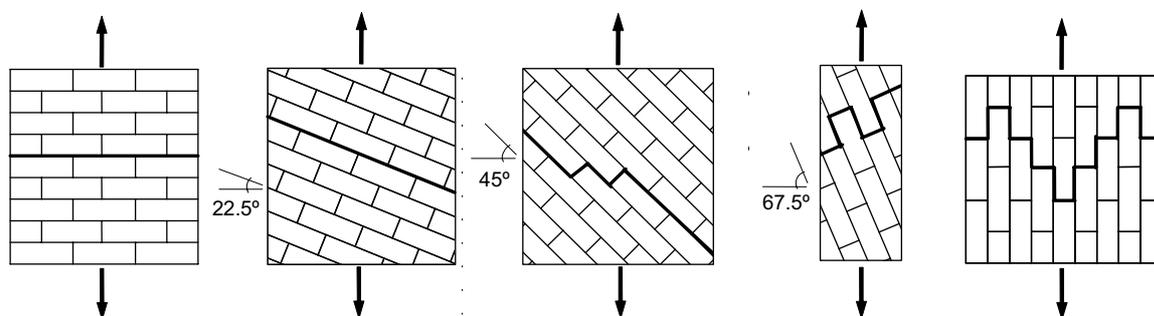
La figura 2.1 muestra los modos de rotura típicos de los paneles de ladrillo macizo bajo estados de compresión uniaxial, en función del ángulo entre las juntas principales y la dirección de aplicación de la carga. Para una compresión perpendicular a las juntas principales se observa el fenómeno comentado anteriormente: las unidades fallan a tracción, creándose unas fisuras que atraviesan varias hiladas y coinciden con la ubicación de las juntas verticales. En el otro extremo, si la dirección de la carga es paralela a la de las juntas principales, la tracción se concentra en estas juntas, separándose las hiladas a causa de fisuras rectas. En los estados intermedios se observa una combinación de ambos factores,

con separación de juntas o rotura a tracción de unidades, pero siempre con un patrón de fisuras que tiende a estar en la misma dirección que las cargas de compresión.

Generalmente la obra de fábrica presenta una *resistencia a tracción* muy baja, que viene gobernada por el valor menor entre la resistencia a tracción de las unidades y la resistencia a tracción de la unión mortero-unidad. En la mayoría de los casos, y sobre todo en las edificaciones históricas, el colapso está condicionado por la segunda, pues la primera tiene importancia sólo cuando se emplean morteros especialmente resistentes o unidades que presentan muchas perforaciones y son, por ende, propensas a fallar a bajos niveles de tensión. En la figura 2.2 se muestran diferentes patrones de fisuras obtenidas en ensayos experimentales de paneles de ladrillos sometidos a tracción uniaxial (Page, 1983), donde se aprecia este fenómeno. En todos los casos, la rotura se concentra en las juntas y tiende a formarse, como es lógico, perpendicular a la dirección de la tracción aplicada.

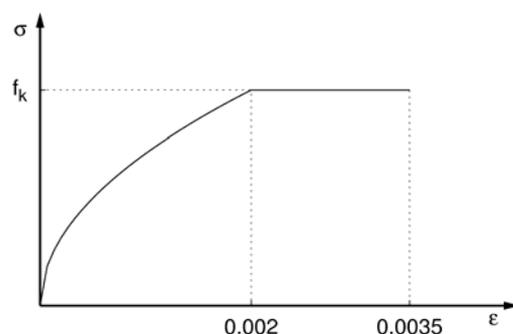


**Figura 2.1** Modos de fallo de la obra de fábrica de ladrillos macizos cerámicos bajo compresión uniaxial. Page (1980, 1981, 1983)



**Figura 2.2** Modos de fallo de la obra de fábrica de ladrillos macizos cerámicos bajo tracción uniaxial. Page (1980, 1981, 1983)

Existen diversos métodos para caracterizar el comportamiento y la resistencia uniaxial última de los elementos de obra de fábrica a compresión. Normalmente se acepta un comportamiento de tipo elastoplástico, si bien el Eurocódigo 6 (EC-6) propone un diagrama parabólico-lineal, similar al que frecuentemente se adopta para el hormigón (figura 2.3). Por otra parte, algunos autores han propuesto diferentes modos de definir la resistencia a compresión uniaxial de la obra de fábrica en función de las características de los componentes y sobre la base de diferentes campañas experimentales, como Hilsdorf (1969), Brooks (1986), Molins (1996a). Respecto al comportamiento uniaxial a tracción, en ocasiones se emplea un modelo elástico lineal con fragilidad perfecta (Molins, 1988), aunque también se encuentran análisis numéricos en los que se define una resistencia a tracción nula para la obra de fábrica (Choo et al., 1991; Brencich y De Francesco, 2004).



**Figura 2.3** Diagrama tensión-deformación unidimensional a compresión propuesto en el Eurocódigo 6 (EC-6) para la obra de fábrica

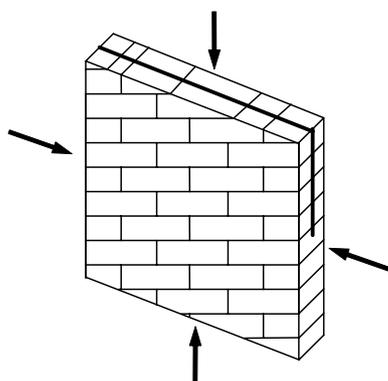
### 2.1.2 Comportamiento biaxial

El comportamiento no lineal observado en una dirección se ve acentuado cuando la fábrica se somete a *estados biaxiales* de tensión, aún antes de alcanzar valores cercanos a la rotura. De hecho, para describirlo no basta con usar solamente los términos en las direcciones principales, sino que es necesario utilizar el tensor de tensiones completo, o en su defecto el tensor de tensiones principales *más* el ángulo de inclinación relativo a la dirección de las juntas.

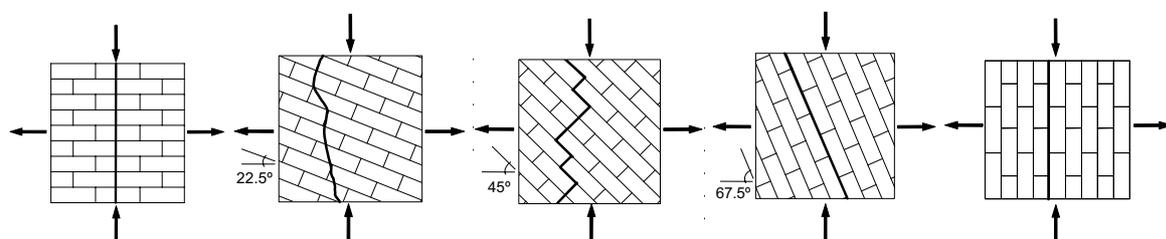
En una serie de ensayos experimentales a escala 1:2, Page (1980, 1981, 1983) estudió el comportamiento biaxial de paneles de ladrillos sometidos a tensión biaxial, cambiando las magnitudes y signos de las tensiones en las dos direcciones.

En el caso *compresión-compresión* se observaron dos tipos de falla, en función de la relación entre las tensiones principales. La mayor parte de las veces la falla ocurre en un plano paralelo al panel (figura 2.4). Sin embargo, cuando una tensión es mucho mayor que la otra la falla se presenta en un plano perpendicular a la orientación del panel. Esta falla podía estar localizada en la junta o en un mecanismo que involucrara tanto a las unidades como al mortero, dependiendo del ángulo de orientación de las juntas. La conclusión a la que se llegó con estos resultados es que el ángulo entre la dirección de las tensiones y las juntas principales tiene relevancia solamente cuando una tensión principal predomina sobre la otra.

Asimismo, en los ensayos con *tracción* en una dirección y *compresión* en su perpendicular, se concluyó que la orientación de las juntas principales rige la resistencia de la estructura. De hecho, ésta disminuye marcadamente cuando las direcciones principales de tracción se acercan a la normal de las juntas principales. En todos los casos se observó una falla frágil. El patrón de fisuras encontrado para diversos ángulos se muestra en la figura 2.5.

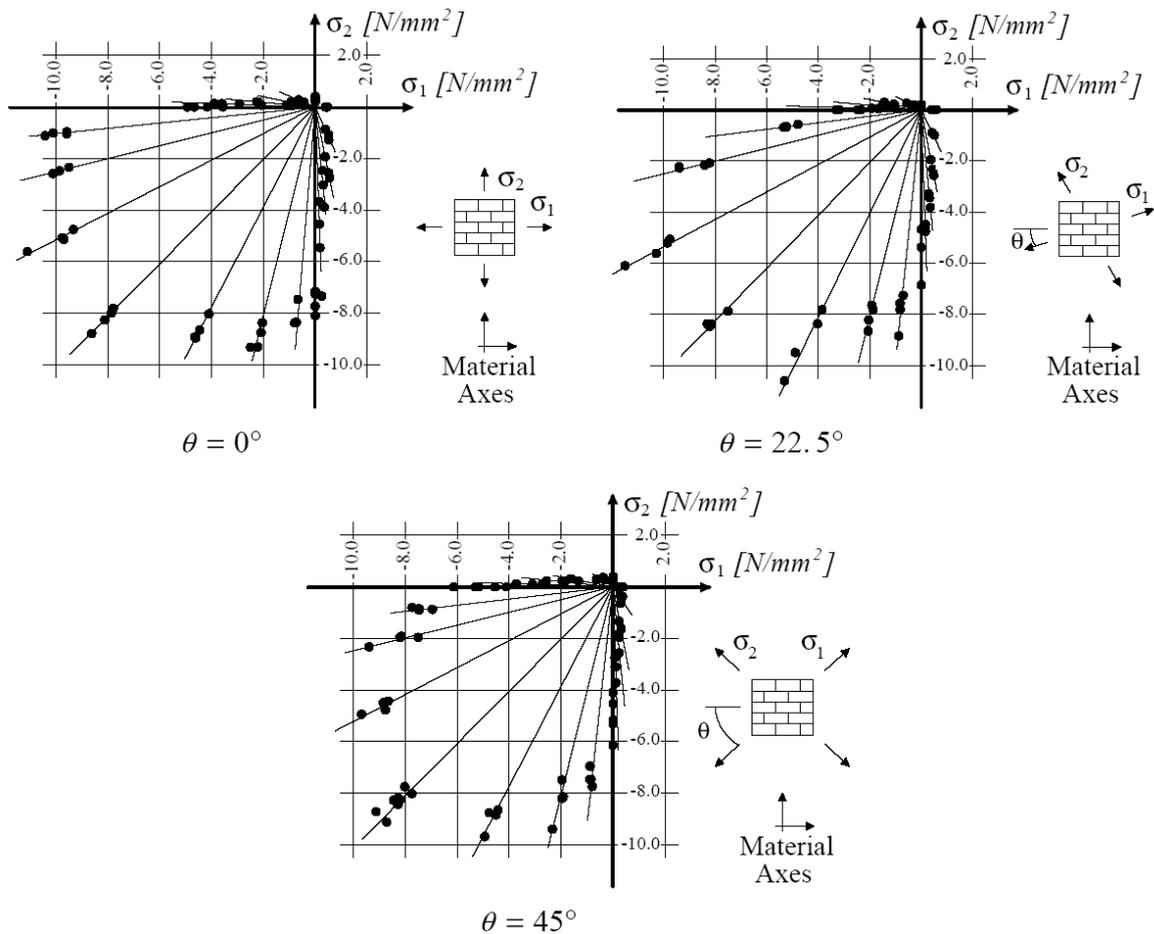


**Figura 2.4** Modo de fallo de la obra de fábrica de ladrillos macizos cerámicos bajo compresión biaxial. Page (1980, 1981, 1983)



**Figura 2.5** Modos de fallo de la obra de fábrica de ladrillos macizos cerámicos bajo carga biaxial. Page (1980, 1981, 1983)

La caracterización del comportamiento biaxial de la obra de fábrica propuesta por Page se hace mediante una superficie en el espacio definido por las dos tensiones en las direcciones principales y el ángulo de inclinación de las juntas horizontales respecto a estas direcciones. En la figura 2.6 se muestra la envolvente de fallas obtenidas por Page (1980, 1981, 1983) para tres ángulos de inclinación de las juntas horizontales:  $0^\circ$ ,  $22.5^\circ$  y  $45^\circ$ , presentadas en Lourenço (1996). Allí se observa una mayor variación en las envolventes entre un ángulo y otro a medida que la diferencia entre las magnitudes de las tensiones principales se hace mayor. Así, por ejemplo, para todos los ángulos se alcanza el fallo cuando la tensión es de aproximadamente  $-8 \text{ N/mm}^2$ , con  $\sigma_1 = \sigma_2$ , mientras que para un valor de  $\sigma_2$  nulo, el fallo varía para valores de  $\sigma_1$  dentro de un rango entre  $-3$  y  $-6.5 \text{ N/mm}^2$ .



**Figura 2.6** Envolvente de fallo para obra de fábrica de ladrillos macizos cerámicos bajo un estado tensional biaxial. Lourenço (1996) a partir de Page (1980, 1981, 1983).

No obstante lo anterior, los resultados experimentales obtenidos para la caracterización de un tipo de obra de fábrica son difícilmente extrapolables a otros casos. Esto se debe a la cantidad de variables que entran en juego, como la forma y tamaño de las unidades y el material del que están constituidas, el tipo de mortero, la configuración de los paneles, el espesor de las juntas, etc. (Lourenço, 1996).

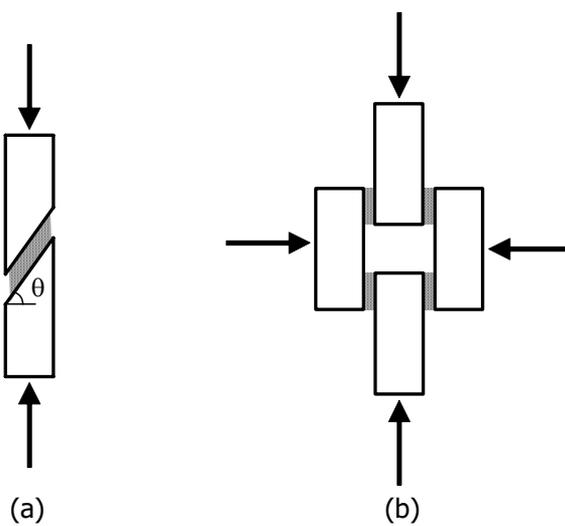
### 2.1.3 Comportamiento de las juntas bajo esfuerzos cortantes

Respecto a la investigación del comportamiento de la junta frente a *esfuerzos cortantes*, destacan los trabajos de Nuss et al. (1978) y Hamid y Drysdale (1980), quienes emplean una probeta sometida a compresión, con una única junta inclinada respecto a la dirección de la carga, tal como se muestra en la figura 2.7a. Los resultados obtenidos de este tipo de ensayos arrojan información sobre la influencia de la dosificación del mortero y de las características superficiales de las unidades. Los trabajos de Meli (1973) y Hamid (1978) se centran en el estudio a cortante de las juntas con probetas como la mostrada en la figura 2.7b. En ellos se aplica una carga de compresión perpendicular y previa a la aplicación del esfuerzo cortante. En estos ensayos se relaciona la rigidez y resistencia a cortante en función de la carga de precompresión aplicada, así como la influencia del tipo de mortero y unidad en la respuesta del a probeta.

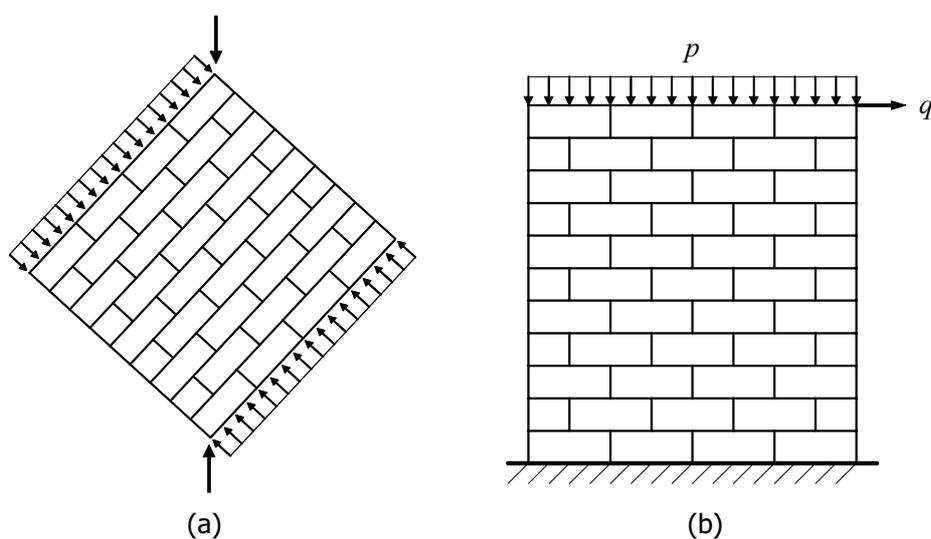
Otras configuraciones empleadas en el estudio a cortante de las juntas de la obra de fábrica se pueden encontrar en Hegemeier (1978), Atkinson et al. (1989), Lourenço et al. (2004) o Araiza (2005). Los resultados de estos ensayos suelen utilizarse para caracterizar el comportamiento de la junta, para luego emplear esta información en la calibración de un *micromodelo* (ver sección 2.2.2).

A nivel de paneles de obra de fábrica sometidos a esfuerzos cortantes, se encuentran ensayos como los de Yokel y Fattal (1976) o Calvi et al. (1985), que utilizan la configuración mostrada en la figura 2.8a. De estos ensayos se obtiene información de la respuesta del material bajo acciones cortantes durante la carga y hasta el fallo. Otra configuración habitual de los ensayos de paredes de obra de fábrica frente a cortante consiste en un muro sometido a una carga vertical de compresión y a una carga horizontal en su parte superior, tal como se muestra en la figura 2.8b (Ganz y Thürlimann, 1984; Raijmakers y Vermeltfoort, 1992; Vermeltfoort y Raijmakers, 1993; Oliveira, 2000).

Generalmente el estudio se concentra en determinar la magnitud de la carga  $q$  bajo la cual el material colapsa, para diferentes valores de la carga  $p$  de compresión. Obviamente, la carga de rotura a cortante aumenta mientras mayor es la fuerza de compresión. Los resultados de estos ensayos se suelen emplear para calibrar los parámetros tanto de *micromodelos* como de modelos homogeneizados o *macromodelos* (ver sección 2.2.3), en los que se pretende estudiar el material en su conjunto, sin detallar el comportamiento de las unidades y las juntas por separado.



**Figura 2.7** Diferentes configuraciones de ensayos para estudiar el comportamiento de la junta de la obra de fábrica bajo esfuerzos cortantes



**Figura 2.8** Diferentes configuraciones para ensayos de paneles de obra de fábrica bajo esfuerzos cortantes

## 2.2 Modelización de la obra de fábrica en edificios históricos

A continuación se comentan los diferentes métodos empleados en el estudio estructural de la obra de fábrica, especialmente en edificios históricos, desde los primeros postulados teóricos hasta las propuestas modernas de análisis computacional.

### 2.2.1 Método Antifunicular, Línea de Empujes y Análisis Límite

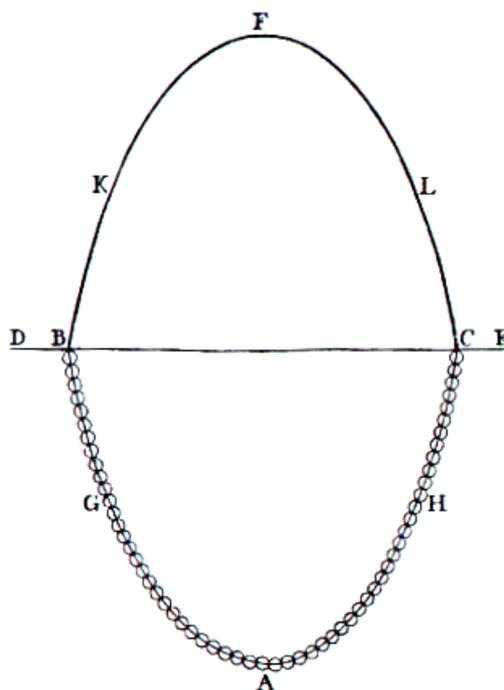
El elemento estructural fundamental en la arquitectura de obra de fábrica es el arco, definido por Huerta (2001) como *la vía "natural" de salvar un espacio con un material que no resiste tracción*. Un arco de mampostería se caracteriza principalmente porque las piedras que lo componen, llamadas dovelas o *voussoirs*, se encuentran talladas en forma de cuña (figura 2.9), de tal manera que las fuerzas que se transfieren desde la clave hasta los apoyos laterales sean principalmente de compresión (Huerta 1996).



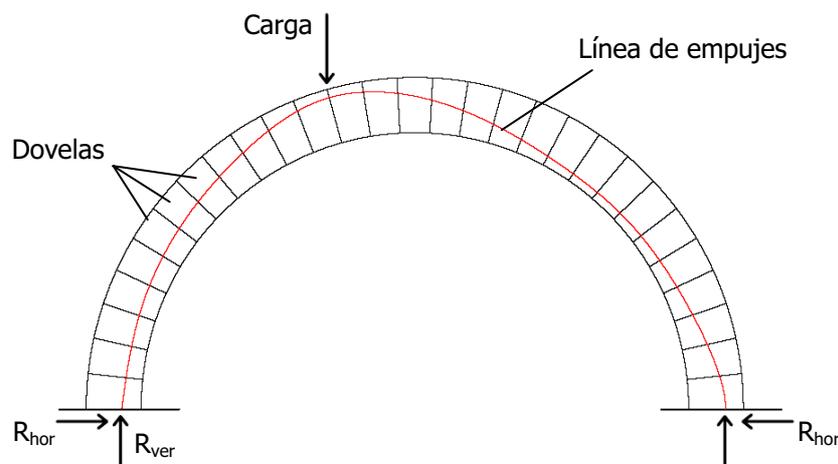
**Figura 2.9** Dovelas de un arco semicircular, resaltando la forma en cuña de la clave (Puente de Mérida sobre el río Guadiana) (<http://traianus.rediris.es>)

Debido a lo anterior, los primeros análisis científicos que se hicieron para calcular estructuras de obra de fábrica estaban orientados hacia los arcos. Dichos estudios datan de finales del siglo XVII, cuando Hook, y más tarde Gregory, postularon el *método antifunicular* para su diseño. Las hipótesis de este método planteaban que la forma correcta de un arco corresponde a la catenaria invertida de un cable flexible, de peso proporcional al que se verá sometida la estructura real (figura 2.10). Además, se afirmaba que un arco de forma diferente será estable sólo si dentro de su espesor está contenida dicha catenaria invertida.

Las catenarias que estos autores visualizaron dentro de los arcos para garantizar su equilibrio sirvieron de base para que Moseley planteara la teoría de la *línea de empujes* en 1833 (Huerta 1996). Para el análisis estructural de un arco por este método, es necesario primeramente dividirlo en dovelas (reales o imaginarias), observar los planos de contacto entre ellas, y calcular allí la magnitud y ubicación de la resultante de las fuerzas de contacto. Al lugar geométrico de estos puntos se le denomina línea de empujes (figura 2.11).



**Figura 2.10** Método antifunicular para determinar la forma óptima de un arco (Hooke, 1670)



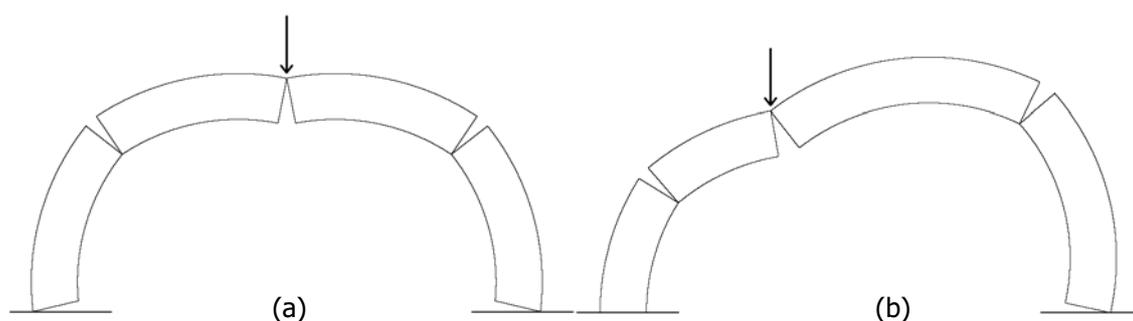
**Figura 2.11** Una línea de empujes de las muchas posibles

Según el método propuesto por Moseley, la estabilidad del arco está asegurada siempre que la línea de empujes se encuentre en su interior. Sin embargo, es evidente que en un arco de suficiente espesor existen prácticamente infinitas catenarias invertidas, por lo que no se puede determinar *a priori* cual de ellas es la que representa la configuración de equilibrio real. En todo caso, y tal como se explica más adelante, no es necesario establecer la línea de empujes real de la estructura, sino que normalmente el hecho de encontrar una línea de empujes *cualquiera* dentro del espesor del arco y en equilibrio con las cargas es garantía suficiente de su estabilidad.

Partiendo del estudio de las líneas de empuje, Heyman propuso en 1966 el método del *análisis límite*, que se basa en los siguientes principios (Heyman, 1999):

- i. *La piedra no tiene resistencia a tracción.* Aunque esta afirmación no es del todo cierta, pues el material sí resiste cierta tracción, se puede justificar dentro de una estructura donde las unidades estén aparejadas en seco o con un mortero pobre, pues las tracciones no se transmitirían a través de las juntas. En todo caso, la hipótesis está del lado de la seguridad.
- ii. *La piedra no alcanza su resistencia a compresión.* Esto se puede afirmar porque los niveles generales de las tensiones de compresión en los edificios históricos son muy bajos con relación a la resistencia real de la piedra.
- iii. *No existe deslizamiento entre las piedras.* Lo que implica que en los planos de contacto de las unidades la línea de empujes no se desviará demasiado con respecto a la perpendicular de dichos planos.

Una estructura estudiada bajo los principios del análisis límite alcanzará el colapso cuando se forme un número suficiente de articulaciones como para transformar la estructura en un mecanismo. La formación de la articulación se determina en los puntos donde la línea de empujes se hace tangente a la superficie de la fábrica. Y la pregunta natural que parece surgir es ¿cómo saber el número de articulaciones que hacen inestable a la estructura en estudio? Ya Frézier en 1732 había estudiado los mecanismos de colapso, observando ensayos y dibujando minuciosamente los puntos de formación de rótulas para diferentes configuraciones de estructuras. Así, por ejemplo, se tiene que un arco simétrico con carga simétrica necesita de cinco articulaciones para hacerse inestable, mientras que cuatro rótulas bastan para hacer colapsar a un arco con carga asimétrica (figura 2.12).

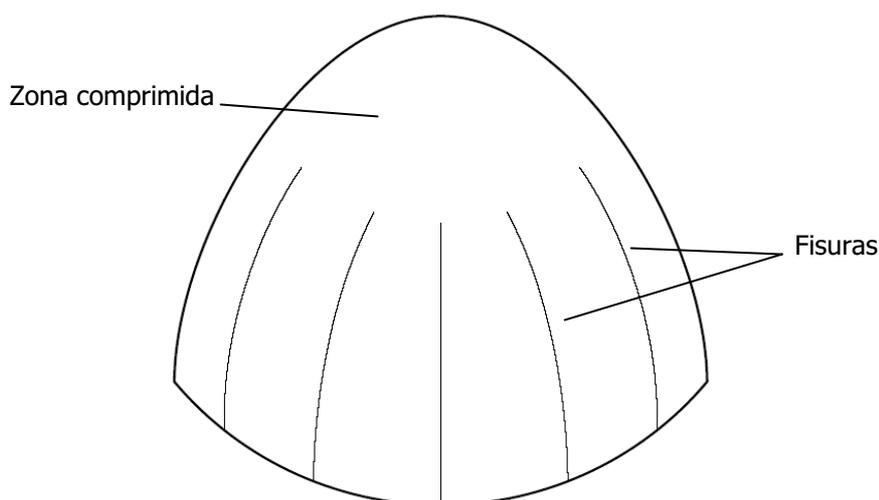


**Figura 2.12** Mecanismos de colapso de un arco simétrico (a) carga simétrica (b) carga asimétrica

A pesar de que no se puede saber *a priori* cual es la verdadera línea de empujes, es posible establecer ciertos límites. Siguiendo con el ejemplo del arco, existen dos líneas de empujes extremas: aquellas que generan la reacción horizontal mayor y menor en la base de la estructura. Y todas las líneas de empuje posibles estarán contenidas entre estas dos.

La mayor parte de lo comentado hasta ahora ha hecho referencia al arco como la estructura de obra de fábrica básica, y para análisis bidimensionales. Sin embargo, estos mismos principios pueden aplicarse a otras tipologías estructurales, como arbotantes o contrafuertes, e incluso a estructuras tridimensionales como bóvedas.

Un ejemplo tridimensional básico puede ser la cúpula semiesférica de espesor constante bajo cargas de peso propio. La solución del comportamiento de estos elementos, mediante la teoría de membranas, arroja que en la zona superior (adyacente a la clave) todas las fuerzas son de compresión, pero a partir de cierto paralelo hacia abajo, comienzan a aparecer tracciones circunferenciales en el plano horizontal. Estas tensiones se traducen en grietas verticales, presentes en muchas cúpulas existentes (figura 2.13). El análisis límite puede enfocarse entonces en la estabilidad de cada uno de los “gajos” que se forman tras la creación de las fisuras, tomando en cuenta que una solución estáticamente admisible para una porción de la cúpula también lo será para la cúpula completa. En Brencich et al. (2001) se hace un estudio de la cúpula de una basílica, basado en estas mismas hipótesis.



**Figura 2.13** Cúpula bajo peso propio

El método también ha sido aplicado para estudiar grandes edificaciones completas, como en el caso de Rubió (1912), donde se estudia una sección completa de la catedral de Mallorca, o de Zorn (1933) que hace lo mismo con la iglesia de Sankt Martin en Landshut. Otro ejemplo del método aplicado a construcciones relativamente complejas puede ser el análisis del Coliseo romano hecho por Como et al. (2001), donde se utilizan las mismas hipótesis que en el método original de Heyman y se determinan posibles mecanismos de colapso.

En la actualidad algunos autores han propuesto formulaciones más sofisticadas, basadas en el análisis límite, para estudiar construcciones históricas. Por ejemplo, han definido un límite para la resistencia a compresión, en cuyo caso la ley tensión-deformación puede ser rectangular (plasticidad perfecta) o triangular (frágil). Esto lleva como consecuencia la reducción de la máxima excentricidad que puede alcanzar la línea de empujes (Molins, 1998). En otros casos se ha eliminado la hipótesis de la ausencia de deslizamiento, como en el trabajo de Orduña y Lourenço (2001) que plantean el problema tomando la piedra como bloques perfectamente rígidos, a través de cuyas interfaces no se transmiten tracciones, y la falla por cortante sigue la ley de Coulomb. Sin embargo, este problema presenta una no linealidad difícil de resolver. En D'Ayala y Casapulla (2001) se aplica al estudio de cúpulas semiesféricas, también tomando en cuenta la falla por deslizamiento, y se propone un método para determinar la unicidad de la solución. Ver también los trabajos de Orduña y Lourenço (2003).

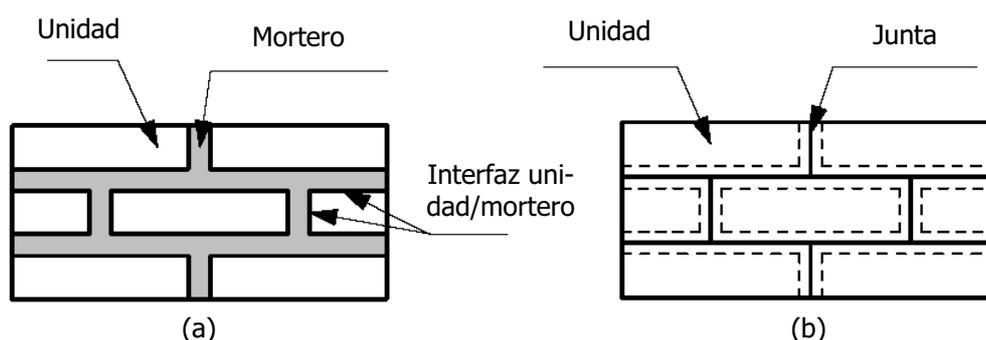
### 2.2.2 Micromodelos

Otras propuestas más modernas para modelar estructuras históricas se formulan basadas en la descripción del comportamiento del material a nivel constitutivo. Por ejemplo, los llamados *micromodelos* simulan el comportamiento de las unidades y de las juntas por

separado, acoplando las ecuaciones correspondientes para obtener una respuesta global del material compuesto.

La filosofía del método consiste en considerar cada unidad como un continuo, rígido o deformable, definiendo en las interfaces entre ellas algún mecanismo de interacción que represente las juntas de mortero. Dichas juntas se pueden modelar de dos maneras:

- i. Considerando su comportamiento constitutivo. Es decir, se definen las juntas de forma finita, especificando su espesor y tomando en cuenta su deformación, además de la interacción mortero-unidad (figura 2.14a); o
- ii. Definiendo solamente la interacción unidad-unidad, mediante leyes de rozamiento y de resistencia del vínculo a tracción que aproximen el comportamiento real del mortero y de su unión con el bloque o ladrillo (figura 2.14b). Normalmente en este caso se aumentan las dimensiones de las unidades para no alterar la geometría de la estructura.



**Figura 2.14** (a) Micromodelo detallado (b) Micromodelo simplificado. *Lourenço (1996)*

Estos dos planteamientos se suelen denominar micromodelado *detallado* y micromodelado *simplificado*, respectivamente (Lourenço, 1996); y generalmente se usan para hacer estudios locales en las estructuras, donde se esperan estados tenso-deformacionales marcadamente heterogéneos y la interacción unidad-mortero influye de manera importante en los resultados.

En Lourenço (1996) se comparan resultados experimentales con los obtenidos con un micromodelo simplificado, mostrando un buen ajuste. El modelo propuesto es capaz de simular la falla en las juntas tanto a tracción como a cortante (deslizamiento entre unidades) y compresión (con un modelo de plasticidad). Además incluye la posibilidad de falla a tracción de las unidades, vertical en la mitad de las mismas, de manera que una fisura que pase por las juntas verticales pueda propagarse a lo largo de una recta. Otros trabajos

con resultados recientes en micromodelos son los de Casapulla y Jossa (2001) y Drei y Fontana (2001).

Uno de los mayores inconvenientes de los micromodelos es que ameritan una gran cantidad de parámetros materiales para caracterizar el comportamiento de cada uno de los componentes de la obra de fábrica. Además, la obtención de estos parámetros suele ser compleja y costosa. Por otro lado, el alto coste computacional que conlleva el cálculo hace que su aplicación no sea práctica en estructuras grandes, por lo que en general su uso se ve limitado a estudios en áreas localizadas.

### 2.2.3 Macromodelos

Una forma de sortear los inconvenientes de los micromodelos consiste en suponer que la obra de fábrica es un material continuo y homogéneo. De esta manera su comportamiento puede definirse en términos de tensiones y deformaciones continuas, evitando la simulación de los componentes por separado, además de la interacción entre ellos. Para lograr esto se han propuesto diversas técnicas de homogeneización, que tratan de relacionar las características micro de la obra de fábrica con las características macro de un material homogéneo equivalente (Lourenço, 1996; Gambarotta y Lagomarsino, 1997; Zucchini y Lourenço, 2002)

Esta es claramente una aproximación fenomenológica, en la que los parámetros del material homogeneizado deben obtenerse de ensayos de probetas de obra de fábrica que deben ser suficientemente grandes y estar sometidas a estados tenso-deformacionales homogéneos.

En general, los modelos que aproximan el comportamiento de la obra de fábrica como un material continuo se denominan *macromodelos*. Uno de los métodos más apropiados para el planteamiento de los macromodelos es el método de los elementos finitos. Tal como se observa más adelante, muchos autores lo han aplicado al análisis estructural de la obra de fábrica en general y, particularmente, a los edificios históricos.

A través del método de los elementos finitos es posible efectuar cálculos bidimensionales bajo las hipótesis de tensión plana, deformación plana o simetría axial, aparte del caso general en tres dimensiones. Además, se pueden hacer aproximaciones al comportamiento de ciertas unidades estructurales mediante elementos de tipo viga, placa, lámina, etc. Esta clase de simplificaciones es importante, ya que reducen los requisitos computacionales al disminuir de forma notable el número de grados de libertad del problema. El empleo de este tipo de elementos está muy difundido; es normal encontrar elementos tipo lámina para simular paredes o bóvedas de obra de fábrica, así como elementos tipo viga para arcos y columnas, entre otros. Ejemplos de lo anterior se encuentran en Valcárcel et al. (2001), Gago y Lamas (2001), Lourenço et al. (2001), Toumbakari (1997).

Sin embargo, se observa que a nivel constitutivo muchos cálculos de edificios históricos se realizan con un modelo elástico lineal. Si bien un cálculo de este tipo permite obtener resultados interesantes, como por ejemplo la tendencia en la distribución de tensiones o

los puntos donde se deberían esperar los mayores desplazamientos, estos valores no pasan de ser meramente orientativos, ya que el marcado comportamiento no lineal de la obra de fábrica no puede ser aproximado por este modelo tan idealizado.

En consecuencia, y tal como se detalla más adelante, algunos autores han empleado modelos constitutivos no lineales para el análisis estructural de la obra de fábrica. Éstos suelen estar basados en la plasticidad, en la viscoplasticidad o en la teoría del daño, entre otros.

Uno de los primeros factores a tomar en cuenta al momento de formular o elegir el modelo constitutivo es el comportamiento anisótropo del material, ya sea definiéndolo a nivel elástico (el material intacto ya es anisótropo) o a través del comportamiento no lineal (el material plastifica o daña de forma diferente según la dirección en la que ocurre el fenómeno). En cualquier caso, el objetivo es simular la presencia de las juntas dentro de la fábrica, que generalmente están distribuidas de forma diferente en cada una de las direcciones naturales del elemento en estudio, originando un comportamiento ortótropo.

Otra de las características que tendría que incluir el modelo constitutivo no lineal es la diferencia entre los comportamientos a tracción y a compresión. Tal como se ha venido comentado en este texto, la obra de fábrica, y en especial la de edificaciones históricas, presenta mucha más resistencia y menos fragilidad a compresión que el comportamiento observado a tracción.

Lourenço (1996) presenta la formulación de un modelo de plasticidad anisótropo, con un criterio de fluencia compuesto, adecuado para modelar el comportamiento de materiales en tensión plana. Se utiliza el criterio de Rankine modificado para tracción y el criterio de Hill modificado para compresión, lo que se traduce en procesos de fractura localizados en el primer caso, y procesos de daño más distribuidos en el segundo. En general, los resultados obtenidos son buenos al compararlos con ensayos hechos sobre paredes de grandes dimensiones (Ganz y Thürlimann, 1984). Las limitaciones de carácter numérico que presenta el modelo son, por ejemplo, que al tratar de simular probetas de pequeñas dimensiones se observa una gran influencia del tamaño de los elementos en los resultados, así como una sobreestimación de la carga pico. Además, existen dificultades para simular correctamente la localización del daño.

En Creazza et al. (2001) se muestra el uso de un modelo de daño tracción/compresión, en el que se definen dos variables escalares de daño: una a tracción y otra a compresión. En ese trabajo se simula un ensayo hecho sobre un arco de obra de fábrica reforzado mediante análisis en dos y en tres dimensiones. Los resultados del modelo numérico se ajustan bien a los experimentales, pero se observa un fenómeno típico de los modelos constitutivos de fisura distribuida: las zonas dañadas del material se crean de forma muy dispersa, siendo incapaces de simular la fisura localizada equivalente a la formación de una rótula plástica.

Saetta et al. (2000) plantea un modelo de daño ortótropo para tensión plana. En la formulación propuesta se supone que los ejes naturales de la obra de fábrica coinciden con los

ejes principales del daño. Además, el modelo define dos variables de daño, a tracción y a compresión, en cada dirección principal. El modelo se valida con los resultados experimentales de unos paneles de fábrica sometidos a una compresión vertical constante y a un esfuerzo de corte cíclico incremental. En general, el modelo arroja resultados aceptables respecto al mecanismo de fallo que ocurre en el muro.

El mismo modelo también ha sido aplicado en cálculos tridimensionales, como se muestra en Creazza et al. (2000) al estudiar una cúpula hemisférica y una bóveda cilíndrica que habían sido ensayadas experimentalmente. La gráfica carga-desplazamiento del primer ejemplo coincide muy bien, no así la distribución del daño, que presenta variaciones importantes. En el análisis tridimensional de la bóveda se observa que las zonas dañadas coinciden con los puntos de formación de rótulas. Sin embargo, sigue presente el mismo problema de los modelos de fisura distribuida: la incapacidad de simular la formación de la fisura mediante la localización de las deformaciones.

Posteriormente, este modelo fue mejorado en Berto et al. (2001), al incluir el efecto de fricción a través de la fisura abierta, y la posibilidad de tomar en cuenta deformaciones irreversibles. Se validó con resultados experimentales similares a los anteriores, de una pared sometida a cortante, además del prototipo de una pared portante de un edificio.

Un modelo no lineal de daño continuo aplicado al estudio de varias catedrales góticas ha sido presentado en Roca et al. (1998), Roca (2001a y 2001b). El modelo, que originalmente estaba concebido para el hormigón, con dos variables de daño diferentes según el signo de las tensiones (tracciones o compresiones), se detalla en Cervera et al. (1998). Las estructuras son estudiadas bajo su peso propio y asentamientos diferenciales, incrementando la magnitud de la acción en ambos casos hasta producir el colapso, aún cuando se superara el valor real de la sollicitación a la que está sometida la estructura. Los resultados obtenidos permiten tener una idea de las causas de los daños observados en las estructuras reales, si bien no es posible reproducir resultados cuantitativamente más exactos.

En Frunzio et al. (2001) se plantea un modelo de plasticidad que incluye un criterio de fluencia anisótropo basado en el criterio clásico de Mohr-Coulomb, tomando en cuenta la ortotropía del material a través de un *tensor de fricción*.

Una técnica empleada para simular comportamiento no lineal con modelos constitutivos lineales consiste en la inclusión de discontinuidades discretas entre elementos, allí donde se sabe (o se presume) que existe (o se formará) una fisura. Esta metodología se sigue por ejemplo en Roccati y Roselli (2003), Macchi (2001). Las limitaciones de este método son claras, ya que hay que introducir *a priori* la ubicación de las fisuras.

Otras aplicaciones de modelos constitutivos no lineales se encuentran en Roede-Cabo y Ayala (2001), Brencich et al. (2001).

Las edificaciones históricas presentan, además de las características estructurales mencionadas hasta ahora, otra peculiaridad: los largos períodos que deben soportar las

cargas. Existe una hipótesis que afirma que las tensiones sostenidas, a pesar de estar muy por debajo de los valores de rotura de la obra de fábrica, pueden ser las responsables de la falla de algunas estructuras antiguas. Este fenómeno se ha observado principalmente en elementos esbeltos que soportan cargas relativamente altas, tipo torres o pilares. En este sentido, en Binda et al. (2003), Papa y Taliercio (2003), Papa et al. (2001), Papa et al. (2000) se propone un modelo de daño basado en la teoría de la viscoelasticidad, acoplada con dos variables de daño anisótropas, que tienen en cuenta el daño inducido por tensiones en crecimiento monótono y por tensiones sostenidas. Con este modelo han sido capaces de reproducir, de forma bastante aproximada, los resultados obtenidos de una serie de ensayos experimentales.

Tal como se ha comentado anteriormente, en ocasiones el proceso constructivo de una edificación histórica puede influir de manera importante en el comportamiento estructural de la misma. Por tanto, puede ser importante simular dicho proceso en el modelo numérico empleado en el análisis estructural. Por ejemplo, Šimunić Buršić (2001) hace un análisis de las diferentes etapas del proceso constructivo de una catedral en Croacia. La estructura se simula mediante el método de los elementos finitos en dos dimensiones, utilizando un modelo elástico lineal que trabaja sólo a compresión. Así, si durante el cálculo se generan tracciones en alguna zona, simplemente se omiten los elementos finitos pertenecientes a esta zona, teniendo el resto un comportamiento elástico lineal. Allí se comparan los resultados obtenidos en el análisis de cada fase constructiva, si bien cada uno de ellos se hace de manera independiente, sin tener en cuenta los efectos de las fases anteriores.

En lo referente al análisis sísmico de estructuras de obra de fábrica, se observa una tendencia similar a lo comentado anteriormente: la mayoría de los análisis son lineales, y se busca una simplificación geométrica para reducir el número de grados de libertad del problema. Cálculos que incluyen el comportamiento dinámico de las estructuras con modelos constitutivos lineales son el de Lourenço et al. (2001), Antonacci et al. (2001), Pistone et al. (1997). Ejemplos de cargas sísmicas simuladas como cargas estáticas horizontales se estudian en Mele et al. (2001), en Lourenço y Mourão (2001), donde se utilizan modelos constitutivos no lineales. Algunos autores han aplicado modelos constitutivos no lineales al cálculo dinámico de estructuras de obra de fábrica, como Sofronie et al. (2001).

Todos los modelos numéricos mencionados en los párrafos precedentes están formulados bajo las hipótesis de linealidad geométrica. Esto es natural, dada la naturaleza de los materiales que componen los edificios históricos, que generalmente se encuentran dentro del régimen de pequeñas deformaciones. Sin embargo, en el presente trabajo se propone el uso de una formulación geoméricamente no lineal, la cual se plantea en la sección 3.2.2.

Finalmente, cabe mencionar el trabajo presentado por Molins y Roca (1998), donde se plantea la *formulación de matriz generalizada* o FMG, un macromodelo que no está formulado bajo el método de los elementos finitos.

El método se plantea para el tratamiento analítico de estructuras tridimensionales porticadas, con geometría curva y miembros de sección variable. El modelo es capaz de simular el comportamiento de grandes estructuras de obra de fábrica con un relativo bajo coste computacional. La FMG se basa directamente en el equilibrio entre fuerzas internas y externas en cualquier punto del elemento, por lo que no se requieren hipótesis adicionales sobre los campos de desplazamientos o deformaciones. Esto trae como consecuencia que se puedan producir curvaturas muy acentuadas, que aproximan muy bien la formación de rótulas. Esto es difícil de conseguir con el método de los elementos finitos, ya que en ese caso las funciones de deformación y desplazamientos están definidas previamente, y tienen más dificultad para simular las pronunciadas curvaturas propias de una rótula localizada.

En el modelo propuesto, el comportamiento constitutivo del material se puede definir de tres maneras: a tracción como elástico lineal perfectamente frágil; a compresión como elastoplástico; y a cortante con fricción cinemática y una envolvente de Mohr-Coulomb.

Asimismo, es posible tomar en cuenta la no linealidad geométrica, mediante el equilibrio de segundo orden, que consiste en considerar el equilibrio sobre la geometría deformada. En general, esta aproximación es válida siempre y cuando los movimientos en la estructura sean relativamente moderados, y representa una simplificación importante respecto a una formulación hecha bajo las hipótesis de grandes desplazamientos.

## 2.3 Resumen

La obra de fábrica es un material heterogéneo, que presenta comportamientos marcadamente diferentes según las condiciones geométricas y de carga a las que se ven sometidos los elementos estructurales conformados por ella. La cantidad de variables que entran en juego complican la elaboración de modelos más o menos generales.

Existen diversos modos de afrontar el problema del análisis estructural de edificios históricos, y cada uno presenta sus ventajas y sus inconvenientes. Por tanto, es muy importante conocer dichas ventajas e inconvenientes antes de decantarse por un método o por otro al momento de llevar a cabo el cálculo.

Por una parte, el análisis de equilibrio solamente indica si la estructura es estable o no. El análisis límite sólo permite conocer la situación de colapso de la estructura, estimando algún factor de seguridad. Ninguno de estos métodos permite conocer la evolución del daño en la estructura, ya sea debido a cargas cíclicas, a factores medioambientales o a la fluencia a largo plazo. Además, se limitan a estudios estáticos de la estructura, por lo que no se pueden evaluar los efectos dinámicos producidos por cargas sísmicas. Sin embargo, posee las ventajas de una formulación relativamente sencilla, fácil de implementar en un programa computacional, así como también un reducido número de parámetros materiales necesarios para su caracterización.

Los micromodelos y macromodelos proveen una mayor gama de resultados: desplazamientos, tensiones, falla del material, etc., de los que se puede conocer su evolución en función de la carga aplicada. Además, presentan menos limitaciones al momento de reproducir geometrías complejas.

Sin embargo, un análisis utilizando un micromodelo generalmente involucra una gran cantidad de grados de libertad, encareciendo el coste computacional del cálculo. Por tanto, es más recomendable emplear un macromodelo para el análisis de estructuras grandes y complejas, como los edificios históricos.

De acuerdo a lo anterior, y observando en la literatura la gran cantidad de aplicaciones de macromodelos en el estudio de estructuras antiguas, en el presente trabajo se adopta como método de cálculo un modelo continuo de elementos finitos, con un comportamiento constitutivo no lineal.

Un modelo de estas características permite analizar la estructura bajo un régimen no lineal, tanto por el material como por la geometría, con un relativo bajo coste computacional. También es posible realizar la simulación del proceso constructivo, mediante la técnica de activación/desactivación de elementos. Además, es posible hacer análisis dinámicos, de gran interés para la evaluación estructural de edificios históricos.



# 3

## Modelo Estructural

En este capítulo se presenta la formulación sobre la que se basan los métodos propuestos para el análisis de edificios históricos. Se parte de la ecuación del Principio de los Trabajos Virtuales para sólidos estáticos, y se muestra un procedimiento de discretización para su resolución mediante el Método de los Elementos Finitos. Luego se plantean los métodos de resolución, tanto para el caso lineal como para el caso no lineal. Para mayor profundidad y detalle en estos temas se puede consultar la amplia bibliografía existente, como por ejemplo Hughes (1987), Brezzi y Fortin (1991), Zienkiewicz y Taylor (1994), Oñate (1995), Bathe (1996), Belytschko (2000).

También se describen los modelos constitutivos que se utilizan en el presente trabajo. La implementación del modelo de viscoelasticidad se efectúa mediante un grupo de cadenas de Maxwell en paralelo. Asimismo, se plantea la formulación del modelo de daño escalar distribuido, en la versión de daño isótropo y en la versión llamada tracción/compresión.

Experiencias previas en el análisis estructural de edificios históricos a través de métodos numéricos indican que en ocasiones puede ser relevante la consideración de la no linealidad geométrica. Este podría ser el caso de la Catedral de Mallorca, donde las columnas presentan unos fuertes desplomes, y por tanto es posible que bajo las hipótesis de pequeños movimientos no se alcancen resultados fiables. Sin embargo, al ser una estructura de

piedra, las deformaciones se mantienen en un rango tal que permite adoptar una formulación en pequeñas deformaciones, similar a la utilizada en estructuras de hormigón.

Por esta razón se propone una formulación de grandes desplazamientos y pequeñas deformaciones, combinada con el modelo constitutivo de daño, para la simulación numérica de edificios históricos. El contenido de este capítulo se presenta con carácter general, pero orientado hacia esta aplicación en particular.

Al final del capítulo se muestran algunos ejemplos sencillos para ilustrar y validar la implementación efectuada en el programa de elementos finitos COMET (Cervera et al., 2002).

### 3.1 Principio de los trabajos virtuales

Considérese un sólido continuo, que ocupa un dominio  $\Omega$ , sometido a fuerzas másicas o gravitatorias  $\mathbf{b}$  y a fuerzas externas  $\mathbf{t}^*$  aplicadas sobre parte de su contorno  $\partial\Omega_t$ , en estado de equilibrio. Considérese también un campo de desplazamientos virtuales cinemáticamente admisibles  $\delta\mathbf{u}$ , como una variación arbitraria del campo real de desplazamientos  $\mathbf{u}$  presente en dicho sólido. Las ecuaciones de equilibrio del sólido pueden escribirse en términos del *principio de los trabajos virtuales*, de la siguiente manera:

$$\int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_t} \delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{t}^* \, d(\partial\Omega_t) = \int_{\Omega} \delta\mathbf{e}^T : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega \quad (3.1)$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}$  es el tensor de tensiones de Cauchy y  $\delta\mathbf{e}$  es el *tensor de deformaciones virtuales*, el cual se obtiene del tensor de desplazamientos virtuales a través de la siguiente expresión:

$$\delta\mathbf{e} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial\delta\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}} + \left( \frac{\partial\delta\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}} \right)^T \right] \quad \text{en } \Omega \quad (3.2)$$

Este tensor tiene una estructura similar al tensor de pequeñas deformaciones y se considera como una variación virtual de las deformaciones reales en el sólido.

La porción del contorno donde existen desplazamientos predefinidos (por ejemplo, desplazamientos nulos en un apoyo simple) o condición de contorno de Dirichlet, se denota  $\partial\Omega_u$ , tal que  $\partial\Omega = \partial\Omega_t \cup \partial\Omega_u$ .

La ecuación (3.1), de amplio uso en la ingeniería, sirve como punto de partida para la mayoría de los análisis de estructuras por el método de los elementos finitos. Se le puede dar una interpretación física como la igualdad de los trabajos interno y externo que se producirían en un medio continuo si se le aplicara un desplazamiento virtual  $\delta \mathbf{u}$ . Asimismo, esta ecuación es válida independientemente del tipo de material y de la magnitud de los desplazamientos. A continuación se detalla el procedimiento para la resolución de problemas lineales y no lineales mediante el método de los elementos finitos a partir de la ecuación del principio de los trabajos virtuales.

## 3.2 Método de los elementos finitos

### 3.2.1 Caso lineal

Para resolver un problema lineal de valor de contorno como el planteado en la expresión (3.1) mediante el método de los elementos finitos, se debe transformar la ecuación en un sistema de ecuaciones algebraicas. Para esto, y suponiendo una relación cinemática lineal (pequeños desplazamientos) y una relación constitutiva lineal (comportamiento elástico lineal, por ejemplo), se puede escribir:

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_t} \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{t}^* \, d(\partial\Omega_t) = \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T : \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega \quad (3.3)$$

En (3.3) se observa la incorporación de la relación constitutiva lineal  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}$ , así como el empleo del tensor de pequeñas deformaciones  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . El tensor  $\mathbf{D}$  corresponde al tensor elástico lineal, que para el caso isótropo es función del módulo de Young del material y de su coeficiente de Poisson.

Al ser un problema cinemáticamente lineal, la configuración del dominio  $\Omega$  se mantiene constante durante el cálculo. Tal como se comenta más adelante, cuando existe no linealidad cinemática es importante diferenciar la configuración original de la configuración deformada del problema.

La transformación a ecuaciones algebraicas se efectúa a través de la *discretización* del problema. En primer lugar, el dominio se divide en regiones o *elementos finitos*, los cuales a su vez quedan definidos por una serie de puntos o *nodos*. El campo de desplazamientos se introduce entonces como una combinación lineal de funciones conocidas (llamadas *funciones de forma*) dentro de cada elemento finito, cuyos coeficientes son los desplazamientos incógnita ubicados en sus nodos. En otras palabras, se plantea una relación entre el campo de desplazamientos continuo  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  y un vector de desplazamientos  $\mathbf{a}^e$  que

agrupa los valores discretos para algunos puntos específicos del dominio (los nodos del elemento  $e$ ). Esto se puede expresar de la siguiente manera:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \mathbf{a}^e \quad (3.4)$$

donde  $\mathbf{N}^e(\mathbf{x})$  son las funciones de forma del elemento, que dependen de las coordenadas de sus nodos. Se pueden utilizar diferentes expresiones de  $\mathbf{N}^e(\mathbf{x})$ , en función del tipo de elemento finito adoptado. Por ejemplo, para un elemento de tres nodos en un dominio bidimensional,  $\mathbf{N}^e(\mathbf{x})$  tendría la forma:

$$\mathbf{N}^e(\mathbf{x}) = [\mathbf{N}_1(\mathbf{x}), \mathbf{N}_2(\mathbf{x}), \mathbf{N}_3(\mathbf{x})]; \quad \mathbf{N}_i(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} N_i(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & N_i(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

donde  $N_i(\mathbf{x})$  corresponde a la matriz de funciones de forma del nodo  $i$ , de dimensiones  $2 \times 2$ , por su carácter bidimensional. Por otra parte, el vector  $\mathbf{a}^e$  está conformado por las componentes de los desplazamientos de cada uno de los nodos del elemento. Así, para el mismo elemento plano de tres nodos, se tiene:

$$\mathbf{a}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{a}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

donde el subíndice  $i$  indica el número del nodo; y  $u_i$  y  $v_i$  son las componentes horizontal y vertical de los desplazamientos, respectivamente.

La condición cinemática lineal

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \left( \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right] \quad (3.7)$$

se puede describir como

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{L} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad (3.8)$$

donde  $\mathbf{L}$  es una matriz de operadores diferenciales, cuyas dimensiones dependerán de las hipótesis geométricas bajo las cuales está planteado el problema. Combinando la ecuación (3.4) con (3.8) se tiene

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}\mathbf{N}^e(\mathbf{x})\mathbf{a}^e = \mathbf{B}^e(\mathbf{x})\mathbf{a}^e \quad (3.9)$$

siendo  $\mathbf{B}^e(\mathbf{x})$  la matriz de las derivadas de las funciones de forma elementales. Los campos de desplazamientos virtuales y de deformaciones virtuales se discretizan de la misma manera:

$$\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}^e(\mathbf{x})\delta\mathbf{a}^e \quad (3.10)$$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^e(\mathbf{x})\delta\mathbf{a}^e \quad (3.11)$$

Sustituyendo las expresiones de los campos de desplazamientos reales y virtuales en la ecuación del principio de los trabajos virtuales (3.3), se tiene, para cada elemento  $e$ :

$$\delta\mathbf{a}^e \left( \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^e \cdot \mathbf{b} \, d\Omega \right) + \delta\mathbf{a}^e \left( \int_{\partial\Omega_t^e} \mathbf{N}^e \cdot \mathbf{t}^* \, d(\partial\Omega_t) \right) = \delta\mathbf{a}^e \left( \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D} \mathbf{B}^e \, d\Omega \right) \mathbf{a}^e \quad (3.12)$$

De esta manera queda planteado un sistema de ecuaciones lineales para cada elemento, de la forma

$$\mathbf{R}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{a}^e \quad (3.13)$$

donde  $\mathbf{R}^e$  es el vector de fuerzas elemental

$$\mathbf{R}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^e \cdot \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_t^e} \mathbf{N}^e \cdot \mathbf{t}^* \, d(\partial\Omega_t) \quad (3.14)$$

$\mathbf{K}^e$  es la matriz de rigidez elemental

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D} \mathbf{B}^e \, d\Omega \quad (3.15)$$

y  $\mathbf{a}^e$  es el vector de incógnitas nodales (desplazamientos discretos) del elemento. Por simplicidad, en la expresión (3.13) se suponen unas condiciones de Dirichlet nulas.

Una vez está determinado el sistema de ecuaciones que rige a un elemento, el siguiente paso es plantear ecuaciones de equilibrio en los nodos para ensamblar las matrices y vectores elementales. Esto es, que la suma de las fuerzas puntuales internas (contenidas en el vector  $\mathbf{R}^e$ ) debe ser igual a la fuerza nodal exterior. De esta forma, se obtiene el sistema de ecuaciones global del problema, o

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{R} \quad (3.16)$$

constituido por  $n$  ecuaciones y  $n$  incógnitas, donde  $n$  es el producto del número total de nodos por el número de grados de libertad. La matriz  $\mathbf{K}$  es real, definida positiva y, por tanto, invertible. La resolución del sistema se lleva a cabo mediante cualquier algoritmo de sistemas lineales estándar.

### 3.2.2 Caso no lineal

En el presente trabajo se utilizan dos tipos de no linealidad fundamentales: no linealidad material y no linealidad geométrica. La no linealidad material se introduce mediante el modelo de *daño isótropo*, expuesto en la sección 3.3.2. La utilización de este modelo implica un comportamiento constitutivo no lineal, en el que la relación tensión-deformación tiene la forma general:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{D}[\boldsymbol{\varepsilon}(t)] : \boldsymbol{\varepsilon}(t) \quad (3.17)$$

Así, el tensor constitutivo es función de las deformaciones, lo que implica una dependencia de la solución del sistema: los desplazamientos en (3.16). Nótese además que se ha incorporado la variable *tiempo* ( $t$ ) en la relación constitutiva. Esto se debe a que en el modelo de daño (al igual que en otros modelos constitutivos no lineales) los resultados son dependientes no sólo del estado actual de las deformaciones, sino que también dependen de la *historia* de dichas deformaciones. Cuando no se toman en cuenta los efectos dinámicos o viscosos, se utiliza un *seudotiempo*, que no tiene carácter físico, sino que sirve para establecer la historia de las deformaciones.

Por otro lado, existen diversos tipos de no linealidad geométrica. Para su aplicación en el estudio estructural de edificios históricos, en este trabajo se ha optado por el uso de la formulación en grandes desplazamientos y pequeñas deformaciones. El objetivo de em-

plear esta formulación es tomar en cuenta los efectos de desplazamientos finitos en la respuesta de la estructura, si bien las deformaciones se mantienen dentro del rango de pequeñas deformaciones. Esto es adecuado particularmente para el estudio de la Catedral de Mallorca, donde se evidencian desplazamientos importantes en su estructura, aunque la obra de fábrica que la compone tiene un comportamiento constitutivo que se puede considerar dentro del rango de las deformaciones infinitesimales.

Para aquellos casos en los que las magnitudes de las deformaciones son relativamente grandes se debe utilizar la formulación en grandes desplazamientos y grandes deformaciones. Otro caso de no linealidad geométrica es la variación de las condiciones de contorno durante el cálculo. Sin embargo, estos dos tipos de no linealidad geométrica no se incluyen dentro del alcance del presente trabajo. Para su estudio se puede consultar, entre otros, Bathe (1996) o Belytschko (2000).

Cuando se incluyen los efectos geométricos no lineales es necesario considerar la variación durante el tiempo de la configuración del dominio. Es decir, en este caso deja de ser válida la hipótesis de que el dominio se mantiene constante en el espacio durante el cálculo. Así, la ecuación de equilibrio se puede plantear en la configuración original (o inicial) del dominio o en la configuración deformada. Por esta razón debe incorporarse también la variable *tiempo* cuando se considera la no linealidad geométrica. Esto se comenta con detalle más adelante

Visto lo anterior, queda claro que para solucionar un problema no lineal mediante el método de los elementos finitos, es necesario hacer una *discretización temporal*. Esto es, el problema se evalúa en  $N$  pasos de tiempo discretos, de forma  $t_0, \dots, t_i, t_{i+1}, \dots, t_N$ . En general, se puede plantear que el problema se reduce a calcular la solución para un instante de tiempo dado  $t_{i+1}$ , conociendo la solución para el instante anterior  $t_i$ , con  $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ .

La expresión de las ecuaciones de equilibrio discretizadas para el instante  $t$ , en el caso no lineal es la siguiente:

$$\mathbf{R}(t) - \mathbf{F}^{int}(t) = 0 \quad (3.18)$$

donde  $\mathbf{R}(t)$  es el vector de fuerzas nodales externas equivalentes

$$\mathbf{R}(t) = \int_{\Omega} \mathbf{N} \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{N} \mathbf{t}^* \, d(\partial\Omega_t) \quad (3.19)$$

y  $\mathbf{F}^{int}(t)$  es el vector de fuerzas internas equivalentes

$$\mathbf{F}^{int}(t) = \int_{\Omega} \mathbf{B} \boldsymbol{\sigma}(t) \, d\Omega \quad (3.20)$$

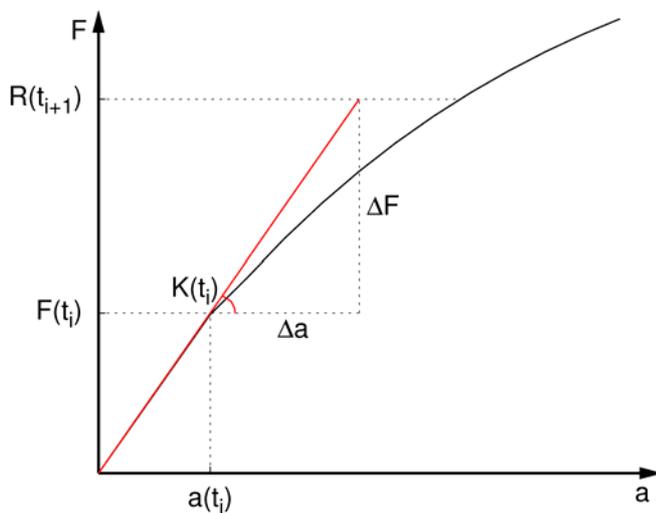
Comparando (3.18) con la expresión para el caso lineal, se tiene que  $\mathbf{F}^{int}(t)$  se corresponde con el producto  $\mathbf{K}\mathbf{a}$ . En este caso, sin embargo, las tensiones tienen que expresarse de forma implícita, pues no son una función lineal de las deformaciones, tal como demuestra (3.17).

La resolución del problema no lineal planteado consiste en conseguir que la ecuación (3.18) se cumpla para cada instante de tiempo. Para conseguir esto, se procede a la linealización de las ecuaciones discretas de equilibrio.

### *Linealización de las ecuaciones discretas de equilibrio*

Tal como se comenta en la sección precedente, la solución en cada paso de tiempo se obtiene a partir de la solución (conocida) del paso de tiempo anterior. Así, para conocer las fuerzas nodales del paso de tiempo  $t_{i+1}$  es necesario calcular el incremento de fuerzas  $\Delta\mathbf{F}$  desde el paso anterior  $t_i$  (ver figura 3.). Es decir:

$$\mathbf{F}^{int}(t_{i+1}) = \mathbf{F}^{int}(t_i) + \Delta\mathbf{F} \quad (3.21)$$



**Figura 3.1** Linealización de la ecuación (3.18)

Este incremento de fuerzas se *linealiza* mediante la introducción de la matriz de rigidez tangente, de la forma:

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{K}(t_i) \Delta \mathbf{a} \quad ; \quad \mathbf{K}(t_i) = \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{a}} \right|_{t_i} \quad (3.22)$$

Para sustituirlo en (3.21) y luego en (3.18), quedando

$$\mathbf{R}(t_{i+1}) = \mathbf{F}^{int}(t_i) + \mathbf{K}(t_i) \Delta \mathbf{a} \quad (3.23)$$

Finalmente, se resuelve la ecuación, obteniendo el incremento de desplazamientos y, por ende, los desplazamientos del paso de tiempo actual.

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{a} &= [\mathbf{K}(t_i)]^{-1} [\mathbf{R}(t_{i+1}) - \mathbf{F}^{int}(t_i)] \\ \mathbf{a}(t_{i+1}) &= \mathbf{a}(t_i) + \Delta \mathbf{a} \end{aligned} \quad (3.24)$$

En ocasiones el procedimiento de linealización planteado no es suficiente para encontrar la solución correcta del problema. Por esta razón, el proceso se puede mejorar, iterando en cada incremento de tiempo hasta conseguir una mejor solución. Uno de los métodos más utilizados es el método de *Newton-Raphson*, el cual consiste en calcular el incremento de desplazamientos  $\Delta \mathbf{a}$  repetidas veces, actualizando la matriz de rigidez tangente y el vector de fuerzas nodales en cada iteración, hasta la convergencia. Así, se tiene para cada iteración  $k + 1$ :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{a}^{k+1} &= [\mathbf{K}(t_i)^k]^{-1} [\mathbf{R}(t_{i+1}) - \mathbf{F}^{int}(t_i)^k] \\ \mathbf{a}(t_{i+1})^{k+1} &= \mathbf{a}(t_i)^k + \Delta \mathbf{a}^{k+1} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Como primera aproximación ( $k = 1$ ) a la solución se toma el valor convergido del paso de tiempo anterior.

Este método tiene varias desventajas, entre ellas la necesidad de una primera aproximación relativamente cercana a la solución. Además, si la matriz de rigidez tangente es singular, no se puede calcular su inversa y por tanto el método falla. Sin embargo, el método tiene velocidad de convergencia cuadrática, lo que puede reducir de manera importante los tiempos de cálculo.

Según el problema, el cálculo e inversión de la matriz de rigidez en cada iteración puede ser computacionalmente costoso. Sin embargo, existen alternativas que permiten ahorrar tiempo de cálculo, como el llamado método de *Newton-Raphson modificado*. En este caso, la matriz de rigidez se mantiene constante durante todas las iteraciones del paso de tiempo. Si bien en este caso normalmente serán necesarias más iteraciones para alcanzar la convergencia, el ahorro de tiempo al no recalcular la matriz de rigidez tangente puede ser importante. En ocasiones, como un punto intermedio entre el método original y el modificado, se actualiza la matriz tangente cada cierto número de iteraciones. Otro método es el llamado *método de la secante*, en el que se utiliza la matriz de rigidez secante, en lugar de la matriz de rigidez tangente. Este método es más robusto que el Newton-Raphson, pero se pierde la velocidad de convergencia cuadrática.

### *Formulación Lagrangiana Total*

En el análisis de sólidos es recomendable el empleo del llamado enfoque *Lagrangiano* para la linealización de la ecuación de equilibrio no lineal. En este enfoque el movimiento se expresa siguiendo la evolución de las partículas desde su configuración inicial. Es decir, se trabaja con las coordenadas materiales, denominadas  $\mathbf{X}$ . Por otro lado, existe la formulación *Euleriana*, que trabaja con las coordenadas espaciales  $\mathbf{x}$  y resulta más adecuada para el análisis de fluidos.

El enfoque Lagrangiano a su vez se divide en dos tipos: formulación Lagrangiana *Total* y formulación Lagrangiana *Actualizada* (TL y UL, por sus siglas en inglés, respectivamente). En la primera se plantea la ecuación de equilibrio en la configuración original del dominio, mientras que en la segunda se trabaja en la configuración actualizada en cada paso de tiempo. Ambas formulaciones son completamente equivalentes, y la elección de una u otra depende de consideraciones más bien prácticas, en función del tipo de elemento finito y de la relación constitutiva empleada (Bathe, 1996). En este trabajo se adopta la formulación Lagrangiana Total, en la que las derivadas de las funciones de forma se realizan respecto a las coordenadas originales del dominio.

Se emplea el tensor de deformaciones de *Green-Lagrange*  $\mathbf{E}$  (también llamado *tensor material de la deformación*) que tiene la forma

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right] \quad (3.26)$$

La expresión anterior incorpora un término no lineal en la cinemática del problema, en este caso el producto  $\frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}$ , que era despreciado en el caso lineal. Para expresar las tensiones se utiliza el *segundo tensor de tensiones de Piola Kirchhoff*  $\mathbf{S}$ , el cual se puede escribir en función del tensor de tensiones de Cauchy como

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^T \quad (3.27)$$

donde  $\mathbf{F}$  es el *tensor gradiente de la deformación*, definido como la derivada de las coordenadas espaciales respecto a las coordenadas materiales:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad (3.28)$$

Si se emplean las hipótesis de pequeñas deformaciones, las relaciones constitutivas comentadas en el apartado 3.3 son válidas también entre el tensor de deformaciones de Green-Lagrange y el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff. Así, para el caso elástico, por ejemplo, se puede escribir

$$\mathbf{S} = \mathbf{DE} \quad (3.29)$$

Sobre la base de las ecuaciones precedentes, el término de la derecha de la expresión (3.1) se puede reescribir como

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{e}^T : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{E}^T : \mathbf{S} \, d\Omega \quad (3.30)$$

donde  $\Omega$  es la configuración inicial del dominio sólido.

El siguiente paso consiste en plantear el vector de desplazamientos, el tensor de tensiones y el tensor de deformaciones en una forma incremental. Es decir, expresar los valores del

paso de tiempo actual como la suma del valor en el paso de tiempo anterior más el incremento experimentado en el intervalo de tiempo  $\Delta t$ .

$$\mathbf{u}(t_{i+1}) = \mathbf{u}(t_i) + \Delta \mathbf{u} \quad (3.31)$$

$$\mathbf{S}(t_{i+1}) = \mathbf{S}(t_i) + \Delta \mathbf{S} \quad (3.32)$$

$$\mathbf{E}(t_{i+1}) = \mathbf{E}(t_i) + \Delta \mathbf{E} \quad (3.33)$$

donde el incremento de las deformaciones se divide a su vez de la forma

$$\Delta \mathbf{E} = \Delta \mathbf{e} + \Delta \boldsymbol{\eta} \quad (3.34)$$

$$\Delta e_{ij} = \frac{\partial(\Delta u_i)}{\partial X_j} + \frac{\partial(\Delta u_j)}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k(t_i)}{\partial X_i} \frac{\partial(\Delta u_k)}{\partial X_j} + \frac{\partial u_k(t_i)}{\partial X_j} \frac{\partial(\Delta u_k)}{\partial X_i} \quad (3.35)$$

$$\Delta \eta_{ij} = \frac{\partial(\Delta u_k)}{\partial X_i} \frac{\partial(\Delta u_k)}{\partial X_j} \quad (3.36)$$

Así, la expresión (3.33) queda descompuesta en una parte constante  $\mathbf{E}(t_i)$ , una parte lineal  $\Delta \mathbf{e}$  y una parte cuadrática  $\Delta \boldsymbol{\eta}$  (estas dos últimas expresadas en notación indicial), en función de la derivada material del incremento de desplazamientos  $\Delta \mathbf{u}$ .

Para definir la deformación virtual, se toma la primera variación de las deformaciones:

$$\delta \mathbf{E}(t_{i+1}) = \delta \Delta \mathbf{E} = \delta \Delta \mathbf{e} + \delta \Delta \boldsymbol{\eta} \quad (3.37)$$

$$\delta \Delta e_{ij} = \frac{\partial(\delta \Delta u_i)}{\partial X_j} + \frac{\partial(\delta \Delta u_j)}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k(t_i)}{\partial X_i} \frac{\partial(\delta \Delta u_k)}{\partial X_j} + \frac{\partial u_k(t_i)}{\partial X_j} \frac{\partial(\delta \Delta u_k)}{\partial X_i} \quad (3.38)$$

$$\delta \Delta \eta_{ij} = \frac{\partial(\delta \Delta u_k)}{\partial X_i} \frac{\partial(\Delta u_k)}{\partial X_j} + \frac{\partial(\delta \Delta u_k)}{\partial X_i} \frac{\partial(\delta \Delta u_k)}{\partial X_j} \quad (3.39)$$

Luego, reemplazando la ecuación (3.32) en la expresión del trabajo virtual interno (3.30), queda:

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{E}^T : \mathbf{S} \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta \Delta \mathbf{E}^T : [\mathbf{S}(t_i) + \Delta \mathbf{S}] \, d\Omega \quad (3.40)$$

Sustituyendo la expresión anterior en la ecuación de equilibrio, e introduciendo los términos de deformaciones virtuales, tras operar se obtiene:

$$\int_{\Omega} \delta \Delta \mathbf{E}^T : \Delta \mathbf{S} \, d\Omega + \int_{\Omega} \delta \Delta \boldsymbol{\eta}^T : \mathbf{S}(t_i) \, d\Omega = W(t_{i+1}) - \int_{\Omega} \delta \Delta \mathbf{e}^T : \mathbf{S}(t_i) \, d\Omega \quad (3.41)$$

donde  $W(t_{i+1})$  es el trabajo virtual externo. El incremento de las tensiones  $\Delta \mathbf{S}$  se aproxima mediante el primer término de la serie de Taylor, de la forma

$$\Delta \mathbf{S} \approx \frac{\partial \mathbf{S}(t_i)}{\partial \mathbf{E}(t_i)} \Delta \mathbf{E} \quad (3.42)$$

donde se reconoce la relación constitutiva tangente para el paso de tiempo actual

$$\mathbf{D}^{tan}(t_i) = \frac{\partial \mathbf{S}(t_i)}{\partial \mathbf{E}(t_i)} \quad (3.43)$$

Si, además, se desprecia el término cuadrático (3.39) para esta relación, la expresión final del incremento de las tensiones queda:

$$\Delta \mathbf{S} \approx \mathbf{D}^{tan}(t_i) \Delta \mathbf{e} \quad (3.44)$$

Finalmente, al sustituir en (3.41), se obtiene la expresión de la formulación Lagrangiana Total:

$$\int_{\Omega} \delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^T : \mathbf{D}^{tan} : \delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \Delta \boldsymbol{\eta}^T : \mathbf{S}(t_i) d\Omega = W(t_{i+1}) - \int_{\Omega} \delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^T : \mathbf{S}(t_i) d\Omega \quad (3.45)$$

La expresión anterior es válida para el caso general con no linealidad material y geométrica. Para el caso de no linealidad material solamente, (3.45) queda reducida a

$$\int_{\Omega} \delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^T : \mathbf{D}^{tan} : \delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega = W(t_{i+1}) - \int_{\Omega} \delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^T : \boldsymbol{\sigma}(t_i) d\Omega \quad (3.46)$$

donde se observa que el término cuadrático de la variación de las deformaciones  $\boldsymbol{\eta}$  ha sido eliminado, y se emplea el tensor de deformaciones infinitesimales  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

### *Expresiones matriciales*

De acuerdo a lo mostrado en los apartados anteriores, tras linealizar la ecuación para la formulación Lagrangiana Total, se obtienen las siguientes expresiones matriciales para un problema estático:

$$\mathbf{K}(t_i) \Delta \mathbf{a} = \mathbf{R}(t_{i+1}) - \mathbf{F}^{int}(t_i) \quad (3.47)$$

donde  $\mathbf{K}$  se puede descomponer en una parte lineal y otra parte no lineal:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(t_i) &= \mathbf{K}_L(t_i) + \mathbf{K}_{NL}(t_i) \\ \mathbf{K}_L(t_i) &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L d\Omega \quad \mathbf{K}_{NL}(t_i) = \int_{\Omega} \mathbf{B}_{NL}^T \mathbf{S} \mathbf{B}_{NL} d\Omega \end{aligned} \quad (3.48)$$

El vector de fuerzas internas queda de la forma

$$\mathbf{F}^{int}(t_i) = \int_{\Omega} \mathbf{B}_L^T \hat{\mathbf{S}} d\Omega \quad (3.49)$$

donde  $\hat{\mathbf{S}}$  es un vector con las componentes del tensor de tensiones  $\mathbf{S}$ . Para el caso de no linealidad material solamente,  $\hat{\mathbf{S}}$  estaría constituido por las componentes del tensor de tensiones de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ , y la componente no lineal de la matriz de rigidez  $\mathbf{K}_{NL}$  sería nula.

### 3.3 Formulación constitutiva

A continuación se describen los modelos constitutivos utilizados en el presente trabajo: el modelo de viscoelasticidad y el modelo de daño. El primero se plantea sobre la base de cadenas de Maxwell arregladas en paralelo, lo que permite simular el fenómeno de la fluencia, que es de interés para esta investigación. El modelo de daño presentado corresponde al llamado *modelo escalar de daño tracción-compresión*, aplicado con frecuencia en el estudio del hormigón. A continuación se explican los aspectos fundamentales de ambos modelos, describiendo los detalles particulares para su implementación en el programa de elementos finitos COMET. Información más detallada se puede encontrar en Cervera (2003).

#### 3.3.1 Modelo de viscoelasticidad

##### *Fenomenología y formulación*

La viscoelasticidad toma en cuenta los efectos del tiempo en la respuesta de un sólido elástico. Así, por ejemplo, se pueden obtener diferentes comportamientos en función de la velocidad de aplicación de la carga, tal como se muestra en la figura 3.2.

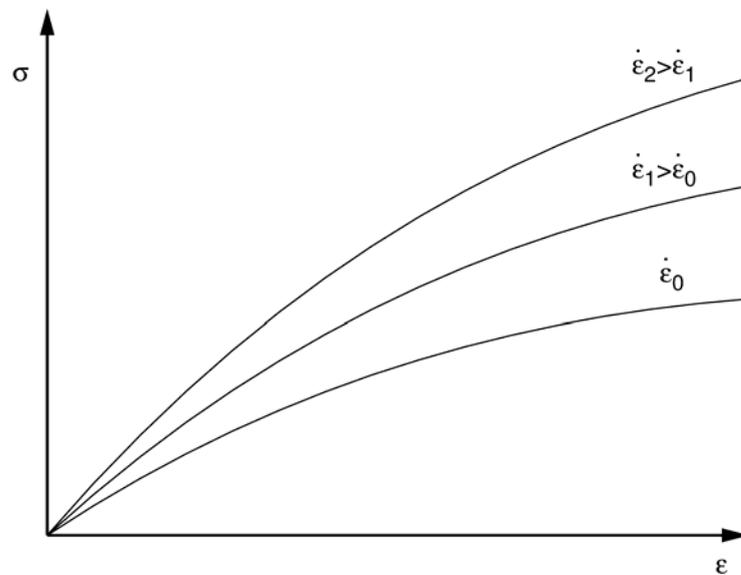
Una manera práctica de plantear este fenómeno es la utilización de modelos reológicos consistentes en muelles y amortiguadores combinados de diferentes maneras. Así, la respuesta del muelle será elástica lineal, mientras que la del amortiguador será proporcional a la velocidad de deformación, o

$$\sigma = E\varepsilon \text{ para el muelle} \quad (3.50)$$

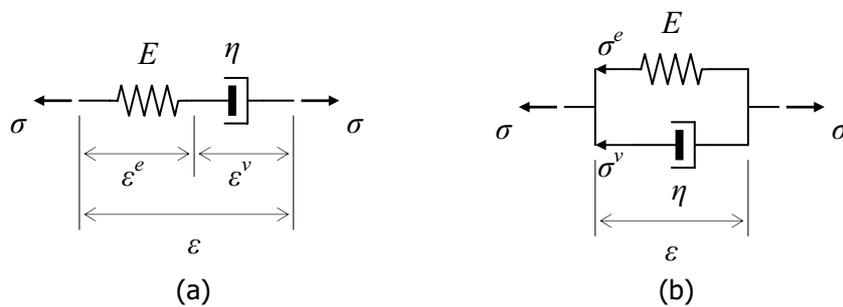
$$\sigma = \eta\dot{\varepsilon} \text{ para el amortiguador} \quad (3.51)$$

donde  $E$  es el módulo elástico y  $\eta$  la viscosidad del material.

Los dos modelos reológicos básicos combinan el muelle y el amortiguador en serie (modelo de Maxwell) y en paralelo (modelo de Kelvin), tal como se muestra en la figura 3.3).



**Figura 3.2** Comportamiento viscoelástico típico



**Figura 3.3** Modelos reológicos básicos (a) Cadena de Maxwell (b) Cadena de Kelvin

En el caso del modelo de Maxwell, ambos elementos están sometidos a la misma tensión  $\sigma$ , mientras que la deformación se puede descomponer en la parte elástica  $\varepsilon^e$  y la parte viscosa  $\varepsilon^v$ , quedando:

$$\varepsilon^e = \frac{\sigma}{E} \quad (3.52)$$

$$\dot{\varepsilon}^v = \frac{\sigma}{\eta} \quad (3.53)$$

Sumando ambas componentes y diferenciando con respecto al tiempo, se tiene

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^v \quad (3.54)$$

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^v \quad (3.55)$$

donde

$$\dot{\varepsilon}^e = \frac{\dot{\sigma}}{E} \quad (3.56)$$

Al sustituir se obtiene la ecuación que rige el comportamiento del modelo de Maxwell

$$\dot{\sigma} + \frac{E}{\eta} \sigma = E \dot{\varepsilon} \quad (3.57)$$

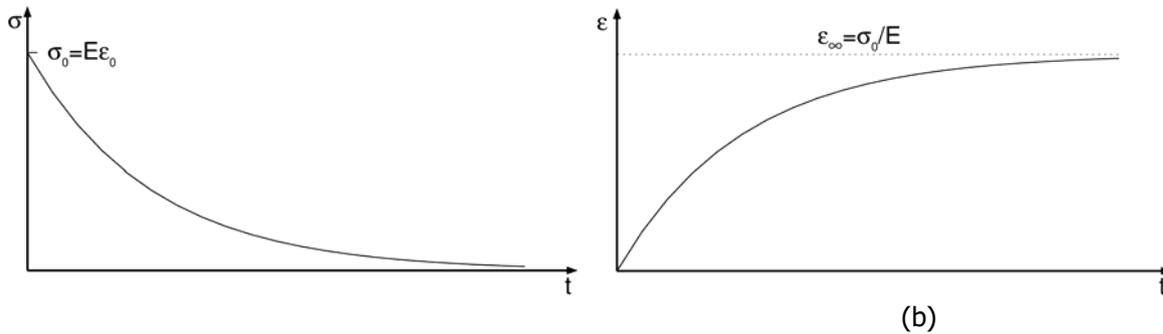
Por otro lado, en el modelo de Kelvin los dos elementos están bajo la misma deformación  $\varepsilon$ , y es la tensión quien se divide en las ramas del muelle y del amortiguador. Así, haciendo un planteamiento similar al anterior y usando (3.50) y (3.51) como parte elástica y parte viscosa, respectivamente, se tiene:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad (3.58)$$

Las ecuaciones (3.57) y (3.58) son las ecuaciones diferenciales que rigen la respuesta de los modelos de Maxwell y de Kelvin, respectivamente.

Para ilustrar las características del comportamiento viscoelástico, a continuación se grafican las respuestas de ambos modelos sometidos a ciertas condiciones de carga. La solución para el modelo de Maxwell bajo un estado de deformación impuesta constante en el tiempo  $\varepsilon_0$ , tiene la forma

$$\sigma = \varepsilon_0 E \exp\left\{-\frac{Et}{\eta}\right\} \quad (3.59)$$



**Figura 3.4** Comportamiento de los modelos reológicos básicos (a) Cadena de Maxwell (b) Cadena de Kelvin

Por su parte, la solución de la ecuación constitutiva del modelo de Kelvin, para una tensión impuesta constante en el tiempo  $\sigma_0$ , es

$$\varepsilon = \sigma_0 \left[ 1 - \exp \left\{ -\frac{Et}{\eta} \right\} \right] \quad (3.60)$$

En la figura 3.4a se puede apreciar el llamado *fenómeno de fluencia*, en el cual las deformaciones aumentan en el tiempo al aplicar una tensión constante  $\sigma_0$  con una curva que tiende a una asíntota denotada  $\varepsilon_\infty$ . La parte b de la misma figura muestra el *fenómeno de relajación*, donde las tensiones disminuyen en el tiempo bajo un régimen de deformación impuesta, tendiendo asíntoticamente a cero. Observando las ecuaciones (3.59) y (3.60) es evidente cómo el parámetro  $\frac{E}{\eta}$  es el que determina la velocidad con que la curva alcanza el valor asíntótico. Por este motivo, se define un nuevo parámetro, en función de  $E$  y de  $\eta$ , llamado tiempo de retardo  $\tau$ , que se expresa:

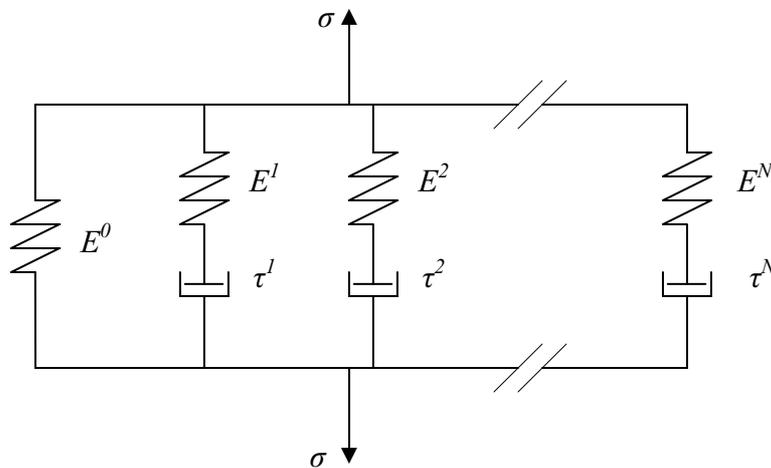
$$\tau = \frac{\eta}{E} \quad (3.61)$$

Las diferentes combinaciones de los modelos expuestos arriba permiten simular una variada gama de comportamientos. Tal es el caso del modelo generalizado mostrado en

Huang (1993), consistente en una cadena de Maxwell más  $n$  cadenas de Kelvin, colocadas en serie. Este modelo es usado para simular el comportamiento viscoelástico de materiales asfálticos. En el presente trabajo se utilizará el modelo reológico de un muelle arreglado en paralelo con  $n$  cadenas de Maxwell, el cual ya se ha aplicado con buenos resultados en el estudio del hormigón (Cervera, 2003). Con este sistema se pueden obtener comportamientos dependientes del tiempo más o menos complejos, mediante la adición o sustracción de cadenas al conjunto.

*Modelo generalizado de Maxwell*

A continuación se presenta el desarrollo de las ecuaciones para el caso de  $n$  cadenas de Maxwell en paralelo, utilizadas en la implementación de la viscoelasticidad en el programa de elementos finitos COMET. Sobre la base de lo mostrado en la figura 3.5, para la correcta caracterización del material es necesario definir el módulo elástico  $E^i$  de cada muelle, así como el tiempo de retardo  $\tau^i$  (definido en el apartado anterior) de cada amortiguador. De esta manera, el módulo elástico instantáneo del material sería la sumatoria de todos los módulos individuales  $E = \sum_{i=0}^n E^i$ . Por otra parte, el módulo  $E^0$  (correspondiente a un elemento de Maxwell con tiempo de retardo nulo) representa el módulo elástico asintótico, que es el valor al que tiende la respuesta para un tiempo infinito.



**Figura 3.5** Modelo reológico empleado para la simulación de la viscoelasticidad

Siguiendo con la figura 3.5, se tiene que la tensión total  $\sigma$  es la sumatoria de las tensiones individuales de cada cadena  $\sigma = \sum_{i=0}^n \sigma^i$ . Ahora bien, tomando la ecuación (3.57) y definiendo un factor de participación  $\xi^i = E^i/E$  se puede escribir, para cada cadena:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^i + \frac{\boldsymbol{\sigma}^i}{\tau^i} = \zeta^i \mathbf{D} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{con } i = 0, 1, \dots, N \quad (3.62)$$

Nótese que en la ecuación anterior se han sustituido los valores escalares por sus equivalentes tensoriales, en los casos de tensiones, deformaciones y el tensor constitutivo elástico (éste de  $E$  a  $\mathbf{D}$ ). Además, la tensión en cada cadena se puede expresar  $\boldsymbol{\sigma}^i = \zeta^i \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}_{elas}^i$ , siendo  $\boldsymbol{\varepsilon}_{elas}^i$  la deformación elástica. Esta deformación es igual a la diferencia entre la deformación total y la deformación viscosa, o  $\boldsymbol{\varepsilon}_{elas}^i = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^i$ . Sustituyendo se obtiene

$$\boldsymbol{\sigma}^i = \zeta^i \mathbf{D} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^i) \quad (3.63)$$

Si esta ecuación se sustituye en (3.62), se puede obtener la ley de evolución de las deformaciones viscosas, que tiene la forma:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^i = \frac{1}{\tau^i} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^i) \quad \text{con } i = 0, 1, \dots, N \quad (3.64)$$

La solución de la ecuación diferencial anterior es la siguiente (Cervera et al. 1992):

$$\boldsymbol{\varepsilon}^i = \frac{1}{\tau^i} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-s}{\tau^i}} \boldsymbol{\varepsilon}(s) ds \quad (3.65)$$

Para un tiempo cualquiera  $t_{n+1}$ , la ecuación anterior se puede expresar como

$$\boldsymbol{\varepsilon}^i(t_{n+1}) = \frac{1}{\tau^i} \int_{-\infty}^{t_{n+1}} e^{-\frac{t_{n+1}-s}{\tau^i}} \boldsymbol{\varepsilon}(s) ds \quad (3.66)$$

Siguiendo un desarrollo incremental en el tiempo, se puede escribir  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ , quedando

$$\boldsymbol{\varepsilon}^i(t_{n+1}) = \frac{1}{\tau^i} \int_{-\infty}^{t_n} e^{-\frac{t_n-s}{\tau^i}} e^{-\frac{\Delta t}{\tau^i}} \boldsymbol{\varepsilon}(s) ds + \frac{1}{\tau^i} \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-\frac{t_{n+1}-s}{\tau^i}} \boldsymbol{\varepsilon}(s) ds \quad (3.67)$$

o bien:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^i(t_{n+1}) = \boldsymbol{\varepsilon}^i(t_n) e^{-\frac{\Delta t}{\tau^i}} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^i \quad (3.68)$$

De esta forma queda definido el incremento de deformaciones viscosas como

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^i = \frac{1}{\tau^i} \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-\frac{t_{n+1}-s}{\tau^i}} \boldsymbol{\varepsilon}(s) ds \quad (3.69)$$

Supóngase que las deformaciones permanecen aproximadamente constantes durante el intervalo  $[t_n, t_{n+1}]$  y tienen un valor correspondiente a un tiempo  $\bar{t}$ , con  $\bar{t} \in [t_n, t_{n+1}]$ , tal que  $\bar{t} = t_n + \alpha \Delta t$ , donde  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Haciendo las sustituciones oportunas, (3.69) se puede escribir

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^i &= \frac{1}{\tau^i} \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{t}) \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-\frac{t_{n+1}-s}{\tau^i}} ds \\ &= \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{t}) e^{-\frac{t_{n+1}}{\tau^i}} \left[ e^{\frac{s}{\tau^i}} \right]_{t_n}^{t_{n+1}} \\ &= \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{t}) \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau^i}} \right) \end{aligned} \quad (3.70)$$

Al sustituir en (3.68), queda

$$\boldsymbol{\varepsilon}^i(t_{n+1}) = \boldsymbol{\varepsilon}^i(t_n) e^{-\frac{\Delta t}{\tau^i}} + \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{t}) \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau^i}} \right) \quad (3.71)$$

El siguiente paso consiste en la elección de un valor apropiado de  $\alpha$ . Si se toma  $\alpha = 0$  y, por tanto  $\boldsymbol{\varepsilon}(\bar{t}) = \boldsymbol{\varepsilon}(t_n)$ , será necesario almacenar en memoria ese valor de deformaciones totales del paso de tiempo anterior. En cambio, con  $\alpha = 1$  se tendría  $\boldsymbol{\varepsilon}(\bar{t}) = \boldsymbol{\varepsilon}(t_{n+1})$ , permitiendo trabajar con información del paso de tiempo actual. Esta elección se traduce en un mejor rendimiento computacional, al evitarse el almacenamiento de información de un paso de tiempo al siguiente. Luego de esta sustitución, la ecuación (3.71) queda de la forma

$$\boldsymbol{\varepsilon}^i(t_{n+1}) = \boldsymbol{\varepsilon}^i(t_n) e^{-\frac{\Delta t}{\tau^i}} + \boldsymbol{\varepsilon}(t_{n+1}) \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau^i}}\right) \quad (3.72)$$

Finalmente, para pasos de tiempo pequeños  $\frac{\Delta t}{\tau^i} \ll 1$ , y por tanto  $e^{-\frac{\Delta t}{\tau^i}} \approx 1 - \frac{\Delta t}{\tau^i}$ , la ecuación anterior puede escribirse

$$\boldsymbol{\varepsilon}^i(t_{n+1}) = \boldsymbol{\varepsilon}^i(t_n) + \frac{\Delta t}{\tau^i} [\boldsymbol{\varepsilon}(t_{n+1}) - \boldsymbol{\varepsilon}^i(t_n)] \quad (3.73)$$

lo que sería equivalente a usar el esquema de integración implícita de Euler hacia adelante sobre la ecuación (3.64).

### 3.3.2 Modelo de daño escalar

#### *Modelo isótropo. Fenomenología y formulación*

El fenómeno de daño se puede interpretar, a nivel microscópico, como una relación tensión-deformación no lineal donde la rigidez del material se degrada por efecto de las sollicitaciones aplicadas.

Para su formulación se especifica una variable interna llamada *variable de daño*. Esta variable se define a su vez como una función de las microfisuras que se crean en el material bajo ciertas condiciones de carga, particularmente cuando un umbral de tensiones determinado es superado. Así, se puede escribir, en una dimensión:

$$\sigma = E^d \varepsilon \quad (3.74)$$

donde  $E^d$  tiene la forma

$$E^d = (1-d)E \quad (3.75)$$

siendo  $d$  la variable de daño (escalar en este caso) y  $E$  el módulo de Young. La variable de daño se puede interpretar fenomenológicamente como la relación entre la superficie dañada de una sección y la superficie aparente, tal como se muestra en la figura 3.6. Allí se define la *superficie efectiva* o  $\bar{S}$ , que es la que realmente está soportando las tensiones, mientras que la *superficie dañada* o  $S^d$  representa la zona donde el material ha fallado. La superficie aparente  $S$  es la suma de la superficie efectiva más la superficie dañada, o  $S = S^d + \bar{S}$ . Con estas definiciones se puede escribir la siguiente relación:

$$\sigma S = \bar{\sigma} \bar{S} \quad (3.76)$$

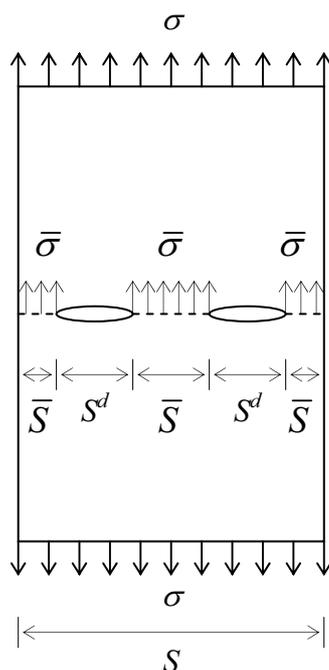
donde se define la *tensión efectiva*  $\bar{\sigma}$  como la tensión elástica, función de las deformaciones totales, o  $\bar{\sigma} = E\varepsilon$ . Sustituyendo esta expresión en (3.76), se obtiene

$$\sigma = \frac{\bar{S}}{S} E\varepsilon \quad (3.77)$$

que junto con la ecuación (3.75) implica que  $E^d = \frac{\bar{S}}{S} E$  y por tanto

$$d = \frac{S^d}{S} \quad (3.78)$$

Así,  $d$  varía de cero a uno, denotando un rango de comportamientos desde el completamente elástico para la superficie intacta ( $d=0$ ), hasta la pérdida total de rigidez del material o colapso de la superficie ( $d=1$ ).

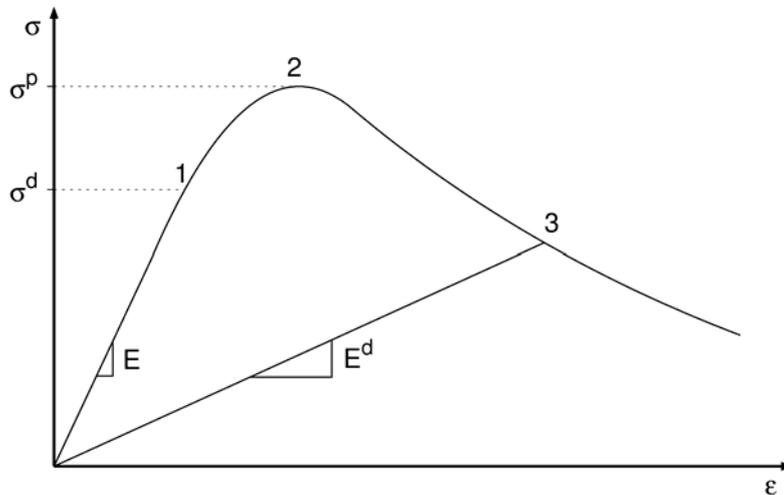


**Figura 3.6** Idealización del fenómeno de daño en una dimensión

Esta variable debe cumplir con ciertas características importantes, a saber:

- La variable interna  $d$  nunca es decreciente. La variable de daño tiene que definirse de manera tal que su variación sólo pueda ser positiva, ya que una vez ocurrido el daño microscópico éste no puede ser reparado. En otras palabras, la magnitud de la superficie dañada  $S^d$  no puede decrecer.
- Existe un nivel de tensiones a partir del cual empieza el daño. Se define un umbral de daño, que es el estado tenso-deformacional a partir del cual comienza a formarse el daño microscópico.
- En caso de descarga, no hay evolución de la variable de daño. Se mantiene el valor de  $d$  actual, y se considera un comportamiento elástico, con el módulo de Young degradado.

Lo anterior puede representarse gráficamente si se dibuja la relación tensión-deformación resultante, como se muestra en la figura 3.7.



**Figura 3.7** Daño en una dimensión

En el modelo es posible definir un umbral de daño variable, que sea función del mismo estado tensional que rige la ley de evolución de la variable interna  $d$ . Esto se traduce en las leyes de endurecimiento/ablandamiento, que se definen de tal forma que representen el comportamiento deseado, en función de uno o más parámetros. Así, en la figura 3.7 se observa que inicialmente hay una disminución de rigidez, pero el material todavía puede soportar tensiones crecientes. Esto ocurre entre el umbral de daño (punto 1) y la tensión pico (punto 2). A partir de allí el material presenta ablandamiento, lo que implica una pérdida de rigidez con descarga del material. En la figura también se aprecia el camino que se recorrería en caso de descarga en el punto 3. El comportamiento es elástico pero con un módulo de elasticidad *dañado*  $E^d$ , y las deformaciones se recuperan completamente.

La extrapolación de estos planteamientos al caso general en tres dimensiones implica formular la ecuación (3.74) en forma tensorial

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^d \boldsymbol{\epsilon} \tag{3.79}$$

Donde el tensor constitutivo  $\mathbf{D}^d$  (de cuarto orden) se define variable, en función del nivel de daño que ocurra en el punto. Ahora bien, existen diferentes maneras de caracterizar la variabilidad de la matriz constitutiva. Una de las formas más simples, la mostrada al inicio de esta sección, es el *daño escalar*, donde  $\mathbf{D}^d$  tiene la forma:

$$\mathbf{D}^d = (1 - d)\mathbf{D} \quad (3.80)$$

Este modelo plantea un desarrollo del daño igual en todas las direcciones, degradando cada una de las componentes del tensor de constantes elásticas por igual. Este modelo se suele llamar de *daño isótropo*.

Existen otros modelos, más complejos, en los que es posible definir la manera en que evoluciona el daño según la dirección cartesiana de las tensiones, mediante el uso de más variables de daño. Dichas variables pueden estar ordenadas en un vector, en un tensor de segundo orden o incluso en un tensor de cuarto orden, que multiplican de manera adecuada las diferentes componentes del tensor elástico  $\mathbf{D}$  para simular los efectos de anisotropía.

En todo caso, las variables de daño siempre deben cumplir con los puntos mencionados al principio de esta sección, referentes al umbral de daño, y las características de evolución de cada una de ellas. Así, para el caso de daño escalar isótropo, por ejemplo, la ley de evolución de la variable de daño se suele definir en función de una *norma*  $\tau_n$ , en el espacio de tensiones o en el espacio de las deformaciones, que tiene forma escalar. Asimismo, el umbral de daño se define también mediante una variable interna escalar  $r_0$ . Cuando la magnitud del estado tensional supera al umbral de daño, entonces la variable  $d$  crece, y el umbral se “mueve” hasta la magnitud más alta alcanzada por el estado tenso-deformacional, que se denotará  $r$ . En caso contrario,  $d$  y  $r$  permanecen iguales al paso anterior de carga. La variable interna  $r$  es la que regula entonces la expansión (o contracción) de la superficie umbral de daño, en el espacio en que se haya definido, en función del incremento en el estado tenso-deformacional de ese paso de carga. Esto se comenta con más detalle en la siguiente sección.

#### *Modelo de daño escalar tracción-compresión*

Según lo observado en ensayos experimentales y en estructuras reales, el comportamiento de la obra de fábrica normalmente presenta diferencias muy significativas cuando se comparan los estados de tracción y de compresión. Por esta razón es de primordial importancia tomar en cuenta este fenómeno al momento de formular un modelo constitutivo que pretenda simular el comportamiento de este material. A continuación se presenta la formulación del modelo de daño tracción-compresión (también llamado *modelo  $d+/d-$* ), el cual está basado en los conceptos del modelo de daño isótropo (Ju, 1989; 1990).

El modelo parte del concepto de *tensión efectiva* ( $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ ) definido en la sección anterior como la tensión asociada a las deformaciones  $\boldsymbol{\varepsilon}$  bajo un régimen elástico, o  $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}$ , siendo  $\mathbf{D}$  el tensor constitutivo elástico. Para formular el presente modelo, este tensor debe dividirse en dos partes, separando sus componentes positivas o de tracción ( $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^+$ ) de las negativas o de compresión ( $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^-$ ). Esto se efectúa de la siguiente manera:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^+ = \sum_{i=1}^3 \langle \bar{\sigma}_i \rangle \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_i \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}^- = \bar{\boldsymbol{\sigma}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}^+ \quad (3.81)$$

donde  $\bar{\sigma}_i$  es la tensión principal  $i$ -ésima, los vectores  $\mathbf{p}_i$  corresponden al vector unitario asociado a la dirección principal  $i$  y  $\langle \bullet \rangle$  son los paréntesis de Macaulay.

Se definen también dos variables internas de daño, cada una asociada con un signo de las tensiones:  $d^+$  para el daño a tracción y  $d^-$  para el daño a compresión. Bajo estas consideraciones, la ecuación constitutiva queda de la forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d^+) \bar{\boldsymbol{\sigma}}^+ + (1 - d^-) \bar{\boldsymbol{\sigma}}^- \quad (3.82)$$

Estas variables indican el nivel de daño, de manera que  $d^\pm = 0$  significa que el material no ha dañado y  $d^\pm = 1$  señala el colapso total del material, que ya no es capaz de soportar tensiones. El empleo de una variable diferente para cada signo de las tensiones implica que, por ejemplo, un material previamente dañado a tracción tendría su comportamiento original si es sometido a compresión, y viceversa.

A continuación se define la *norma de tensiones efectivas*, una magnitud escalar positiva que sirve para comparar diferentes estados tensionales en dos o tres dimensiones. Este escalar es útil para unificar conceptos de carga, descarga y recarga, y debe ser dividido en sus partes positiva y negativa, tal como se hizo con el tensor de tensiones. Las normas de tensiones de tracción  $\tau^+$  y de compresión  $\tau^-$  empleadas en este modelo tienen la forma:

$$\tau^\pm = \left( \bar{\boldsymbol{\sigma}}^\pm : \mathbf{C}^\pm : \bar{\boldsymbol{\sigma}}^\pm \right)^{1/2} \quad (3.83)$$

donde los tensores de cuarto orden  $\mathbf{C}^+$  y  $\mathbf{C}^-$  son idénticos, isótropos y definidos positivos. Estos tensores definen la métrica base de la norma  $\tau^\pm$  en el espacio de las tensiones efectivas principales, de la forma  $\tau^\pm = \left\| \bar{\boldsymbol{\sigma}}^\pm \right\|_{\mathbf{C}^\pm}$ . En el presente trabajo se definen como

$$\mathbf{C}^\pm = \frac{1}{E} \mathbf{D}.$$

Partiendo de las definiciones anteriores, se pueden introducir ahora dos criterios de daño diferentes,  $g^+$  y  $g^-$ :

$$g^\pm(\tau^\pm, r^\pm) = \tau^\pm - r^\pm \leq 0 \quad (3.84)$$

Donde  $r^+$  y  $r^-$  son variables internas que se pueden interpretar como los umbrales de daño actualizados, ya que su valor controla la magnitud de las superficies de daño respectivas en cada instante de tiempo. Sus valores iniciales son  $r_0^\pm = f_e^\pm$ , donde  $f_e^+$  y  $f_e^-$  representan los valores umbral de tensiones de tracción y de compresión, respectivamente, a partir de los cuales comienza el daño. En este sentido, la definición explícita de los valores actuales de las variables internas  $r^\pm$  tiene la forma:

$$r^\pm = \max\left[r_0^\pm, \max(\tau^\pm)\right] \quad (3.85)$$

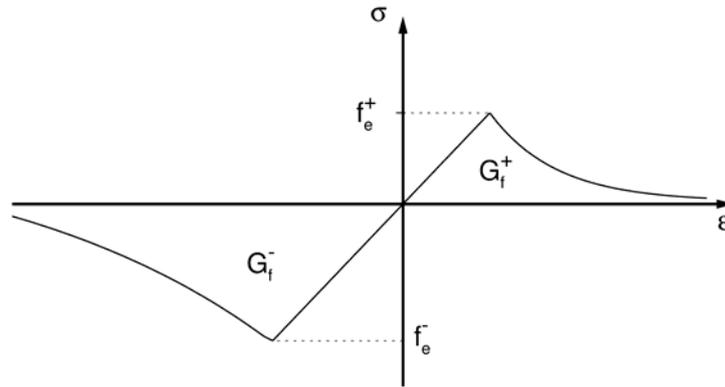
Los criterios definidos arriba implican que existe evolución del daño cuando la condición (3.84) deja de cumplirse. En este caso, se actualiza el valor de  $r^\pm$  con la expresión (3.85) hasta que el criterio de daño se cumpla nuevamente.

Finalmente, los índices de daño  $d^+$  y  $d^-$  son definidos explícitamente en función de los valores de umbral de daño actuales correspondientes, de manera que son funciones monótonicamente crecientes con la forma  $0 \leq d^\pm(r^\pm) \leq 1$ . Estas funciones de daño pueden expresarse de acuerdo al comportamiento que se desea simular. En el presente trabajo se utilizan las siguientes expresiones:

$$d^\pm(r^\pm) = (1 - H_d^\pm) \left(1 - \frac{r_0^\pm}{r^\pm}\right) \quad (3.86)$$

$$d^\pm(r^\pm) = 1 - \frac{r_0}{r} \exp\left\{2H_d^\pm \left(1 - \frac{r_0^\pm}{r^\pm}\right)\right\} \quad (3.87)$$

que corresponden a un comportamiento con endurecimiento-ablandamiento lineal y exponencial, respectivamente. En ambas expresiones  $H_d^+$  y  $H_d^-$  son constantes definidas como propiedades materiales para tensión y para compresión, respectivamente. Para el caso de ablandamiento ( $H_d < 0$ ), este parámetro se relaciona con la *energía de fractura* del material  $G_f$ , y con la *longitud característica* de la malla de elementos finitos, para asegurar la objetividad de los resultados respecto a la malla. Esto se discute con detalle en el siguiente apartado.



**Figura 3.8** Daño tracción/compresión

En la figura 3.8 se aprecia la diferencia en las respuestas según el signo de las tensiones, con  $f_e^+ \neq f_e^-$  y  $G_f^+ \neq G_f^-$ .

*Regularización de la energía de fractura*

En un caso unidimensional, cuando ocurre ablandamiento en el material las tensiones disminuyen hasta alcanzar un valor asintótico respecto al eje de las deformaciones, tal como se muestra en la figura 3.8. Esta área corresponde a la energía disipada en el volumen de control, la cual debe estar adecuadamente relacionada con la energía de fractura real  $G_f^\pm$  del material. En este caso, y ya que la energía disipada por el modelo depende del tamaño de la discretización, es necesario introducir un parámetro geométrico que tome en cuenta este factor al momento de relacionar ambas energías. De esta forma se asegura objetividad respecto a la malla de elementos finitos empleada. El parámetro introducido es la *longitud característica*  $l_c$ , que depende del tamaño de la discretización y asegura la conservación de la energía disipada por el material (Oliver, 1989). Así, el parámetro de ablandamiento  $H_d^\pm$  se obtiene de igualar la energía de fractura por unidad de longitud característica del material con la integral temporal de disipación obteniéndose:

$$H_d^\pm = -\frac{\bar{H}^\pm l_c}{1 - \bar{H}^\pm l_c} \leq 0 \tag{3.88}$$

donde,

$$\bar{H}^{\pm} = \frac{(f_e^{\pm})^2}{2EG_f^{\pm}} \quad (3.89)$$

siendo  $f_e^{\pm}$  la resistencia del material,  $E$  el módulo de elasticidad y  $G_f^{\pm}$  la energía de fractura del material por unidad de área.

Dentro del marco del método de los elementos finitos, las variables de estado de los modelos locales se calculan en los puntos de integración en términos de la historia de las deformaciones y las tensiones locales. Por tanto, las variables de daño se definen en estos puntos de integración. Así, la longitud característica está relacionada con el volumen (o área, para el caso bidimensional) del elemento finito. En el presente trabajo, la longitud característica se obtiene como la raíz cúbica (o cuadrada) de este volumen (o área). Visto lo anterior, en la ecuación (3.89) se observa que existe una limitación para el tamaño máximo de elemento finito usado en el modelo:  $l_c \leq 1/\bar{H}^{\pm}$ . Mientras mayor sea el elemento finito donde el ablandamiento está teniendo lugar, la rama de descarga será más empinada y el comportamiento local será más frágil.

#### *Tensor constitutivo tangente*

Los sistemas de ecuaciones no lineales que se originan del presente modelo constitutivo se suelen resolver mediante el método iterativo de Newton-Raphson. Con el fin de maximizar el rendimiento del método se debe asegurar una velocidad de convergencia cuadrática, lo cual se consigue empleando la matriz tangente en cada paso de carga. Esta matriz, definida de la forma:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}^{\text{tan}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.90)$$

normalmente se deduce directamente al diferenciar la ecuación constitutiva. La expresión de la matriz constitutiva tangente resultante para el modelo d+/d- es la siguiente (Cervera, 2003):

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{\text{tan}} = & \left\{ \left[ (1-d^+) \mathbf{I} - h^+ (\bar{\boldsymbol{\sigma}}^+ \otimes \bar{\boldsymbol{\sigma}}^+) : \mathbf{C}^+ \right] : \mathbf{P} \right. \\ & \left. + \left[ (1-d^-) \mathbf{I} - h^- (\bar{\boldsymbol{\sigma}}^- \otimes \bar{\boldsymbol{\sigma}}^-) : \mathbf{C}^- \right] : (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \right\} : \mathbf{D} \end{aligned} \quad (3.91)$$

donde el valor de  $h^\pm$  es, para el caso de carga

$$h^\pm = \frac{1}{f_e^\pm} \frac{(d^\pm)}{\tau^\pm} \quad (3.92)$$

y nulo en el caso de descarga. Asimismo, el operador proyección  $\mathbf{P}$  tiene la forma

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^3 H(\bar{\sigma}_i) \mathbf{P}^{ii} \otimes \mathbf{P}^{ii} + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ j>1}}^3 \frac{\langle \bar{\sigma}_i \rangle - \langle \bar{\sigma}_j \rangle}{\bar{\sigma}_i - \bar{\sigma}_j} \mathbf{P}^{ij} \otimes \mathbf{P}^{ij} \quad (3.93)$$

donde  $H(\bullet)$  es la función de Heaviside y

$$\mathbf{P}^{ij} = \mathbf{P}^{ji} = \frac{1}{2} (\mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_j + \mathbf{p}_j \otimes \mathbf{p}_i) \quad (3.94)$$

Es importante señalar que la matriz tangente (3.91) es en general no simétrica.

## 3.4 Ejemplos ilustrativos y de validación

### 3.4.1 Viscoelasticidad

A continuación se muestran los resultados de cuatro análisis en los que se emplea el modelo viscoelástico, para ilustrar su funcionamiento. Los análisis se realizan sobre un elemento cuadrilátero aislado, de cuatro nodos y dimensiones unitarias, bajo la hipótesis de deformación plana. El elemento se encuentra simplemente apoyado, y se le aplica una carga en su dirección horizontal. Se efectúan dos tipos de análisis, uno con la carga aplicada mediante un desplazamiento prescrito, y otro mediante una fuerza prescrita. La función de carga es monótonica creciente hasta un tiempo  $t = 100$  s, a partir del cual se mantiene constante hasta  $t = 1000$  s. En ambos casos se emplea un paso de tiempo  $\Delta t$  igual a 10 s.

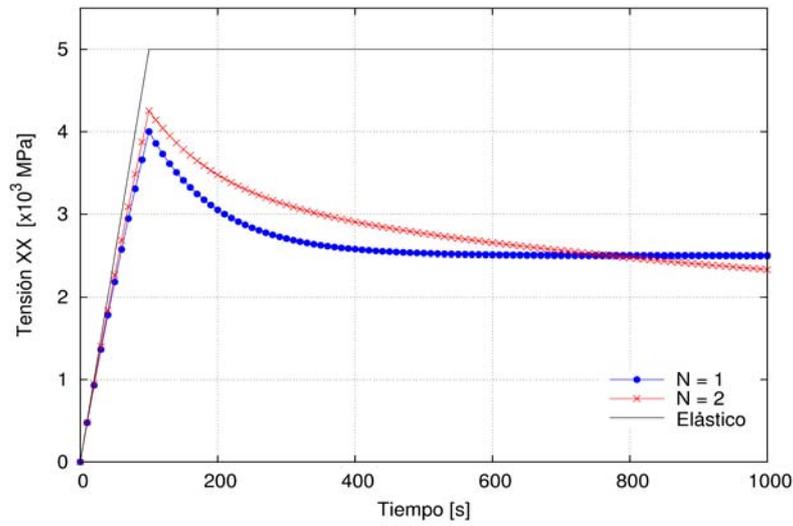
Para cada uno de los análisis se utilizan dos modelos reológicos. En el primero se emplea una cadena de Maxwell ( $N = 1$ , ver figura 3.5); mientras que en el segundo se definen dos ( $N = 2$ ). Los parámetros materiales de ambos modelos se muestran en la tabla 3.1.

| Variable                         | $N = 1$ | $N = 2$ |
|----------------------------------|---------|---------|
| Módulo de Young $E$ [MPa]        | 100 000 | 100 000 |
| Coefficiente de Poisson $\nu$    | 0.0     | 0.0     |
| Participación 1 $\xi^1$          | 0.5     | 0.33    |
| Tiempo de retardo 1 $\tau^1$ [s] | 100     | 100     |
| Participación 2 $\xi^2$          | -       | 0.33    |
| Tiempo de retardo 2 $\tau^2$ [s] | -       | 1 000   |

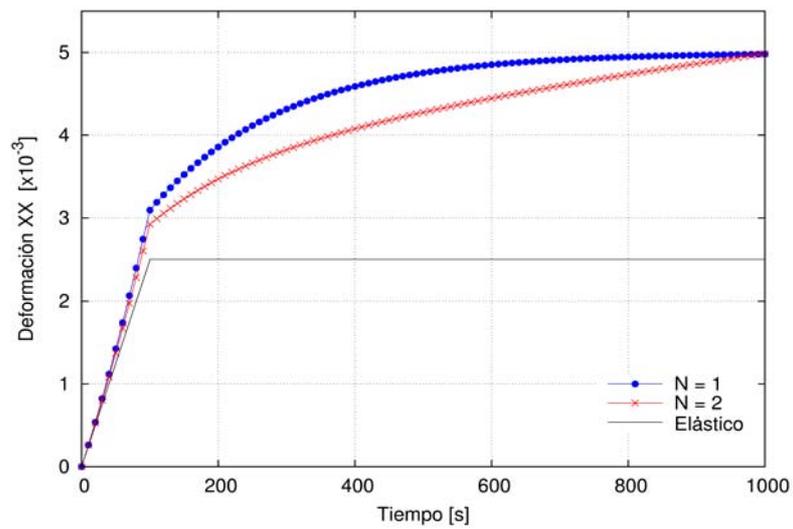
**Tabla 3.1** Parámetros materiales para los modelos con una y dos cadenas de Maxwell ( $N = 1$  y  $N = 2$ )

La figura 3.9 muestra la evolución de las tensiones en el tiempo para el caso con desplazamiento prescrito, donde se comparan las respuestas viscoelásticas con la respuesta puramente elástica. Allí se aprecia cómo los modelos viscoelásticos presentan un retraso en la evolución de las tensiones bajo carga creciente. Asimismo, el fenómeno de relajación se pone de manifiesto, al disminuir las tensiones cuando las deformaciones se mantienen constantes. Para el caso con  $N = 1$  se observa la tendencia asintótica hacia la mitad de la tensión elástica ( $2.5 \times 10^3$  MPa). El caso con  $N = 2$  ilustra la capacidad del modelo de simular comportamientos más complejos del proceso de relajación al emplear más cadenas de Maxwell.

La figura 3.10 muestra la respuesta del modelo bajo fuerzas prescritas. En este caso, las deformaciones son mayores respecto a la respuesta elástica bajo carga creciente. Este fenómeno está relacionado con el hecho de que la fuerza está aplicada a una velocidad relativamente baja, y se comienza a observar el fenómeno de fluencia aún bajo carga creciente. Luego, al mantener la fuerza aplicada constante en el tiempo, se observa la fluencia en ambos modelos viscoelásticos estudiados. El caso con  $N = 1$  tiende a la asintota equivalente al doble de la deformación elástica. Al igual que el caso anterior, cuando se emplean dos cadenas de Maxwell ( $N = 2$ ) es posible representar distintas respuestas del material.



**Figura 3.9** Respuesta viscoelástica (desplazamiento prescrito) para los modelos con una y dos cadenas de Maxwell ( $N = 1$  y  $N = 2$ )

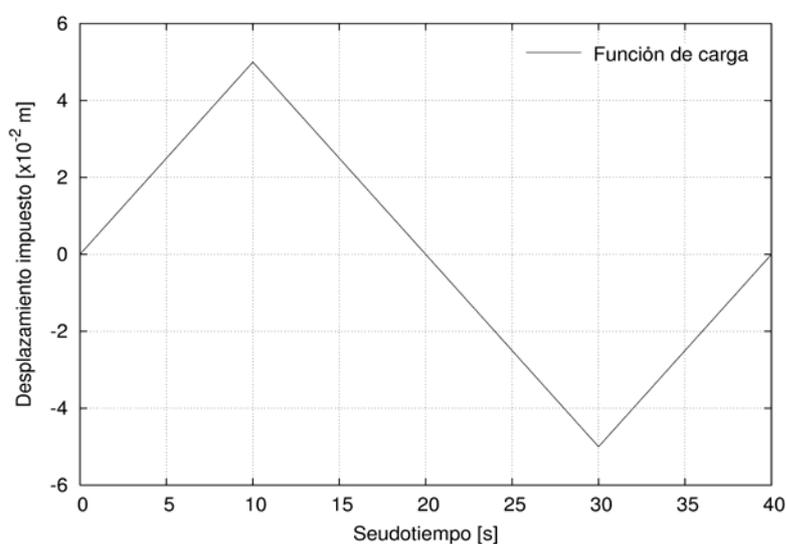


**Figura 3.10** Respuesta viscoelástica (fuerzas prescritas) para los modelos con una y dos cadenas de Maxwell ( $N = 1$  y  $N = 2$ )

### 3.4.2 Modelos de daño: isótropo y tracción/compresión

Para ilustrar el funcionamiento de los modelos de daño se toma el mismo ejemplo anterior, de un elemento cuadrilátero aislado, simplemente apoyado, con una carga horizontal aplicada mediante un desplazamiento prescrito. En este caso la carga se aplica de manera cíclica, tal como se muestra en la figura 3.11. Como incremento de seudotiempo se utiliza un valor de  $\Delta t$  de 1 s.

Este ejemplo se analiza utilizando el modelo de daño isótropo y el modelo de daño tracción/compresión. Los parámetros materiales empleados en ambos casos se muestran en la tabla 3.2.



**Figura 3.11** Función de carga en el tiempo

| Variable                                       | Isótropo | Tracción/compresión |
|--|----------|---------------------|
| Módulo de Young $E$ [MPa]                      | 100 000  | 100 000             |
| Coefficiente de Poisson $\nu$                  | 0.0      | 0.0                 |
| Resistencia a tracción $f_e^+$ [MPa]           | 2.5      | 2.5                 |
| Energía de fractura a tracción $G_f^+$ [J/m]   | 150      | 150                 |
| Resistencia a compresión $f_e^-$ [MPa]         | -        | 3.5                 |
| Energía de fractura a compresión $G_f^-$ [J/m] | -        | 150                 |

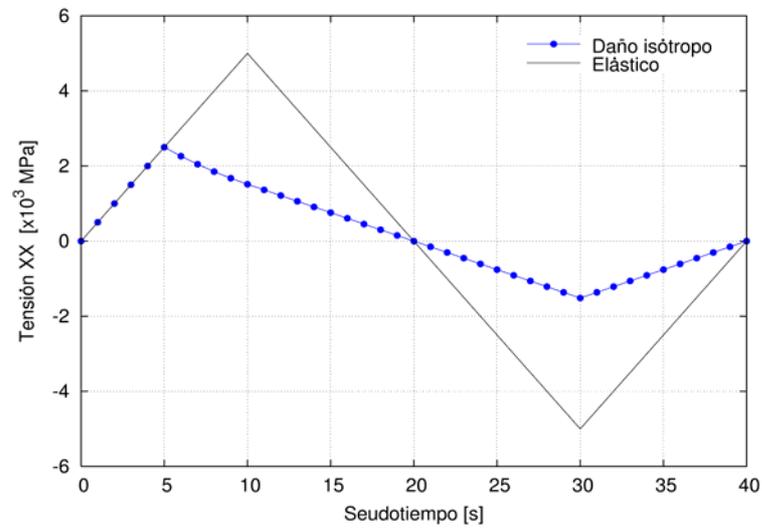
**Tabla 3.2** Parámetros materiales para los modelos de daño isótropo y daño tracción/compresión

En la figura 3.12 se muestra la evolución de las tensiones horizontales en el tiempo para el caso de daño isótropo, en comparación con el resultado elástico. Allí se aprecia un comportamiento lineal hasta alcanzar la resistencia del material, igual a 2.5 MPa. A partir de este punto, el material empieza a dañar, descargando de acuerdo a la ley de ablandamiento definida, que es función de la energía de fractura. Luego, en el punto en que la carga cambia de signo, el material sigue teniendo la misma rigidez dañada del caso traccionado. Esto también se observa en la figura 3.13, donde se muestra la relación tensión-deformación.

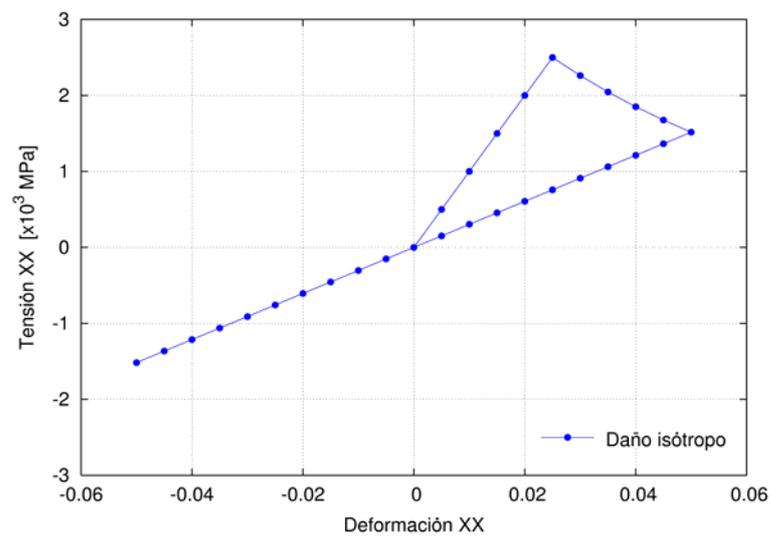
Por otra parte, el caso donde se emplea el modelo tracción/compresión presenta un comportamiento similar al anterior durante el primer ciclo de carga, tal como se muestra en la figura 3.14. Sin embargo, al cambiar el signo de las tensiones a las que está sometido el elemento, se obtiene una respuesta con la rigidez original del material. En la figura 3.15, donde se muestra la relación tensión/deformación en el material, se aprecia también la recuperación de la rigidez al cambiar el signo de la carga. Luego, al alcanzar la resistencia a compresión comienza una nueva descarga debida al daño, para finalmente volver al origen al terminar el ciclo de carga a compresión.

En los resultados anteriores se observa la capacidad del modelo de daño de simular el proceso de descarga que ocurre en el material tras alcanzar el umbral de carga. Este comportamiento con ablandamiento es típico de los materiales cuasi frágiles, como el hormigón o la mampostería. En los ejemplos se tomó un valor de coeficiente de Poisson nulo con la finalidad de obtener la descarga del material justamente en el valor de la resistencia definido en la tabla 3.2. Esto ocurre porque la norma de tensiones efectivas es directamente el valor de la componente horizontal. En cambio, si se emplea un valor real (que suele estar por el orden de 0.3) las tensiones efectivas tienen una componente vertical, que hace que el daño no empiece exactamente cuando la componente horizontal alcanza el valor de la resistencia.

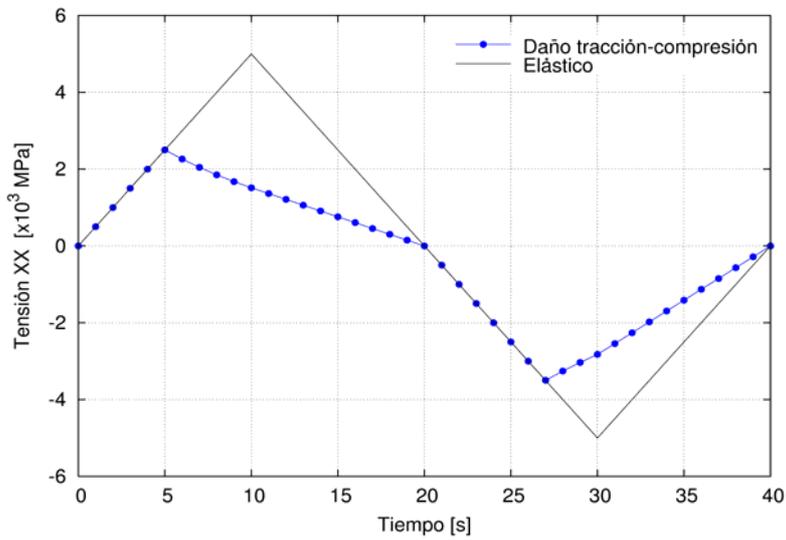
Por otro lado, la ley de ablandamiento definida es exponencial. Esto se aprecia en la leve curvatura presente en las ramas de descarga de las figuras; especialmente en las curvas tensión-tiempo, donde existe un pequeño cambio de pendiente cuando la carga aplicada comienza a disminuir y se recupera el comportamiento elástico. Si la carga se siguiera aplicando, esta curva tendería a una asíntota en el eje horizontal hasta el colapso total del material.



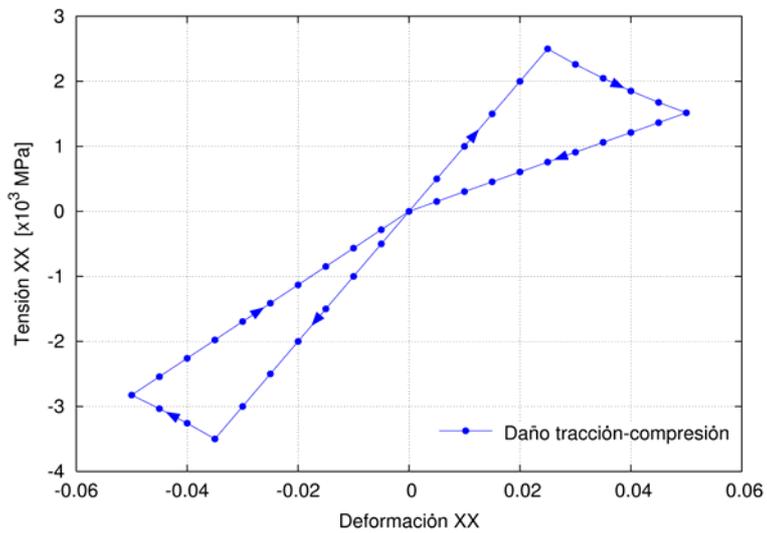
**Figura 3.12** Modelo de daño isotrópico: variación de la tensión en el tiempo



**Figura 3.13** Modelo de daño isotrópico: relación tensión-deformación



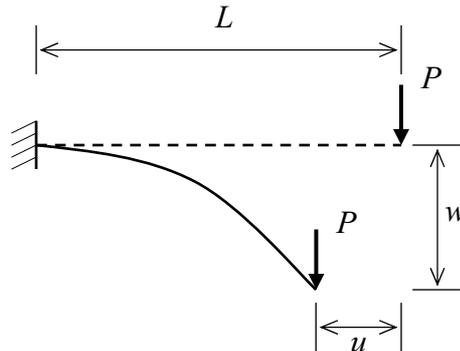
**Figura 3.14** Modelo de daño tracción/compresión: variación de la tensión en el tiempo



**Figura 3.15** Modelo de daño tracción/compresión: relación tensión-deformación

### 3.4.3 No linealidad geométrica. Viga empotrada en voladizo

El ejemplo consiste en una viga empotrada en voladizo, de longitud  $L$ , con una carga puntual  $P$  aplicada verticalmente en el extremo libre, según la figura 3.16. En Mattiasson (1981) se presentan unas curvas adimensionales de las componentes horizontal y vertical de desplazamientos, en función de la carga  $P$ , del material y de las condiciones geométricas del problema.



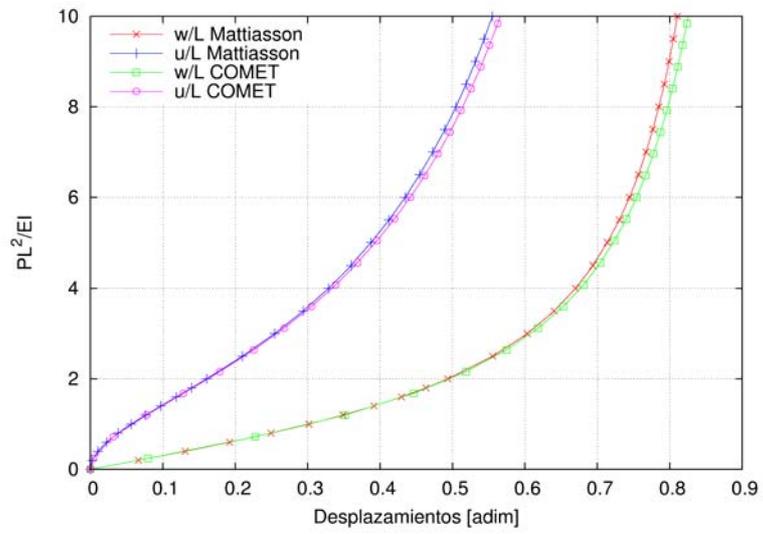
**Figura 3.16** Esquema de viga en voladizo

Así, se elabora un modelo ideal para analizarlo a través de la formulación de grandes desplazamientos y pequeñas deformaciones. El módulo de Young se toma igual a 1, y el coeficiente de Poisson como nulo. La longitud de la viga es de 100 m, su canto es 10 m y su ancho 1 m. Se utiliza una malla no estructurada de 6.295 elementos triangulares lineales planos, con 3.332 nodos.

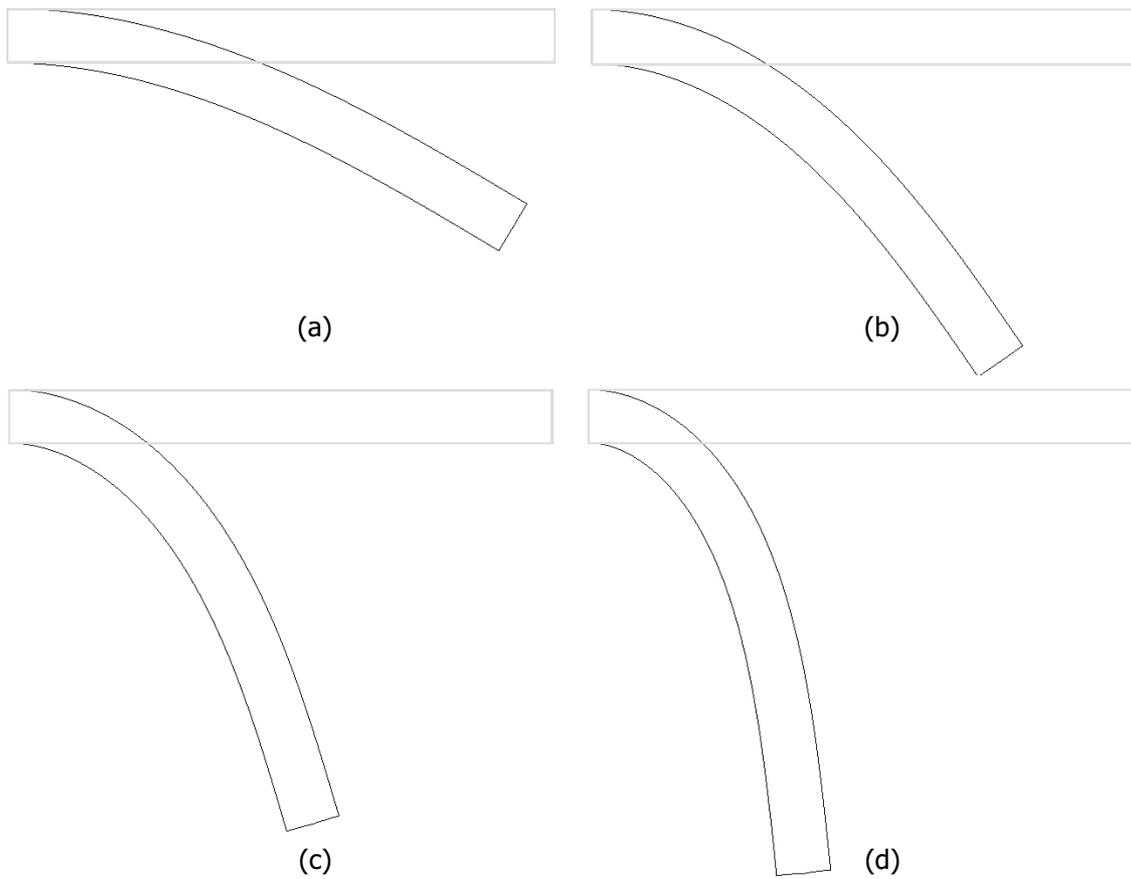
En la figura 3.17 se muestra la comparación de la respuesta obtenida con el modelo y las curvas presentadas en Mattiasson (1981). Los valores de desplazamiento vertical  $w$  y desplazamiento horizontal  $u$  se dan normalizados respecto a la longitud  $L$  de la viga. La carga se normaliza respecto a la expresión  $PL^2/EI$ . Los resultados obtenidos con la formulación propuesta coinciden casi perfectamente con los valores de referencia.

Observando las curvas de la figura 3.17, se aprecia la tendencia lineal de la componente vertical  $w$  del desplazamiento al inicio del análisis. Asimismo, la componente horizontal  $u$  tiene una tendencia inicial nula, que crece posteriormente, cuando los efectos no lineales cobran importancia. Un modelo geoméricamente lineal mantendría ambas tendencias iniciales constantes durante el cálculo, independientemente de la magnitud de la carga aplicada.

La figura 3.18 muestra la deformada en escala original en varias fases del cálculo. En ellas se aprecia cómo las mayores variaciones ocurren durante la primera parte del cálculo, tendiendo hacia el final a estabilizarse, de acuerdo con las curvas de la figura 3.17.



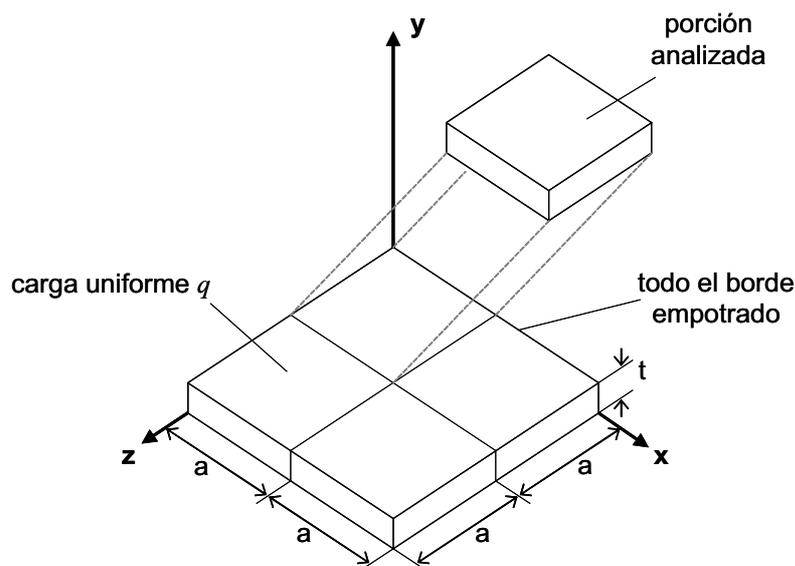
**Figura 3.17** Carga vs. desplazamientos [adim] Comparación entre los resultados de Mattiasson (1981) y los resultados de COMET



**Figura 3.18** Deformada (escala 1:1) con factores de carga: (a) 0.1 (b) 0.25 (c) 0.50 (d) 1.00

### 3.4.4 No linealidad geométrica. Placa empotrada con carga distribuida

El siguiente ejemplo es una placa cuadrada de lado  $2a$  empotrada en su contorno. La placa tiene una carga distribuida uniformemente de valor  $q$  (ver figura 3.19). Como resultado de referencia se toman aquellos mostrados en Zienkiewicz y Taylor (1994). En este caso se observarán los desplazamientos verticales en el punto central de la placa, denotados  $w$ .

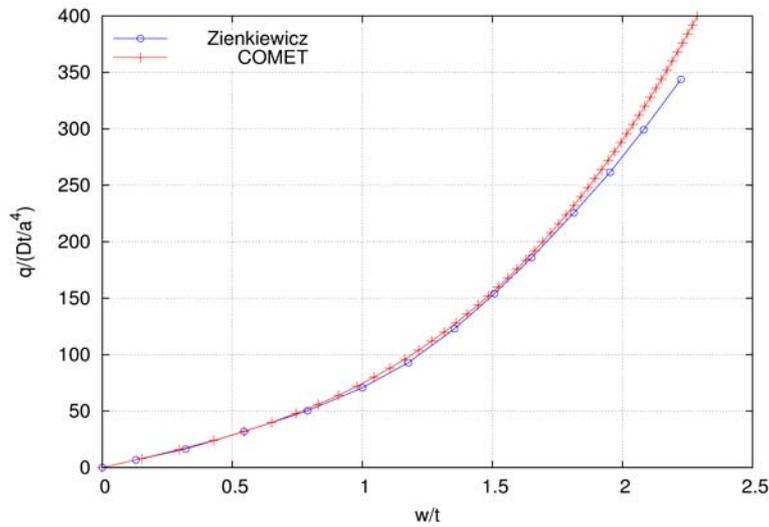


**Figura 3.19** Placa rectangular empotrada bajo carga uniforme

El modelo numérico simula sólo la cuarta parte de la placa, aprovechando las condiciones de doble simetría existentes. Se utiliza un valor de  $a = 10 \text{ m}$ , y un espesor  $t = 1 \text{ m}$ . Asimismo, el módulo de elasticidad se toma  $E = 12$ , el coeficiente de Poisson se supone nulo y las cargas se definen de manera acorde para obtener directamente las curvas adimensionales para su comparación con los resultados de referencia.

Para el cálculo se utilizan elementos hexaédricos de ocho nodos, en una malla estructurada de veinte elementos por lado, y cuatro elementos en el espesor. Este arreglo da como resultado 1.600 elementos y 2.205 nodos.

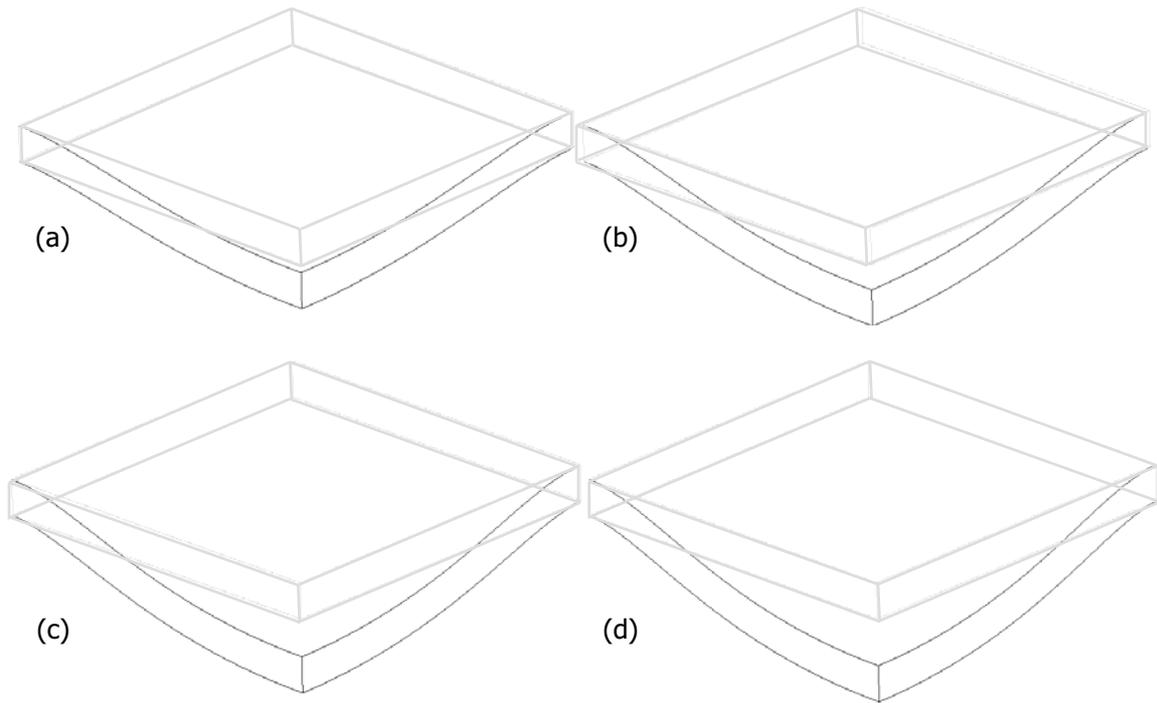
Las curvas comparativas mostradas en la figura 3.20 están normalizadas de la siguiente manera: los desplazamientos de referencia  $w$  se dividen por el espesor de la placa  $t$ , y la carga  $q$  se normaliza respecto al factor  $Dt/a^4$ , donde  $D = t^3 E/12$ . En esta figura se pone de manifiesto que el modelo reproduce correctamente la respuesta esperada para este caso. Allí se puede observar también la tendencia lineal al inicio del cálculo, y cómo gradualmente los desplazamientos aumentan con un comportamiento no lineal.



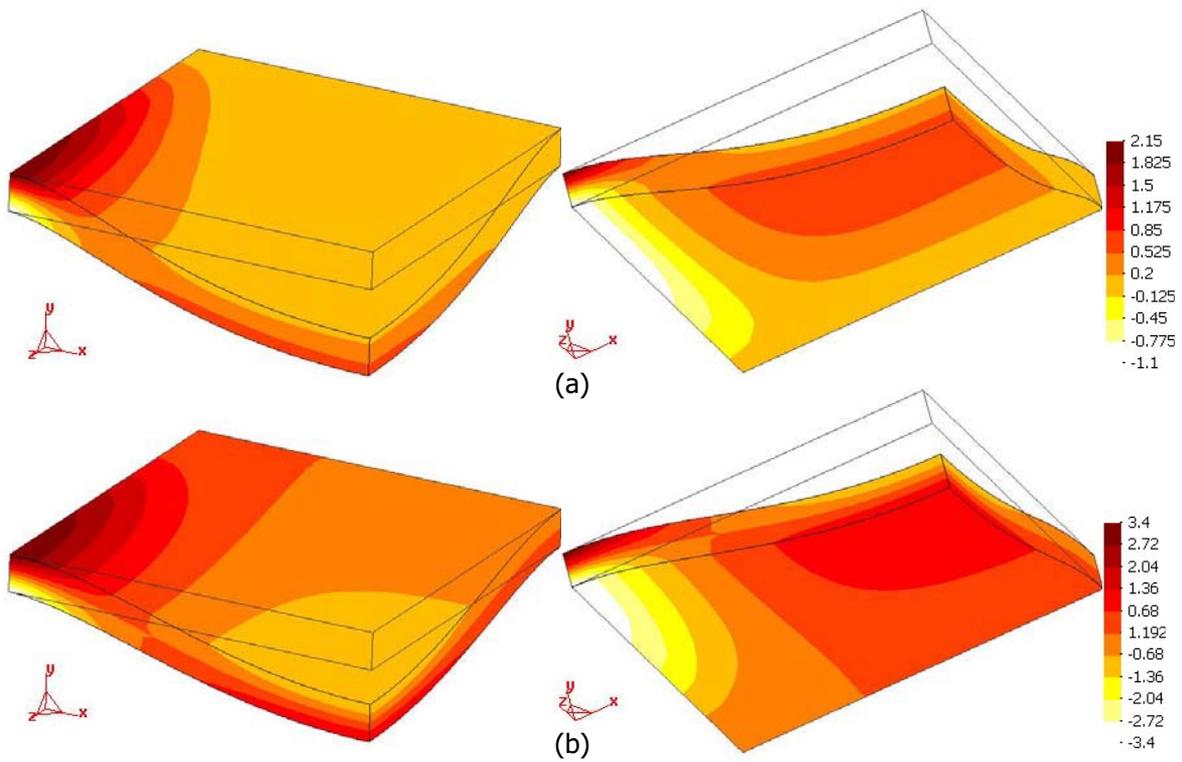
**Figura 3.20** Carga vs. desplazamiento [adim] Comparación entre los resultados de Zienkiewicz y Taylor (1994) y los resultados de COMET

En la figura 3.21 se muestra la deformada de la cuarta parte de la placa, a escala real, en diferentes fases de carga. Allí se pueden apreciar las magnitudes relativas de los desplazamientos obtenidos.

Finalmente, en la figura 3.22a se presenta la distribución de tensiones horizontales (dirección X) obtenidas con el análisis geométrico no lineal. En la figura 3.22b se muestra el reparto que se obtiene cuando se emplea el modelo lineal. En ambos casos se muestran dos vistas (una superior y una inferior) de la geometría deformada de la cuarta parte de la placa. Esta comparación pone de manifiesto que los efectos no lineales en la geometría, no sólo afectan la respuesta en desplazamientos, sino que también pueden afectar la distribución de tensiones de la estructura. Así, en el caso lineal se tiene una distribución de tensiones simétrica respecto al eje neutro de la placa, mientras que en el caso no lineal esta simetría se pierde. La magnitud de los valores máximos también cambia de manera sensible: en el caso no lineal se obtienen valores del orden del 60% y 30% a tracción y a compresión, respectivamente, con relación a los resultados del caso lineal.



**Figura 3.21** Deformada (escala 1:1) con factores de carga: (a) 0.25 (b) 0.50 (c) 0.75 (d) 1.00



**Figura 3.22** Distribución de tensiones horizontales (componente X) (a) Caso no lineal, deformada a escala 1:1 (b) Caso lineal, deformada a escala 1:4

# 4

## Simulación de la fisuración a tracción

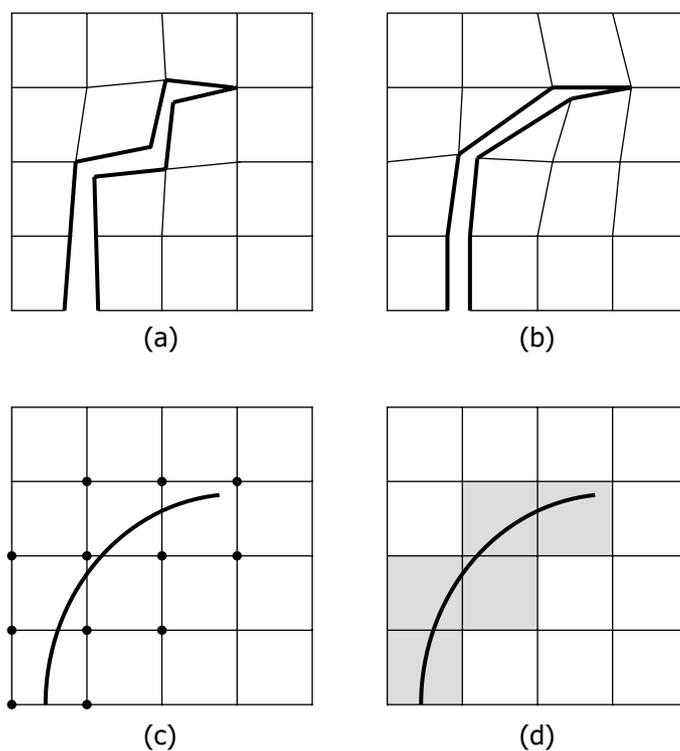
La fisuración a tracción es un fenómeno presente en la mayoría de las estructuras de hormigón, incluso bajo cargas de servicio. En los edificios históricos de obra de fábrica también suelen encontrarse fisuras de tracción, aun cuando éstas no comprometan la estabilidad de la estructura. Por tanto, es de interés para este trabajo revisar y comprender las dificultades en la simulación de fisuras mediante el método de los elementos finitos, así como las técnicas empleadas hasta ahora para solventar dichas dificultades.

En este capítulo se plantean, en primer lugar, los dos enfoques principales para la simulación numérica de las fisuras: *fisura discreta* y *fisura distribuida*. Se hace una revisión del estado del conocimiento de ambos enfoques, poniendo especial énfasis en el enfoque de fisura distribuida. También se analiza el problema particular de la determinación de la dirección de propagación de la fisura en una formulación continua, desde dos puntos de vista: global y local. Este capítulo sirve de preámbulo al capítulo 5, donde se propone el algoritmo para definir la propagación de fisuras discretas empleado en este trabajo.

## 4.1 Enfoque de fisura discreta

Las primeras aplicaciones del método de los elementos finitos al estudio estructural del hormigón en la década de 1960 ya se enfrentaban al problema de propagación de fisuras (Clough, 1962; Ngo y Scordelis, 1967; Nilson, 1968). Las principales dificultades a resolver eran cómo insertar una fisura en una malla de elementos finitos y el establecimiento de criterios para su propagación.

Como primera solución la fisura se simulaba separando puntos nodales que inicialmente ocupaban la misma posición (ver figura 4.a). Obviamente, esta técnica depende ampliamente de la malla ya que las fisuras sólo pueden formarse siguiendo un camino de nodo a nodo a través de los bordes de los elementos. Además, el método implica la variación de la topología de la malla durante el cálculo, aumentando considerablemente el costo computacional.



**Figura 4.1** Simulación de la fisura discreta: (a) sin remallar; (b) con remallado; (c) con enriquecimiento nodal; (d) con enriquecimiento elemental

Esta técnica fue mejorada luego introduciendo elementos nuevos de manera que sus bordes se ubicaran a lo largo de la fisura (ver figura 4.b). Esto consigue reducir (sin eliminarla) la dependencia de la malla, pero es necesario efectuar frecuentes remallados

para obtener una correcta simulación de la propagación de la fisura. A pesar de que se han diseñado muchas técnicas de remallado (Díez et al., 2000; Zienkiewicz et al., 1995), estas técnicas incrementan de manera importante el tiempo de cálculo.

Para definir el momento en que una fisura debía propagarse, inicialmente se utilizaba el criterio de tensión a tracción máxima. Sin embargo, rápidamente se reconoció que los campos de tensiones y deformaciones alrededor de la punta de la fisura son singulares, lo que hace que el criterio de tracción máxima no sea confiable. Así, se empezaron a utilizar criterios basados en la energía, a partir de la teoría de la Mecánica de Fractura. Además se desarrollaron elementos finitos especiales, al ponerse de manifiesto que los elementos estándar no son apropiados para simular esos estados de tensión-deformación singulares (Tong y Pian, 1973; Owen y Fawkes, 1983).

Como alternativa, recientemente Belytschko y colaboradores (ver Belytschko y Black, 1999; Möes et al., 1999; Sukumar et al., 2000) han propuesto el llamado método de los *elementos finitos extendido* (también conocido como X-FEM) que soluciona muchas de las desventajas del enfoque de la fisura discreta mencionadas arriba. Este método plantea la propagación de la fisura en la malla de elementos finitos (sin remallado) añadiendo grados de libertad adicionales en aquellos nodos pertenecientes a los elementos a través de los cuales pasa la fisura (ver figura 4.c, donde se resaltan los nodos "enriquecidos"). Estos grados de libertad representan el salto en los desplazamientos en la dirección perpendicular a la propagación de la fisura, y el campo singular que se desarrolla en la punta de la fisura.

Otro de los puntos de vista para simular las fisuras discretas es el llamado enfoque de las *discontinuidades fuertes* (ver Simo et al., 1993; Oliver, 1995; Oliver et al., 2004; Oliver y Huespe, 2004). Este enfoque plantea una nueva formulación para elementos finitos con "discontinuidades embebidas" que dependen de las condiciones estáticas y cinemáticas supuestas. En este caso, la interpolación estándar de elementos finitos es enriquecida con un término que representa el salto en los desplazamientos. Es importante destacar que esta formulación necesita el uso de algoritmos de rastreo para establecer el camino que seguirá la fisura y enriquecer así los elementos que se encuentren en dicho camino (ver figura 4.d, donde se resaltan los elementos enriquecidos). Esto, junto al control explícito de la disipación de energía en la formación de la fisura, representa otro vínculo con la tradición establecida de la mecánica de fractura.

Según una clasificación mostrada en Jirásek (2000) existen tres clases de formulaciones con discontinuidades embebidas, a saber:

- i. *Formulación simétrica estáticamente óptima*. En ella se satisface correctamente la condición de continuidad de tracciones en la discontinuidad interna, pero no se puede representar de forma adecuada la condición cinemática. Ejemplos de esta formulación se encuentran en Belytschko et al. (1998) y en Larsson y Runesson (1996), entre otros.

- ii. *Formulación simétrica cinemáticamente óptima.* La discontinuidad interna está bien reflejada desde el punto de vista cinemático, pero llevan a una aproximación errónea de las tracciones en la discontinuidad. Ver, por ejemplo, Lofti y Shing (1995).
- iii. *Formulación no simétrica estática y cinemáticamente óptima.* En esta formulación las condiciones estáticas y cinemáticas son satisfechas correctamente. Sin embargo, y al contrario de los dos casos anteriores, la formulación origina una matriz tangente no simétrica. Esta formulación se utiliza en los trabajos de Dvorkin et al. (1990), Simo y Oliver (1994), entre otros.

Por otro lado, Manzoli (2005) hace un análisis comparativo de estas tres formulaciones entre sí, más la formulación continua con un método de construcción de trayectoria de fisura similar al propuesto en el capítulo 5. Allí se concluye, entre otras cosas, que una formulación continua combinada con un algoritmo de construcción de trayectoria de fisura puede ser útil para simular el proceso de la localización en materiales cuasi frágiles.

## 4.2 Enfoque de fisura distribuida

La formulación de daño distribuido para la simulación de las fisuras a tracción tiene sus orígenes en la Mecánica del Medio Continuo Computacional. Esto implica que los criterios tanto de propagación como de dirección de fisura están básicamente planteados en términos de tensiones y deformaciones. Los modelos de fisura distribuida suponen que el material dañado se mantiene continuo, por lo que no es necesario hacer cambios en la malla de elementos finitos durante el cálculo. La degradación del material se simula cambiando sus propiedades mecánicas (rigidez y resistencia) en función de la evolución del estado tenso-deformacional.

### 4.2.1 Descripción fenomenológica

Examinada bajo las hipótesis de la Mecánica del Medio Continuo, la creación de una fisura por tensiones de tracción (fractura tipo I) es un fenómeno físico que consiste en la acumulación de deformaciones en una zona determinada de un sólido sometido a carga creciente.

Durante la formación de la fisura se libera la energía elástica acumulada por el material en la zona donde se localizan las deformaciones. La liberación de esta energía puede ocurrir de forma repentina, fallando el material sin mostrar apenas deformaciones (comportamiento frágil) o de una forma más suave, con deformaciones apreciables antes de la rotura (comportamiento dúctil). Así, por ejemplo, en los materiales cerámicos la fractura ocurre bajo deformaciones relativamente bajas, mientras que en materiales como el acero se pueden formar grandes deformaciones antes de alcanzar el colapso total. En los llamados materiales cuasi frágiles (como el hormigón, y para efectos de este trabajo, la

obra de fábrica antigua) se observa un comportamiento intermedio: la energía se libera en su totalidad para valores moderados de deformación.

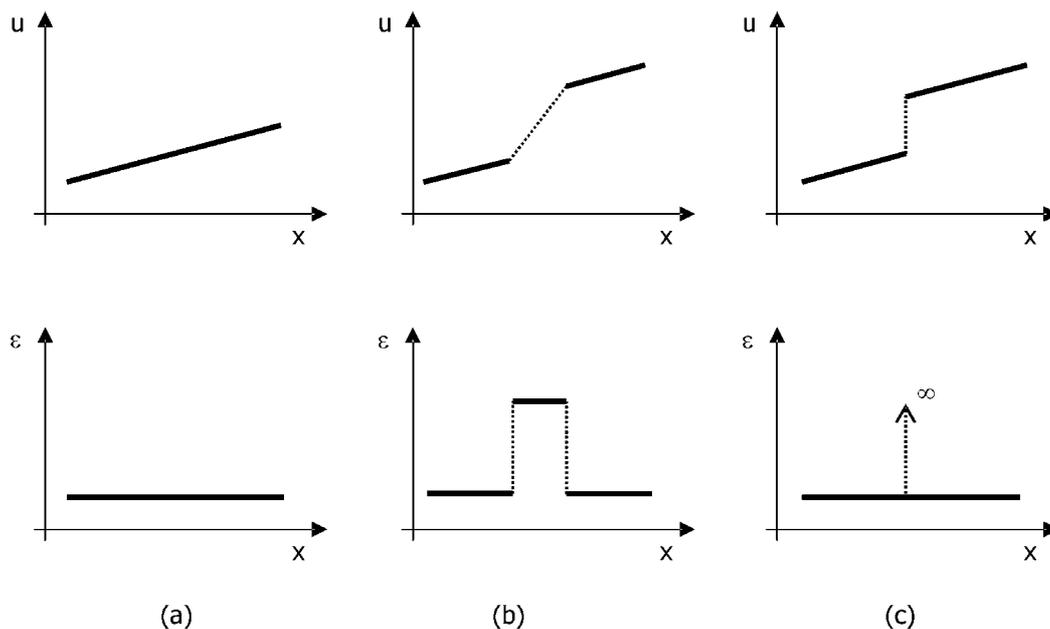
Una vez se ha liberado la energía, el material ya no es capaz de soportar tracciones en esa zona, formándose entonces una fisura discreta. El proceso total se puede caracterizar con dos parámetros característicos de cada material: la resistencia a tracción (tensión en la cual comienza a degradarse el material) y la energía de fractura (energía que se debe liberar para crear una unidad de área de fisura).

Si se estudia el fenómeno en varias fases en el tiempo bajo una carga monótona creciente, se pueden diferenciar tres etapas:

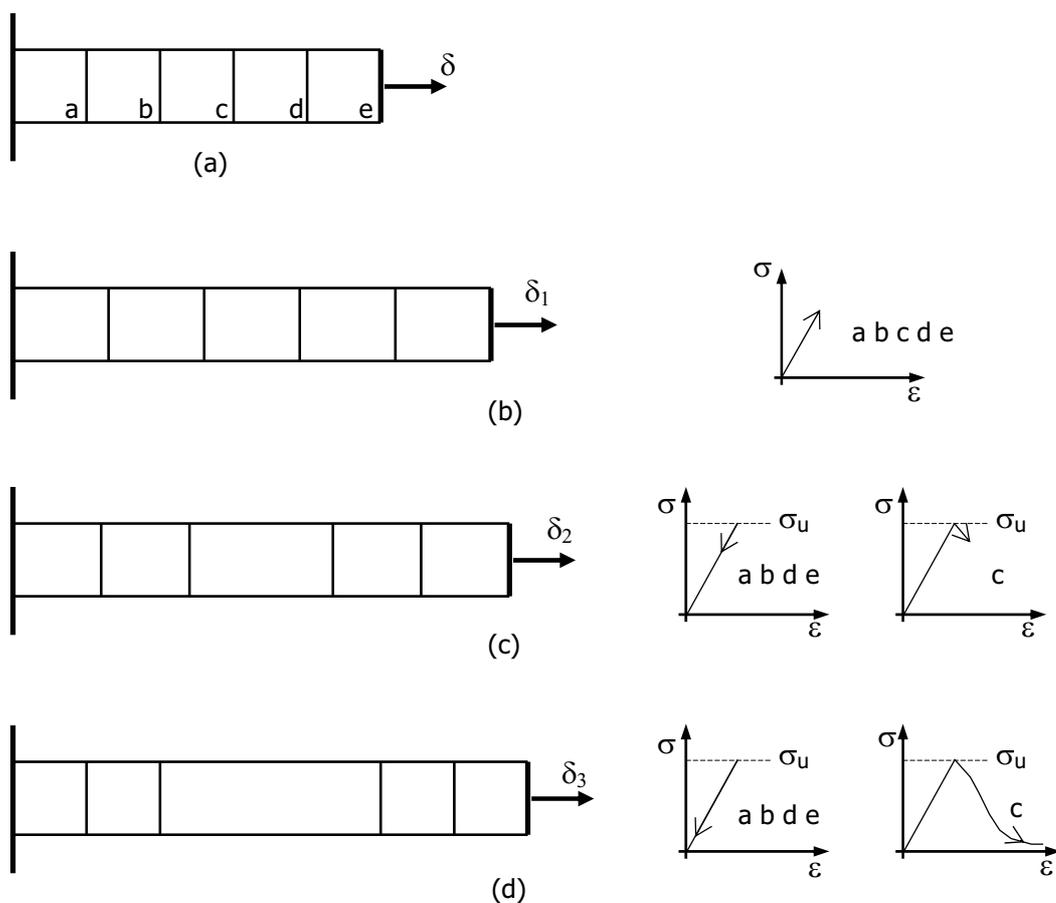
- i. Inicialmente, cuando la carga comienza a aplicarse, el campo de desplazamientos en todo el dominio es *continuo* y el campo de deformaciones es uniforme, como se muestra en la figura 4.a.
- ii. Al incrementar la sollicitación aplicada, aparecen discontinuidades en las *derivadas* del campo de desplazamientos, es decir, el campo de deformaciones se hace discontinuo (figura 4.b). A este estado se le llama *discontinuidad débil*, e indica que el material comienza a degradarse en esos puntos, ubicados normalmente en una franja de ancho finito. Físicamente ocurre que se crean microfisuras en dicha franja. Al mismo tiempo, la zona del material que se encuentra fuera de la franja de acumulación de deformaciones comienza a descargarse.
- iii. Finalmente, al alcanzar cierta carga, el campo de desplazamientos se hace discontinuo (figura 4.c). Esto se traduce en la aparición de una fisura discreta; las deformaciones en ese punto pueden considerarse infinitas y el ancho de la franja de localización tiende a cero. Se dice entonces que en ese punto existe una *discontinuidad fuerte*.

Desde un punto de vista físico, lo anterior se puede ilustrar con el siguiente ejemplo. Supóngase una barra como la mostrada en la figura 4.3a, de sección constante, fija en un extremo y sometida a un desplazamiento axial en el otro. La barra se divide en cinco zonas imaginarias, etiquetadas tal como se muestra en la figura. Asimismo, el desplazamiento axial se impone en tres fases.

En la primera fase de carga, tras aplicar el desplazamiento  $\delta_1$ , todas las zonas se encuentran bajo el mismo estado tensional, en un régimen elástico (ver figura 4.3b). En la figura se observa claramente que el campo de desplazamientos en toda la barra es continuo. Suponiendo que existe alguna imperfección en el material en la zona c que la hace más débil que el resto de la barra, es allí donde comenzará a degradarse el material una vez se alcance su resistencia.



**Figura 4.2** Fases del fenómeno de localización: (a) campo de desplazamientos continuo; (b) derivada del campo de desplazamientos discontinua; (c) campo de desplazamientos discontinuo



**Figura 4.3** El fenómeno de la localización en una barra traccionada: (a) geometría y condiciones de contorno; (b) campo de desplazamientos continuo; (c) discontinuidad débil; (d) discontinuidad fuerte

Al aumentar el desplazamiento en la segunda fase ( $\delta_2$ ), el material de la zona c comenzará a degradarse. Suponiendo que el material tiene un comportamiento con ablandamiento, las tensiones de esa zona comenzarán a disiparse como consecuencia de esa degradación, mientras las deformaciones siguen aumentando (figura 4.3c). Esta disminución de las tensiones hace que las zonas adyacentes, que están aún intactas, descarguen elásticamente. Se aprecia también cómo las zonas d y e tienen mayores desplazamientos que las zonas a y b, con una transición suave en la zona c.

Si el desplazamiento se incrementa en una tercera fase  $\delta_3$ , llega un punto en el que todas las zonas han descargado completamente, y toda la deformación se concentra en la zona c, tal como se muestra en la figura 4.3d. Las zonas a y b tienen un desplazamiento nulo y las zonas d y e tienen un desplazamiento igual a  $\delta_3$ , con el salto totalmente dentro de la zona c.

El ejemplo anterior ilustra el proceso de localización en materiales con ablandamiento, si bien en un caso real la zona c tendría un ancho infinitesimal, observándose una fisura discreta. En un caso más general, con un estado tensional complejo, la fisura se concentraría a lo largo de una línea (en 2D) o de una superficie (en 3D), siguiendo en mayor o menor medida el proceso anterior.

#### 4.2.2 Estado del conocimiento

La aproximación de fisura distribuida ha sido ampliamente utilizada desde que Rashid (1968) la aplicara al hormigón por primera vez. De hecho, actualmente se encuentra implementada en muchos códigos de elementos finitos comerciales con muy pocos cambios respecto a la versión original. La implementación es relativamente simple, pues basta con añadir una subrutina de un nuevo modelo constitutivo en cualquier código no lineal de elementos finitos.

Uno de los primeros inconvenientes que encontraron los investigadores al tratar de aplicar esta formulación es que si el daño distribuido ocurre en una franja de un elemento finito de ancho, la disipación de energía será proporcional al tamaño de dicho elemento. Así, si se refina la malla hasta tamaños infinitesimales, desaparece la disipación de energía, lo cual es físicamente inadmisibles. Este problema fue solventado por Bazant y Oh (1983), quienes propusieron el *modelo de banda de fisura*. En dicho modelo, el ablandamiento del material se relaciona con la energía de fractura del material y además, con el tamaño del elemento finito a través del cual pasa la fisura.

Sin embargo, otro problema se hizo patente posteriormente: las soluciones del enfoque de fisura distribuida presentan también dependencia de la orientación de la malla. Hay que destacar que los resultados son perfectos cuando la malla está orientada de manera "apropiada" para la evolución de la fisura, pero obviamente sigue siendo necesario eliminar esta dependencia de alguna manera. De hecho, se ha sugerido el remallado como solución parcial de este problema (Zienkiewicz et al. 1995a, 1995b).

Últimamente la investigación en Mecánica Computacional en sólidos ha estado orientada hacia la solución de este problema. Si se encara el problema desde un punto de vista global, un modelo computacional de daño basado en el enfoque de fisura distribuida debe estar compuesto por los siguientes tres ingredientes (Cervera y Chiumenti, 2006):

- i. Un *modelo continuo* que defina las variables y las ecuaciones del problema de valores de contorno a resolver
- ii. Un *modelo constitutivo* para las partes intactas y dañadas del dominio
- iii. Un proceso de *discretización espacial y temporal* que transforme las ecuaciones diferenciales continuas en ecuaciones algebraicas discretas

Estos aspectos deben ser independientes entre sí, cada uno con sus bases bien establecidas, para asegurar una solución aceptable.

Muchos de los trabajos recientes se basan en la afirmación de que el origen del problema está en el hecho de que cuando ocurre el ablandamiento del material (con el consiguiente cambio a pendiente negativa de la curva tensión-deformación local) las ecuaciones de gobierno del problema continuo pierden su carácter elíptico natural. Así, para remediar esto se han planteado diferentes modelos no locales, en los que efectivamente se evitan altos gradientes de desplazamientos. Estos modelos tienen en común la utilización de un parámetro que limita la localización, llamado normalmente *longitud característica*.

A pesar de la tendencia que apunta a estudiar y modificar los puntos i y ii de la lista anterior, en este trabajo los esfuerzos se enfocarán hacia la parte de discretización espacial (punto iii). Esto se puede justificar partiendo del hecho de que con una malla “adecuada” es posible simular perfectamente una fisura, y por tanto, las sospechas se dirigen más hacia el proceso de discretización que hacia la formulación de las ecuaciones de gobierno.

Sin embargo, y con el fin de esquematizar las tendencias existentes, a continuación se presenta una subdivisión de los diferentes métodos con los que se ha intentado simular las fisuras a tracción bajo el esquema de fisura distribuida, de acuerdo a su formulación. Cada uno de ellos se comenta brevemente.

### *Modelos de gradiente*

Algunos modelos encontrados en la literatura resuelven el problema de la localización empleando formulaciones continuas que incluyan, o bien el gradiente de la deformación, o el gradiente de las variables internas del modelo constitutivo.

Entre los trabajos que utilizan el gradiente de las variables inelásticas consta el de De Borst y Mühlhaus (1992), donde se plantea una función umbral de fluencia que depende del Laplaciano de las variables de estado inelásticas (deformaciones plásticas), además de depender de las variables inelásticas en sí. Allí, los autores proponen una metodología que consiste en definir tanto las ecuaciones de equilibrio como las ecuaciones que gobier-

nan la evolución de las variables de estado inelásticas en una forma débil. Esto trae como consecuencia que, en el caso de plasticidad, la condición de consistencia resulte en una ecuación diferencial, en lugar de una ecuación algebraica como ocurre en la formulación convencional. Así, es necesario también su discretización espacial para resolverla. En Pamin (1994) se detallan las principales limitaciones de este método. Entre otras cosas, es necesario que los elementos finitos empleados cumplan ciertas características para poder alcanzar la solución. Por ejemplo, la interpolación de los desplazamientos debe ser cuadrática, mientras que la interpolación de la variable plástica debe ser cúbica. Por otro lado, es imposible usar elementos triangulares. También se debe tener un mínimo de puntos de integración para evitar modos de energía nula en los campos de desplazamientos y de la variable plástica.

Otros trabajos donde se emplean criterios similares son el de Schreyer y Chen (1986), Peerlings et al. (1998), De Borst (2001).

### *Modelos no locales*

De manera general, los modelos no locales consisten en la sustitución de una de las variables independientes por su equivalente no local, obtenida a partir de un promedio ponderado sobre el espacio adyacente al punto en consideración (Jirásek, 1998). La elección de esta variable es hasta cierto punto arbitraria, mientras cumpla algunos requisitos básicos. Así, existen modelos que toman como variable no local las deformaciones; otros toman la variable interna de daño o la energía disipada, etc.

Por ejemplo, en el trabajo de Bazant y Pijaudier-Cabot (1988) se evalúa una *deformación no local equivalente*, en cada punto de integración, como un promedio ponderado de los puntos materiales que se encuentren dentro de cierto radio.

Un método inicialmente propuesto por Hall y Hayhurst (1991) consiste en superponer una cuadrícula sobre la malla, que permanece constante aunque cambie la forma y ubicación de los elementos finitos a lo largo de la malla. Luego, durante el cálculo, se promedian las deformaciones calculadas en los puntos de integración contenidos dentro de cada zona delimitada por la cuadrícula. Esto crea un campo de daño discontinuo en las líneas que definen la cuadrícula, al contrario que en el método anterior, donde las deformaciones son continuas en todo el dominio. En ambos métodos se utiliza el concepto de longitud característica: el primero en el radio que define al círculo para promediar las deformaciones, y el segundo en la separación de las líneas que conforman la cuadrícula. Otros trabajos donde se contempla el uso de modelos no locales son el de De Vree et al. (1995), Comi et al. (2002), etc.

Una de las principales limitaciones de los modelos no locales es su incapacidad de representar el proceso de degradación completo hasta la falla total (Jirásek, 1998), permitiendo la existencia de tensiones remanentes. Además, la no localidad hace que exista interacción entre elementos finitos no adyacentes. Esto dificulta la construcción de la matriz de rigidez tangente (necesaria para la convergencia cuadrática al resolver el sistema median-

te el método de Newton-Raphson), si bien en Rodríguez-Ferrán et al. (2004) se plantea un método para solventar este problema.

### *Modelo de Cosserat*

Otro de los métodos empleados para evitar la dependencia patológica de los resultados respecto a la discretización consiste en una regularización mediante la adición de *grados de libertad rotacionales*. Esto se corresponde con la teoría del continuo de Cosserat, que añade, aparte del módulo de Young, un módulo de *flexión* como característica del material. En vista de que la relación entre estos dos módulos tiene dimensiones de longitud, es equivalente a la introducción de la longitud característica, típica de los modelos no locales de gradiente. Estos modelos también se llaman micropolares, y han sido aplicados en regímenes elastoplásticos por De Borst (1991). Sin embargo, esta formulación posee una limitación importante, y es que no puede simular de manera realista materiales dependientes de la presión, como el hormigón, suelos o roca, siendo incapaz de modelar casos incompresibles. Además, el método encarece el costo computacional al añadir grados de libertad adicionales a nivel global (De Borst et al., 1993).

### *Regularización viscosa*

Todas las teorías expuestas hasta ahora son independientes de la velocidad de carga. Sin embargo, algunos autores emplean una regularización viscosa para tratar el problema de localización, principalmente en análisis dinámicos. En De Borst et al. (1993) se emplea este método, aunque sin resultados representativos, pues se concluye que es necesario utilizar unos parámetros materiales de difícil obtención a través de ensayos experimentales. En Dubé et al. (1996), se aplica esta regularización al análisis de propagación de ondas, obteniéndose también resultados independientes de la discretización efectuada. Wang et al. (1997) han aplicado modelos de viscoplasticidad al estudio de los efectos de la discretización en los resultados, comprobando que la adición de los efectos viscosos contribuye positivamente a resultados numéricamente objetivos. Obviamente, el efecto regularizador desaparece cuando la velocidad de aplicación de la carga es baja, por lo que su utilización se limita a materiales en régimen no lineal viscoso.

### *Regularización numérica*

Existen modelos que definen el ancho de la banda de localización como una propiedad del material, por lo que inicialmente algunos autores, como Bazant (1976), han propuesto ajustar el tamaño de los elementos finitos empleados en el análisis a esta *longitud característica*. Sin embargo, tal restricción en la elaboración de la malla crea unas limitaciones importantes, puesto que si no se conoce la distribución de la localización *a priori*, se debe definir toda la malla uniforme. Además, la orientación de la discretización seguiría teniendo una influencia importante en los resultados.

Una técnica más refinada consiste en ajustar el módulo de softening de acuerdo al tamaño del elemento. Así, la energía de fractura del material se regulariza mediante el valor de la longitud característica, ahora relacionada con la discretización en lugar de ser considerada una propiedad material. Este modelo elimina la sensibilidad patológica de la malla al refinamiento, aunque sigue existiendo el problema de la dependencia de la orientación. En Oliver (1989) se propone un método general para el cálculo de la longitud característica de mallas de elementos finitos, para evitar la dependencia patológica de este parámetro por parte de los resultados.

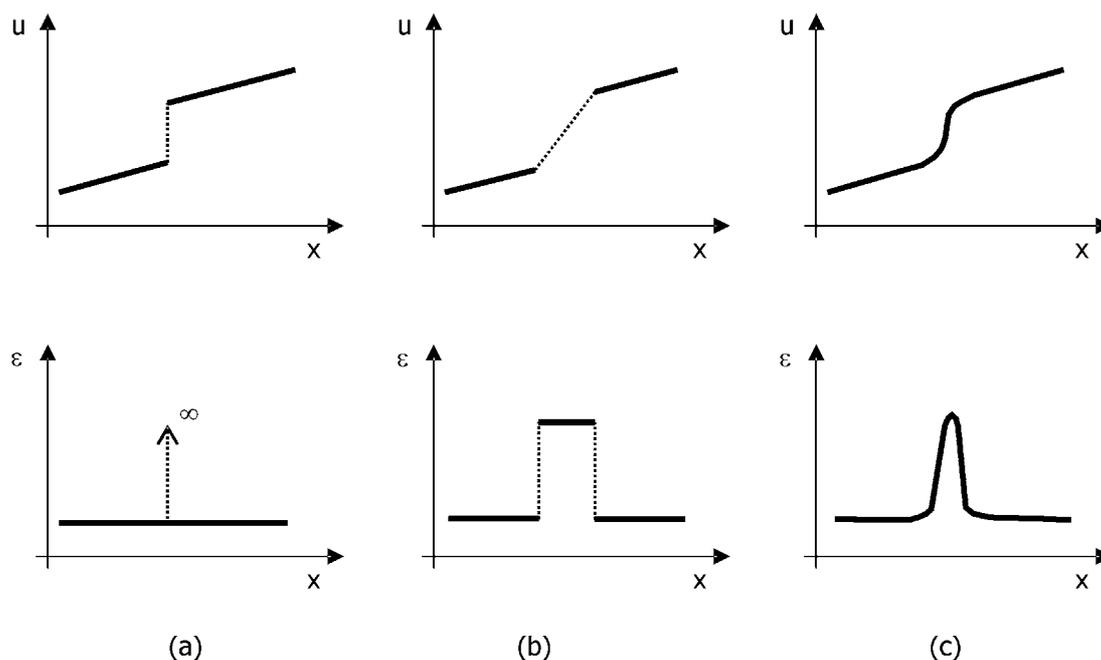
### *Remallado*

Otra técnica empleada para solventar el problema de la localización consiste en el refinamiento automático de la malla durante el cálculo. Este método consiste en estimar el error de la solución al final de cada paso de carga: si este error sobrepasa un valor establecido, se procede al remallado de la zona. En caso contrario, se continúa con el siguiente paso de carga. Si es necesario remallar, se define una nueva discretización, con condiciones de contorno incluidas. Una vez se tiene la nueva malla, se transfieren los datos relevantes de la geometría anterior, para continuar con el cálculo. En Jirásek y Patzák (2001), Díez et al. (2000) y Zienkiewicz et al. (1995), entre muchos otros, se presentan estudios y resultados obtenidos con esta técnica. Este método, si bien puede ser efectivo, aumenta de manera considerable el costo computacional del análisis al actualizar frecuentemente la topología durante el cálculo.

### **4.2.3 Descripción cinemática**

En Jirásek y Patzák (2001) se hace una clasificación de los modelos capaces de capturar la localización, donde se definen tres tipos en función de la descripción cinemática adoptada. El primero de ellos, que llama modelos con discontinuidades cohesivas que se propagan, simula directamente la presencia de discontinuidades fuertes (figura 4.4a). Es decir, una curva (en dos dimensiones) o una superficie (en tres dimensiones) donde existe un salto en el campo de desplazamientos. En general, se supone que al principio la discontinuidad o fisura puede transferir cierta tracción cohesiva a su través, tracciones que desaparecerán cuando la abertura alcance un cierto valor máximo.

El segundo grupo utiliza una descripción continua del campo de desplazamientos, pero permite la presencia de discontinuidades débiles (figura 4.4b). Es decir, estos modelos pueden representar los saltos en el campo de deformaciones a lo largo de una línea o superficie, según las dimensiones del problema. Normalmente, estas discontinuidades débiles se forman en los bordes de una franja interna, dentro de la cual el material sufre ablandamiento, mientras que en las zonas adyacentes el material descarga. El espesor de esta franja se puede considerar como una propiedad del material, llamada *longitud característica*.



**Figura 4.4** Modelos para simular la localización: (a) discontinuidad fuerte; (b) discontinuidad débil; (c) formulación continua. Jirásek (2001)

Finalmente, los modelos pertenecientes a la tercera clase son los que definen los campos de desplazamientos y de deformaciones de una manera continua (figura 4.4c). Así, las deformaciones dentro de la franja tienen gradientes muy altos, con un pico en el centro y valores menores en los bordes. Para que estos modelos continuos puedan representar la localización es necesario incluir algún tipo de regularización. Por ejemplo, existen modelos no locales que, para definir los resultados en un punto, promedian los valores en una zona a su alrededor; o emplean gradientes de mayor orden de las variables internas en su formulación.

#### 4.2.4 Error local de aproximación

A pesar del considerable esfuerzo en la investigación del tema evidenciado en los apartados anteriores, tanto el modelo teórico como la resolución computacional del proceso de localización hasta la falla estructural continúan siendo un reto abierto en la Mecánica Computacional de Sólidos (Heeres y De Borst, 1999; Jirásek y Patzák, 2001; Jirásek, 2002; Cervera et al., 2003; Oliver et al., 2004).

La mayoría de los autores parten de la hipótesis de que el problema radica en la pérdida de elipticidad de las ecuaciones de gobierno al superar el pico de carga (Cervera et al., 2003). Sin embargo, en el presente trabajo se abordará el problema desde otro enfoque: ya que está comprobado que con una malla adecuada se puede obtener una solución correcta y convergente, los esfuerzos se centrarán en la discretización espacial.

De acuerdo con lo comentado en párrafos precedentes, un problema de creación y propagación de fisuras (bajo el enfoque de fisura distribuida) sigue básicamente un procedimiento que consiste en dos pasos. En cada incremento de carga, y para una distribución dada del daño en el sólido, el primero de estos pasos consiste en resolver el problema mecánico para calcular el campo de tensiones. Luego, el siguiente paso es la actualización de la distribución del daño. Esta actualización implica dos operaciones diferentes: (a) actualizar el índice de daño en aquellos elementos ya dañados, y (b) decidir cuáles elementos intactos dañarán en el incremento de carga actual.

El paso (a) es trivial, ya que el índice de daño es una función directa de la historia de deformaciones, de acuerdo con la ecuación (3.17). Sin embargo, el paso (b), relacionado con la dirección de propagación, requiere un estudio más detallado.

En la formulación clásica del modelo de daño distribuido se supone implícitamente que el criterio para definir el inicio de una fisura (el cual está expresado en términos de tensiones/deformaciones) debería también definir automáticamente la dirección de propagación. Esta hipótesis es válida en el problema continuo, donde la evaluación de las tensiones y deformaciones, así como de sus direcciones, son correctas. Sin embargo, en el problema discreto, los campos de tensiones y deformaciones en las cercanías de la punta de la fisura distan mucho de ser exactos (Cervera et al., 2003). De hecho, la punta de la fisura es un punto singular, y la norma  $L_\infty$  del error en los gradientes de desplazamientos (deformaciones) en la solución discreta es no acotada. Como consecuencia, la utilización del criterio de umbral de daño para definir la dirección de la propagación origina una dependencia de la orientación de la malla, lo cual es inaceptable.

Este error debido a la discretización espacial en los alrededores de la punta de la fisura es realmente la única dificultad que hay que superar en el problema de la propagación de fisuras a tracción (Cervera y Chiumenti, 2006).

La evaluación de la dirección de propagación se puede considerar como un problema diferenciado, obviamente acoplado con la ecuación de equilibrio interno (3.1). En este caso, es necesario implementar una técnica o método que permita resolver de manera fiable este problema.

En este trabajo se propone un método basado en un algoritmo de *rastreo*, que permite trazar un camino entre los elementos finitos para delimitar las zonas donde se formarán o propagarán las fisuras en cada incremento de carga. En los siguientes apartados se comentan dos enfoques diferentes con los que se puede afrontar este problema: global y local.

#### 4.2.5 Evaluación de la dirección de propagación: enfoque global

En este apartado se muestra una formulación global para determinar la dirección de la propagación de fisuras, presentada en Cervera y Chiumenti (2006). Formulaciones simila-

res ya han sido utilizadas en los métodos de discontinuidades fuertes (Oliver, 1995; Oliver et al., 2004; Oliver y Huespe, 2004).

Para un criterio de umbral de daño de Rankine, se supone que la fisura se propaga siguiendo una superficie (una línea en 2D) ortogonal a la dirección de la tensión principal positiva máxima. Sea  $\mathbf{n}$  un campo de vectores unitarios en esta dirección en cada punto del dominio  $\Omega$ , y  $\mathbf{s}$  y  $\mathbf{t}$  dos vectores unitarios cualesquiera perpendiculares a  $\mathbf{n}$ . Sea  $\theta$  un campo escalar tal que su gradiente es paralelo al campo de vectores dado  $\mathbf{n}$ , o  $\mathbf{n} = \nabla \theta / \|\nabla \theta\|$ . Es claro que las isosuperficies (isolíneas en 2D) definidas por un  $\theta$  constante son ortogonales a  $\mathbf{n}$ . Por tanto, una fisura se propaga a lo largo de una isosuperficie particular  $S$ , definida por  $\theta = \bar{\theta}_0$ . Así, el problema de la evaluación de la dirección de propagación es equivalente a encontrar el campo escalar  $\theta$  y determinar el lugar geométrico de la isosuperficie que cumpla  $\theta = \bar{\theta}_0$ .

Lo anterior se puede formular como un problema de valor de contorno lineal: encontrar el escalar  $\theta$  tal que

$$\nabla \cdot (\mathbf{K} \cdot \nabla \theta) = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega \quad (4.1)$$

donde  $\Omega$  es el dominio abierto y acotado de  $\mathbb{R}^n$  ocupado por el sólido en un espacio de  $n$  dimensiones.

La ecuación (4.1) está sujeta a condiciones iniciales y de contorno apropiadas. Por otro lado, sean  $\mathbf{x}_0$  el punto del contorno donde se iniciará la fisura y  $\bar{S} \subset S$  la parte de la isosuperficie  $S$  donde el umbral de daño ha sido superado (fisura consolidada). Las condiciones de contorno de Dirichlet se especifican en (a) la parte del contorno  $\partial\Omega_\theta \subset \partial\Omega$  que incluye el punto de inicio de fisura  $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega_\theta$ , tal que  $\theta(\mathbf{x}_0) = \bar{\theta}_0$  y (b) a lo largo de  $\bar{S}$ , tal que  $\theta(\mathbf{x}) = \bar{\theta}_0$  para los puntos  $\mathbf{x} \in \bar{S}$ . Se imponen condiciones de contorno naturales en el resto de  $\partial\Omega$ .

El tensor de segundo orden  $\mathbf{K}$  acopla el problema escalar al problema mecánico y tiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{K} = \mathbf{s} \otimes \mathbf{s} + \mathbf{t} \otimes \mathbf{t} + \varepsilon \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (4.2)$$

donde  $\varepsilon$  es el valor de una pequeña perturbación, de un orden entre  $10^{-4}$  y  $10^{-10}$ . Esto asegura que  $\mathbf{n} = \nabla \theta / \|\nabla \theta\|$ .

En el problema discreto, y bajo el criterio de daño distribuido, los llamados “puntos pertenecientes a  $S$ ” se entienden como los elementos finitos cruzados por la isosuperficie (o isolínea)  $S$ .

El problema a resolver es simple, ya que es lineal y sólo tiene una incógnita por nodo. Puede resolverse en la misma malla de elementos finitos que el problema mecánico, y su acoplamiento se puede resolver en dos pasos aparte en cada incremento de carga. Una vez se ha resuelto el problema se tienen identificados aquellos elementos pertenecientes a  $S$  (donde  $\theta = \bar{\theta}_0$ ). Esta identificación es reconocida en el problema mecánico cuando se verifica el criterio de umbral de daño, permitiendo que dañen sólo aquellos elementos cruzados por  $S$ . Finalmente, aquellos elementos que efectivamente dañen se agregarán a la parte consolidada de la fisura  $\bar{S} \subset S$ .

Una de las ventajas de este método reside en la facilidad de implementación en cualquier código de elementos finitos para resolver problemas mecánicos. Asimismo, es posible trazar varias trayectorias de fisura diferentes y simultáneas, definiendo una fisura iésima como la superficie  $S^i$  donde  $\theta = \bar{\theta}_0^i$  y especificando la condición de contorno correspondiente  $\bar{S}^i \subset S^i$ .

Una desventaja de la formulación, tal como está planteada aquí, es que no es posible representar la intersección de dos recorridos de fisura, limitándose su aplicación a casos con fisuras aisladas. Asimismo, es necesaria la definición previa de los puntos de inicio de fisura en el contorno.

#### 4.2.6 Evaluación de la dirección de propagación: enfoque local

En el enfoque local, la dirección de propagación se determina estudiando solamente los elementos adyacentes al elemento punta de fisura. De esta manera, y observando la magnitud y dirección de las tensiones principales de tracción, es posible definir hacia donde progresará la fisura. Este enfoque ha sido utilizado en los trabajos de Samaniego (2003), Manzoli (2005), entre otros.

En el presente trabajo se utiliza un algoritmo de este tipo, cuya formulación se expone con detalle en el capítulo 5. Tal como se observa allí, este método requiere un mayor esfuerzo de programación respecto al enfoque global, ya que el grado de casuística relacionado con la determinación de la dirección de la fisura es relativamente importante. Sin embargo, esto también proporciona un mayor control sobre las operaciones que realiza el algoritmo, lo que permite incluir de una manera directa comportamientos más sofisticados en la propagación de la fisura. Por ejemplo, el algoritmo propuesto puede determinar automáticamente el punto de inicio de la fisura, así como capturar el cruce entre dos trayectorias diferentes.



# 5

## Algoritmo de localización

En este capítulo se expone el algoritmo empleado en el presente trabajo para simular la creación y desarrollo de fisuras discretas en materiales cuasifrágiles. En primer lugar se da una breve introducción describiendo el método en términos generales. Luego se detallan cada una de las etapas que sigue el algoritmo, explicando todos los aspectos relacionados, tanto físicos como numéricos. Finalmente se muestra una serie de ejemplos de ilustración y de validación para evaluar el rendimiento del método propuesto.

### 5.1 Introducción

El algoritmo se plantea para problemas con elementos lineales triangulares, en estados de tensión y deformación plana. Para análisis tridimensionales haría falta un mayor esfuerzo de programación, el cual no sería recomendable comenzar antes de un profundo entendimiento del funcionamiento del método en su estado bidimensional. En esta sección el trabajo se centra precisamente en el planteamiento y aplicabilidad del algoritmo de rastreo en 2D, como un preámbulo para una futura implementación al caso general tridimensional.

El modelo constitutivo empleado es el de daño distribuido tracción-compresión descrito en la sección 3.3.2. Dentro del contexto del programa COMET, el algoritmo para evaluar

la dirección de las fisuras se inserta antes del cálculo del vector de fuerzas internas al inicio de cada paso de carga.

El procedimiento consiste en un sistema de etiquetas o *flags* que sirven para diferenciar aquellos elementos finitos que serán susceptibles al daño de los elementos que no lo serán en cada paso de carga. Por supuesto, esta diferenciación debe hacerse antes de entrar en las subrutinas del modelo constitutivo. Los criterios que se siguen para definir esta separación dependen de la magnitud y de la dirección de las tensiones principales de tracción en cada elemento. De esta manera, por cada fisura se crea una ruta o *track* de elementos que utilizarán el modelo constitutivo de daño, mientras que el resto de los elementos se define con comportamiento elástico lineal.

En general, esta ruta partirá desde el *elemento origen de fisura*, donde se definen las *coordenadas de arranque* de la fisura en uno de sus lados (estos conceptos se detallan más adelante). Desde este punto inicial se traza una recta a través del elemento, con una dirección perpendicular a la dirección de tracciones principales elementales. El punto donde esta recta corta algún borde contrario del elemento se tomará como partida para trazar un nuevo segmento, esta vez con la dirección de la tensión principal mayor del elemento siguiente. Repitiendo este procedimiento hasta cumplir algún criterio establecido se marca el recorrido potencial de cada fisura en el paso de tiempo actual.

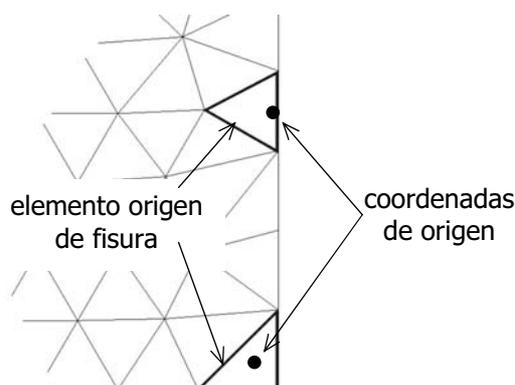
El algoritmo se divide en dos partes. En la primera se detectan los puntos donde nacen nuevas fisuras. En la segunda parte se estudia cada una de las fisuras existentes para decidir cuáles de ellas pueden evolucionar en el paso de tiempo actual, y en qué dirección.

## 5.2 Primera parte: detección de fisuras nuevas

En esta parte del algoritmo se determinan aquellos elementos donde pueden arrancar fisuras nuevas. Los datos de entrada son los valores de la *tensión principal de tracción* en los elementos ubicados en el contorno del dominio en análisis, y la lista de los elementos ya marcados como *origen de fisura* en pasos anteriores. Luego se adoptan los siguientes criterios para “etiquetar” los nuevos elementos que sean origen potencial de fisuras:

- Las fisuras se originarán sólo en elementos ubicados en el contorno, siempre y cuando las tensiones a tracción superen el valor de la resistencia del material.
- Para cada elemento origen de fisura confirmado existe un parámetro llamado *radio de exclusión*, que es una distancia dentro de la cual no se permite la creación del origen de otra fisura. Este parámetro es definido por el usuario.
- Si existen varios elementos de contorno que han superado la resistencia a tracción simultáneamente, se determinará como origen de fisura aquel elemento que posea la mayor tensión a tracción. Luego se activará el radio de exclusión de este elemento y a partir de allí se podrán marcar como origen de fisura sólo aquellos elementos que se encuentren fuera de este radio.

Una vez se han marcado los nuevos elementos origen de fisura para este paso de tiempo, se calculan las *coordenadas de origen de fisura*. Estas coordenadas corresponden a las del punto medio entre los dos nodos del elemento origen que están ubicados en el contorno. En caso de que haya tres nodos ubicados en el contorno, se toma el centro de gravedad del elemento como el punto de origen de fisura (ver figura 5.1).



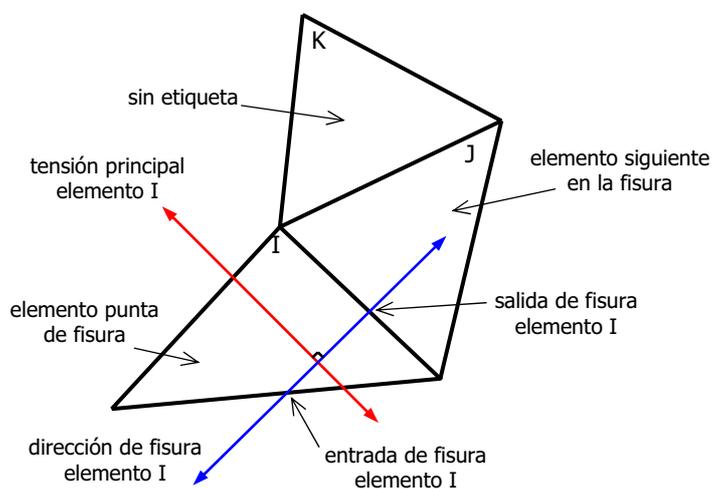
**Figura 5.1** Ubicación de coordenadas de origen de fisura respecto al elemento

Al salir de esta parte del algoritmo se tienen marcados con su etiqueta correspondiente los elementos donde se puede comenzar a generar una fisura nueva, y unas coordenadas cartesianas que servirán de guía para propagar la fisura. Estos datos entran luego en la parte principal del algoritmo, tal como se describe a continuación.

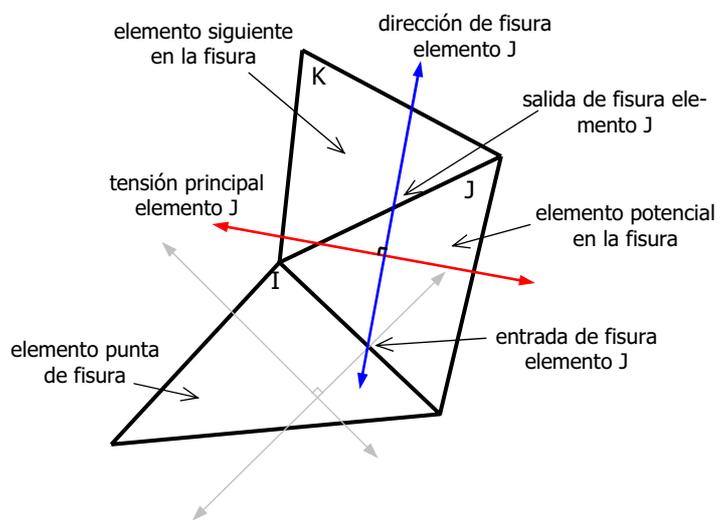
### 5.3 Segunda parte: propagación de fisuras

Una vez finalizada la primera parte del algoritmo, sus datos de salida forman parte de los datos de entrada de la segunda parte, junto con la magnitud y dirección de la tensión principal de tracción de todos los elementos. Asimismo, se utiliza la lista de elementos etiquetados como pertenecientes a fisuras existentes, actualizada en el paso de carga anterior.

Luego de iniciada esta subrutina del algoritmo de localización, el siguiente paso es determinar cuáles son los *elementos punta de fisura* en cada fisura existente. Esto se define simplemente como aquellos elementos dañados con un sólo elemento vecino también dañado. Los elementos marcados como origen de fisura en la parte anterior también se consideran como punta de fisura. Luego, para cada uno de estos elementos, se practica el siguiente procedimiento:



(a)



(b)

**Figura 5.2** (a) Determinación de las *coordenadas de salida* de la fisura (elemento I) (b) Determinación de nuevo elemento potencial y de las *coordenadas de entrada* de la fisura (elemento J)

- i. Se determinan sus *coordenadas de salida*. Esto se hace trazando un vector que pase por las *coordenadas de entrada* del elemento y que lleve una dirección perpendicular a la dirección principal de tracción. Las coordenadas de salida son la intersección de ese vector con el lado del elemento que corresponda. En la figura 5.2a el elemento punta de fisura es el elemento I.
- ii. El elemento vecino cuyo lado en común corresponda con el lado donde están ubicadas las coordenadas de salida del elemento punta de fisura se marca como potencial para esta fisura y para este paso de tiempo (ver figura 5.2b).
- iii. Las coordenadas de entrada de este elemento (elemento J en la figura 5.2) son iguales a las coordenadas de salida del elemento anterior (elemento I en la figura 5.2).
- iv. Se repiten estos pasos tomando el nuevo elemento potencial como punta de fisura (elemento J en la figura 5.2).

El procedimiento anterior se repite hasta que se cumpla alguno de los siguientes criterios:

- *Criterio de umbral de tensiones*. El rastreo y etiquetado de elementos se detiene cuando la tensión principal de tracción del elemento en estudio sea menor a un umbral definido por el usuario. Este umbral se define para evitar cálculos innecesarios, ya que no tiene sentido marcar como potencialmente dañable un elemento cuyas tensiones estén muy por debajo del valor de la resistencia y que por tanto no dañará en el paso de tiempo actual. Sin embargo, se debe dejar un margen para marcar como potencial cualquier elemento que pudiera eventualmente fallar durante el paso de carga. La experiencia ha demostrado que un umbral igual al 75% de la resistencia a tracción generalmente funciona bien.
- *Criterio de unión de fisuras*. El algoritmo también se detiene si el nuevo elemento detectado ya se encuentra dañado o marcado. Esto representaría una unión entre dos fisuras, en cuyo caso se da por terminado el desarrollo de la fisura actual y no se siguen rastreando elementos potenciales.

En cuanto se cumple alguno de estos criterios se pasa a la siguiente fisura, y se reinicia el ciclo. Finalmente, cuando el procedimiento se ha aplicado en cada fisura, el algoritmo acaba y tiene como valores de salida una etiqueta para cada elemento que indica si éste es potencialmente dañable o tendrá comportamiento elástico.

Las etiquetas empleadas son básicamente tres:

- Elemento intacto, no susceptible al daño (fuera del recorrido de fisuras potenciales)
- Elemento intacto, susceptible al daño (dentro del recorrido de una fisura potencial)

- Dañado (pertenece a una fisura consolidada, tendrá comportamiento inelástico el resto del cálculo)

El modelo constitutivo implementado ha sido modificado de tal manera que pueda reconocer estas etiquetas  $y$ , por tanto, discernir el tipo de comportamiento que tendrá cada elemento. Además, allí también se le modifica la etiqueta a aquellos elementos potenciales que efectivamente dañan, añadiéndolos así a la lista de elementos pertenecientes a fisuras consolidadas. Finalmente, los elementos potenciales que no dañaron son restituidos a su estado original, sin etiqueta. Con estos datos, en el paso de carga siguiente el algoritmo es capaz de determinar las nuevas puntas de fisura, y estudiar la propagación correspondiente.

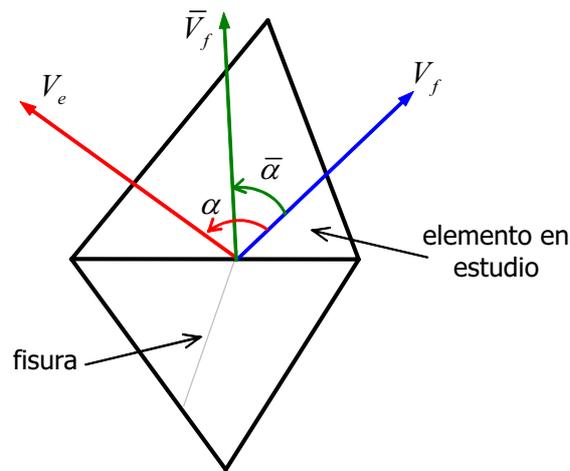
## 5.4 Criterio de curvatura máxima

En las pruebas de validación que se muestran en el apartado 5.6, el algoritmo tal como se ha descrito hasta ahora da un buen rendimiento en general, si bien presenta algunos problemas en los casos donde existen estados tensionales de flexión.

En algunos de estos casos se manifiestan unas curvaturas bruscas que hacen que la fisura tienda a volverse sobre sí misma, provocando un “enroscamiento” que impide su correcta propagación. Un análisis del problema revela que el cambio espurio en la dirección de propagación se debe al complejo estado tensional alrededor de la punta de la fisura, donde las tensiones principales muestran una tendencia radial respecto a este punto. Esto ocurre normalmente cuando la punta de la fisura se encuentra próxima al eje neutro.

Para solventar este problema, se implementa una técnica de identificación y corrección de curvaturas bruscas en la ruta de la fisura. Esta técnica se aplica antes de marcar cualquier elemento potencial, y consiste en rastrear las coordenadas de entrada de fisura de cada elemento perteneciente a la fisura, tanto potenciales del paso de tiempo actual como consolidados de pasos anteriores. Con estas coordenadas y mediante una simple suma de vectores se calcula una dirección promedio de la fisura. Luego se determina el ángulo entre esta dirección y la dirección de fisura del elemento en estudio. Si este ángulo supera un valor preestablecido, se desprecia la dirección del elemento en estudio y se sustituye por una dirección más parecida a la tendencia de la fisura.

En el esquema mostrado en la figura 5.3,  $V_f$  es el vector unitario de dirección igual al promedio de la dirección de fisura de todos los elementos pertenecientes a ella.  $V_e$  es un vector unitario de dirección igual a la fisura del elemento en estudio. Es conveniente recordar que la dirección de fisura se determina como la perpendicular a la dirección de tensiones principales a tracción de cada elemento. Seguidamente se define  $\alpha$  como el ángulo entre  $V_f$  y  $V_e$ ; y  $\bar{\alpha}$  como el *ángulo de curvatura máxima*, especificado por el usuario al inicio del cálculo. El vector que forma un ángulo  $\bar{\alpha}$  respecto a la tendencia de la fisura  $V_f$  y que forma el menor ángulo con la dirección del elemento se denota  $\bar{V}_f$ .



**Figura 5.3** Criterio de curvatura máxima. Caso en el que es necesario corregir la dirección de fisura del elemento  $V_e$ .

Ahora bien, si se cumple que  $\alpha < \bar{\alpha}$ , el elemento actual se marca como potencial para este paso de tiempo con la dirección  $V_e$ , y se pasa al siguiente elemento de la fisura. Si por el contrario  $\alpha > \bar{\alpha}$ , significa que la fisura tiende a desviarse demasiado bruscamente, y que la dirección del elemento debe corregirse. Para esta corrección existen dos criterios:

- utilizar  $V_f$  en lugar de  $V_e$  como dirección del elemento; o
- utilizar  $\bar{V}_f$  en lugar de  $V_e$  como dirección del elemento

En el primer caso se está imponiendo que la fisura mantenga la tendencia mostrada hasta ese punto. Esto es válido para fisuras rectas, o con curvaturas muy leves.

El segundo criterio permite la simulación de fisuras curvas, pero implica un procedimiento diferente para calcular la dirección promedio  $V_f$ . En una fisura curva no tendría sentido utilizar la dirección promedio de *todos los elementos* pertenecientes a ella, ya que la resultante no indicaría la verdadera tendencia hacia la punta de la fisura. Por tanto, en este caso se limita el número de elementos que se utilizan para calcular  $V_f$ , de manera que se obligue a la fisura a seguir la tendencia de los *últimos n elementos* pertenecientes a ella.

Una vez aplicado el criterio de curvatura máxima, en cualquiera de sus dos versiones, se sigue el procedimiento normal: el elemento se marca como potencial y se pasa al siguiente elemento. En el apartado 5.6.3 se ilustra este fenómeno con un ejemplo, y se comenta el empleo del criterio del ángulo de curvatura máxima en los resultados obtenidos.

## 5.5 Alisado de tensiones

Para solucionar el problema de curvaturas bruscas expuesto en el apartado anterior, antes de plantear la solución adoptada se intentó mitigar el efecto aprovechando el suavizado de tensiones de los puntos de integración a los nodos. De esta forma, en el elemento en estudio se hacía un promedio de sus tres tensiones nodales alisadas, y la dirección de fisura se trazaba como la perpendicular a la dirección resultante de ese promedio. Con esto se intentaba mitigar el error de aproximación local, al tomar en cuenta la dirección de tensiones de todos los elementos circundantes al elemento en estudio. Sin embargo, las curvaturas bruscas seguían existiendo, lo que indica que el origen del problema no está en *un* elemento con una mala dirección, sino en el estado tensional dentro de un cierto radio alrededor de la punta de la fisura, en cierto estadio del cálculo.

No obstante lo anterior, el uso del promedio de las tensiones nodales alisadas para la determinación de la dirección de la fisura se mantiene en el algoritmo como una alternativa al uso directo de la tensión a tracción de cada elemento. En el presente trabajo se utilizan estas tensiones promediadas, si bien no se han encontrado diferencias significativas al comparar los resultados obtenidos con ambos criterios.

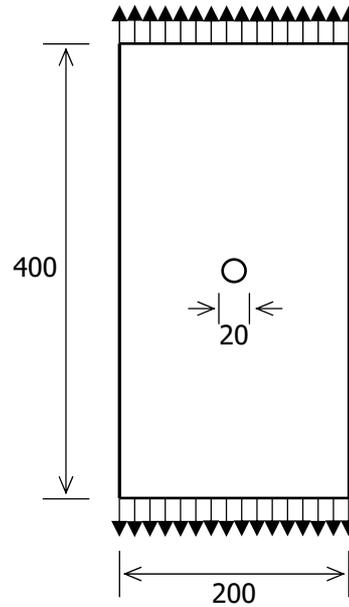
## 5.6 Ejemplos ilustrativos y de validación

A continuación se muestran algunos ejemplos utilizados para ilustrar el comportamiento y validar la implementación del algoritmo propuesto.

### 5.6.1 Tracción pura

En primer lugar se ha llevado a cabo un análisis de tracción pura, donde se pone de manifiesto la imposibilidad del modelo de daño distribuido de simular correctamente la aparición de fisuras localizadas. La geometría consiste en una placa rectangular con un agujero en el centro, sometida a desplazamientos opuestos aplicados en sus partes superior e inferior. Las dimensiones de la placa, mostrada en la figura 5.4, son de 200 mm x 400 mm, y el agujero tiene un radio de 10 mm. Las hipótesis empleadas son las de deformación plana, con un espesor unitario. Se ha modelado solamente la mitad de la placa, aprovechando el eje de simetría vertical del problema. Se han utilizado dos mallas de elementos finitos triangulares de tres nodos, una con 3.818 elementos de tamaño promedio 5 mm (2.023 nodos) y otra de 14.844 elementos de tamaño promedio igual a 2.5 mm (7.648 nodos).

El problema fue analizado con el modelo de daño distribuido descrito en la sección 3.3.2. Se utilizó un módulo de Young de 30 GPa y un coeficiente de Poisson de 0.2. La resistencia a tracción es de 2 MPa, y se tomó un valor de energía de fractura igual a 100 J/m<sup>2</sup>.

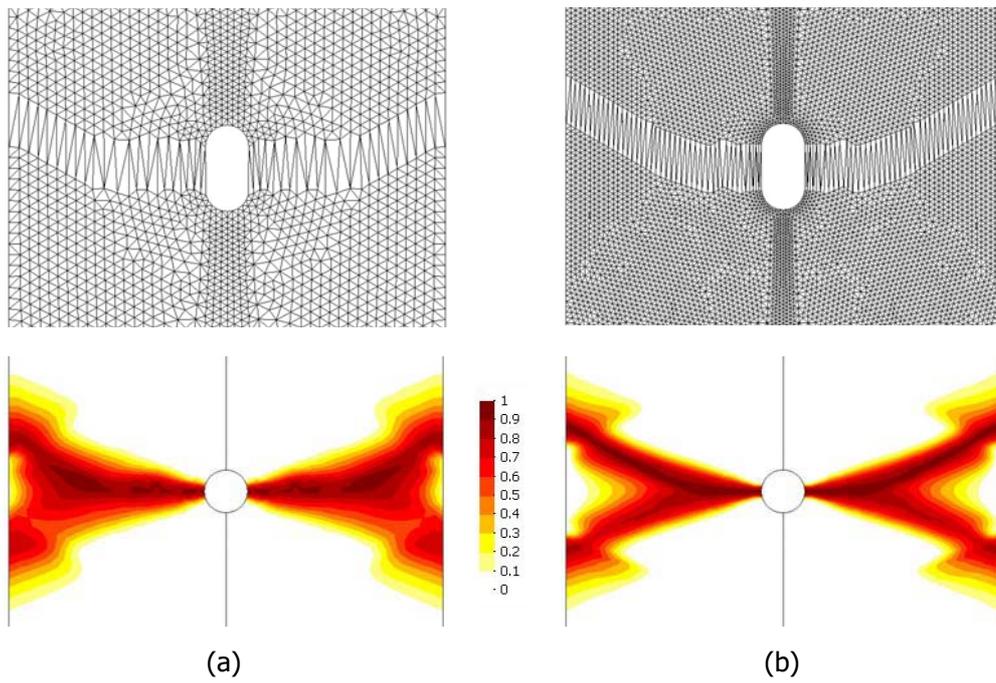


**Figura 5.4** Dimensiones [mm] y condiciones de contorno de la placa

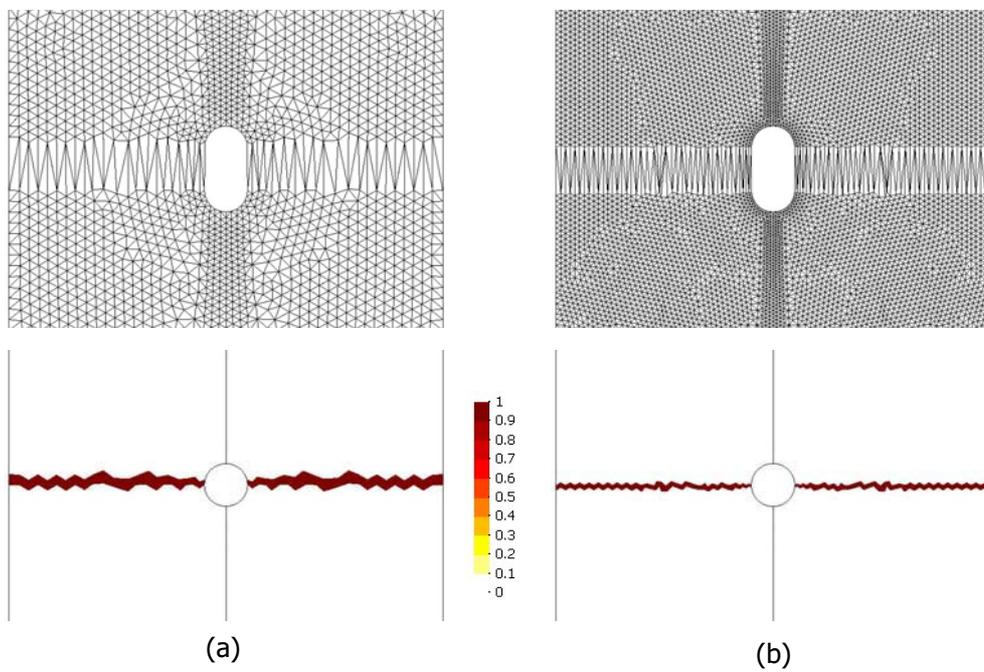
La figura 5.5 muestra la deformada (desplazamientos amplificados 100 veces) y las zonas dañadas en ambas mallas, obtenidas con el modelo original, sin el algoritmo de localización. Se observa que, independientemente de la malla utilizada, la distribución del daño tiende a seguir la orientación de los elementos finitos, en una dirección de aproximadamente  $30^\circ$  respecto a la horizontal. Este comportamiento es claramente dependiente de la orientación de la malla, y justifica por tanto la incorporación de una modificación para evitar que suceda.

Por otro lado, en la figura 5.6 se exponen los resultados al incorporar el algoritmo de *rastreo* para simular la propagación de las fisuras.

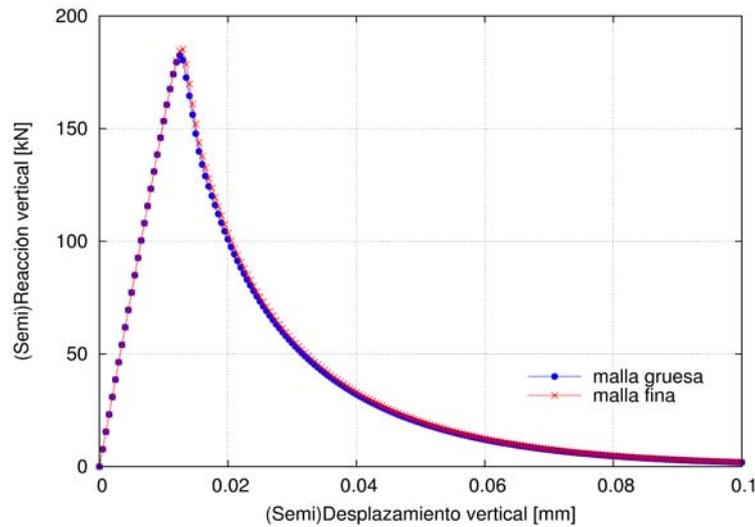
Para ambos tamaños de elemento se aprecia una fisura perfectamente horizontal, que no depende de la orientación de la malla. Además, el daño localiza en una sola franja de elementos finitos, al contrario del caso anterior, donde existía una dispersión significativa. Es importante resaltar que a pesar de que la fisura localizada obtenida en la malla gruesa tiene el doble de espesor que la fisura de la malla fina, la energía de fractura liberada es la misma, definida en los datos del problema. Esto se demuestra en la gráfica de la figura 5.7, donde se dibuja la reacción vertical contra el desplazamiento impuesto en los dos casos. Ambas curvas prácticamente coinciden, ratificando así lo afirmado arriba. Esto se obtiene gracias a la regularización de la energía de fractura que se comenta en el apartado 3.3.2, que define una disipación de energía independiente del tamaño del elemento finito donde ésta tiene lugar.



**Figura 5.5** Deformada (x100) y daño a tracción (a) Malla gruesa (b) Malla fina. Modelo de daño distribuido.



**Figura 5.6** Deformada (x100) y daño a tracción (a) Malla gruesa (b) Malla fina. Modelo de daño localizado.

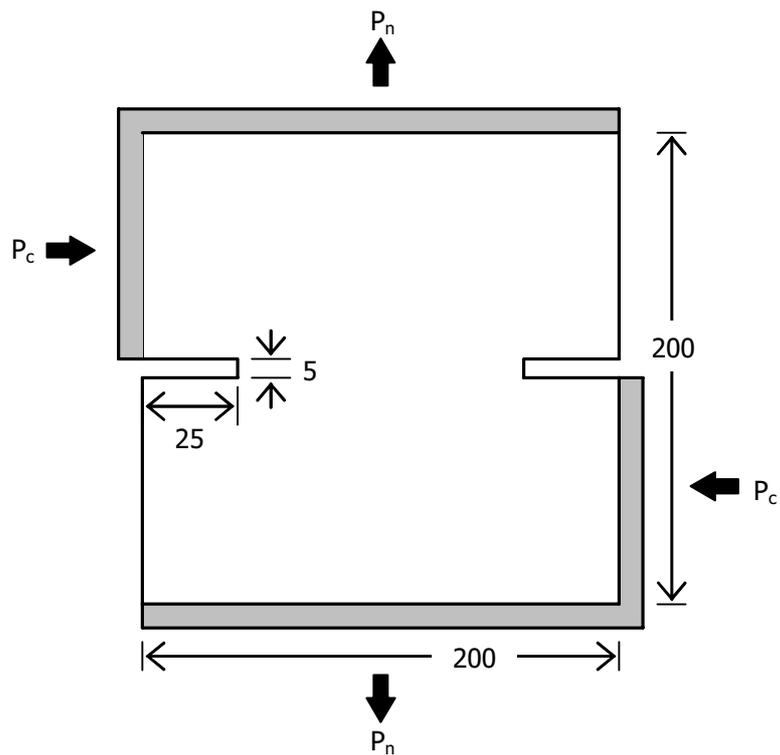


**Figura 5.7** Reacción contra Desplazamientos para ambas mallas. Modelo de daño localizado.

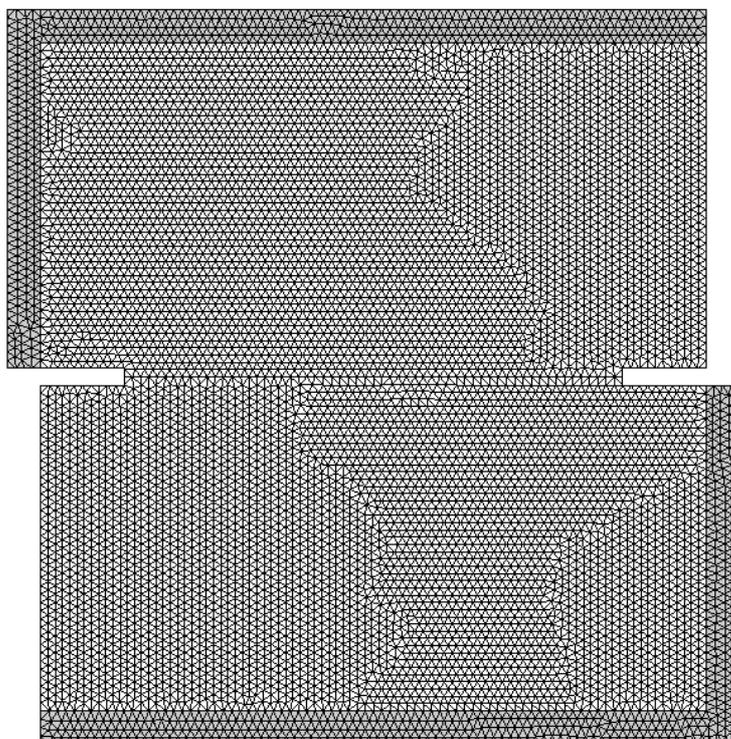
### 5.6.2 Modo mixto

El siguiente caso corresponde a unos ensayos elaborados por Nooru-Mohamed (1992), sobre una probeta cuadrada con dos entallas laterales opuestas, tal como se muestra en la figura 5.8. Las acciones sobre la probeta se aplican a través de unas grapas de acero (dibujadas en gris), y consisten en una fuerza de corte en la dirección de las entallas ( $P_c$  en la figura), que luego se mantiene constante mientras se aplica una tracción perpendicular a las entallas ( $P_n$ ). Así, para diferentes valores iniciales de  $P_c$  se obtienen diversas rutas de fisura. Para estudiar el rendimiento del algoritmo de localización se han tomado los resultados obtenidos en los casos de  $P_c$  igual a 5 kN y a 10 kN (denominados 4a y 4b en los ensayos originales, respectivamente).

El análisis se llevó a cabo con un modelo de deformación plana, de espesor igual a 50 mm, equivalente al ancho real de la probeta. En el modelo se han incluido también los marcos de acero, que se consideran elásticos. El material se ha definido con las características indicadas en Nooru-Mohamed (1992), donde el módulo de Young es de 30 GPa y el coeficiente de Poisson es 0.2. La resistencia a tracción se ha tomado igual a 2.8 MPa y la energía de fractura es de 90 J/m<sup>2</sup>. La malla utilizada (figura 5.9) está compuesta de 16.388 elementos triangulares lineales, con un total de 8.391 nodos.

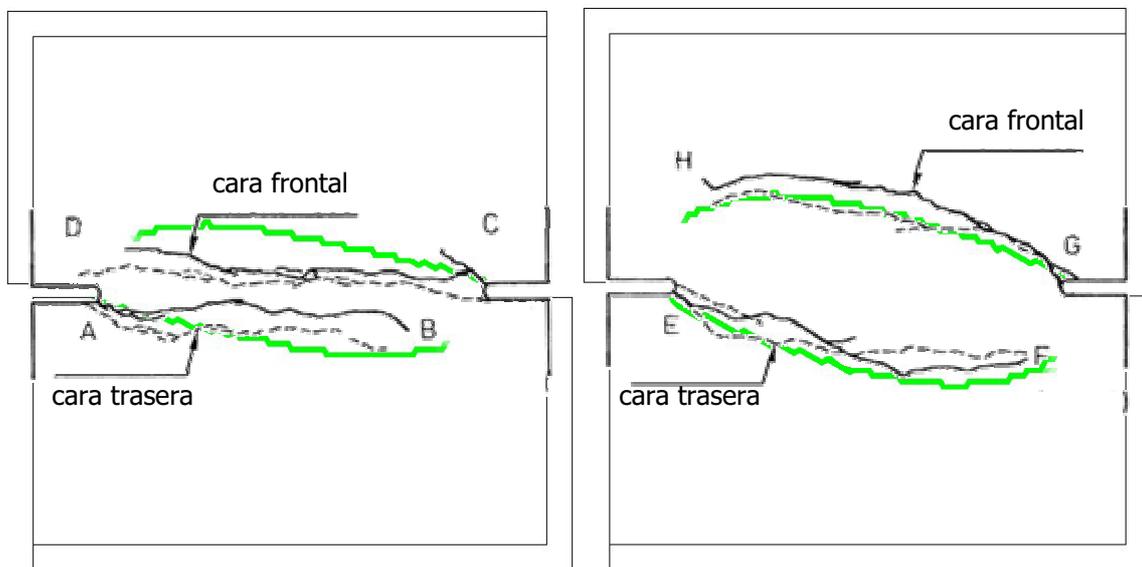


**Figura 5.8** Dimensiones [mm] y condiciones de contorno de la probeta



**Figura 5.9** Malla de elementos finitos empleada en el cálculo

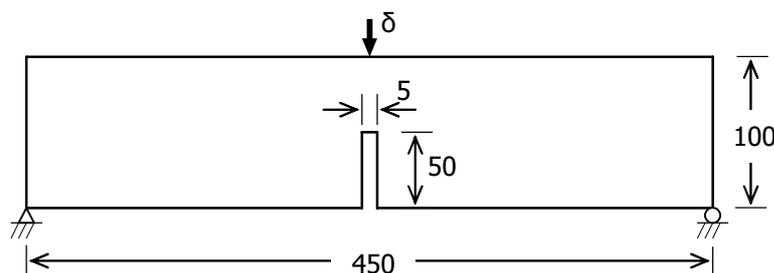
En la figura 5.10 se muestran los resultados del modelo con daño localizado, donde los elementos dañados se resaltan en color. En la figura se superponen los esquemas de la aparición de fisuras presentado por Nooru-Mohamed, mediante líneas negras gruesas. Las líneas continuas representan la fisura aparecida en la cara frontal de la probeta, mientras que las líneas punteadas son las fisuras de la cara posterior. En los dos casos estudiados con el modelo numérico se obtiene una buena aproximación del fenómeno real. Cabe destacar que el origen de las fisuras está bien determinado por el algoritmo, coincidiendo casi perfectamente en todos los casos. La ruta que sigue la fisura es bastante aproximada para el caso de  $P_c = 10$  kN. En el caso con  $P_c = 5$  kN no se siguen correctamente las oscilaciones de la fisura, aunque la tendencia general y el punto final están bien representados.



**Figura 5.10** Resultados numéricos (en color) vs. resultados experimentales (líneas negras continuas y punteadas) presentados en Nooru-Mohamed (1992)

### 5.6.3 Flexión simple

Para valorar el rendimiento del algoritmo de localización en los casos con flexión se ha estudiado una viga con una entalla en el centro luz, cuyas dimensiones y condiciones de contorno se muestran en la figura 5.11. Como resultados experimentales de referencia se tomarán los mostrados en Rots (1988). Se ha llevado a cabo una serie de análisis, cambiando la malla de elementos finitos y el tamaño del paso de tiempo, con la intención de evaluar la robustez del modelo. Asimismo, se estudia el empleo del ángulo de curvatura máxima  $\bar{\alpha}$  planteado en la sección 5.4.



**Figura 5.11** Dimensiones [mm] y condiciones de contorno de la probeta

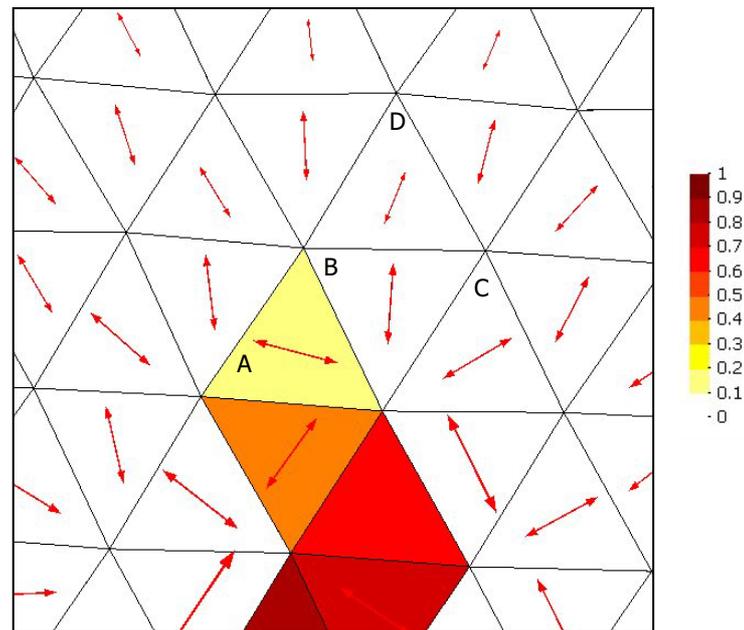
En los análisis se emplean dos mallas diferentes; una de 1.248 nodos y 2.380 elementos, los cuales tienen un tamaño promedio de 2 mm en la zona donde se espera que se forme la fisura. La otra malla utilizada, más fina, es de 2.689 nodos y de 5.223 elementos, cuyo tamaño en el área de fisura es de 1 mm. En ambos casos se emplearon elementos planos triangulares de tres nodos.

Las dos discretizaciones temporales adoptadas consisten en aplicar el desplazamiento vertical  $\delta$  en incrementos de tamaño  $1 \times 10^{-2}$  mm y  $1 \times 10^{-3}$  mm.

Los parámetros materiales utilizados, tomados de Rots (1988), son 20 GPa para el módulo de Young, con un coeficiente de Poisson de 0.2. La resistencia a tracción es de 2.4 MPa mientras que la energía de fractura es de 113 J/m<sup>3</sup>. La viga fue analizada bajo las hipótesis de deformación plana, con un espesor de 100 mm, correspondiente al espesor de la probeta ensayada. La carga se aplica mediante control de desplazamientos.

Tal como se comenta en la sección 5.4, al estudiar casos donde existen estados de flexión es necesario utilizar el criterio de curvatura máxima al momento de marcar la ruta de elementos susceptibles a dañar en cada paso de tiempo. Así, en los casos anteriores (tracción simple y modo mixto tracción-cortante) no fue necesaria la utilización de este criterio. Sin embargo, en el caso de la viga de tres puntos se ha de definir un ángulo de curvatura máxima  $\bar{\alpha}$ , para evitar una propagación errónea de la fisura.

Si no se utiliza este criterio, normalmente la fisura tiende a dar curvas bruscas cuando alcanza una región con un estado tensional dado, como el que se muestra en la figura 5.12. Las flechas en la figura representan las tensiones principales en el centro de gravedad de cada elemento; sus longitudes están escaladas respecto a las magnitudes reales. La principal característica de esta zona es la tendencia radial que muestran las direcciones principales de tracción alrededor de la punta de la fisura.



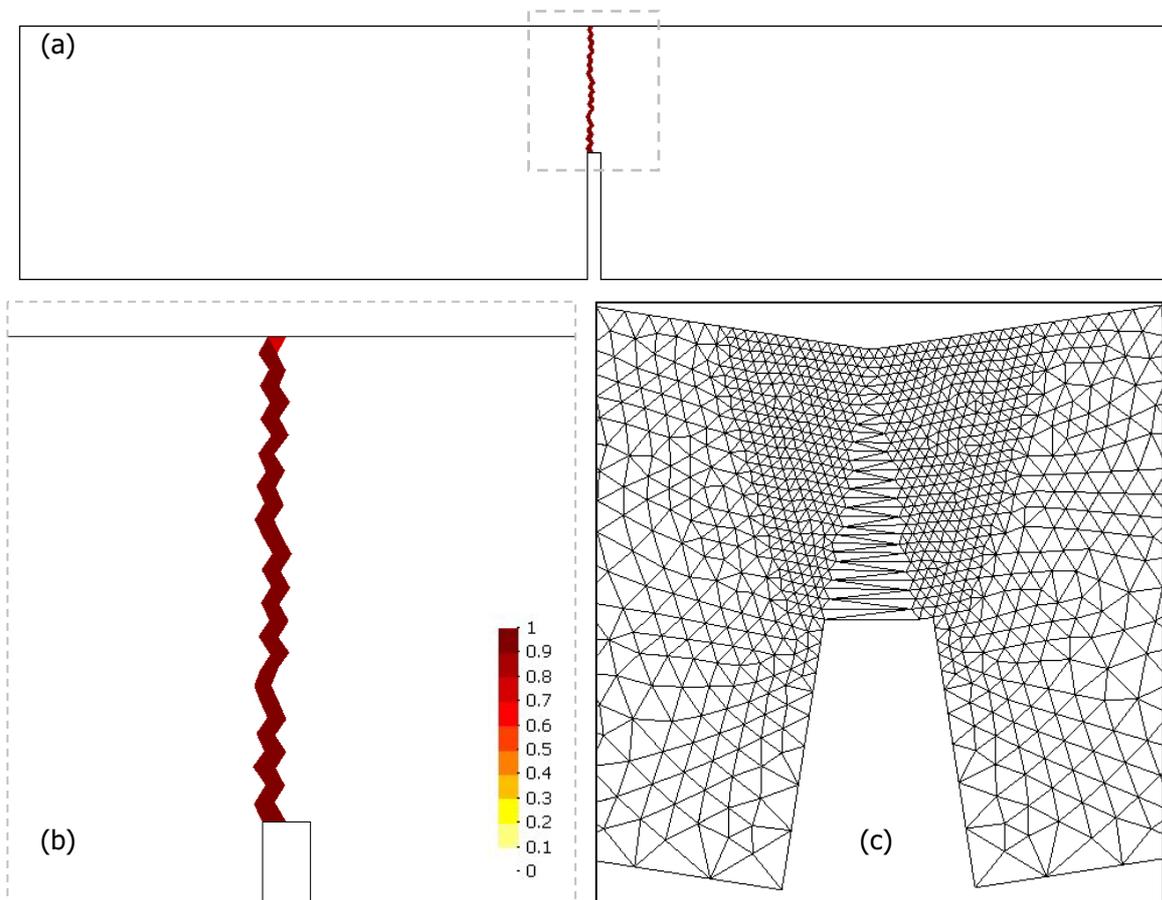
**Figura 5.12** Estado tensional que justifica el criterio de curvatura máxima. La escala cromática denota el índice de daño en la fisura. Las flechas indican la dirección y magnitud de las tensiones principales de tracción en el centro de gravedad de cada elemento.

En este caso en particular, el elemento A ya ha dañado y es la punta de la fisura. Ahora bien, siguiendo la dirección de propagación de la fisura (perpendicular a la dirección principal de tracción) el siguiente elemento que le corresponde dañar es B. Sin embargo, y a pesar de que este elemento ya ha alcanzado el umbral de tensiones, su dirección actual implica que la fisura seguiría hacia el elemento C, lo que es claramente erróneo. El ángulo entre la dirección de fisura del elemento B y la dirección promedio de la fisura es prácticamente recto. El criterio de curvatura máxima detecta este cambio brusco de la dirección de la fisura, y sustituye la dirección de B por la tendencia vertical que trae la fisura. Así, el siguiente elemento marcado como potencial sería D, correspondiente a la fisura recta vertical que se espera en este caso. Este proceso de verificación de la curvatura se repite en cada elemento estudiado para determinar la propagación de la fisura.

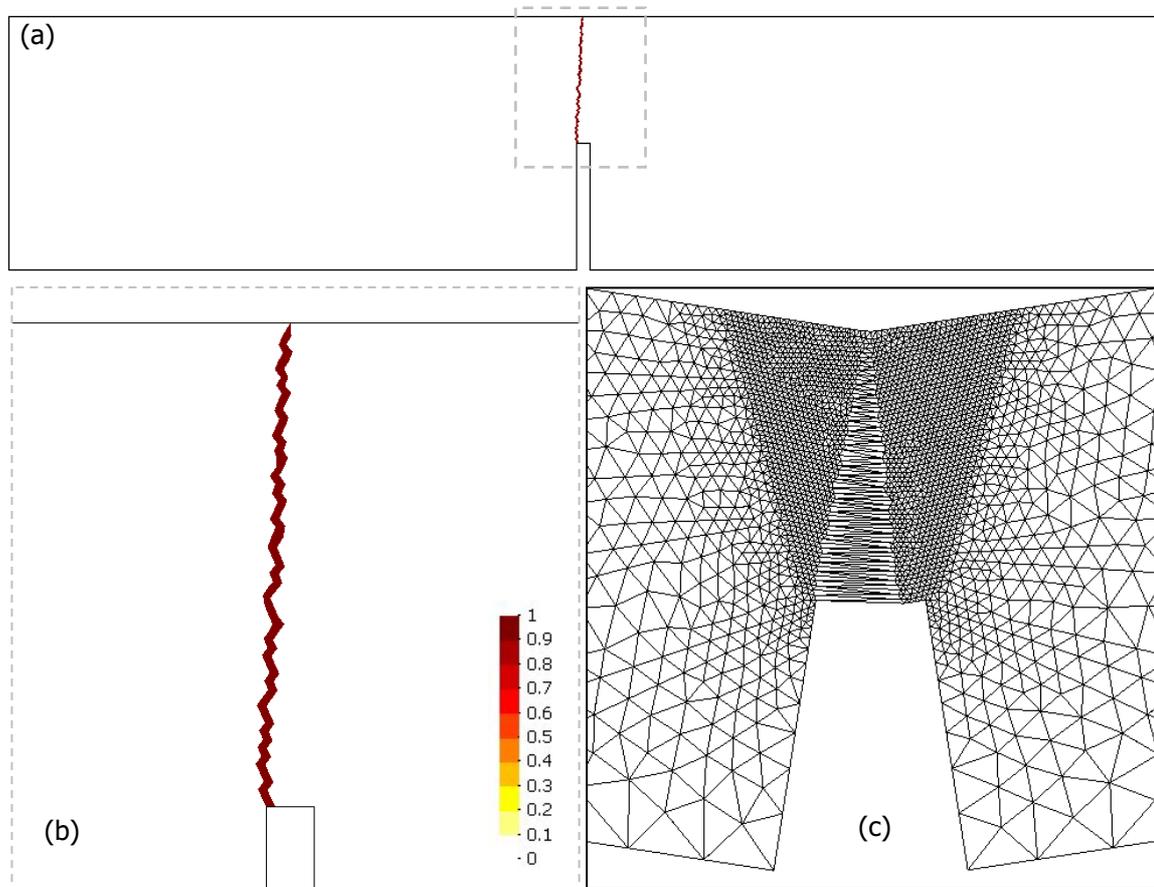
Volviendo al caso de la viga de tres puntos, se realizaron diferentes análisis variando el valor del parámetro  $\bar{\alpha}$ , para observar su incidencia en los resultados. En primer lugar, utilizando la malla gruesa y un incremento de carga de  $1 \times 10^{-2}$  mm, se obtuvo como resultado una dirección correcta de fisura para valores de  $\bar{\alpha}$  menores a unos  $50^\circ$ . Si se define un ángulo de curvatura máxima mayor a este valor, la fisura sufre desviaciones bruscas en su dirección, arrojando resultados incorrectos. Sin embargo, al utilizar un incremento de carga menor ( $1 \times 10^{-3}$  mm) este límite aumenta a  $60^\circ$ , poniendo de manifiesto cierta mejora en el cálculo de las direcciones de tensión principal cuando se utiliza una

discretización temporal más fina. En la figura 5.13 se muestra la fisura obtenida en los casos con malla gruesa y ángulo de curvatura máxima de  $50^\circ$ .

Al igual que en el caso con malla gruesa, se hicieron análisis con la malla fina hasta encontrar el valor de  $\bar{\alpha}$  máximo admisible. En este caso se obtuvo una buena dirección de fisura para ángulos  $\bar{\alpha}$  menores a  $70^\circ$ , para los dos incrementos de carga utilizados ( $1 \times 10^{-2}$  y  $1 \times 10^{-3}$  mm). Esto implica que cuando la discretización espacial es más fina se reduce el error en las direcciones de las tensiones; aunque éste no desaparece, pues sigue siendo necesario aplicar el criterio de curvatura máxima para obtener una dirección correcta de fisura. También se observa que en el caso con malla fina la discretización temporal utilizada no influye de manera importante en los resultados obtenidos. En la figura 5.14 se muestra el resultado obtenido en estos casos.

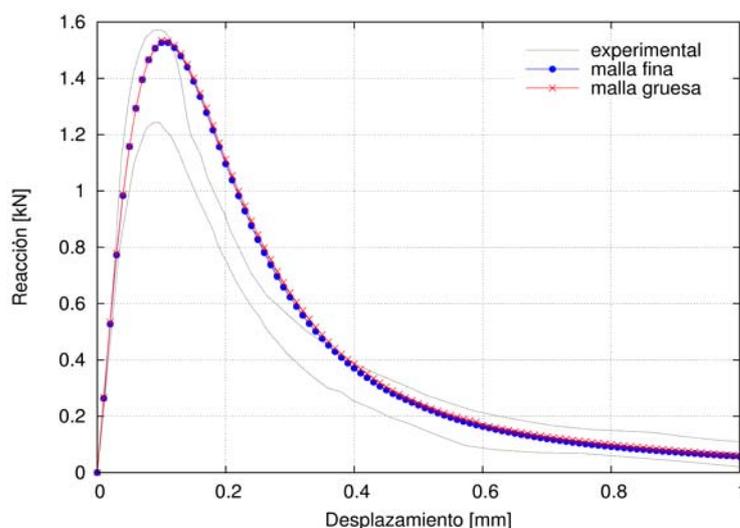


**Figura 5.13** (a) Daño en la viga con malla gruesa (b) Detalle de la fisura (c) Detalle de deformada



**Figura 5.14** (a) Daño en la viga con malla fina (b) Detalle de la fisura (c) Detalle de deformada

En Rots (1988) se muestran las curvas reacción-desplazamiento obtenidas de los ensayos experimentales. Estas curvas se reproducen en la figura 5.15, junto a aquellas obtenidas de los análisis numéricos presentados arriba. En ella se aprecia, en primer lugar, una concordancia perfecta entre los dos casos de discretizaciones espaciales analizados. Tal como se ha comentado en apartados anteriores, esto se logra con la regularización de la energía de fractura expuesta en la sección 3.3.2, que hace que la cantidad de energía liberada sea independiente del tamaño de elemento finito utilizado. Por otro lado, el valor de carga pico obtenida en el modelo numérico está dentro del rango de los resultados experimentales. El comportamiento post-pico es ligeramente más dúctil en el modelo numérico, si bien la tendencia general de la respuesta es bastante similar a los resultados experimentales.



**Figura 5.15** Reacción vs. Desplazamiento vertical. Comparación de casos experimentales con numéricos.

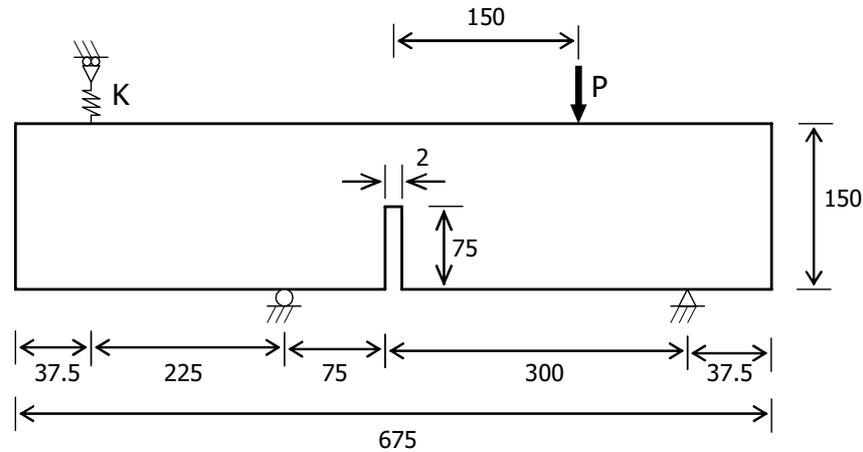
#### 5.6.4 Flexión en modo mixto

A continuación se muestran los resultados obtenidos al simular, mediante el modelo de daño localizado, una serie de ensayos experimentales realizados por Gálvez et al. (1988). En ellos, unas probetas de hormigón se han sometido a estados de flexión en modo mixto hasta la rotura.

Para su simulación numérica se escogen dos casos, cuya geometría, dimensiones y condiciones de contorno se muestran en la figura 5.16. En uno de los casos, denominado tipo 1 por los autores de los ensayos, se supone una rigidez nula del apoyo ubicado en la parte superior izquierda ( $K=0$ , viga de tres puntos). En el otro caso, llamado tipo 2, se toma una rigidez infinita ( $K=\infty$ , viga de cuatro puntos). El cálculo se controla a través del desplazamiento vertical (carga  $P$ , figura 5.16).

Las características del material son las siguientes: módulo de Young 38 GPa, coeficiente de Poisson 0.2, resistencia a tracción 3.0 MPa y energía de fractura 69 J/m<sup>2</sup>. El análisis se hace bajo un estado plano de deformaciones, con un espesor de 50 mm.

La malla empleada en los cálculos consta de 13.443 elementos triangulares lineales y 7.028 nodos. Los elementos pertenecientes a la zona donde ocurrirá el daño tienen un tamaño promedio de 2.5 mm.



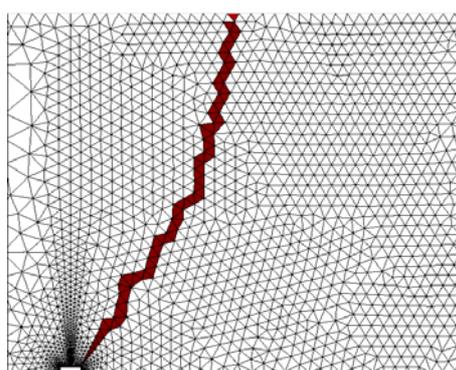
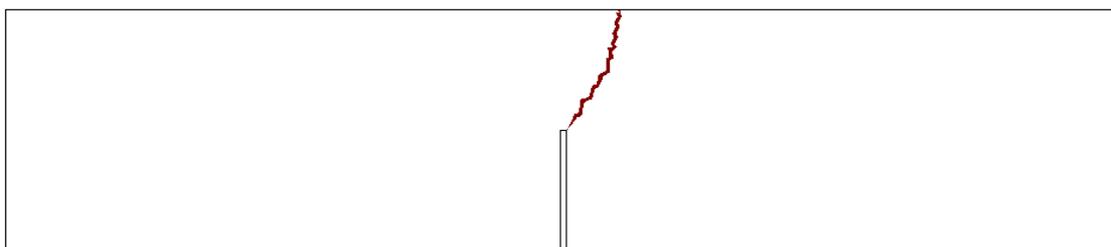
**Figura 5.16** Dimensiones [mm] y condiciones de contorno de la probeta

#### *Probeta tipo 1 (viga de tres puntos)*

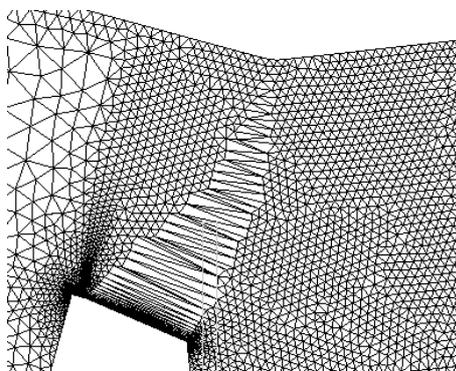
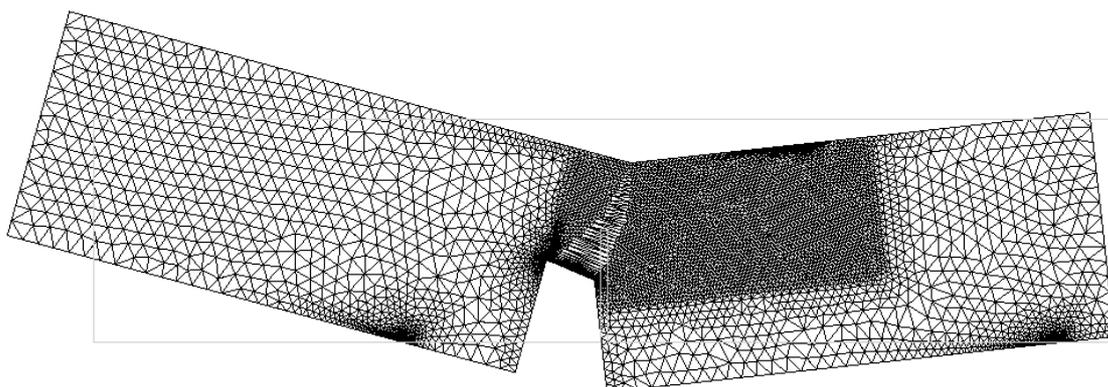
Los resultados de la simulación del ensayo tipo 1 (viga de tres puntos) se muestran en la y figura 5.17. En la primera se aprecia la trayectoria de la fisura, con un detalle para mostrar la discretización utilizada. En este cálculo se utiliza un valor de ángulo de curvatura máxima  $\bar{\alpha}$  de  $20^\circ$ . El criterio de corrección en los elementos con cambios bruscos de dirección es el de  $\bar{V}_f$  (ver sección 5.4), ya que la fisura presenta cierta curvatura. En la misma figura se muestra la deformada de la probeta, con un detalle en la zona de la fisura. Esta deformada corresponde a los desplazamientos aumentados cien veces al final del cálculo.

#### *Probeta tipo 2 (viga de cuatro puntos)*

En la simulación de la probeta tipo 2 (viga de cuatro puntos) se utiliza un ángulo de curvatura máxima de  $32^\circ$ , con el criterio de corrección de dirección de  $V_f$  (ver sección 5.4). En la figura 5.18 se muestra la trayectoria de la fisura obtenida en el análisis. Allí se aprecia cómo la fisura alcanza el borde opuesto de la sección, causando un colapso total al separar completamente la probeta en dos partes. También se muestra la deformada (aumentada trescientas veces) tras el colapso, donde se aprecia la separación total de las caras de la fisura.

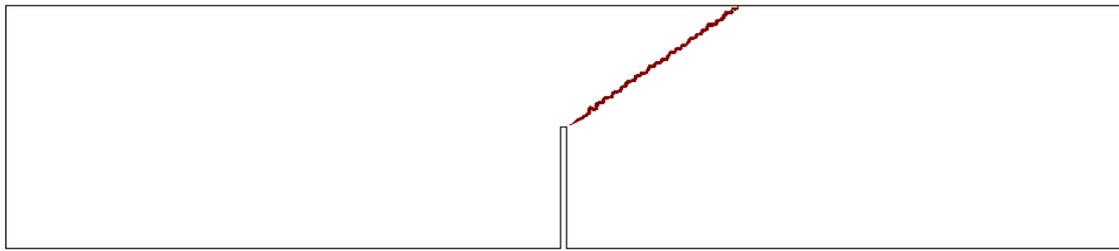


(b)

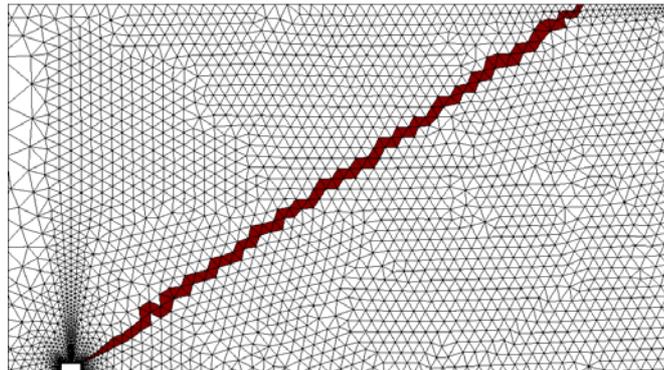


(d)

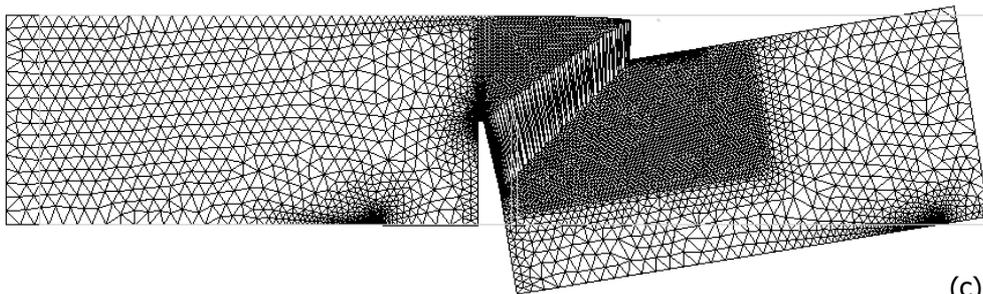
**Figura 5.17** Probeta tipo 1 (a) Trayectoria de la fisura obtenida (b) Detalle sobre la malla de elementos finitos (c) Deformada (x100) de la probeta al final del análisis (d) Detalle de la deformada



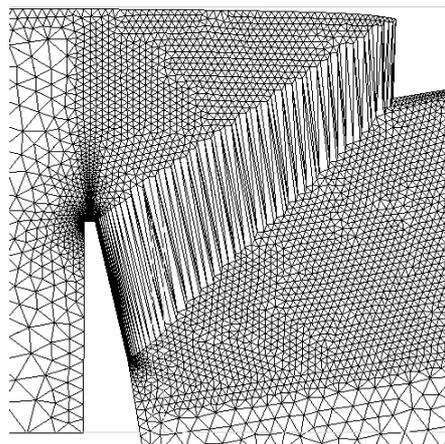
(a)



(b)

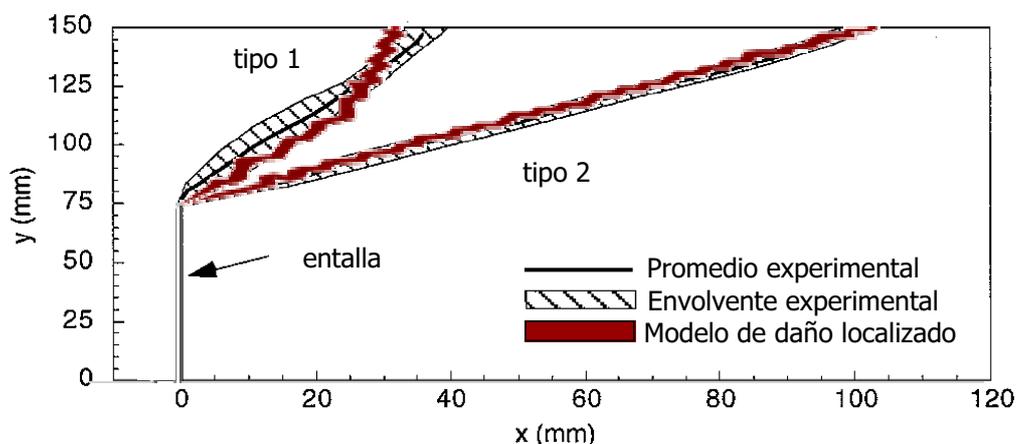


(c)



(d)

**Figura 5.18** Probeta tipo 2 (a) Trayectoria de la fisura obtenida (b) Detalle sobre la malla de elementos finitos (c) Deformada (x300) de la probeta al final del análisis (d) Detalle de la deformada



**Figura 5.19** Comparación de las trayectorias de fisura para las probetas tipo 1 y tipo 2

#### *Comparación con resultados experimentales*

Para evaluar la fiabilidad del modelo numérico, en la figura 5.19 se comparan las trayectorias de fisura obtenidas con las trayectorias experimentales. Allí se superponen los resultados del modelo de daño localizado con los gráficos presentados en Gálvez et al. (1988), apreciándose una coincidencia bastante exacta.

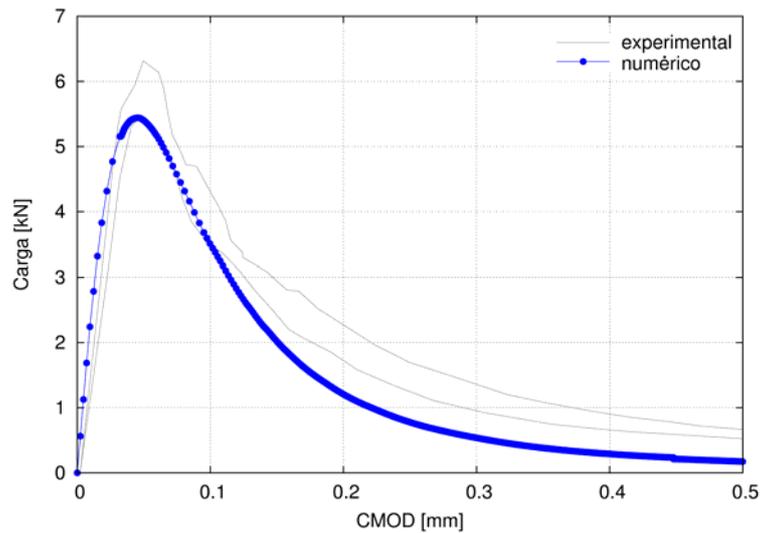
En la figura 5.20 se presenta la curva carga vs. abertura de la entalla (CMOD por sus siglas en inglés) junto con las envolventes experimentales de la probeta tipo 1. Esta curva presenta una tendencia muy similar a los resultados experimentales, con algo menos de ductilidad hacia el final del cálculo. Los resultados de la probeta tipo 2, mostrados en la figura 5.21 son un poco menos rígidos en la rama de carga de la curva, si bien la carga pico concuerda perfectamente con el valor experimental. La descarga presenta una buena tendencia, si bien al alcanzar un valor de CMOD igual a 0.11 mm aproximadamente, la sección colapsa completamente (ver figura 5.18).

#### *Comparación con otros resultados numéricos*

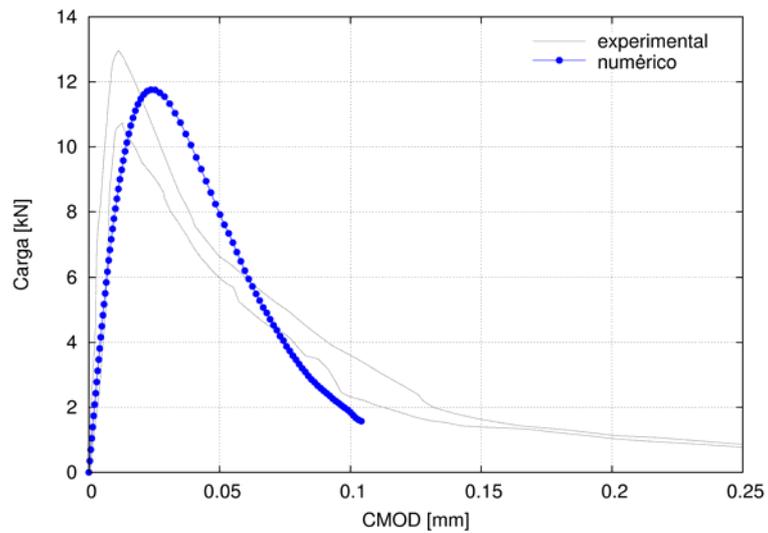
En Gálvez et al. (2002) se simulan estas probetas con un modelo numérico basado en el enfoque de la fisura cohesiva para fracturas en modo mixto. Este modelo utiliza un criterio similar al propuesto en el presente trabajo para predecir la trayectoria de la fisura, trazando una dirección perpendicular a la dirección principal mayor de las tensiones.

En la figura 5.22 se observa que la concordancia obtenida en el tipo 2 es prácticamente perfecta, al igual que los resultados obtenidos con el modelo de daño localizado propuesto en el presente trabajo (figura 5.19). La trayectoria obtenida para el tipo 1 por Gálvez y

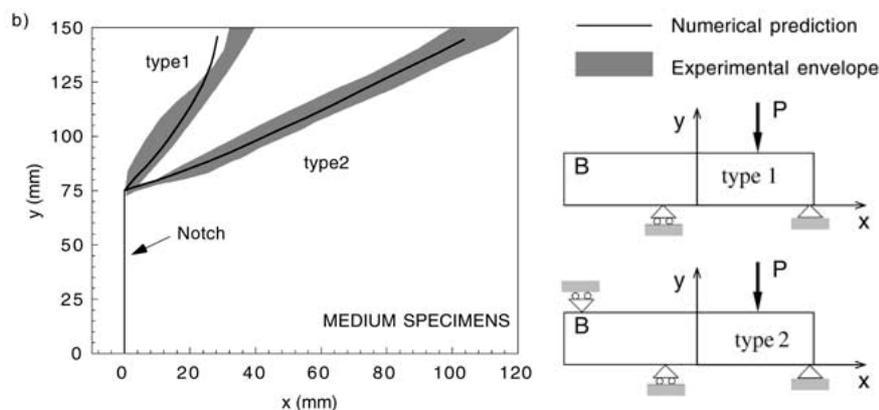
colaboradores tiene una buena tendencia al principio, pero cuando la fisura ha alcanzado aproximadamente un 75% de su desarrollo tiende a una dirección vertical. A destacar que esta misma tendencia se observa en los resultados mostrados en la figura 5.19.



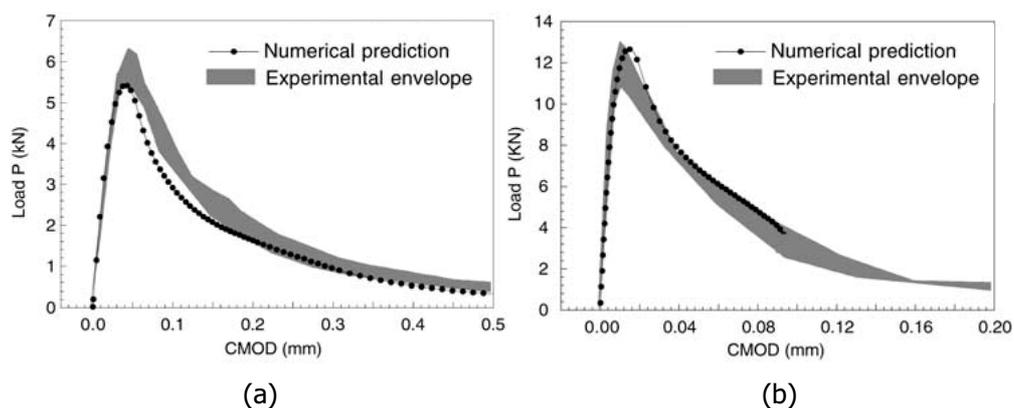
**Figura 5.20** Carga vs. abertura de la entalla (CMOD) para la probeta tipo 1



**Figura 5.21** Carga vs. abertura de la entalla (CMOD) para la probeta tipo 2



**Figura 5.22** Trayectorias de fisura obtenidas numéricamente en Gálvez et al. (2002) para las probetas tipo 1 y tipo 2



**Figura 5.23** Curvas carga vs. abertura de la entalla (CMOD) obtenidas numéricamente en Gálvez et al. (2002) para las probetas tipo 1 (a) y tipo 2 (b)

Observando las curvas carga vs. CMOD de la figura 5.23, se aprecian también muchas semejanzas con las respuestas obtenidas con el modelo de daño localizado propuesto. La respuesta numérica de Gálvez y colaboradores para la probeta tipo 1 también alcanza la carga pico en la cota inferior de la envolvente de resultados experimentales, y presenta una menor disipación de energía durante la descarga. Por otra parte, la carga pico en el tipo 2 mostrada en la figura 5.23 se alcanza para un valor de CMOD algo mayor al experimental, y el análisis no alcanza la descarga total de la curva, llegando tan sólo a un valor de abertura de entalla entre 0.09 y 0.10 mm. Ambos fenómenos se manifiestan, en mayor o menor medida, en los resultados obtenidos con el modelo numérico propuesto en este trabajo.

# 6

## Análisis de un arco semicircular con carga asimétrica

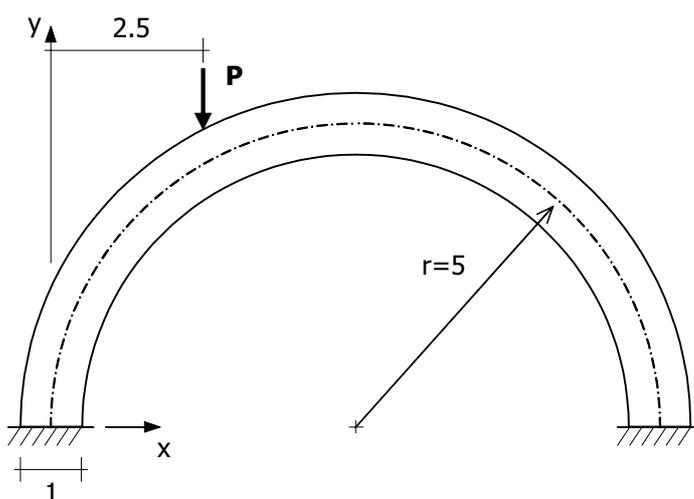
Con la finalidad de constatar la aplicabilidad del algoritmo de localización propuesto en el capítulo 5, a continuación se lleva a cabo el análisis bidimensional hasta rotura de un arco semicircular con carga asimétrica. En primer lugar se describe la geometría y condiciones de contorno del problema. Luego se muestran los resultados obtenidos del cálculo mediante el análisis límite, realizado con el fin de tener un valor de referencia de carga última y el mecanismo de colapso de la estructura. Seguidamente se efectúa el análisis estructural del arco, empleando el modelo de daño distribuido  $d+/d-$  tal como se describe en el capítulo 3.3.2. En el siguiente apartado se señalan los resultados obtenidos al utilizar el algoritmo de localización y se comparan con los obtenidos del modelo de daño distribuido. Finalmente se hace un breve estudio paramétrico relativo al modelo de daño localizado respecto a los valores de energía de fractura, resistencia a tracción y de la discretización espacial utilizada.

## 6.1 Geometría, materiales y carga

El arco semicircular tiene 5 m de radio y 1 m de espesor, con una carga puntual asimétrica y ambos apoyos completamente empotrados. La geometría, carga y condiciones de apoyo se describen en la figura 6.1. Para caracterizar al material se suponen parámetros posibles en una estructura histórica de obra de fábrica. Así, se toma un peso específico de  $2.100 \text{ kg/m}^3$ , un módulo de Young de 5 GPa y un coeficiente de Poisson igual a 0.2. Se emplea el modelo constitutivo expuesto en la sección 3.3.2, utilizando los siguientes parámetros: resistencia a tracción 0.2 MPa y energía de fractura  $10 \text{ J/m}^2$ . Nótese que ambos valores corresponden aproximadamente a la décima parte de los parámetros típicos del hormigón. Todos los análisis se efectúan bajo las hipótesis de deformación plana, con un espesor unitario.

El análisis por el método de los elementos finitos está dividido en dos intervalos. En el primero se analiza la estructura bajo peso propio, y en el segundo se aplica la carga puntual  $P$  (ver figura 6.1). La aplicación de la carga puntual  $P$  se efectúa tanto por control de cargas como por control de desplazamientos verticales (con la componente horizontal libre) hasta que se alcanza el colapso. Esta acción se aplica de manera incremental, con pasos de 3 kN para el caso de control de cargas, y de 0.05 mm para el caso de control de desplazamientos.

La malla de elementos finitos está compuesta por 11.324 elementos triangulares de tres nodos, con un total de 5.989 nodos. La malla es considerablemente fina, con un valor promedio de tamaño de elemento de unos 5 cm.



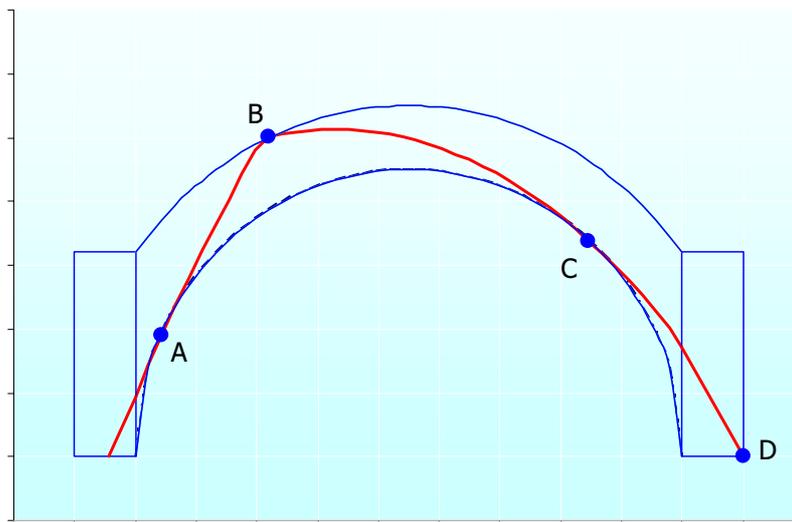
**Figura 6.1** Geometría y dimensiones [m] del arco semicircular

## 6.2 Análisis límite

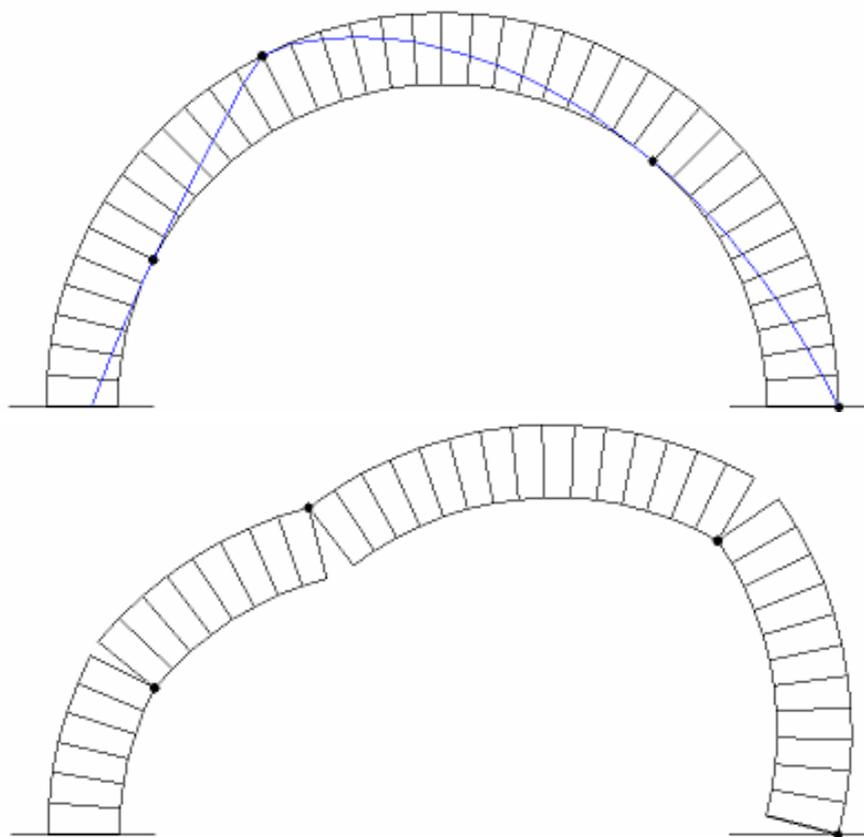
Previamente al análisis numérico de la estructura se hicieron dos cálculos, a través del método de análisis límite (comentado en el capítulo 2), para disponer de un valor de referencia de la carga última y una caracterización del mecanismo de colapso. El primero de ellos se llevó a cabo a través de una hoja de cálculo diseñada para el estudio de arcos semicirculares. En el otro cálculo se empleó el programa de análisis límite computacional RING (v. 1.5). En ambos casos se obtiene una carga última alrededor de los 150 kN. Asimismo, la ubicación de las cuatro rótulas que generan el mecanismo de colapso coincide casi totalmente, tal como se muestra en las figuras 6.2 y 6.3. Las rótulas se identifican con las letras A a la D, de acuerdo a la figura 6.2. Las coordenadas horizontales de cada rótula, según el sistema de referencia usado en la figura 6.1, se resumen en la tabla 6.1.

| Rótula | Coordenada X [m] |
|--------|------------------|
| A      | 0.95             |
| B      | 2.50             |
| C      | 7.95             |
| D      | 10.50            |

**Tabla 6.1** Ubicación de las rótulas en el mecanismo de colapso



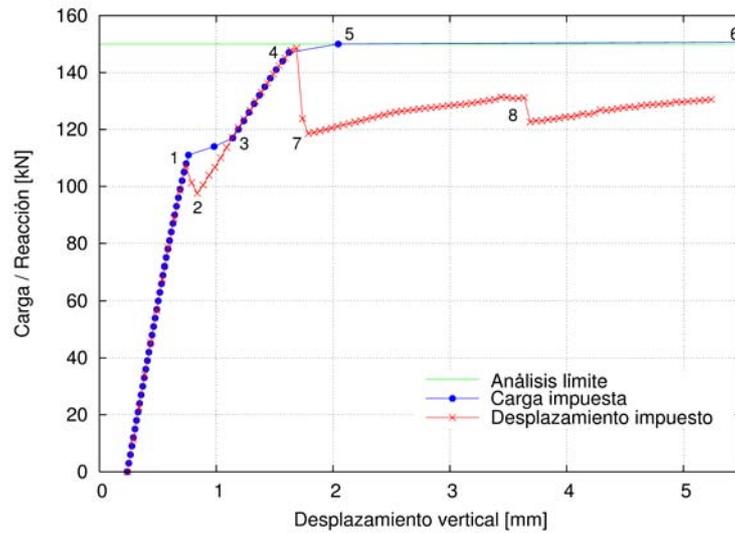
**Figura 6.2** Rótulas y línea de empujes obtenidas con el Método de Análisis Límite



**Figura 6.3** Rótulas, línea de empujes y deformada obtenidas con el programa RING

### 6.3 Modelo de daño distribuido

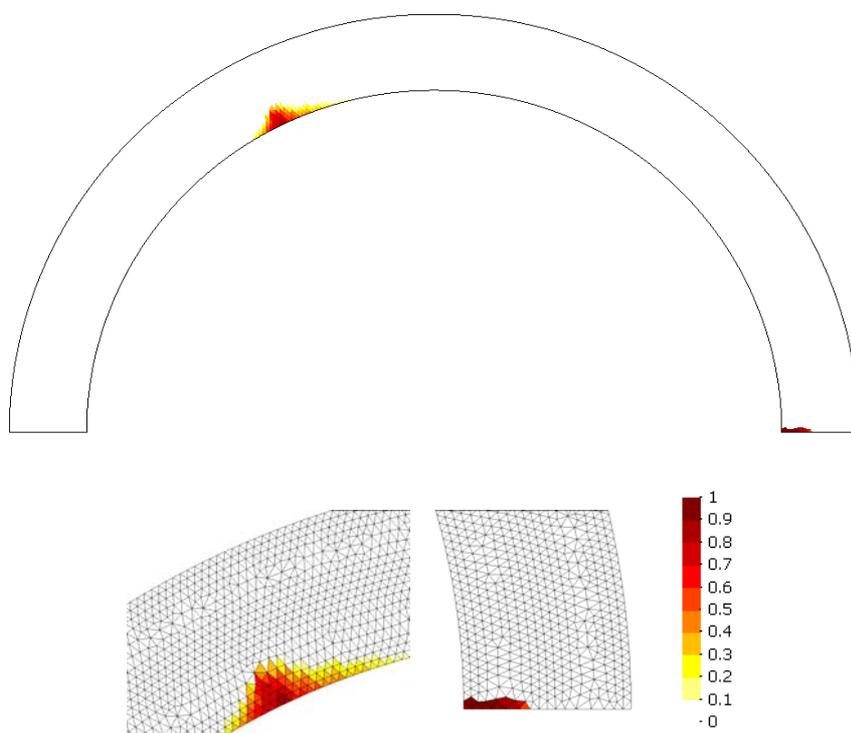
En este apartado se incluyen los resultados de los análisis con imposición de cargas y con imposición de desplazamientos empleando el modelo de daño distribuido. En la figura 6.4 se muestra la curva de carga (o reacción) vs. desplazamiento vertical en el punto de aplicación de  $P$  de cada caso. De esta figura destaca que la carga última es de aproximadamente 150 kN, coincidiendo con el valor obtenido mediante el análisis límite. Para el caso con carga impuesta se aprecia el colapso de la estructura al aumentar repentinamente el valor del desplazamiento vertical en el momento de alcanzar la carga última. Por su parte, el análisis con desplazamiento impuesto permite estudiar el comportamiento post-pico así como los procesos de descarga y recarga que se presentan. A continuación se hace un estudio detallado de cada caso, observando la creación y evolución de cada una de las fisuras que se forman.



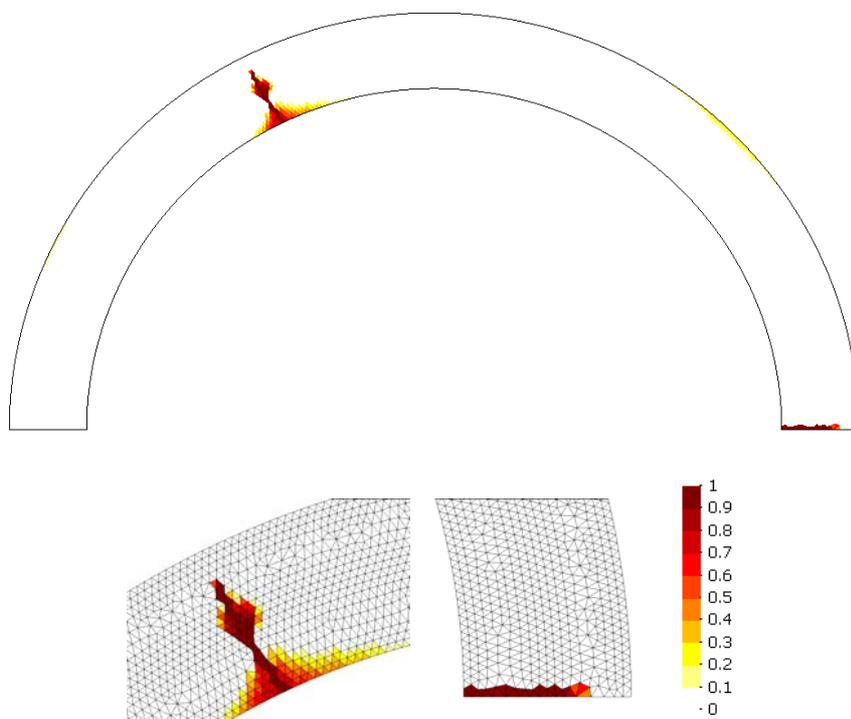
**Figura 6.4** Curvas carga (o reacción) vs. desplazamiento vertical en el punto de aplicación de P (modelo de daño distribuido)

### 6.3.1 Análisis con control de cargas

Ya desde prácticamente el inicio de la aplicación de la carga se empiezan a dañar los elementos ubicados en las zonas de máxima tracción, donde posteriormente se formarán las rótulas. Sin embargo, la respuesta de la estructura es lineal hasta que se alcanza una carga de unos 110 kN (punto 1 en la figura 6.4), donde ocurre un incremento de la zona dañada de manera repentina, llegando al punto 3 de la misma figura. En las figuras 6.5 y 6.6 se muestra la distribución del daño antes y después de este evento, respectivamente. Nótese que el cambio de una situación a la siguiente (punto 1 a punto 3) ocurre en sólo dos incrementos de carga. En los detalles de las zonas dañadas se muestra la malla de elementos finitos, para apreciar el tamaño de la discretización. Comparando los detalles de ambas figuras se observa que las fisuras B y D evolucionan con una tendencia claramente radial, a pesar de cierta dispersión debida a la misma naturaleza distribuida del modelo de daño empleado.

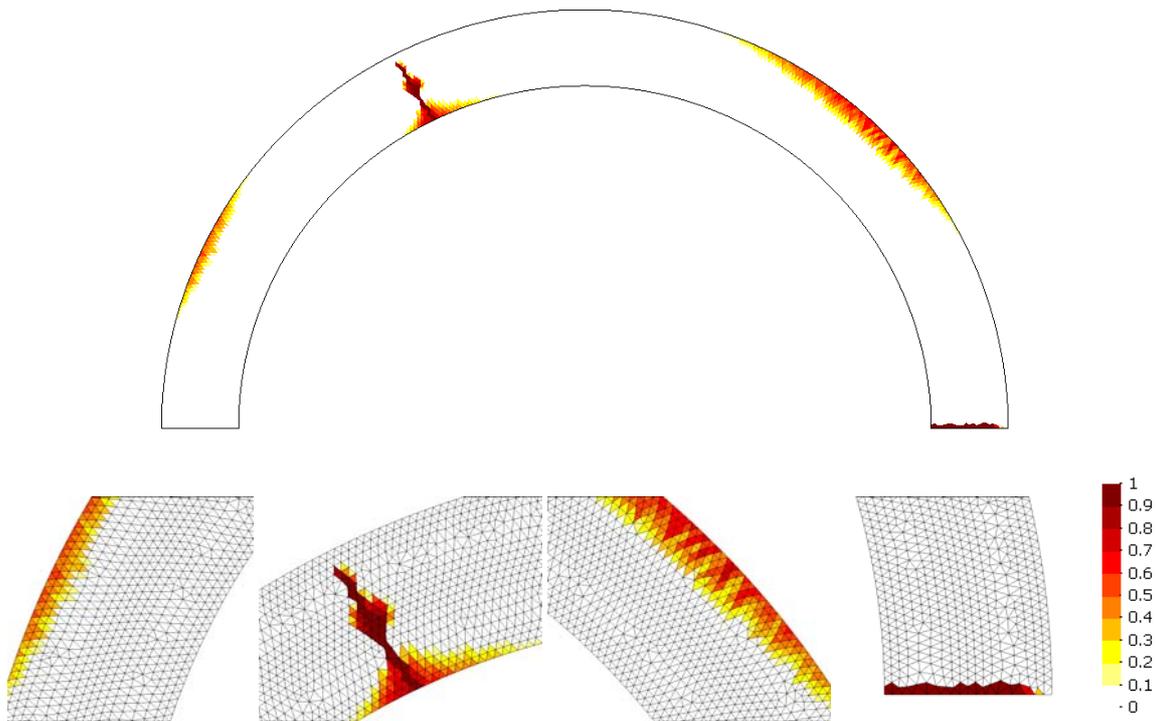


**Figura 6.5** Daño en el estado de carga 1 de la figura 6.4. Detalle de rótulas B y D.



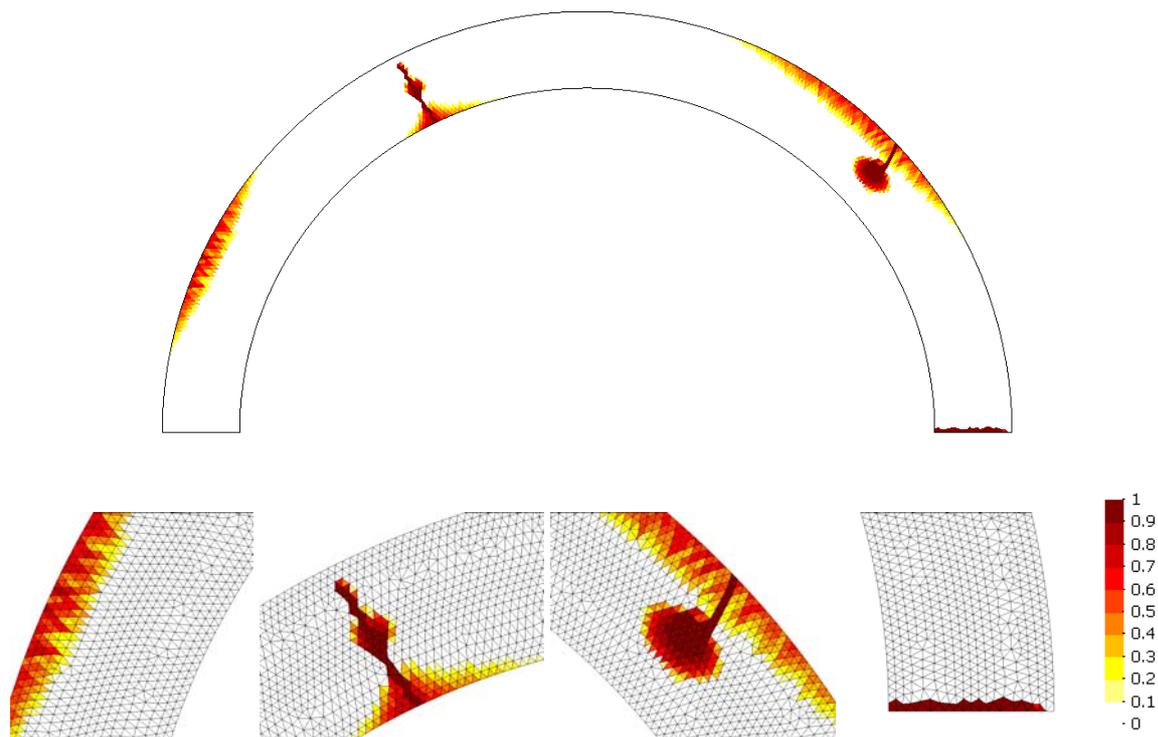
**Figura 6.6** Daño en el estado de carga 3 de la figura 6.4. Detalle de rótulas B y D.

A partir del estado de carga 3 (figura 6.4) existe una evolución paulatina del daño, hasta alcanzar el punto 4, cuya distribución de fisuras se muestra en la figura 6.7. En este punto se observa que las fisuras existentes (B y D) han seguido evolucionando radialmente, mientras que en las zonas A y C existe cierto daño distribuido, pero sin indicios de la formación de rótulas.

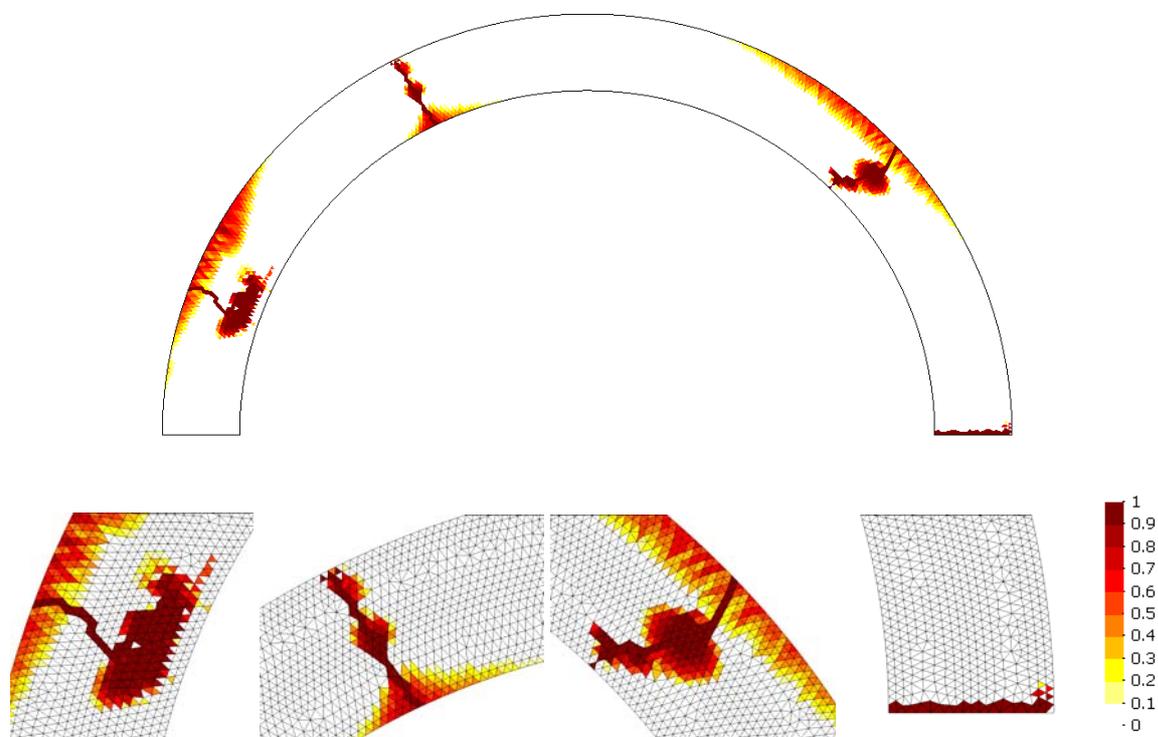


**Figura 6.7** Daño en el estado de carga 4 de la figura 6.4. Detalle de rótulas A, B, C y D.

Luego, en los dos pasos de carga siguientes (puntos 5 y 6) se desarrollan de manera brusca las fisuras C y A, respectivamente. La figura 6.8 muestra la distribución del daño en la estructura en el primero de estos estadios. En ella se aprecia cierta tendencia a la creación de una fisura radial en C, pero hacia el eje de la sección el daño se dispersa formando una especie de bulbo. En la figura 6.9, que muestra la distribución del daño en el momento del colapso, se observa la creación repentina de la rótula A. Allí ocurre un fenómeno parecido al anterior, con la formación de una fisura más o menos localizada, que se dispersa al acercarse al eje de la sección. Además, se observa que en las otras tres rótulas la sección ha dañado completamente, lo que provoca el colapso global del arco.

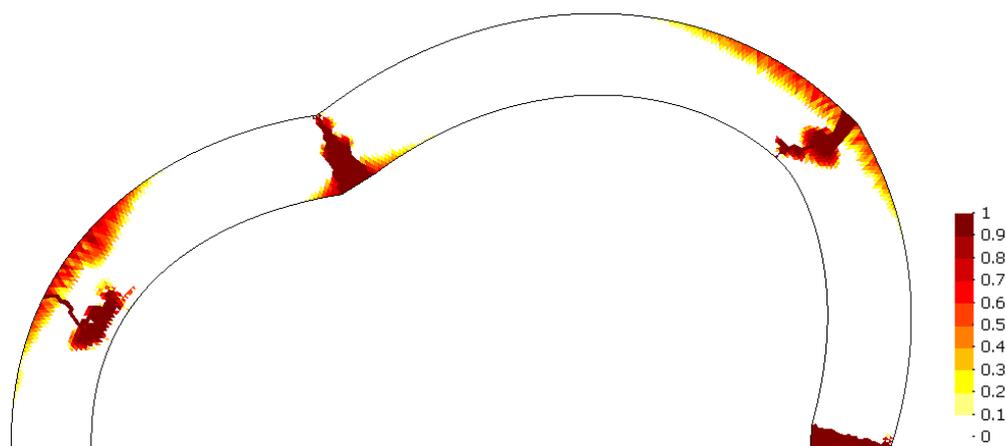


**Figura 6.8** Daño en el estado de carga 5 de la figura 6.4. Detalle de rótulas A, B, C y D.



**Figura 6.9** Daño en el estado de carga 6 (colapso) de la figura 6.4. Detalle de rótulas A, B, C y D.

Finalmente, en la figura 6.10 se muestra el mecanismo de colapso de la estructura. Las fisuras B y D presentan una mejor localización del daño y, por tanto, se observa claramente la rotación de las caras de la fisura respecto al punto de compresión de la rótula. En la fisura C el daño se reparte, no apreciándose un punto claro alrededor del cual rotan las caras de la fisura. En el punto A la rótula no ha tenido oportunidad de formarse como tal, ya que el fallo total de la sección en las otras tres fisuras ha causado el colapso de la estructura.

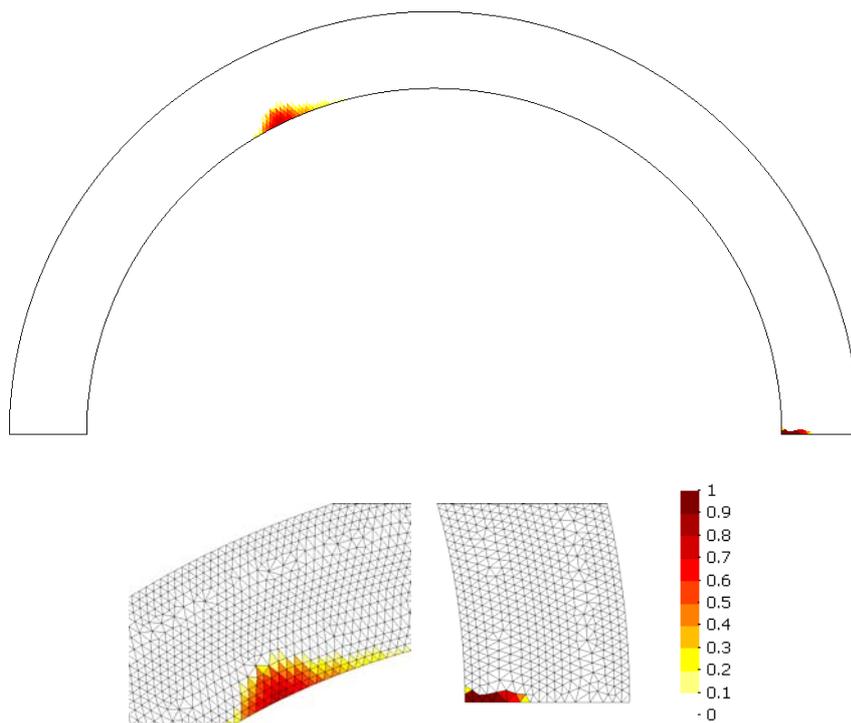


**Figura 6.10** Mecanismo de colapso (modelo de daño distribuido con carga impuesta)

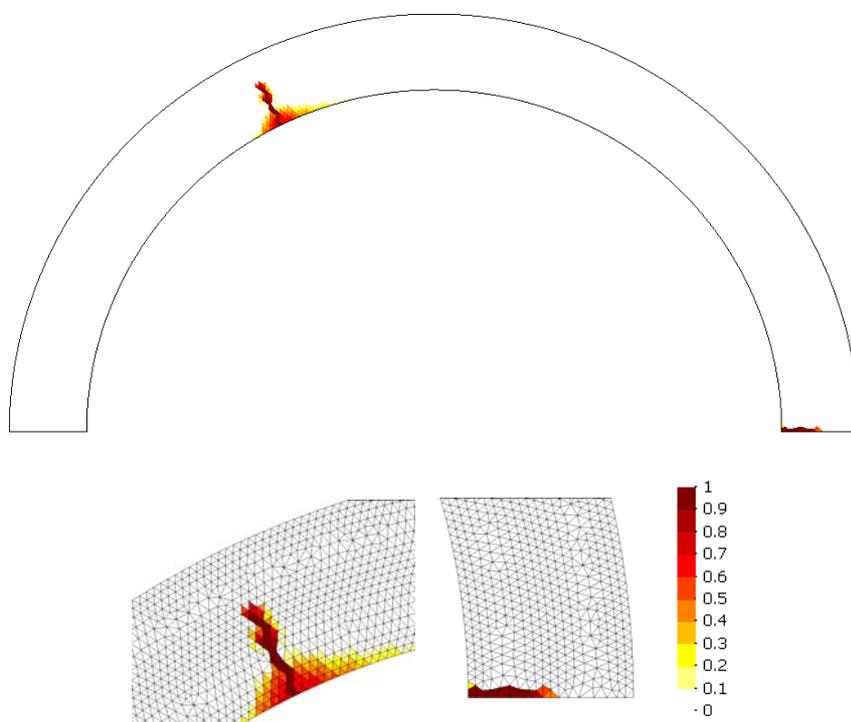
De este análisis se puede concluir que el modelo de daño distribuido puede reproducir aproximadamente el mecanismo de colapso que se forma, así como la carga última que soporta el arco. Por otro lado, la distribución del daño dista de representar la formación de fisuras localizadas, lo cual es esperable dada la naturaleza del modelo de daño utilizado. Además, las fisuras se crean de manera brusca, causando saltos en la curva carga-desplazamiento.

### 6.3.2 Análisis con control de desplazamientos

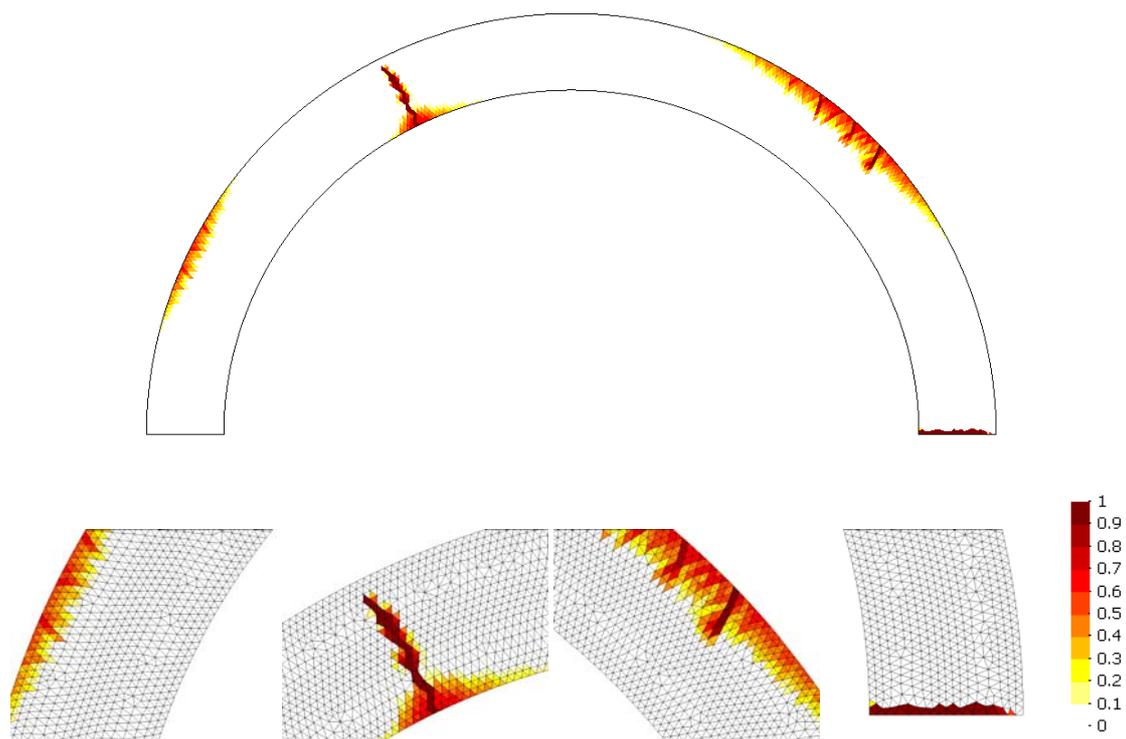
Al igual que en el análisis anterior, el daño se comienza a formar a niveles muy bajos de carga y la respuesta de la estructura es prácticamente lineal hasta alcanzar una carga de 110 kN aproximadamente. La figura 6.11 muestra la situación de las rótulas en ese paso, con daño leve en los puntos B y D, de manera muy similar al caso con control de cargas (figura 6.5). El control por desplazamientos permite detectar la descarga que ocurre posteriormente (puntos 1 a 2 en la figura 6.4) durante el desarrollo de las fisuras B y D. La figura 6.12 muestra el daño en la estructura tras esta descarga, con ambas fisuras presentando una tendencia radial.



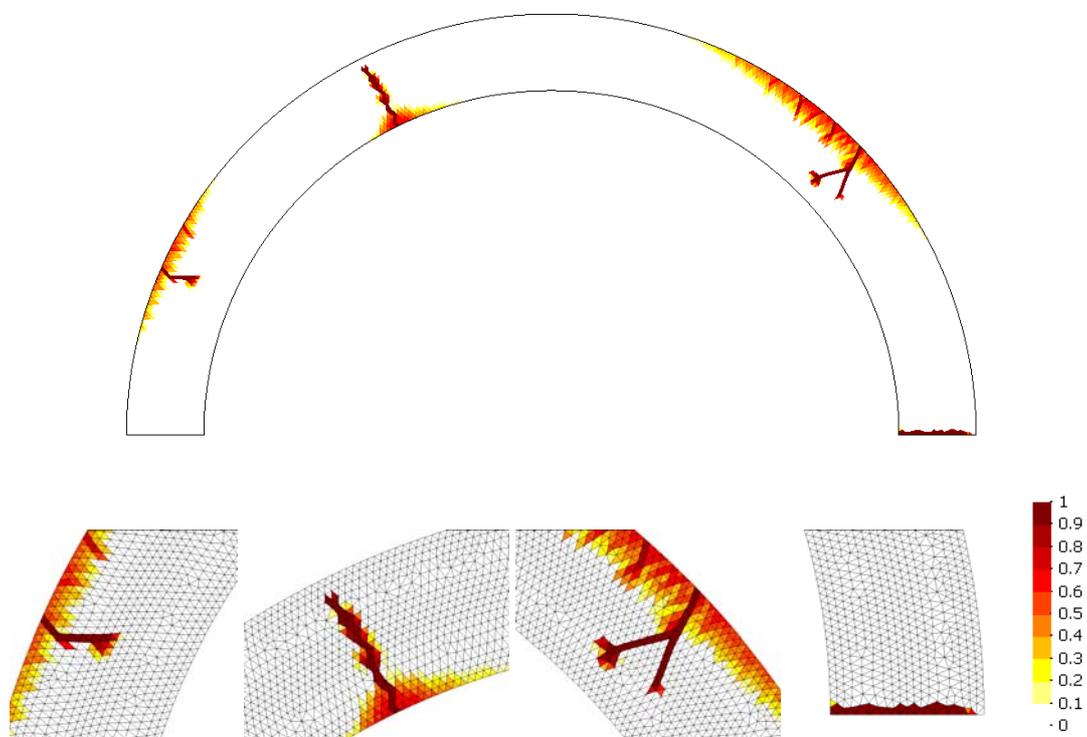
**Figura 6.11** Daño en el estado de carga 1 de la figura 6.4. Detalle de rótulas B y D.



**Figura 6.12** Daño en el estado de carga 2 de la figura 6.4. Detalle de rótulas B y D.



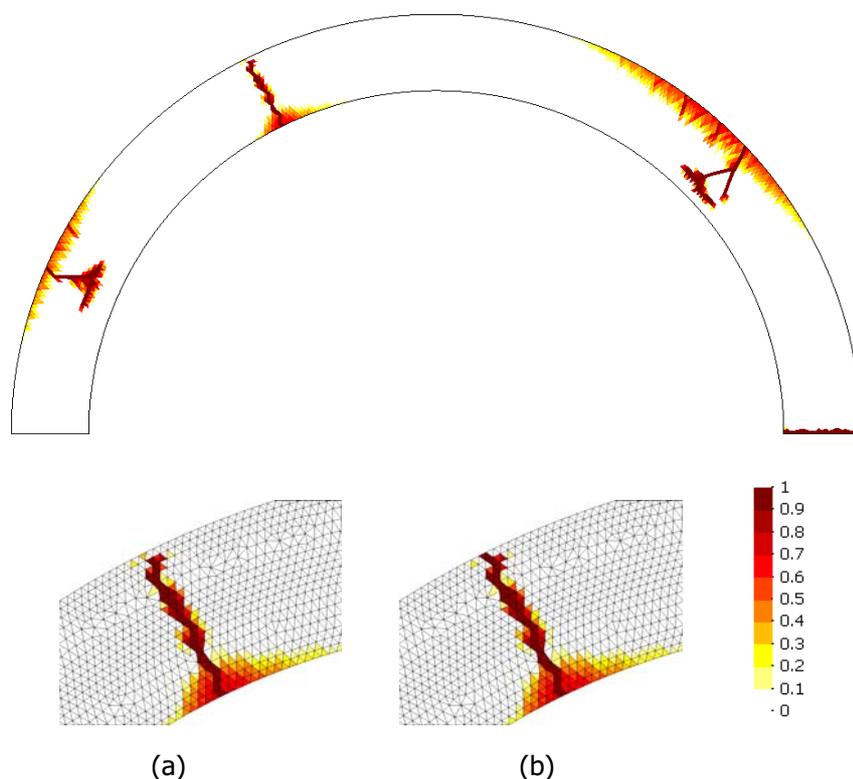
**Figura 6.13** Daño en el estado de carga 4 de la figura 6.4. Detalle de rótulas A, B, C y D.



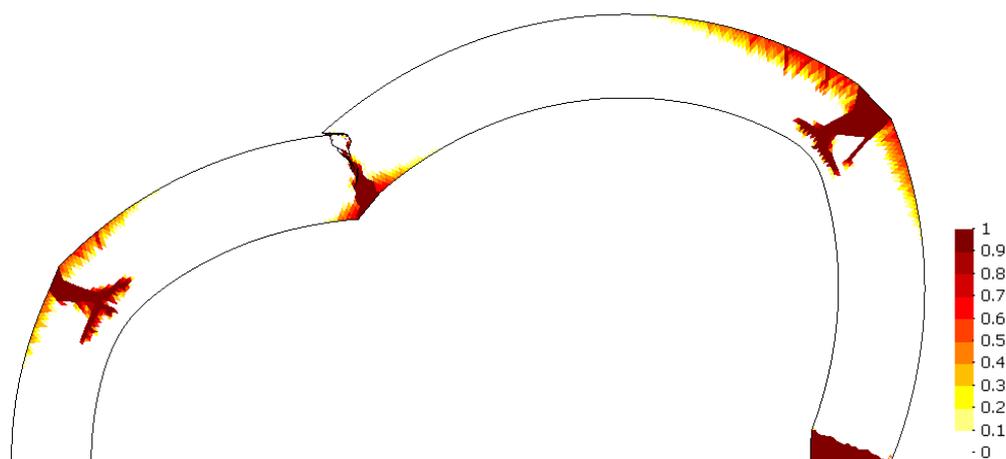
**Figura 6.14** Daño en el estado de carga 7 de la figura 6.4. Detalle de rótulas A, B, C y D.

Entre los estados de carga 2 y 4 de la figura 6.4 el daño evoluciona hasta alcanzar la distribución mostrada en la figura 6.13. Las fisuras B y D son radiales, y la primera de ellas presenta menos dispersión que su equivalente del análisis con carga impuesta (figura 6.7). La solución, pues, depende del camino seguido para llegar a ella. Luego ocurre otra descarga (hasta el punto 7), esta vez debida a la creación repentina de las fisuras A y C, tal como se muestra en la figura 6.14. Nótese que la propagación de ambas fisuras sigue la orientación de los elementos finitos en la malla, en lugar de hacerlo de forma radial. Aquí se pone de manifiesto la dependencia espuria de la discretización espacial en los resultados con el modelo de daño distribuido que se discute en los capítulos 4 y 5.

A partir de este punto el problema evoluciona con una pequeña rigidez remanente, debida a algunos elementos que aún permanecen sin dañar ubicados en zonas comprimidas de la estructura. Sin embargo, después de incrementar aún más el desplazamiento impuesto, el daño sigue evolucionando y se produce otra descarga (punto 8). Este salto en particular ocurre al terminarse de formar la rótula B, tal como se muestra en la figura 6.15, donde se muestran los estadios antes y después del salto en la respuesta. En la figura se aprecia también cómo han evolucionado las fisuras A y C en la dirección normal a la sección, sin que ello afecte apenas a la rigidez de la respuesta general de la estructura.



**Figura 6.15** Daño en el estado de carga 8 de la figura 6.4. Detalle de rótula B (a) antes del salto (b) después del salto.



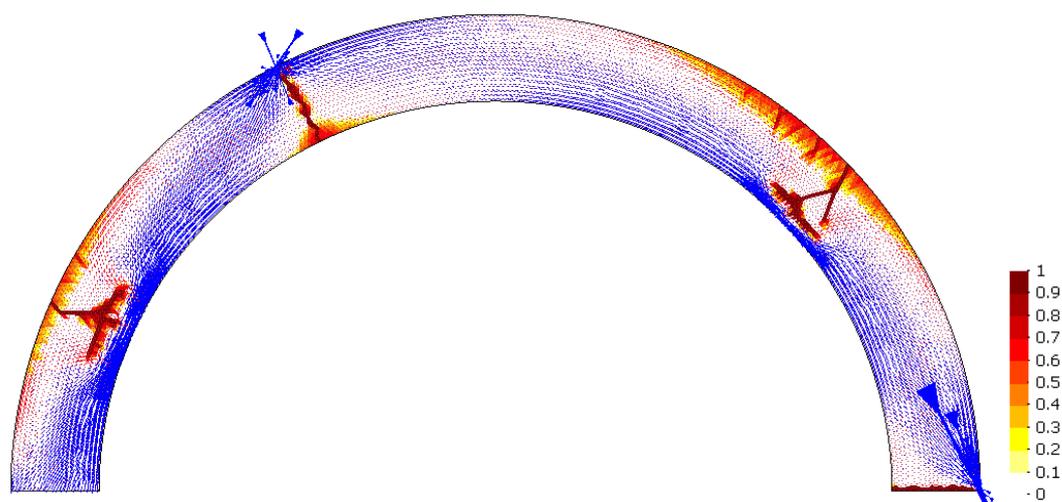
**Figura 6.16** Mecanismo de colapso (modelo de daño distribuido con desplazamiento impuesto)

La figura 6.16 muestra la deformada alcanzada al final del análisis, donde se aprecia el mecanismo de colapso de la estructura. Obviamente, en este caso la formación del mecanismo no es completa, por el mismo criterio de imposición de desplazamientos que impide que la estructura se desplome.

Es importante resaltar el hecho de que la curva carga-desplazamiento tiende a estabilizarse hacia un valor de 130 kN, si se continúa el análisis hasta alcanzar altos valores de desplazamiento vertical impuesto (resultados no mostrados aquí). Esta tendencia asintótica (en lugar de una descarga total de la curva) se debe al estado de flexión compuesta con compresión presente en las secciones de las rótulas de la estructura. En el apéndice A se justifica esta afirmación mediante el estudio de una viga empotrada.

Finalmente, en la figura 6.17 se presentan los vectores de tensiones principales de compresión en cada elemento, escalada su longitud de acuerdo a su magnitud. En esta distribución se observa claramente una ubicación de la línea de presiones similar a la obtenida con el método del análisis límite.

En conclusión, el análisis con el modelo de daño distribuido bajo desplazamientos impuestos aproxima correctamente el valor de la carga de colapso, además de poder simular el comportamiento post-pico de la estructura. Las fisuras se forman aproximadamente en la misma ubicación que las rótulas obtenidas con el análisis límite. Sin embargo, la distribución del daño adolece de una dependencia espuria de la orientación de la malla.



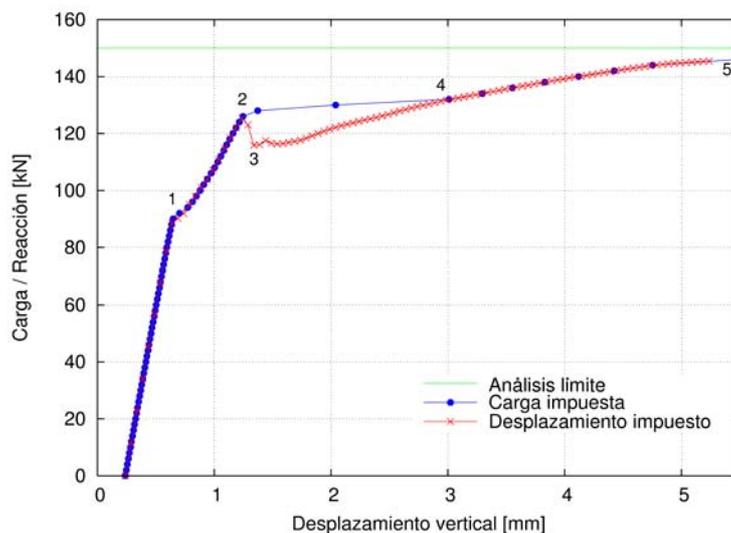
**Figura 6.17** Vectores de tensiones de compresión en la estructura dañada

## 6.4 Modelo de daño localizado

Como paso previo a la aplicación del modelo de daño localizado descrito en el capítulo 5, se hace un análisis en el que la dirección de las fisuras (radiales en este caso) se define *a priori*. De esta manera se consiguen mecanismos de colapso equivalentes a los obtenidos mediante el método del análisis límite. Estos resultados sirven de referencia para comparar con los que se obtienen del análisis con el modelo propuesto sin imposiciones *a priori*, los cuales se exponen en el apartado 6.4.2.

### 6.4.1 Análisis con dirección de fisuras predefinida

A continuación se presentan los resultados obtenidos al analizar el arco utilizando el modelo de daño localizado con la dirección de las fisuras predefinida. Al igual que en el apartado anterior, se hacen sendos análisis para los casos con control de cargas y con control de desplazamientos. En la figura 6.18 se comparan las curvas carga (o reacción) vs. desplazamiento de ambos casos. Allí se observa que ambas curvas prácticamente coinciden, alcanzando una carga de colapso cercana a los 150 kN que se tiene de referencia. Asimismo, se pone de manifiesto que el modelo con imposición de desplazamiento vertical sirve para detectar descargas y recargas en la curva. Seguidamente se analiza la evolución de las fisuras en la estructura, paso a paso, para los dos casos estudiados.

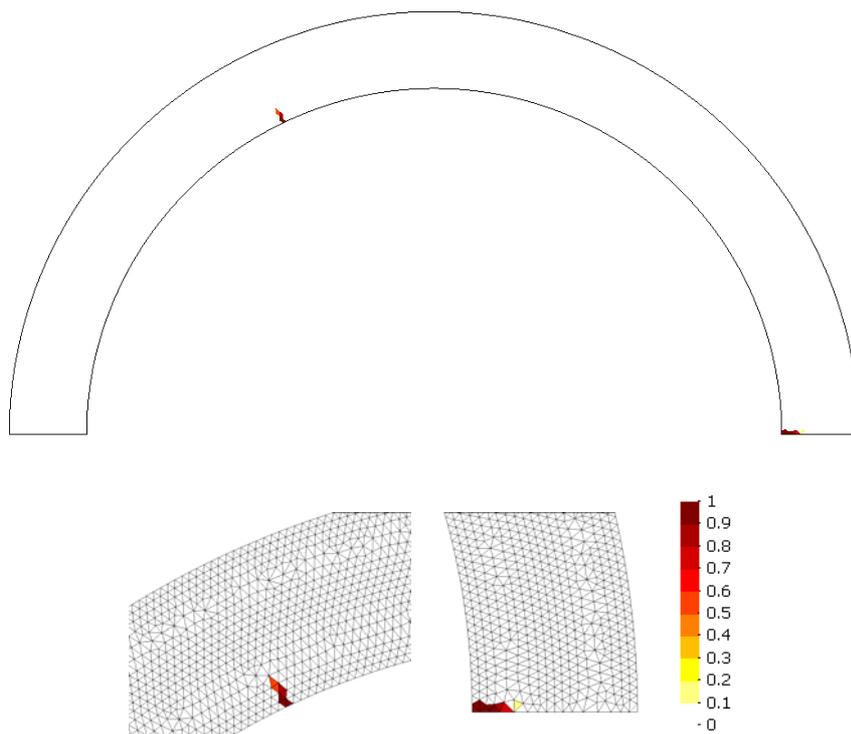


**Figura 6.18** Curvas carga (o reacción) vs. desplazamiento vertical en el punto de aplicación de P (modelo de daño localizado con fisuras radiales)

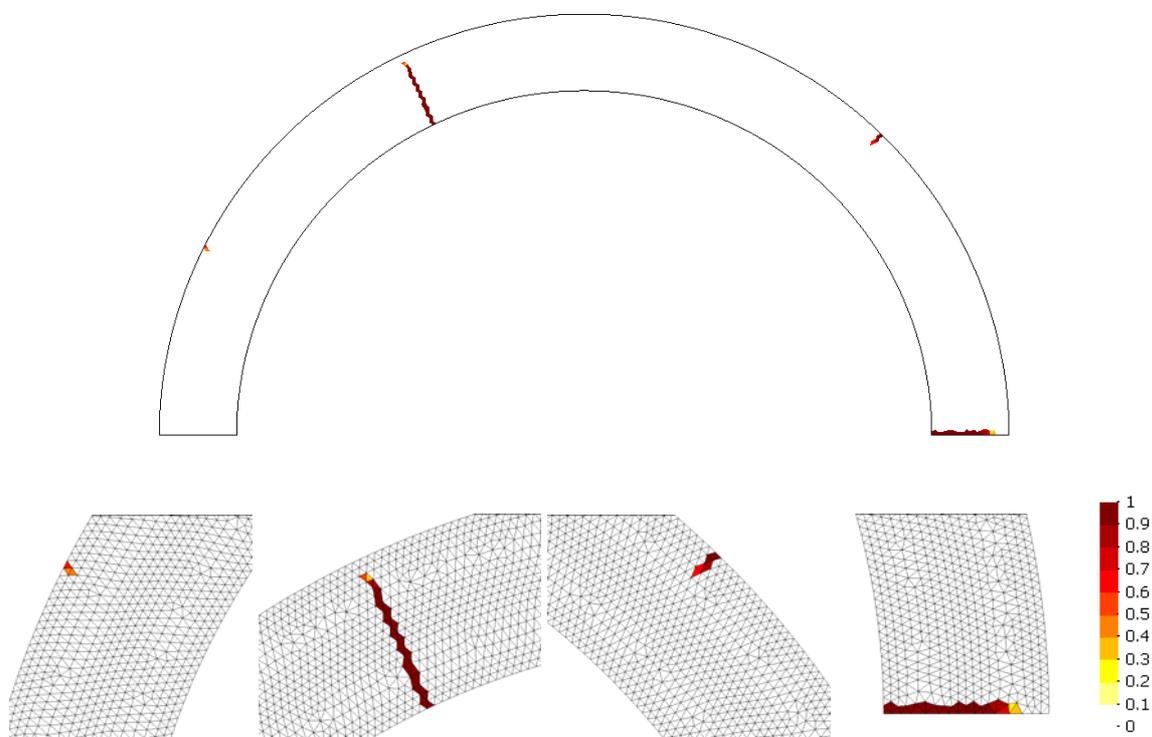
El daño empieza a formarse desde niveles muy bajos de carga en los dos casos analizados, siendo la respuesta de la estructura lineal hasta un valor de aproximadamente 90 kN (punto 1 en la figura 6.18). En este punto se ha formado el inicio de las fisuras B y D, las cuales concuerdan perfectamente en ambos casos. La figura 6.19 muestra estas fisuras.

Al seguir incrementando la carga P hasta alcanzar un valor de aproximadamente 130 kN (punto 2 de la figura 6.18) el daño en estas fisuras evoluciona de manera importante. Esta evolución es la que causa el cambio de pendiente del tramo 1-2 respecto al primer tramo de la curva. La figura 6.20 muestra el estado de las fisuras en el punto 2, que es prácticamente idéntico en los casos de control de cargas y de control de desplazamiento vertical. En esa figura también se observa el nacimiento de las fisuras A y C.

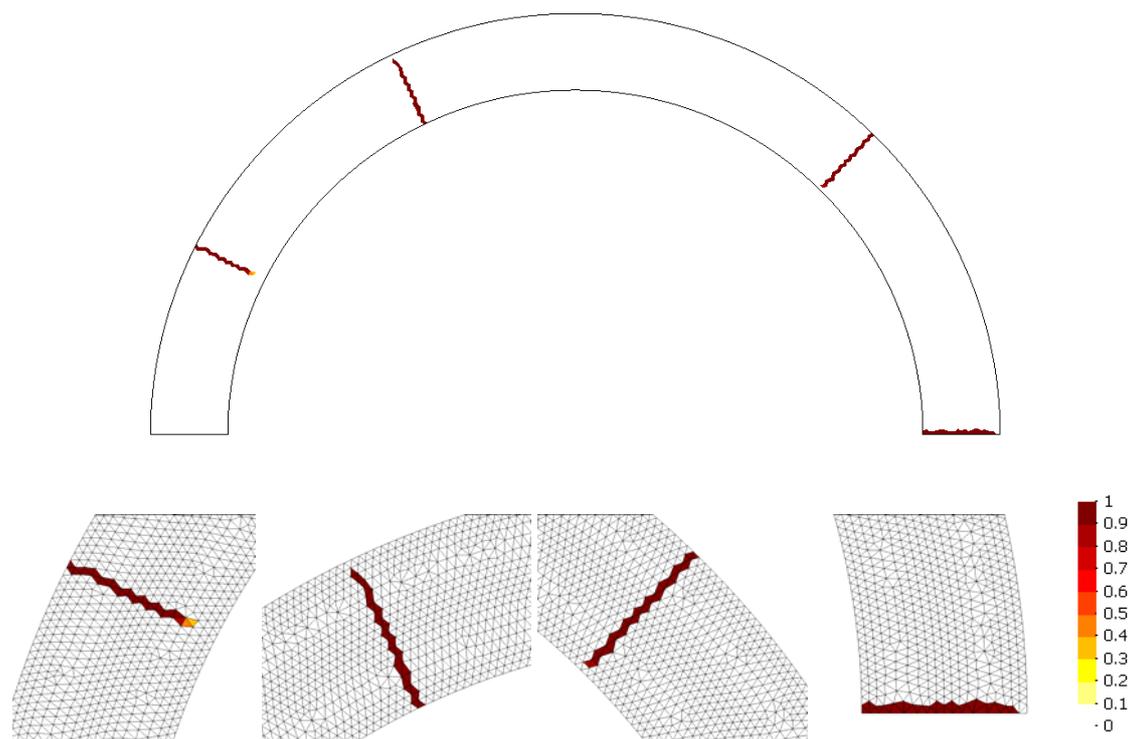
A partir de este punto las respuestas de los dos casos analizados (control de desplazamientos y control de cargas) comienzan a diferir. La respuesta de la estructura con control de cargas implica una evolución repentina de las fisuras A y C, hasta alcanzar el punto 4 de la figura 6.18. La figura 6.21 muestra el estado de las fisuras en ese punto.



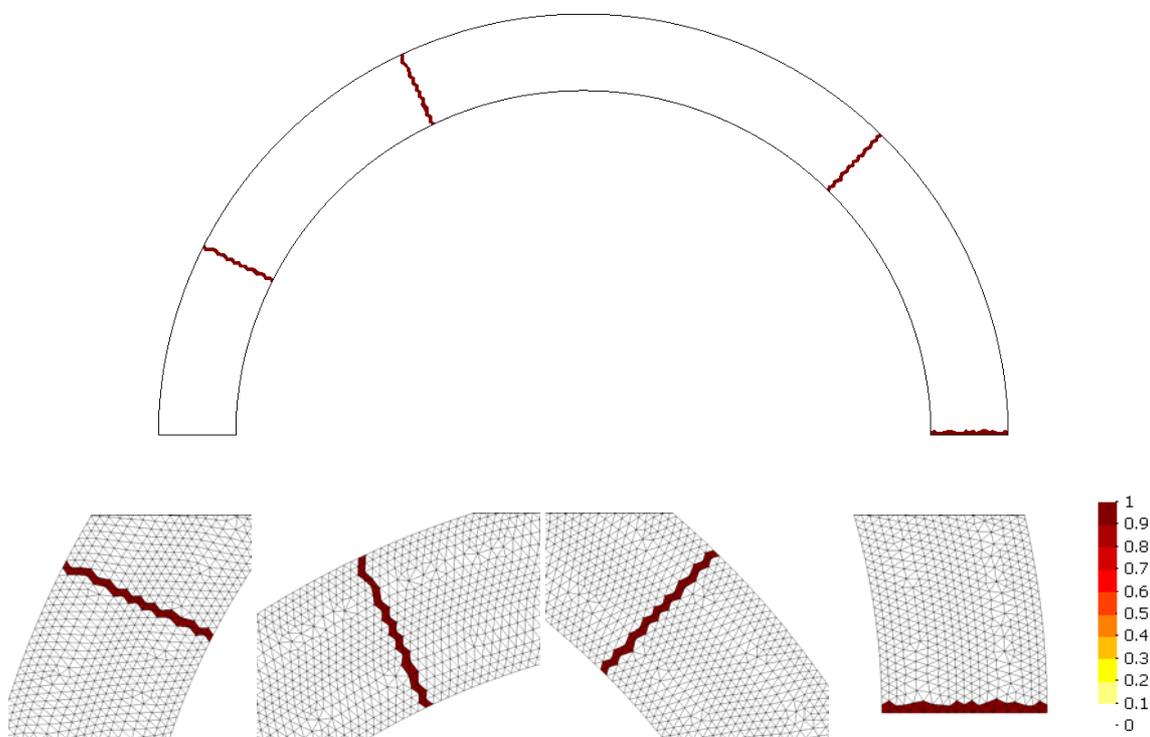
**Figura 6.19** Daño en el estado de carga 1 de la figura 6.18 para los casos de carga impuesta y de desplazamiento impuesto. Detalle de rótulas B y D.



**Figura 6.20** Daño en el estado de carga 2 de la figura 6.18 para los casos de carga impuesta y de desplazamiento impuesto. Detalle de rótulas A, B, C y D.



**Figura 6.21** Daño en el estado de carga 4 de la figura 6.18 (carga impuesta). Detalle de rótulas A, B, C y D.

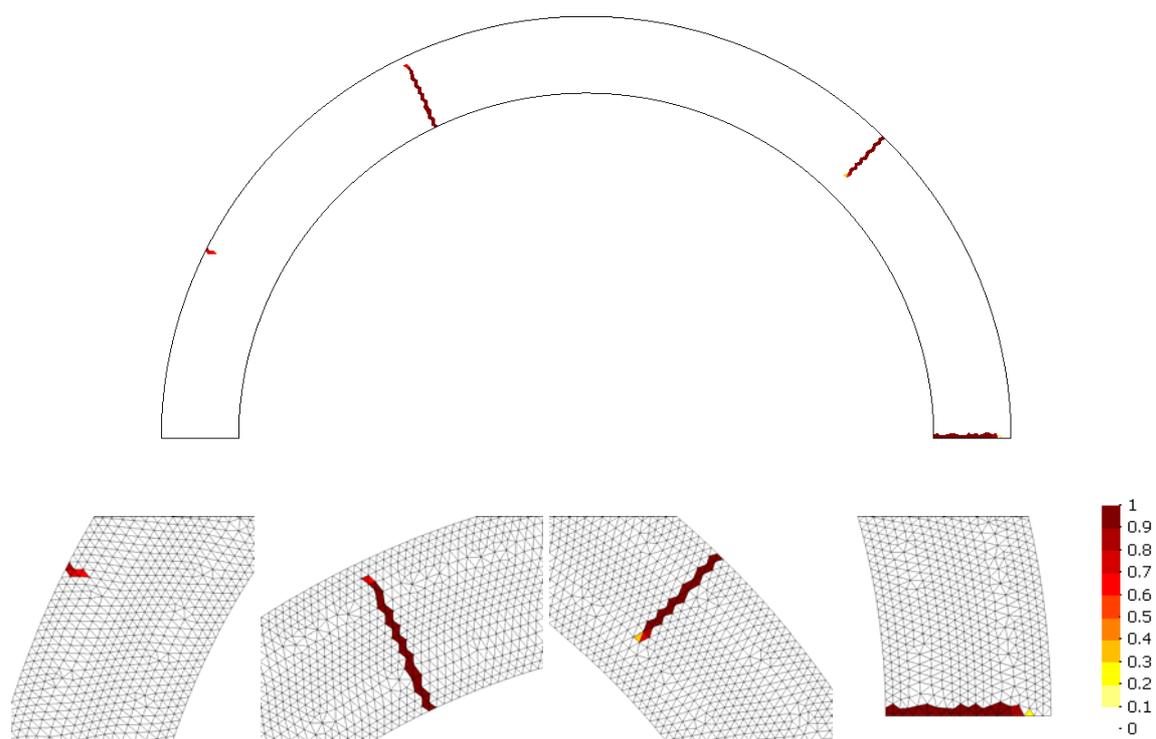


**Figura 6.22** Daño en el estado de carga 5 de la figura 6.18 (carga impuesta). Detalle de rótulas A, B, C y D.

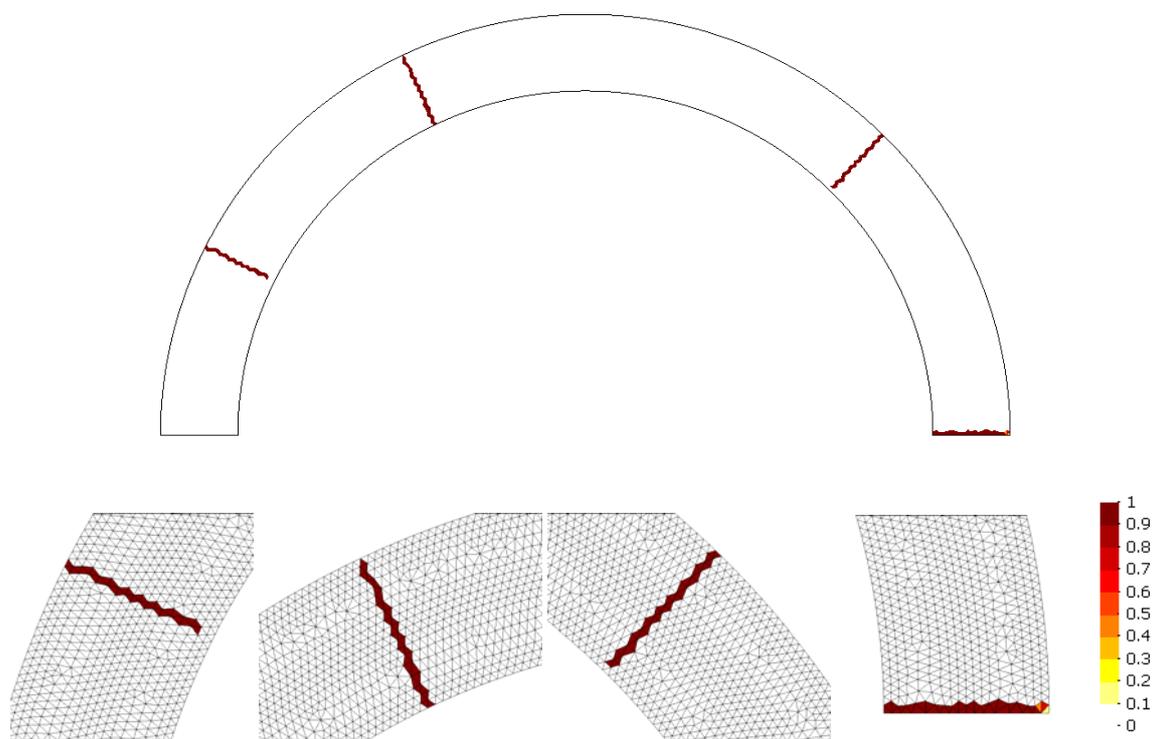
Luego, sigue una evolución relativamente lenta de las fisuras, hasta llegar al colapso completo de la estructura (punto 5 en la figura 6.18). En la figura 6.22 se muestra el estado de las fisuras al momento del colapso.

Por su parte, el modelo con control de desplazamientos consigue reproducir la descarga que ocurre después del punto 2 de la figura 6.18. Este descenso en la reacción vertical del punto de aplicación de P se debe principalmente a la formación de la rótula C, tal como se muestra en la figura 6.23, correspondiente al punto 3.

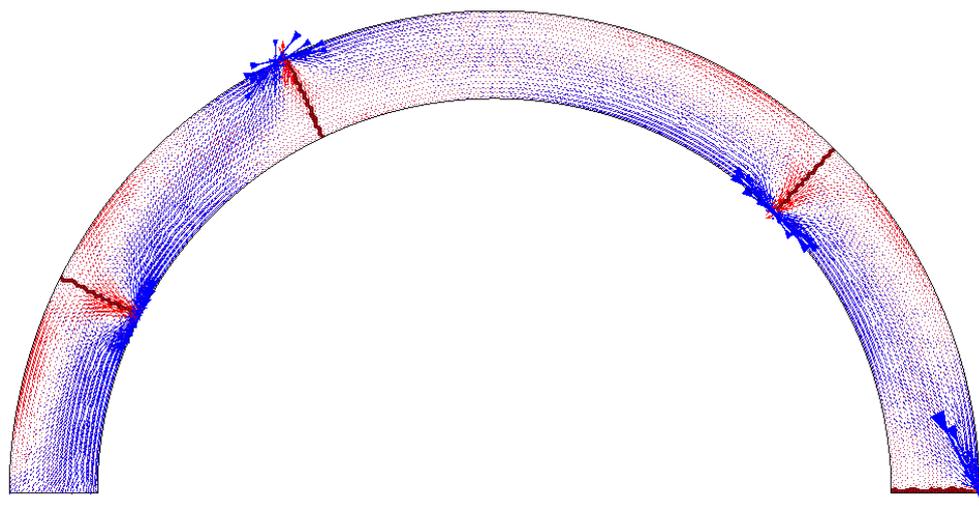
A partir del punto 3, la fisura A evoluciona lentamente, por lo que no se presentan discontinuidades en la curva reacción-desplazamiento. Asimismo, el resto de las fisuras también se propagan hasta casi alcanzar la cara opuesta de la sección. Este estadio corresponde al punto 5 de la figura 6.18 y se muestra en la figura 6.24. Allí se observa que, a diferencia del análisis con control de cargas, la estructura analizada bajo control de desplazamientos no alcanza el colapso completo, quedando algunos elementos sin dañar en la zona comprimida de las rótulas.



**Figura 6.23** Daño en el estado de carga 3 de la figura 6.18 (desplazamiento impuesto). Detalle de rótulas A, B, C y D.



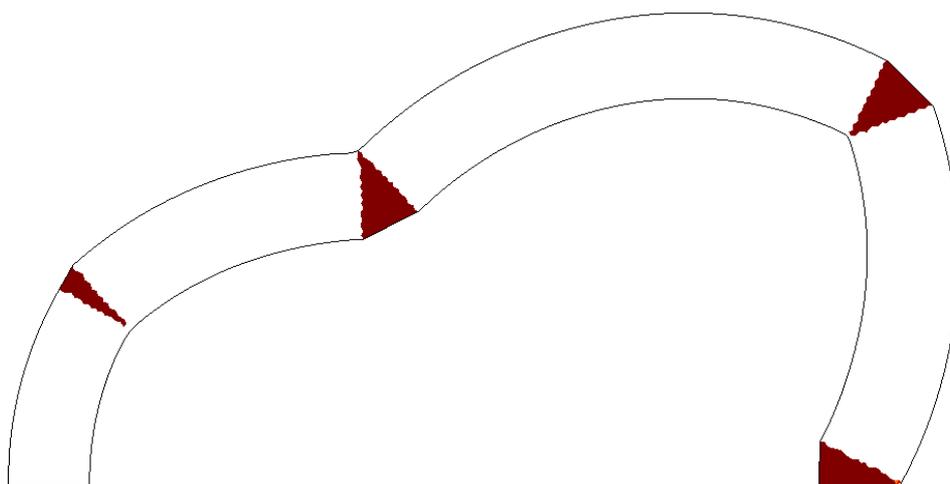
**Figura 6.24** Daño en el estado de carga 5 de la figura 6.18 (desplazamiento impuesto). Detalle de rótulas A, B, C y D.



**Figura 6.25** Vectores de tensiones de compresión en la estructura dañada

Seguidamente, se muestra la figura 6.25 con la distribución de las tensiones principales de compresión para el final del análisis bajo desplazamiento impuesto. Estas tensiones se representan con vectores que indican su magnitud (escalada) y dirección. En la figura se aprecia una tendencia similar a las líneas de presiones obtenidas en los casos de referencia mostrados al inicio de este capítulo. Las zonas comprimidas se concentran hacia los bordes del dominio en cada fisura de forma alternada, lo cual coincide con los resultados del método del análisis límite.

Finalmente, se muestra el mecanismo de colapso para los dos casos analizados, con control de cargas y con control de desplazamientos, ya que ambos son muy similares (figura 6.26). Allí se aprecian claramente los puntos alrededor de los cuales rotan las caras de las fisuras, reproduciendo de manera bastante fiel el comportamiento de las rótulas que se espera en este tipo de estructuras.



**Figura 6.26** Mecanismo de colapso (modelo de daño localizado con fisuras radiales)

Para evaluar la calidad de la respuesta obtenida con el modelo de daño localizado con dirección de fisuras impuesta se observa la ubicación de las fisuras, y se comparan con su ubicación en los modelos de referencia. Tal como se ha comentado antes, las fisuras se crean exactamente en los mismos puntos en los casos con carga impuesta y con desplazamiento impuesto.

De acuerdo con lo reflejado en la tabla 6.2, la ubicación de las fisuras concuerda bien con los resultados de referencia. Las diferencias están dentro del orden del tamaño de los elementos finitos utilizados, siendo la máxima igual a 20 cm, en la fisura C. Los otros as-

pectos del problema también presentan buenas soluciones, como por ejemplo el valor de carga última, que tiende a una asíntota de 150 kN. Es importante recordar que la dirección de las fisuras obtenida es perfectamente radial, pero esto se debe a una condición impuesta *a priori*, tal como se explica al inicio de este apartado. Para probar la capacidad real de predicción del modelo de daño localizado, a continuación se repiten los análisis anteriores, pero sin esta restricción adicional.

| Rótula | Análisis Límite | Modelo de daño localizado<br>(fisuras radiales) |
|--------|-----------------|---|
| A      | 0.95            | 0.97  |
| B      | 2.50            | 2.60  |
| C      | 7.95            | 8.15  |
| D      | 10.50           | 10.50   |

**Tabla 6.2** Coordenada horizontal [m] de las rótulas en el mecanismo de colapso

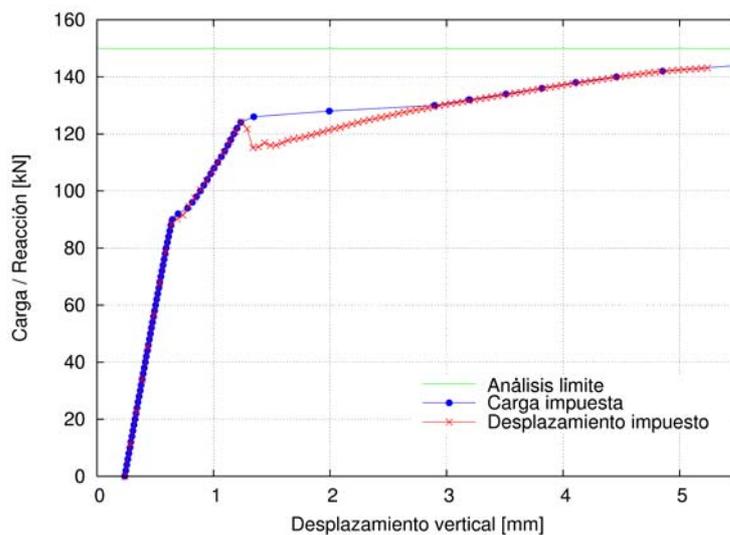
#### 6.4.2 Análisis con dirección de fisuras no predefinida

Una vez obtenidos los valores de referencia mostrados en el apartado anterior, se procede a la elaboración de dos análisis similares (control de cargas y control de desplazamientos).

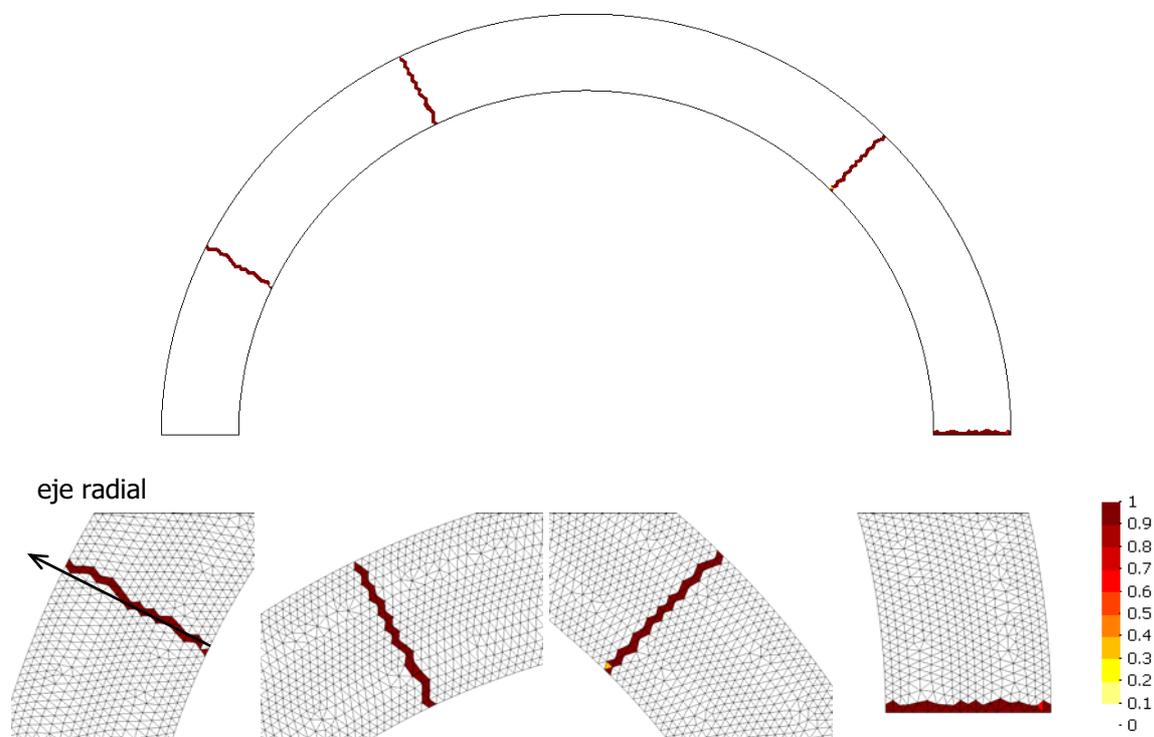
En los análisis realizados con el modelo de daño localizado se utilizó un valor de  $31^\circ$  para definir el ángulo de desviación máximo  $\bar{\alpha}$  (ver sección 5.4).

En primer lugar, la figura 6.27 muestra las curvas carga (o reacción) vs. desplazamiento. Ambas curvas prácticamente coinciden con las obtenidas a partir del modelo de daño localizado con dirección de fisuras radiales (figura 6.18). De hecho, la evolución de las fisuras es prácticamente idéntica, por lo que a continuación sólo se comentan los estados correspondientes a la carga de colapso de los dos casos estudiados.

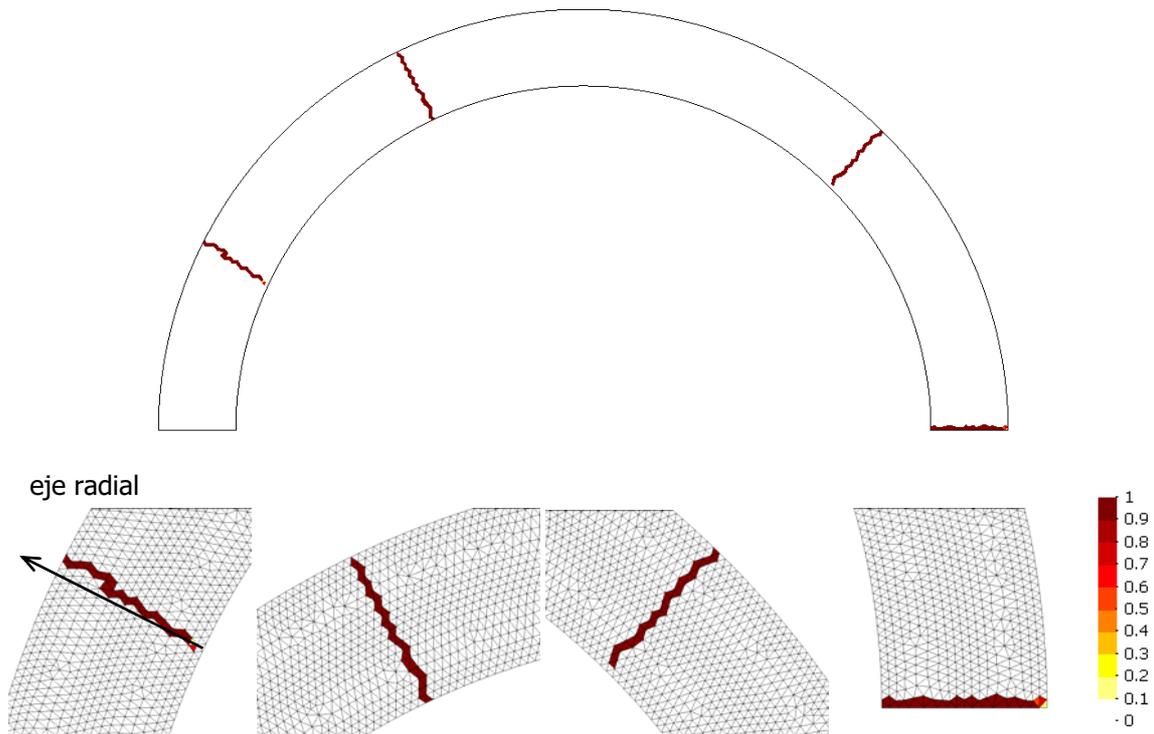
En el caso con control de cargas (figura 6.28) se tiene que las cuatro fisuras presentan direcciones radiales, si bien la fisura A presenta una leve tendencia a girar en sentido horario. Por su parte, los resultados con control de desplazamientos (figura 6.29) exhiben un comportamiento similar, incluso en la ligera rotación de la fisura A. Cabe destacar que en ambos casos esta fisura no se forma de manera exactamente recta, sino que tiene unas ligeras oscilaciones en su recorrido. Sin embargo, esto tiene poca o nula influencia en la respuesta global de la estructura.



**Figura 6.27** Curvas carga (o reacción) vs. desplazamiento vertical en el punto de aplicación de P (modelo de daño localizado)



**Figura 6.28** Daño en el estado de carga de colapso (carga impuesta). Detalle de rótulas A, B, C y D.



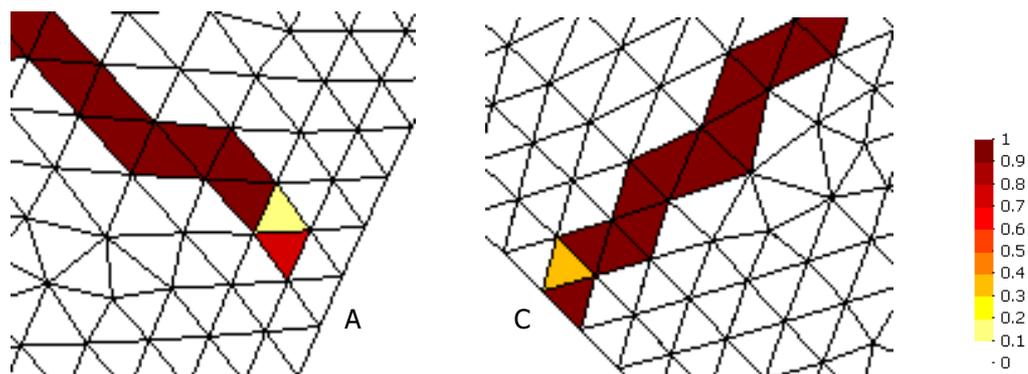
**Figura 6.29** Daño en el estado de carga de colapso (desplazam. impuesto). Detalle de rótulas A, B, C y D.

La ubicación exacta de las fisuras se compara con los resultados de referencia en la tabla 6.3. Allí se observa que en los tres casos estudiados con el modelo de daño localizado se forman las rótulas exactamente en los mismos puntos, a excepción de la rótula A. Tal como se comenta arriba, esta fisura presenta una leve desviación respecto a la dirección radial de unos centímetros.

| Rótula | Análisis Límite | Modelo de daño localizado |                   |                            |
|--------|-----------------|---------------------------|-------------------|----------------------------|
|        |                 | Fisuras radiales          | Control de cargas | Control de desplazamientos |
| A      | 0.95            | 0.97                      | 0.94              | 0.92                       |
| B      | 2.50            | 2.60                      | 2.60              | 2.60                       |
| C      | 7.95            | 8.15                      | 8.15              | 8.15                       |
| D      | 10.50           | 10.50                     | 10.50             | 10.50                      |

**Tabla 6.3** Coordenada horizontal [m] de las rótulas en el mecanismo de colapso

Estos análisis han puesto de manifiesto también un fenómeno que ocurre en las zonas comprimidas de las rótulas, cuando la estructura está cerca del colapso. En algunas rótulas se han observado discontinuidades en la hilera de elementos dañados que conforman la fisura. La figura 6.30 muestra un detalle de la zona comprimida de la rótula A del caso con desplazamiento impuesto analizado, y de la fisura C del caso con carga impuesta.



**Figura 6.30** Detalle de la zona comprimida de la fisura A en el caso de desplazamiento impuesto y de la fisura C en el caso de carga impuesta

En ambos casos ocurre un fenómeno similar. Siguiendo el orden en que los elementos se dañan para formar la fisura, llega un momento en que hay un elemento ya consolidado que ha dañado mucho menos que otro que se encuentra más adelante en el recorrido. En un modelo continuo esto no debe ocurrir, puesto que mientras más cerca esté un elemento del borde de compresiones, sus tracciones tienen que ser menores.

La explicación de estos fenómenos está en el hecho de que el estado tensional allí presente es particularmente complejo, y los elementos finitos empleados en el cálculo no son capaces de representarlo con precisión. En esa zona existen unas tensiones de compresión importantes y, al mismo tiempo, la descarga de los elementos dañados pertenecientes a la fisura hace que se transfieran tensiones de tracción hacia esa región comprimida. Este efecto hace que la orientación de los elementos finitos triangulares influya de manera espuria en la dirección y signo de las tensiones y, por tanto, en algunos casos se forman discontinuidades en la fisura. En el apéndice B se estudian los efectos de la orientación de los elementos triangulares lineales en su respuesta frente a un estado tensional similar a este.

## 6.5 Análisis de sensibilidad

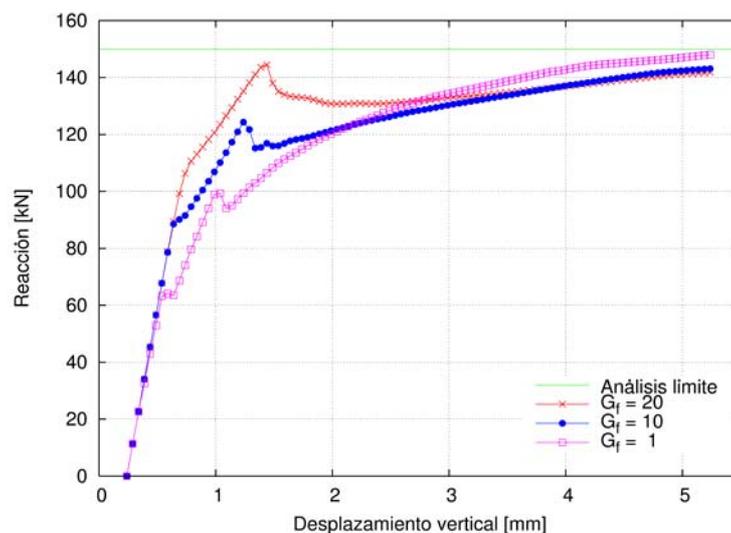
Una vez observados los resultados obtenidos, se realiza a continuación un análisis de sensibilidad del modelo frente a ciertos parámetros del problema. Estos parámetros son la energía de fractura, la resistencia a tracción del material y la discretización espacial. También se estudiaron casos variando el tamaño del incremento de seudotiempo de cálculo, en los cuales se obtuvieron prácticamente los mismos resultados y, por tanto, no se incluyen en este trabajo.

### 6.5.1 Energía de fractura

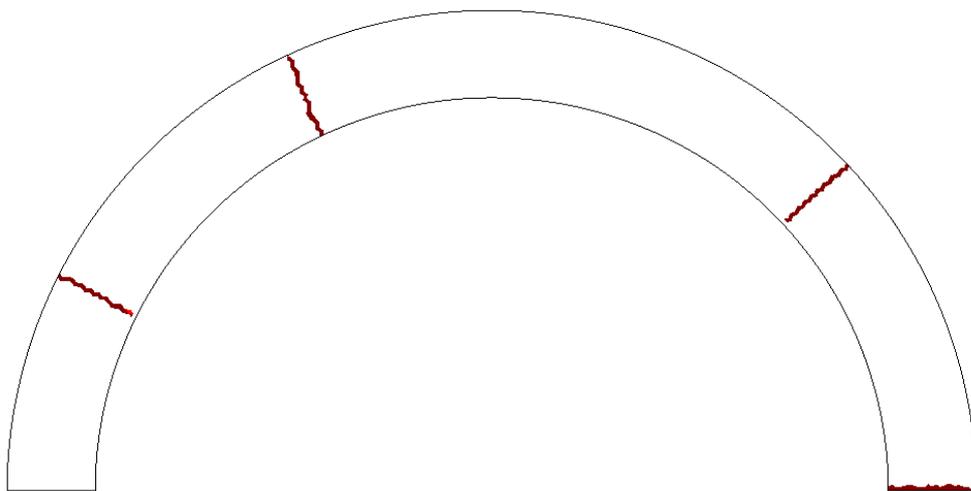
Tomando como referencia el caso con control de desplazamientos estudiado en la sección anterior, se hicieron dos análisis adicionales. En uno de ellos se define el doble de energía de fractura ( $20 \text{ J/m}^2$ ) y en el otro una décima parte ( $1 \text{ J/m}^2$ ). La respuesta para cada caso se presenta en la figura 6.31.

El comportamiento obtenido es el esperado, con una mayor área bajo la curva carga-desplazamiento cuanto mayor es la energía de fractura del material. Todos los casos convergen hacia la asíntota de  $150 \text{ kN}$ , aunque el caso de  $G_f = 1 \text{ J/m}^2$  está un poco por encima de las otras dos curvas. Esta discrepancia se comenta más adelante.

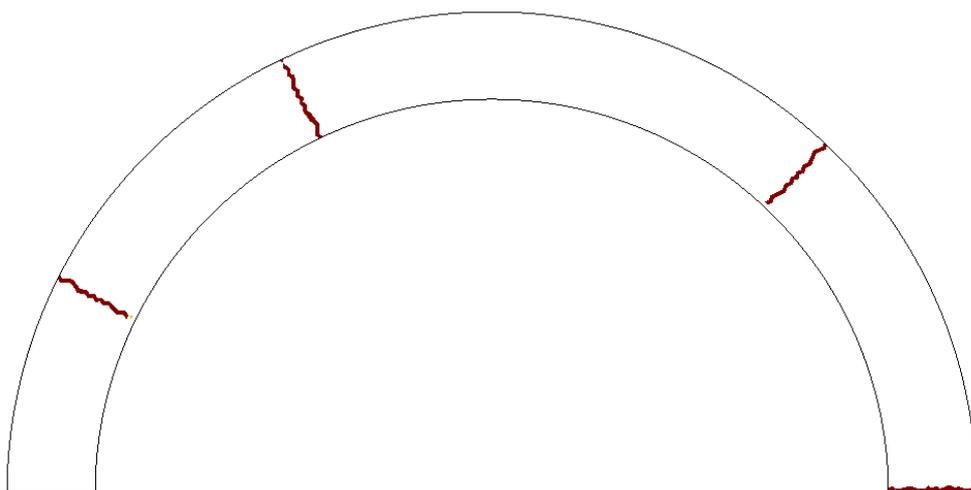
En las figuras 6.33 y 6.34 se observan las fisuras en el momento del colapso para los casos de mayor y menor energía de fractura, respectivamente. Cualitativamente las fisuras coinciden perfectamente entre sí y con el caso de energía de fractura intermedia (figura 6.29).



**Figura 6.31** Curvas reacción vs. desplazamiento vertical en el punto de aplicación de P (control de desplazamientos) [ $G_f$ ]= $\text{J/m}^2$



**Figura 6.32** Daño en el estado de carga de colapso ( $G_f = 20 \text{ J/m}^2$ )



**Figura 6.33** Daño en el estado de carga de colapso ( $G_f = 1 \text{ J/m}^2$ )

No obstante lo anterior, existen pequeñas diferencias en la ubicación de las rótulas, tal como se indica en la tabla 6.4.

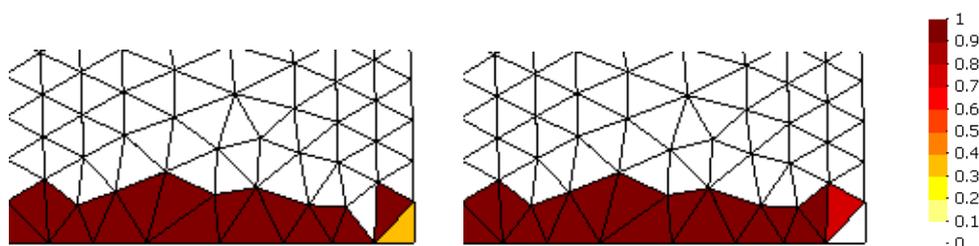
| Rótula | Análisis Límite | $G_f = 20$ | $G_f = 10$ | $G_f = 1$ |
|--------|-----------------|------------|------------|-----------|
| A      | 0.95            | 0.95       | 0.92       | 0.96      |
| B      | 2.50            | 2.60       | 2.60       | 2.68      |
| C      | 7.95            | 8.08       | 8.15       | 8.29      |
| D      | 10.50           | 10.50      | 10.50      | 10.50     |

**Tabla 6.4** Coordenada horizontal de las rótulas en el mecanismo de colapso

El rango de variación observado en la tabla 6.4 es del orden de los 20 cm, lo que se considera dentro de un rango aceptable en relación a las dimensiones del problema y de los elementos finitos utilizados en la malla.

El ligero exceso de rigidez post-pico en el caso con  $G_f = 1 \text{ J/m}^2$  ocurre debido a pequeñas variaciones en la cantidad y ubicación de los elementos dañados en la zona comprimida de las rótulas. Tal como se comenta en el apartado 6.4.2, los elementos finitos utilizados en estos cálculos no son capaces de reproducir con precisión el estado tensional en esas zonas, y esto afecta la progresión del final de la fisura.

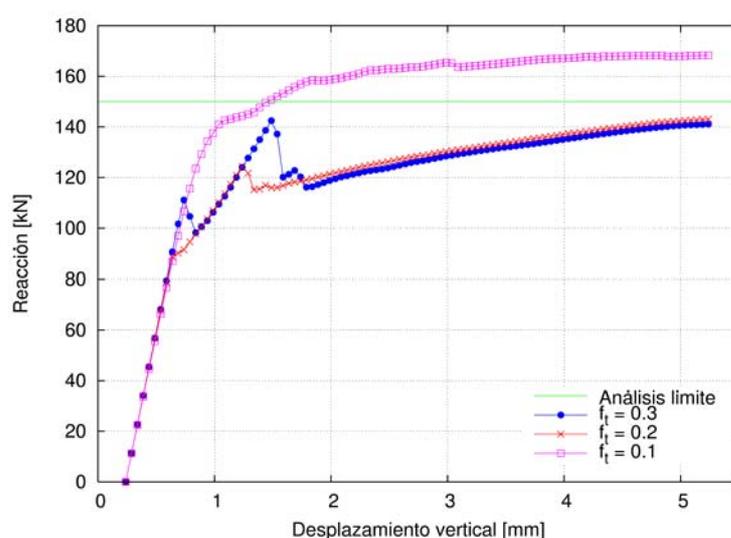
En este caso en concreto, la diferencia ocurre en la fisura D, donde la zona comprimida del análisis frágil ha dañado de forma diferente respecto a las otras dos. En la figura 6.34 se pone de manifiesto esta diferencia. La presencia de la discontinuidad en la fisura del caso con  $G_f = 1 \text{ J/m}^2$  origina la variación en la respuesta global de la estructura. Si bien en este caso la diferencia es despreciable, es recomendable tener en cuenta la existencia de este fenómeno en futuros análisis.



**Figura 6.34** Detalle de zona comprimida de fisura D (a)  $G_f = 1 \text{ J/m}^2$  (b)  $G_f = 20 \text{ J/m}^2$

### 6.5.2 Resistencia a tracción

Con el fin de estudiar los efectos de la variación de la resistencia a tracción del material en la respuesta de la estructura, se hicieron dos análisis adicionales. En el primero se utiliza una resistencia a tracción de 0.3 MPa, y en el segundo un valor de 0.1 MPa. Ambos cálculos se efectuaron bajo imposición del desplazamiento vertical. La figura 6.35 presenta la respuesta de estos dos casos, junto con el caso estudiado inicialmente, de resistencia 0.2 MPa.



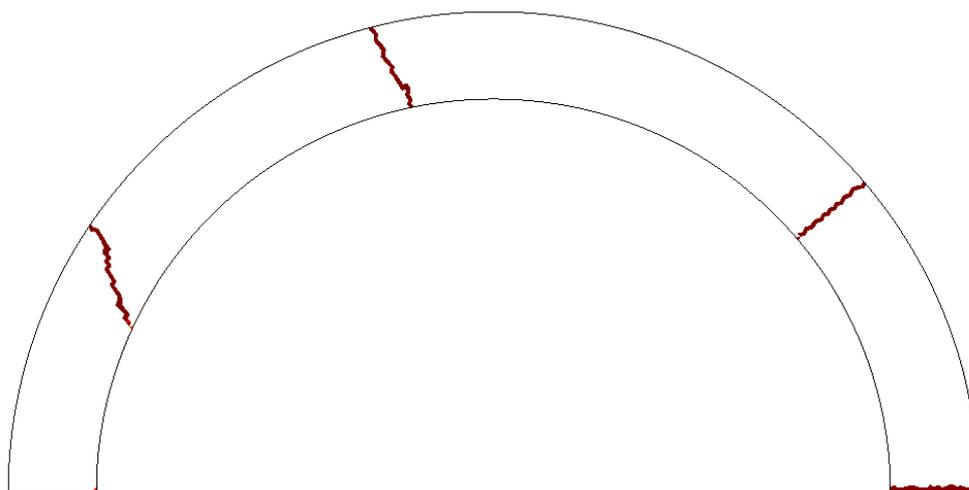
**Figura 6.35** Curvas reacción vs. desplazamiento vertical en el punto de aplicación de P (control de desplazamientos) [ $f_t$ ]=MPa

El caso con mayor resistencia a tracción presenta unas oscilaciones de carga y descarga mayores que el caso de referencia, si bien la tendencia final es la misma. Sin embargo, al emplear el material de menor resistencia la respuesta es completamente diferente, con una tendencia a una asíntota de unos 170 kN.

Por una parte, es previsible que el caso de resistencia 0.3 MPa tenga picos más pronunciados en la curva, ya que es necesario llegar a estados tensionales mayores para la creación y propagación de las fisuras. Sin embargo, una vez este umbral es alcanzado, la energía liberada es la misma y, por tanto, el comportamiento es más frágil. Asimismo, existe poca variación en la ubicación de las rótulas, tal como se aprecia en la tabla 1.5.

Por otro lado, el comportamiento distinto de la estructura con menor resistencia a tracción ocurre debido a la formación de un mecanismo de colapso diferente al de los otros

dos casos. La figura 6.36 muestra las fisuras que se forman, dos de ellas en distinta ubicación. La fisura B arranca demasiado cerca de la clave del arco, mientras que la fisura A, a pesar de arrancar cerca del punto esperado, es oblicua respecto a la sección del arco. Esto se debe a las tracciones causadas en el primer intervalo de carga, donde se toma en cuenta sólo el peso propio de la estructura, antes de la aplicación de la carga puntual. El resultado tras la aplicación de las fuerzas gravitatorias es una concentración de las tracciones en el intradós, con su punto máximo justo en la clave. Cuando se aplica la carga P de manera incremental, en los primeros pasos estas tracciones máximas comienzan a aumentar de valor, mientras se empiezan a trasladar hacia el punto de aplicación de la carga, siempre en el intradós. En este caso en particular, sencillamente se alcanza la resistencia del material antes de que el traslado de la tensión máxima se haya completado, ubicándose debajo del punto de aplicación de la carga. Así, la primera fisura se inicia prematuramente, y esto hace que las otras fisuras (excepto la fisura D) también tengan un comportamiento distinto.



**Figura 6.36** Daño en el estado de carga de colapso ( $f_t = 0.1$  MPa)

Para cuantificar las diferencias en la ubicación de las fisuras, en la tabla 1.5 se comparan las coordenadas horizontales de las rótulas obtenidas de los casos analizados con las tres resistencias a tracción. Allí se pone de manifiesto que existe un valor de resistencia a tracción por debajo del cual se forma un mecanismo de colapso diferente al esperado.

| Rótula | Análisis Límite | $f_t = 0.3$ | $f_t = 0.2$ | $f_t = 0.1$ |
|--------|-----------------|-------------|-------------|-------------|
| A      | 0.95            | 0.92        | 0.92        | 0.91        |
| B      | 2.50            | 2.55        | 2.60        | 3.6         |
| C      | 7.95            | 8.12        | 8.15        | 8.44        |
| D      | 10.50           | 10.50       | 10.50       | 10.50       |

**Tabla 1.5** Coordenada horizontal [m] de las rótulas en el mecanismo de colapso

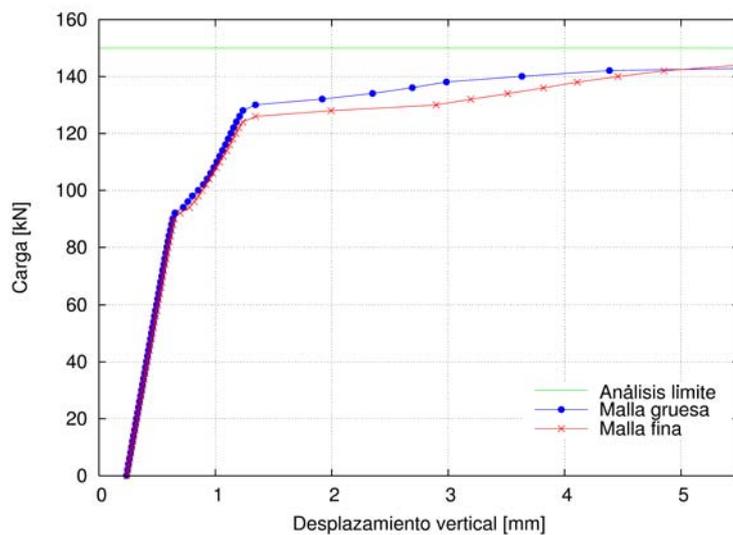
### 6.5.3 Discretización espacial

La malla de elementos finitos empleada en los cálculos precedentes es considerablemente fina, tomando en cuenta la relación del tamaño del elemento respecto a las dimensiones del problema. Tal como se ha comentado en capítulos anteriores, la aplicación del modelo de daño localizado propuesto está orientada hacia el estudio de edificios históricos. Normalmente estas estructuras son grandes y complejas, y por tanto es común que la discretización espacial usada en su análisis estructural sea relativamente gruesa. Por tanto, es importante observar el rendimiento del modelo bajo estas condiciones de discretización.

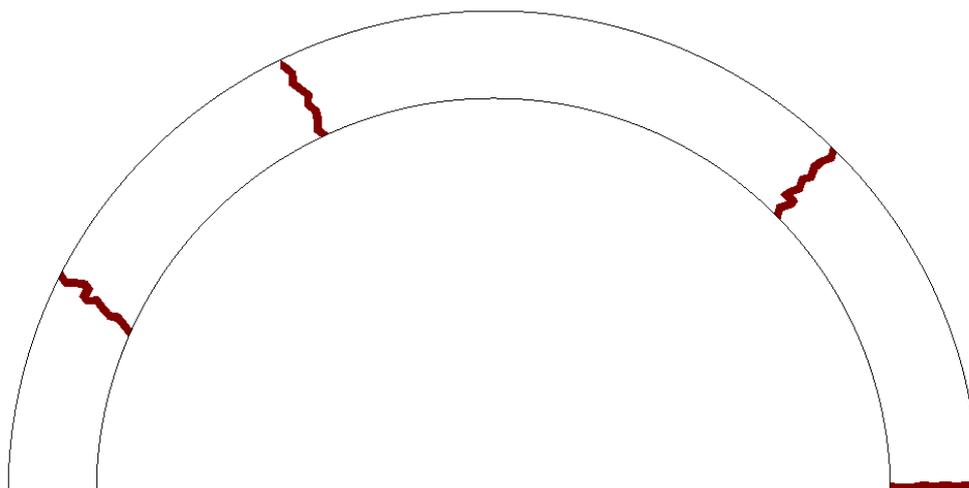
Para ello se efectúa un análisis similar a los anteriores, pero con una malla de elementos finitos con un tamaño promedio de 10 cm (dos veces el tamaño empleado hasta ahora). La malla queda conformada por 3.110 elementos triangulares lineales y 1.722 nodos. Este modelo se analiza también bajo las hipótesis de carga impuesta y de desplazamiento impuesto.

La figura 6.37 muestra la respuesta de la estructura para el caso con control de cargas, comparando los resultados obtenidos con las dos discretizaciones. Como es de esperar, se aprecia en la figura una respuesta ligeramente más rígida en el caso con malla gruesa, si bien la carga última prácticamente coincide.

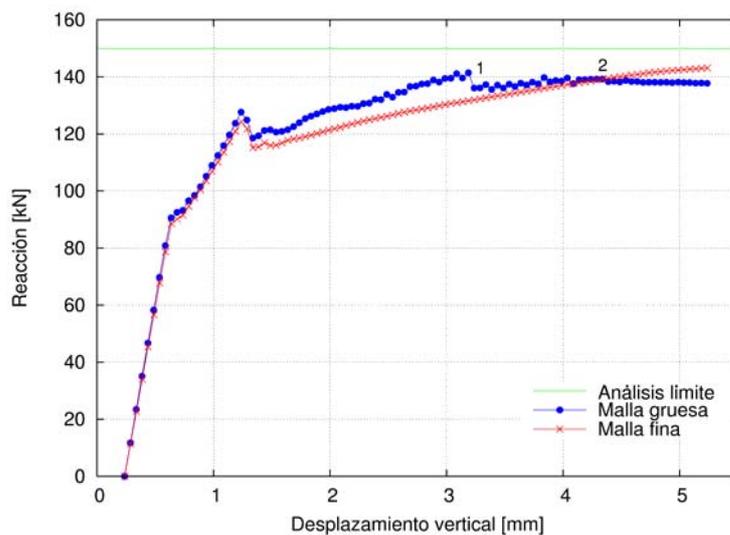
La distribución de las fisuras con la malla gruesa es bastante similar al caso de referencia, como se pone de manifiesto en la figura 6.38 y en la tabla 6.6. Es interesante destacar que, al igual que en el caso con malla fina, las fisuras no son exactamente rectas, sino que presentan ligeras oscilaciones en su recorrido. En este caso las diferencias en la respuesta originadas por estos efectos son prácticamente despreciables, si se observa la ubicación de las rótulas y la curva carga-desplazamiento obtenida en el análisis.



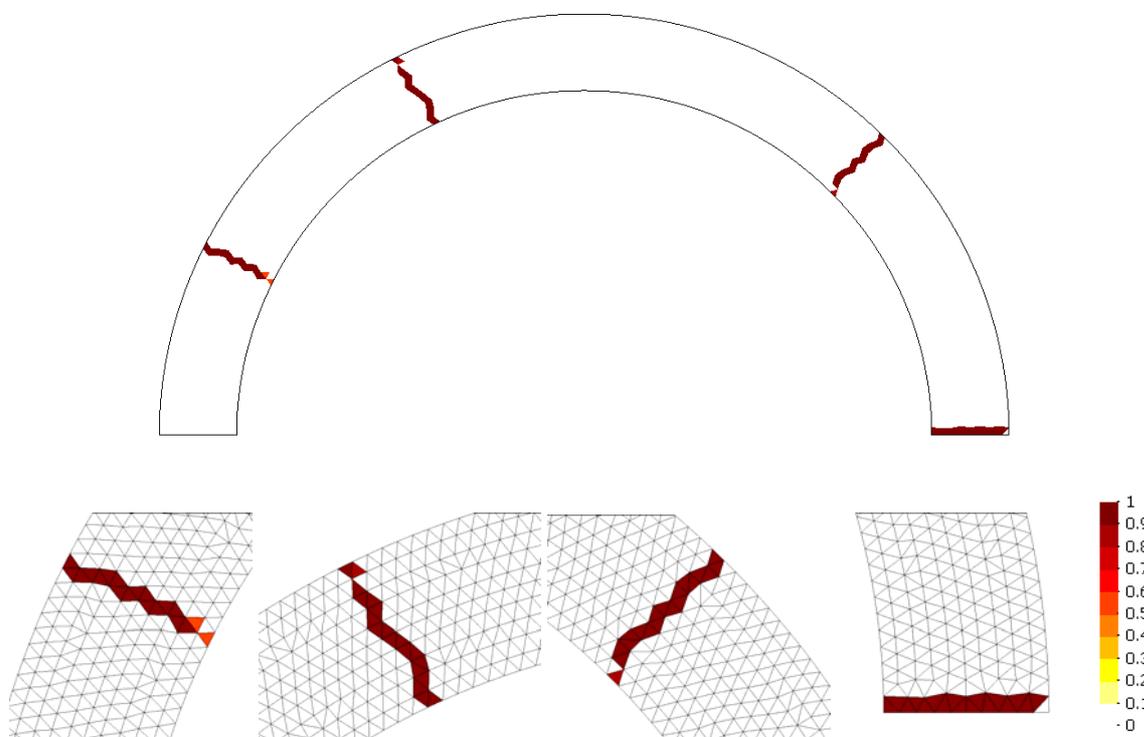
**Figura 6.37** Curvas carga vs. desplazamiento vertical en el punto de aplicación de P (carga impuesta)



**Figura 6.38** Daño en el estado de carga de colapso (malla gruesa, control de cargas)



**Figura 6.39** Curvas reacción vs. desplazamiento vertical en el punto de aplicación de P (desplazamiento impuesto)



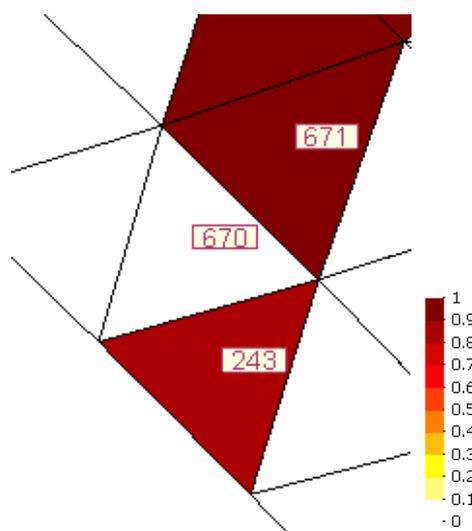
**Figura 6.40** Daño en el estado de carga de colapso (malla gruesa, control de desplazamientos). Detalles de rótulas A, B, C y D.

En la figura 6.39 se comparan las respuestas obtenidas con ambas discretizaciones en el caso de control de desplazamientos. En este caso la respuesta con discretización gruesa antes del pico de carga de 130 kN es muy similar a la obtenida del caso con discretización fina. Después de la descarga que implica la creación de las fisuras B y D el comportamiento comienza a ser un poco irregular. Sin embargo, la ubicación y orientación de fisuras son correctas, tal como se aprecia en la figura 6.40 y en la tabla 6.6.

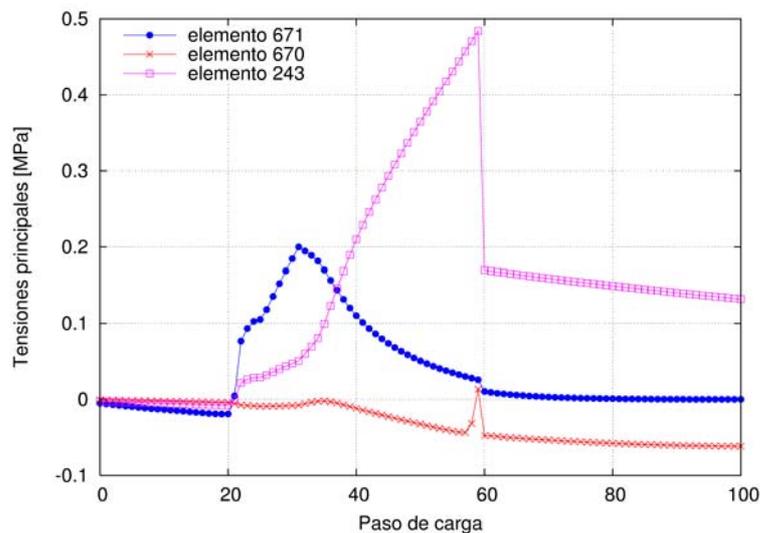
En la figura 6.39 resaltan dos puntos importantes: un salto en la curva en el punto 1, y un cambio de pendiente a partir del punto 2. Además, existen ciertas oscilaciones en la curva. Estas irregularidades se deben al complejo estado tensional que se crea en las zonas comprimidas de las rótulas, de acuerdo a lo que se comenta en el apartado 6.4.2.

Para ilustrar lo anterior, se observa con detenimiento la punta de la fisura C cuando toca el intradós. En la figura 6.41 se muestra la numeración de los elementos involucrados, y en la figura 6.42 se muestra el valor de la tensión principal (valores positivos tracción, valores negativos compresión) de cada uno de ellos para cada paso de tiempo.

Viendo el comportamiento de cada elemento por separado antes del paso de carga 59 (figura 6.42), el elemento 671 comenzó a dañar desde el paso de tiempo 30 aproximadamente, cuando alcanza la resistencia a tracción (0.2 MPa), descargando de manera continua a partir de ese punto. El elemento 670, que sería el siguiente en la fisura, se encuentra en compresión mientras esta descarga ocurre. Simultáneamente, el elemento 243 está sometido a altas tracciones, que incluso superan la resistencia de 0.2 MPa. Dicho elemento tiene comportamiento elástico porque se encuentra fuera del recorrido de la fisura. Esto ocurre porque en el algoritmo implementado la propagación de fisura se detiene si se encuentra un elemento en compresión (el elemento 670 en este caso), tal como se comenta en el apartado 5.3.



**Figura 6.41** Numeración de elementos en la zona de compresión de la rótula B en el estado de carga de colapso (malla gruesa, control de desplazamientos)



**Figura 6.42** Curvas tensión principal vs. paso de carga en los tres últimos elementos de la fisura B (valores positivos indican tracción, valores negativos indican compresión)

Cuando el análisis se aproxima al paso de carga 59, el elemento 671 ya ha descargado casi completamente, y el elemento 670 comienza a entrar en tracción. Tal como está estructurado el algoritmo de localización, en cuanto el elemento 670 se encuentra bajo tracción ya se considera dentro del recorrido de la fisura. Esto ocurre en el paso 59. Rastreando más elementos a tracción en el recorrido de la fisura, el algoritmo detecta a 243 también como elemento potencialmente dañable en ese mismo paso de tiempo. Para ese momento, el elemento 243 supera por más del doble el valor de la resistencia a tracción, y por tanto, al dañar se genera una descarga repentina de su tensión (paso de carga 60). Esta caída de tensiones es la que origina el salto observado en la curva carga-desplazamiento (punto 1). Pero además, también tiene efecto sobre el estado tensional del elemento 670, el cual vuelve a estar sometido a un estado de compresión.

El cambio de pendiente que ocurre en el punto 2 de la curva carga-desplazamiento se debe a un fenómeno similar que ocurre en la fisura A. Sin embargo, en este caso la descarga no es repentina, y por tanto el descenso en la curva es más suave. Se realizó un análisis en el que se continúa aplicando la acción hasta 10 veces su valor (cuyos resultados no se muestran aquí), y se observó que la curva tiende a una asíntota de unos 110 kN.

La aparición de estas interrupciones hacia el final de la fisura se ha comentado en el apartado 6.4.2 (figura 6.30). En todos los casos estas discontinuidades en las fisuras se deben a la dependencia espuria de la orientación de los elementos finitos triangulares bajo condiciones de carga específicas. En el apéndice B se justifica la afirmación anterior, estudiando los efectos de la orientación de los elementos finitos triangulares respecto a las direcciones principales de tensiones.

Para terminar de evaluar el rendimiento del método con discretización espacial gruesa, en la tabla 6.6 se resumen las coordenadas horizontales de la ubicación de las rótulas, comparando con los casos analizados con la malla fina. En general no se aprecian diferencias importantes en la ubicación de las fisuras.

| <b>Rótula</b> | <b>Análisis Límite</b> | <b>Malla fina</b> | <b>Malla gruesa<br/>(CC)</b> | <b>Malla gruesa<br/>(CD)</b> |
|---------------|------------------------|-------------------|------------------------------|------------------------------|
| A             | 0.95                   | 0.92              | 0.90                         | 0.97                         |
| B             | 2.50                   | 2.60              | 2.60                         | 2.55                         |
| C             | 7.95                   | 8.15              | 8.18                         | 8.18                         |
| D             | 10.50                  | 10.50             | 10.50                        | 10.50                        |

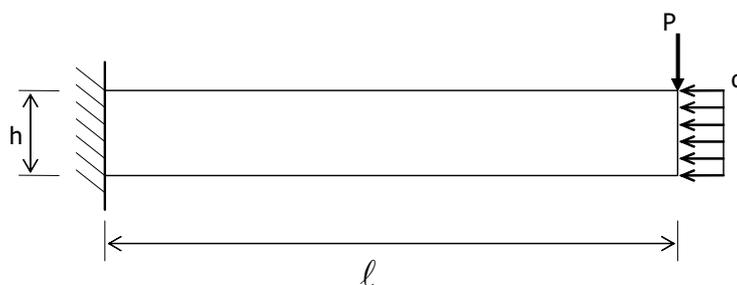
**Tabla 6.6** Coordenada horizontal [m] de las rótulas en el mecanismo de colapso (CC: control de cargas, CD: control de desplazamientos)



# A

## Estudio inelástico de una sección rectangular bajo flexión compuesta

Se presenta el estudio de una sección rectangular sometida a flexión compuesta con compresión, considerando un comportamiento no lineal del material. Concretamente, se utiliza el modelo de daño localizado propuesto en el capítulo 5. El estudio se realiza sobre una viga empotrada en voladizo, con una carga puntual vertical  $P$  en su extremo libre y una presión horizontal  $q$  de compresión, tal como se muestra en la figura A.1.



**Figura A.1** Geometría de la viga en estudio

## A.1 Solución analítica en el estado límite

La presión axial que se aplica sobre la viga se expresa como una función de la resistencia a tracción  $f_t$  de la forma

$$q = \beta f_t \quad (5.1)$$

siendo  $\beta$  un factor arbitrario positivo y adimensional. El momento flector máximo (ubicado en el empotramiento) se expresa en función de la carga  $P$  de la forma

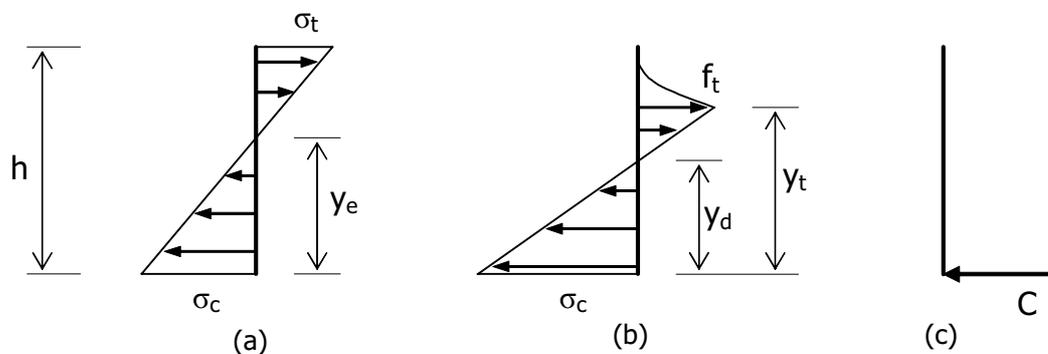
$$M = P \ell \quad (5.2)$$

Bajo las hipótesis habituales de Resistencia de Materiales, y en el rango elástico, la distribución de tensiones en la sección de máximo momento flector tiene la forma mostrada en la figura A.2<sup>a</sup>, siendo  $y_e$  la distancia del eje neutro de la sección a la fibra más comprimida. Los valores de tensiones máximas en la sección tienen la expresión:

$$\sigma_t = \frac{6P \ell}{bh^2} - \beta f_t \quad (5.3)$$

$$\sigma_c = \frac{6P \ell}{bh^2} + \beta f_t$$

donde  $b$  es el ancho de la viga. Si se aumenta la carga  $P$  hasta que las tensiones de tracción superen la resistencia del material, la sección comienza a dañar, y el estado tensional tiene una forma como la mostrada en la figura A.2b. Allí se observa que la zona donde se ha superado la resistencia a tracción está descargando y hay un pico de tensiones de tracción a una altura  $y_t$ . Asimismo, el eje neutro también se desplaza hacia abajo ( $y_d < y_e$ ), y la tensión máxima de compresión aumenta, suponiendo una resistencia a compresión infinita.



**Figura A.2** Distribución de tensiones en la sección del empotramiento (a) Rango elástico (b) Rango inelástico (c) Estado límite

Al seguir aumentando la carga, la situación anterior llega a su estado límite, que se muestra en la figura A.2c. En este estado, toda la sección ha dañado y descargado, y las compresiones se concentran en el punto inferior de la sección. La fuerza de compresión remanente  $C$  vale:

$$C = \beta f_t b h \quad (5.4)$$

que equivale a un esfuerzo axial centrado del mismo valor y un momento flector residual  $M_R$  igual a:

$$M_R = C \frac{h}{2} \quad (5.5)$$

De las expresiones anteriores se concluye que la sección completamente dañada a tracción es capaz de resistir una carga residual  $P_R = \frac{M_R}{\ell}$  igual a:

$$P_R = \beta \frac{f_t b h^2}{2\ell} \quad (5.6)$$

Nótese que para valores nulos de  $\beta$  (es decir, sin esfuerzo axial de compresión) se recupera la condición de flexión simple, en la que la fuerza residual tiende a cero.

## A.2 Análisis numérico

La viga mostrada en la figura A.1 se analiza mediante el método de los elementos finitos. Se toman valores de longitud  $\ell = 10$  m, y canto  $h = 1$  m. El análisis se realiza bajo las hipótesis de deformación plana, con un ancho  $b = 1$  m.

Se utiliza el modelo de daño localizado. Los valores de los parámetros para caracterizar el material son los mismos empleados en el análisis del arco descrito en el capítulo 6: módulo de Young  $E = 5$  GPa, coeficiente de Poisson  $\nu = 0.2$ , resistencia a tracción  $f_t = 0.2$  MPa y energía de fractura  $G_f = 10$  J/m<sup>2</sup>.

La carga  $P$  se define mediante imposición de desplazamiento vertical, y la presión  $q$  mediante una fuerza uniformemente distribuida en toda la altura de la sección en el extremo libre de la viga.

En los cálculos se emplean mallas de elementos finitos triangulares lineales. Se utilizan dos tamaños de elemento: 6.5 cm y 13 cm. Se hicieron cálculos para cada una de las mallas con valores de  $\beta$  variando entre 0 y 0.75. En la tabla A.1 se presenta una lista de los valores de carga residual  $P_R$  obtenidos según la expresión analítica desarrollada en el

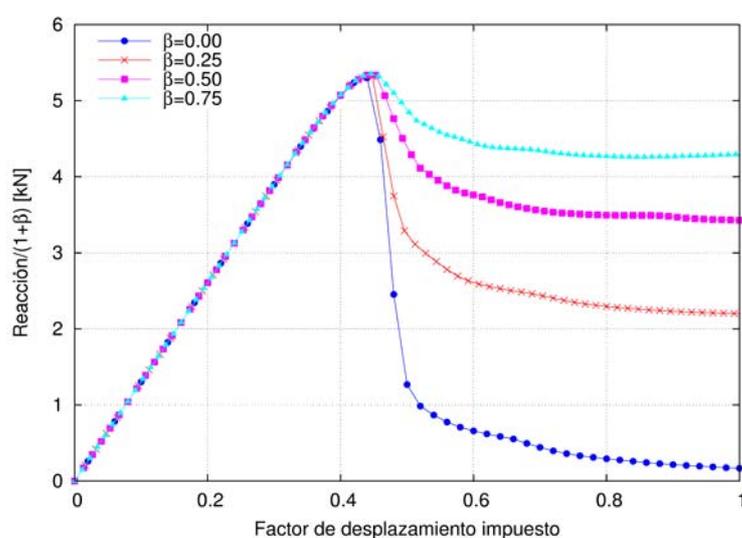
apartado anterior para cada uno de estos valores. Estos valores están normalizados respecto al factor  $1+\beta$ .

| $\beta$ | Carga residual normalizada $P_R/(1+\beta)$ [kN] |
|---------|---|
| 0       | 0.00  |
| 0.25    | 2.00  |
| 0.5     | 3.33  |
| 0.75    | 4.29  |

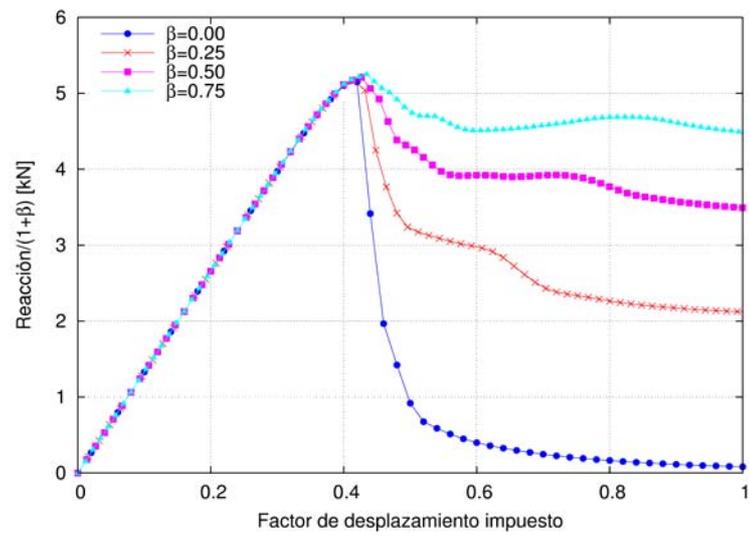
**Tabla A.1** Carga residual  $P_R$  (normalizada) obtenida analíticamente en función de  $\beta$

En la figura A.3 se muestran los resultados de la reacción en función del factor de carga del desplazamiento impuesto en el caso con malla fina. El valor de la reacción obtenida se normaliza respecto al factor  $1+\beta$  para más fácil comparación de las curvas. En la figura se observa claramente como cada una de las curvas tiende al valor de fuerza residual calculado analíticamente en la sección anterior.

Finalmente, en la figura A.4 se muestran los resultados obtenidos con la malla gruesa. Todas las curvas tienden también a sus valores analíticos respectivos, si bien presentan un recorrido ligeramente diferente. De lo anterior se puede concluir que en la simulación numérica las cargas residuales obtenidas son independientes de la discretización utilizada.



**Figura A.3** Respuesta de la estructura para diferentes valores del factor  $\beta$  (malla fina)



**Figura A.4** Respuesta de la estructura para diferentes valores del factor  $\beta$  (malla gruesa)



# B

## Estudio del comportamiento de los elementos triangulares lineales

Tal como se comenta en el capítulo 6, en ocasiones ocurre un fenómeno en las zonas comprimidas de las rótulas, cuando la estructura está cerca del colapso. Dicho fenómeno consiste en la pérdida de continuidad en la hilera de elementos dañados que conforman la fisura. Siguiendo el orden en que los elementos se dañan para formar la fisura, puede ocurrir que un elemento ya consolidado dañe mucho menos (o incluso se mantiene intacto) que otro que se encuentra más adelante en el recorrido. Esto contradice lo que ocurre en un modelo continuo, ya que las tracciones deben ser menores a medida que se acercan al borde de compresiones.

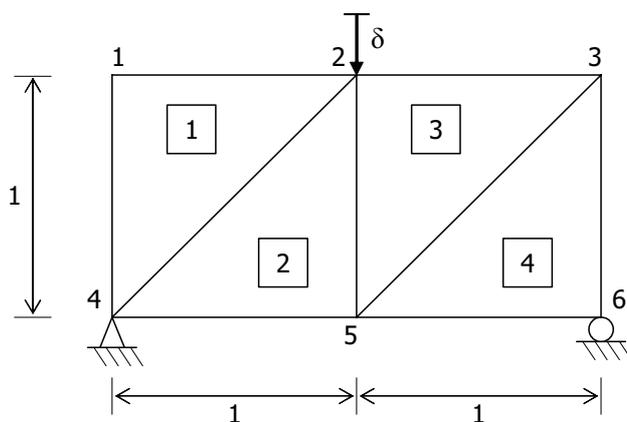
Cabe destacar que estas discontinuidades prácticamente no afectan la respuesta global de la estructura, tanto a nivel de carga última como de mecanismo de colapso. Sin embargo, sirven para explicar algunos saltos en la curva carga-desplazamiento que ocurren poco antes del colapso.

Cuando la zona comprimida de la rótula es pequeña en relación al tamaño de los elementos finitos de la malla, el estado tensional en esa zona es particularmente complejo, y los elementos triangulares lineales empleados en el cálculo no son capaces de representarlo con precisión. En la zona existen unas tensiones de compresión importantes y, al mismo tiempo, la descarga de los elementos dañados pertenecientes a la fisura hace que se transfieran tensiones de tracción hacia esa región comprimida. Este efecto hace que la orientación de los elementos finitos triangulares influya de manera espuria en la dirección y signo de las tensiones originando interrupciones en la fisura.

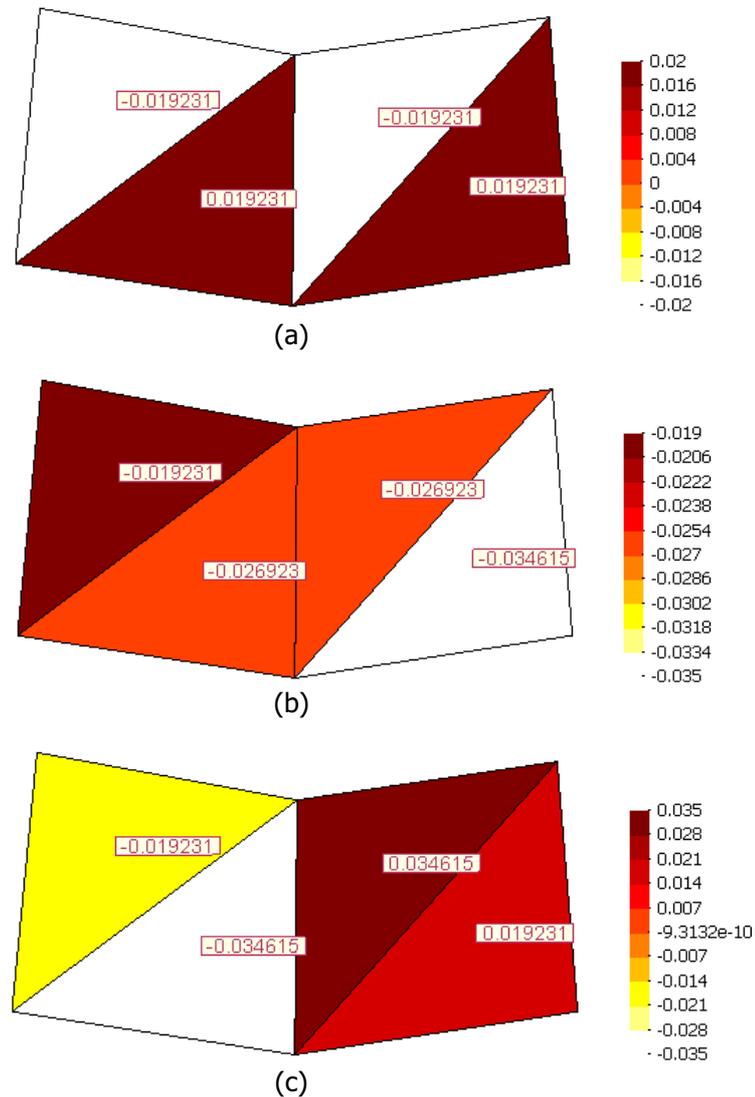
Las afirmaciones anteriores se ilustran mediante el siguiente test. Se analiza una malla de cuatro elementos triangulares lineales sometidos a un estado de carga similar al que se encuentra en la zona comprimida de las rótulas del arco. La deformación y la tensión son constantes dentro de cada elemento. La malla empleada en el test, con sus dimensiones y numeración de nodos y elementos se muestra en la figura B.1.

En los nodos 4 y 6 se imponen condiciones de apoyo simple y de apoyo con desplazamiento horizontal libre, respectivamente. Se impone un desplazamiento vertical  $\delta$  (con componente horizontal libre) igual a 0.1 en el nodo 2, para simular un estado de flexión simple. El análisis es elástico lineal, con un módulo de elasticidad unitario, y se desprecian los efectos transversales definiendo un coeficiente de Poisson nulo. Se adopta la hipótesis de un estado plano de deformaciones.

Los resultados de interés del análisis son los valores de tensiones en cada uno de los elementos. En la figura B.2 se muestran las componentes horizontal, vertical y tangencial del tensor de tensiones, sobre la configuración deformada de la malla.

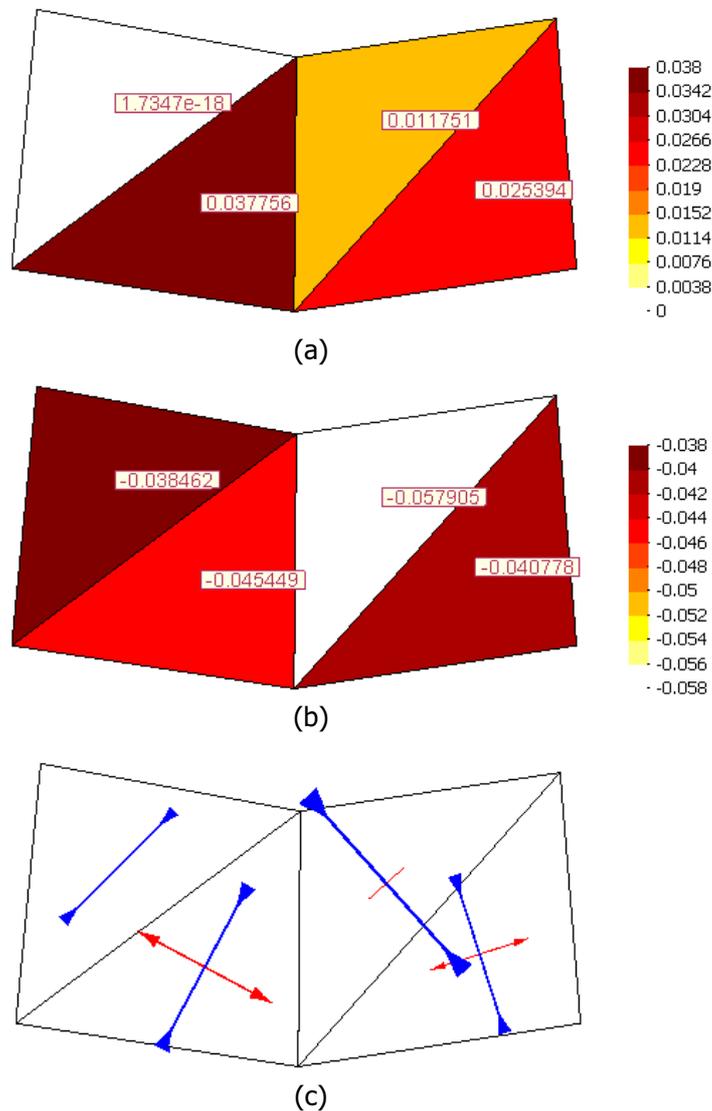


**Figura B.1** Malla empleada en el test



**Figura B.2** Distribución de tensiones en cada elemento (a) componente horizontal (b) componente vertical (c) componente tangencial

Las componentes horizontales mostradas en la figura B.2a son perfectamente simétricas respecto al eje horizontal, de valores opuestos según la ubicación del elemento. Los elementos superiores (1 y 3) están sometidos a un estado de compresión, y los inferiores (2 y 4) a tracción, exactamente a la misma magnitud. Por otra parte, en la componente vertical (figura B.2b), todos los elementos están comprimidos, variando en un rango de un 80% según su posición. Finalmente, las componentes tangenciales presentadas en la figura B.2c son simétricas respecto al eje vertical, cambiando su signo en función del lado del eje en que se encuentran.



**Figura B.3** Distribución de tensiones principales en cada elemento (a) componente a tracción (b) componente a compresión (c) vectores

En el modelo de daño utilizado se emplea la componente principal del tensor de tensiones como criterio de umbral de daño a tracción (criterio de Rankine). Por tanto, es de interés observar los valores de las componentes principales del tensor de tensiones. En la figura B.3 se muestran estos valores, así como los vectores que indican su dirección.

Los valores de la figura B.3a son los realmente relevantes en el modelo de daño expuesto en el capítulo 3.3.2, ya que se usan para determinar el momento en que el material efectivamente daña. En este test se pone de manifiesto la manera en que la ubicación y orientación del elemento influye en el valor de su componente principal de tracciones. En el elemento 1 no existen prácticamente tensiones de tracción, mientras que en el elemento

3 éstas tienen un valor relativamente bajo. Los elementos 2 y 4 presentan unas tracciones mayores, del orden del doble y del triple de las observadas en el elemento 3. Esto explicaría el fenómeno de la falta de continuidad de fisuras en la zona comprimida de la rótula en el arco estudiado en el capítulo 6. En el caso hipotético de una fisura que provenga de la parte superior de la malla, ya sea sobre el elemento 1 o 3, los elementos 2 y 4 presentarían un mayor nivel de daño, correspondiente a su mayor nivel de tensiones de tracción.

El problema se termina de ilustrar mostrando las componentes principales de compresión en la figura B.3b, donde existe una variación del 50% de un elemento a otro. Finalmente, se muestran los vectores de tensiones principales (figura B.3c), donde se aprecian no sólo las diferencias en su magnitud, sino también en su dirección.



# 7

## Análisis de la Catedral de Mallorca

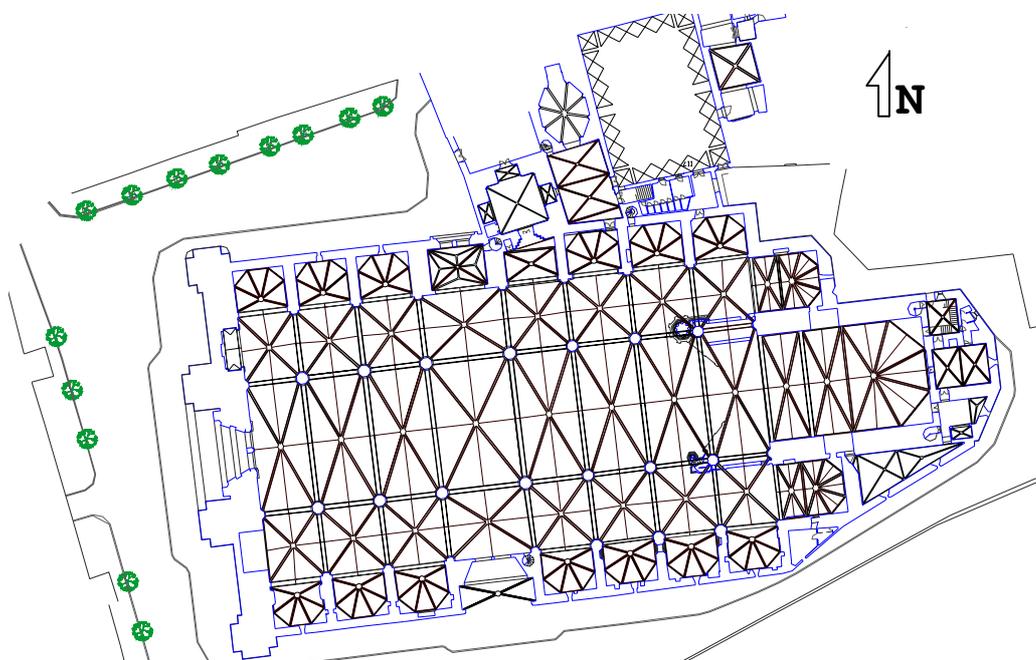
En esta sección se utilizan todas las herramientas numéricas descritas en los capítulos precedentes en el análisis estructural de la Catedral de Mallorca. El objetivo del capítulo es demostrar la aplicabilidad del modelo de análisis en el estudio de una construcción histórica compleja. Se estudia el alcance y las limitaciones del empleo del modelo propuesto en un caso real.

En primer lugar se da una breve descripción de la Catedral objeto de estudio, destacando los detalles más relevantes tanto de su estado actual como de su historia. Seguidamente se presentan los resultados de algunos estudios previos realizados sobre la estructura, comentando las conclusiones alcanzadas por otros autores. Luego se interpretan las mediciones hechas recientemente con el fin de evaluar el estado tenso-deformacional actual. En el siguiente apartado se comentan los detalles acerca del modelo numérico utilizado (simplificaciones geométricas, cargas, condiciones de contorno, discretización, etc.). Finalmente se muestran y analizan los diferentes resultados obtenidos de los casos estudiados.

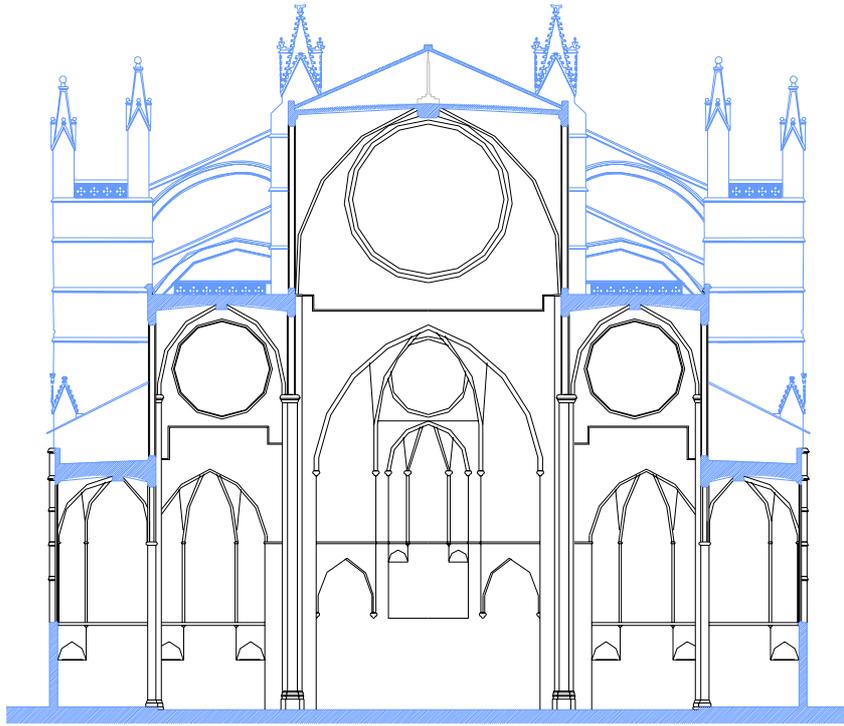
## 7.1 Descripción del edificio

La Catedral de Mallorca, cuya construcción se inició a principios del S. XIV, representa una de las obras de mayor envergadura de la arquitectura medieval. De la figura 7.1 a la figura 7.3 se muestran la planta y las secciones de la catedral. En ellas se diferencian dos partes: el cuerpo, compuesto por dos naves laterales y una central; y la cabecera, conformada por cuatro capillas. La longitud total de las naves es de 77 m; el ancho de la nave central de 17.8 m, y el de las laterales de 8.72, dando un ancho total de 35.3 m. Las naves laterales están cubiertas con bóvedas cruzadas cuatripartitas de base cuadrada, y la central con bóvedas cuatripartitas de base rectangular.

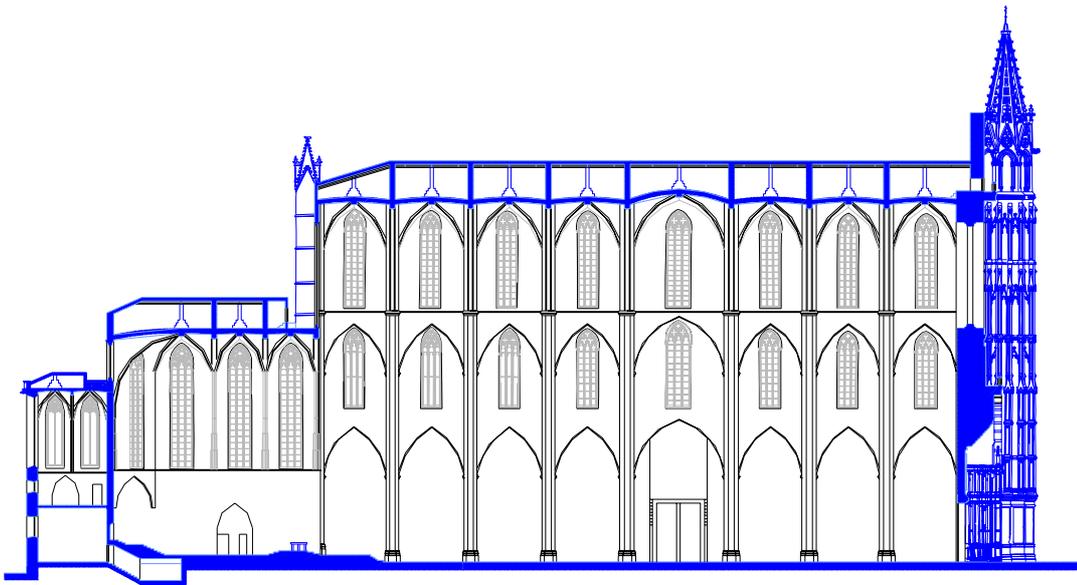
La clave de los arcos torales se encuentra a una altura de 43.95 m, lo que convierte al edificio en uno de los más altos de su género, junto con la Catedral de Milán y la Catedral de Beauvais. Las naves laterales también tienen una altura importante, 29.4 m, dando origen a unos pilares octogonales muy esbeltos, de 22.7 m de altura y un diámetro circunscrito de tan sólo 1.6 y 1.7 m.



**Figura 7.1** Planta de la estructura



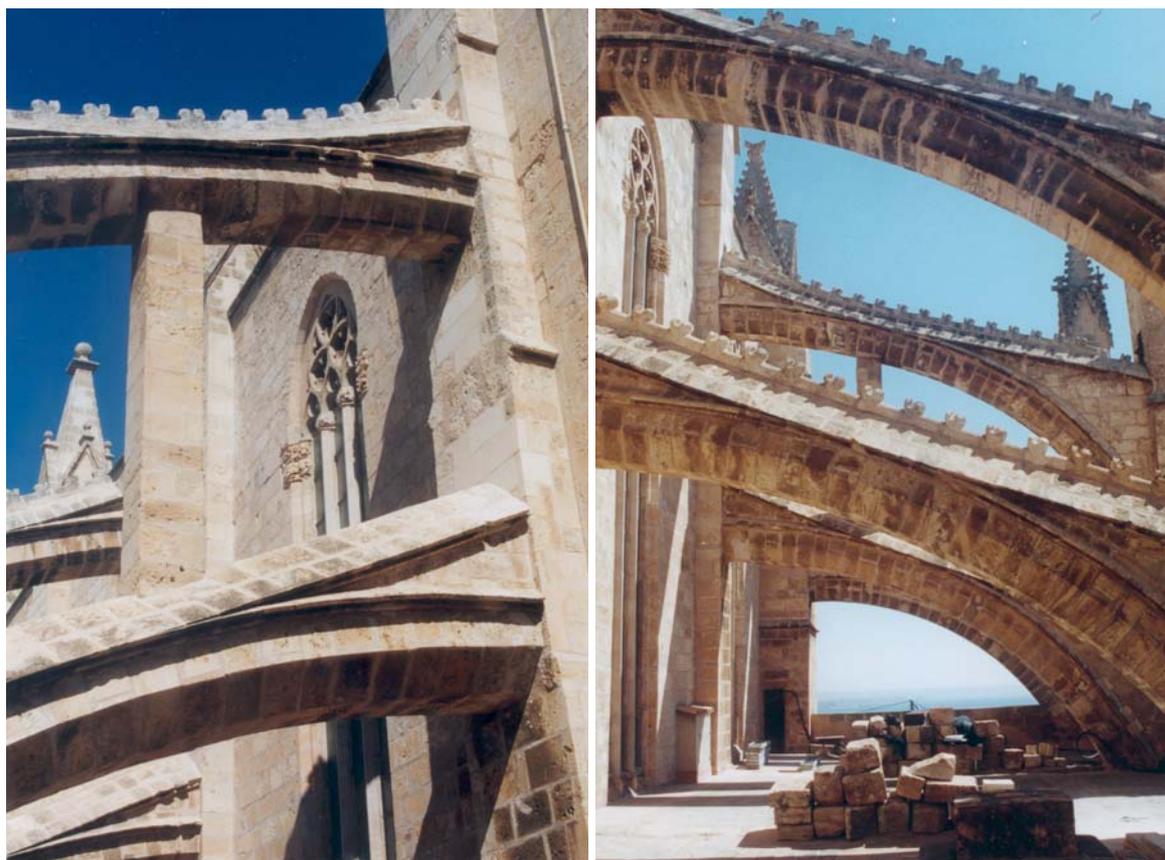
**Figura 7.2** Sección transversal



**Figura 7.3** Sección longitudinal

Además de la esbeltez de los pilares, la Catedral presenta otras características algo peculiares, como la doble batería de arbotantes (figura 7.4), que es más común en las construcciones del norte de Europa. En esas construcciones se justifica la segunda línea de arbotantes para soportar los efectos del viento sobre las altas cubiertas de madera. Sin embargo, en la Catedral de Mallorca no existe este tipo de cubierta, y por ende, no parece ser ésta la justificación de la existencia de la segunda batería de arbotantes. Por otro lado, estos arbotantes superiores sirven para drenar las aguas de lluvia de la cubierta.

Otro aspecto relevante son los grandes sobrepesos existentes sobre las claves de los arcos torales y de las bóvedas de la nave central. Estos sobrepesos consisten en una pirámide de piedra sobre la clave de la bóveda, y un muro triangular en el eje del arco toral, tal como se muestra en la figura 7.5. Si bien es normal encontrar este tipo de sobrepesos en edificios similares, en el caso de la Catedral de Mallorca éstos son mayores de lo habitual.



**Figura 7.4** Doble batería de arbotantes



**Figura 7.5** Sobrepesos en la clave de la bóveda central y en la clave del arco toral

Actualmente, la Catedral de Mallorca se encuentra instrumentada para observar la evolución de los diferentes daños que presenta la estructura. Parte de los resultados de estas observaciones se encuentran recogidos en un informe presentado por González y Roca (2003). Dichos daños son principalmente los siguientes:

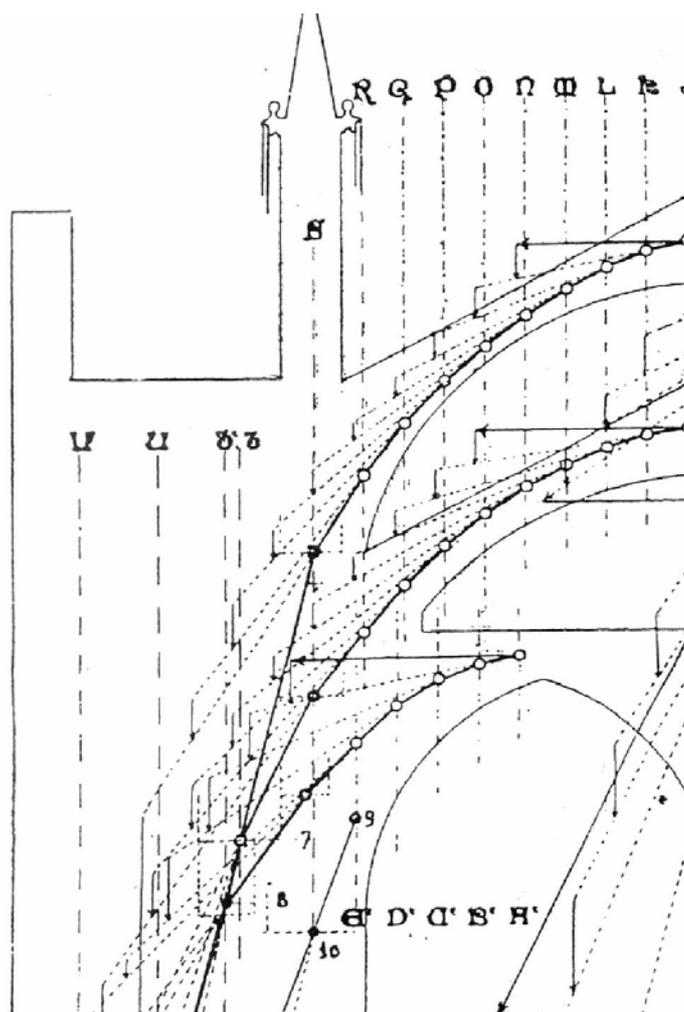
- Los pilares están fuertemente deformados hacia el interior de la nave, presentando grietas en su base, en la zona de compresión, producto de la flexión originada por esta deformación.
- Los contrafuertes presentan ligeros desplomes hacia el exterior del pórtico, y una fisuración importante en sus ventanales.
- Algunos arbotantes presentan deformaciones apreciables, con varios de ellos apuntalados (figura 7.4).

## 7.2 Estudios previos efectuados sobre la Catedral de Mallorca

Hasta la fecha se han realizado diversos estudios de la Catedral de Mallorca en los que se intenta comprender el funcionamiento estructural del edificio y evaluar, de alguna manera, su seguridad. Entre ellos cabe mencionar los siguientes:

### 7.2.1 Rubió (1912)

Rubió (1912) lleva a cabo un análisis de línea de empujes por estática gráfica (ver figura 7.6) de un pórtico tipo, idealizado en dos dimensiones. Es importante destacar que en ese documento ya se menciona el fuerte desplome de los pilares. Las conclusiones alcanzadas por Rubió apuntan lo siguiente:



**Figura 7.6** Análisis por estática gráfica de la Catedral de Mallorca. *Rubió (1912)*

- Quizá habría sido mejor que no existiese la batería superior de arbotantes, ya que éstos generan empujes hacia la bóveda central, obligando a colocar en las claves de los arcos torales el sobrepeso comentado en la sección anterior.
- La columna está mal colocada. Rubió opina que desplazando la columna unos 45 centímetros hacia fuera (sin variar la luz del arco) se evitarían los desplomes.
- La batería inferior de arbotantes tiene formas y pesos óptimos.
- En el punto de presión máxima en los arcos torales se alcanza una compresión de 3.1 MPa, mientras que en los pilares la máxima compresión es de 4.5 MPa. Ambos valores son menores (aunque cercanos) a la resistencia de las respectivas piedras utilizadas.

Estas conclusiones deben mirarse con perspectiva, tomando en cuenta el estado del conocimiento de la época y los recursos disponibles por Rubió para la elaboración del estudio. En el informe se comentan también las dificultades del método, que al ser aplicado a una estructura compleja como la Catedral de Mallorca presenta unas complicaciones importantes (acentuadas por las limitaciones de los recursos de la época). Asimismo, se diserta sobre el origen artístico del diseño del edificio, y se compara con edificaciones similares.

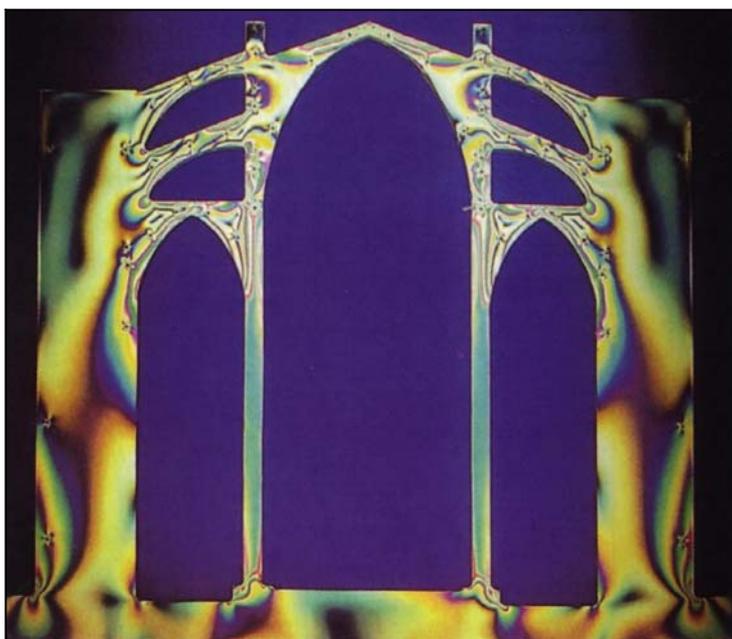
### 7.2.2 Mark (1982, 1998)

En la década de los 70, Robert Mark se dedicó al estudio de estructuras antiguas mediante el método de la fotoelasticidad. En Mark (1998) se hace una comparación de la Catedral de Mallorca con dos catedrales francesas: Bourges y Chartres, de la que se desprenden conclusiones de interés.

El método de la fotoelasticidad era utilizado inicialmente en el análisis de componentes mecánicos complejos de aviones y de estructuras de hormigón armado. En la aplicación a edificios históricos la técnica consiste en elaborar un modelo plano a escala en plástico epóxico que representa una sección tipo de la estructura. Fijando los apoyos, se aplican cargas escaladas equivalentes al peso propio de la estructura y a la acción del viento. Luego el modelo se calienta hasta los 150°C, de manera que el plástico pierda su estado "cristalino" tornándose maleable y deformándose por el efecto de las cargas. Esta deformación se mantiene al momento de volver el modelo a la temperatura ambiente. Finalmente, si el modelo se observa a través de un polariscopio los efectos de la deformación en todo el modelo se apreciaban como patrones de luz y oscuridad (o de colores si se utiliza una fuente de luz blanca), que se pueden interpretar como una representación cualitativa de la distribución de fuerzas internas (ver figura 7.7).

De sus estudios, Mark concluye que bajo peso propio los pilares de la catedral experimentan prácticamente compresión pura, con un máximo de 2.2 MPa. Este valor aumenta a 2.7 MPa con las acciones del viento consideradas. Ambos valores se encuentran por el orden de aproximadamente la mitad de aquellos calculados por Rubió (1912).

Por otra parte, también se afirma que en la batería superior de arbotantes existen ciertos niveles de tracción que podrían significar daños en la estructura. Finalmente, Mark opina que en lugar de la doble batería de arbotantes debió colocarse una sola batería, más inclinada, para alcanzar un sistema mucho más efectivo de transferencia de cargas hacia los contrafuertes.



**Figura 7.7** Análisis fotoelástico. Distribución de fuerzas internas. *Mark (1982)*

### 7.2.3 Maynou (2001)

Un estudio reciente ha sido presentado por Maynou (2001), haciendo un análisis de línea de presiones mediante un programa informático. Allí se comparan los resultados obtenidos a partir del programa con los resultados presentados por Rubió (1912). El análisis determina una cierta cantidad de líneas de presiones estables que se encuentren contenidas dentro de la geometría (en 2D) de un pórtico tipo. Así, se tiene una medida de la estabilidad de la estructura en función del número de estas líneas que se puedan encontrar.

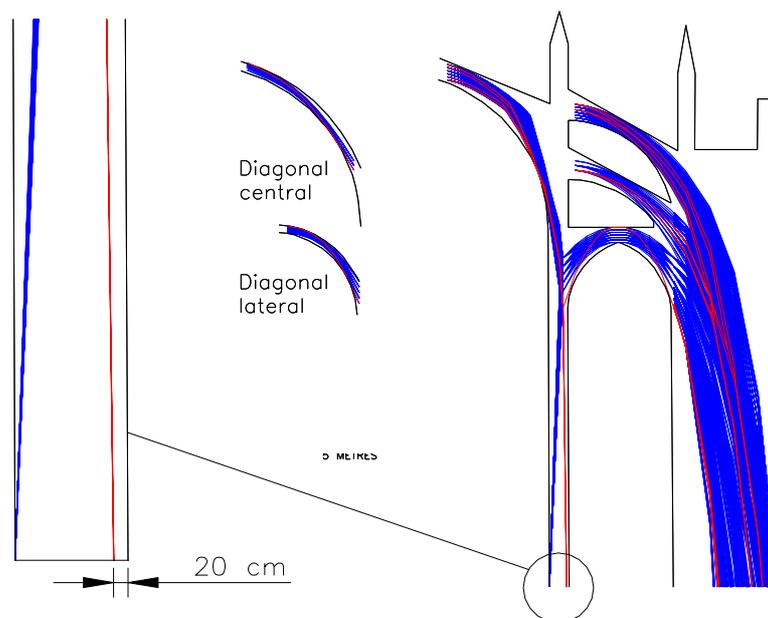
Se destacan las siguientes conclusiones planteadas por Maynou:

- Los sobrepesos colocados en la clave de los arcos torales ayudan a la estabilidad de la estructura. Se hicieron análisis sin incluir dichos sobrepesos, y se obtuvieron menos líneas de presiones estables posibles respecto al caso con la

estructura completa. Esto indica que la inclusión de la carga extra es favorable, tal como afirmaba Rubió.

- Es posible obtener curvas de presiones aceptables, aún sin tomar en cuenta el desplome de las columnas. En este punto se difiere de lo planteado por Rubió. Sin embargo, al despreciar el desplome de las columnas el número de curvas estables posibles disminuye de forma notoria, siendo por tanto recomendable tomar en cuenta esta deformación en el cálculo, y obtener así más posibilidades de equilibrio como resultado.
- De los resultados obtenidos con el programa informático, se llega a que la distancia óptima de desplazamiento del pilar para evitar los desplomes (45 cm según Rubió) debería ser de 31 cm.
- Las líneas de presiones en el arbotante inferior siempre parten desde la zona central del arranque superior, lo que confirmaría la aseveración de Rubió respecto a la idoneidad de la posición de este elemento estructural.

Finalmente, en este trabajo también se comentan las limitaciones del método utilizado por Maynou en el estudio de estructuras complejas, y las técnicas usadas para resolverlas. Por ejemplo, los problemas de origen geométrico se solventan con la eliminación de varios grados de libertad. Asimismo, se comenta la imposibilidad de simular la bóveda real, cuya geometría no es directamente transformable a dos dimensiones.



**Figura 7.8** Análisis mediante línea de presiones de la Catedral de Mallorca. *Maynou (2001)*

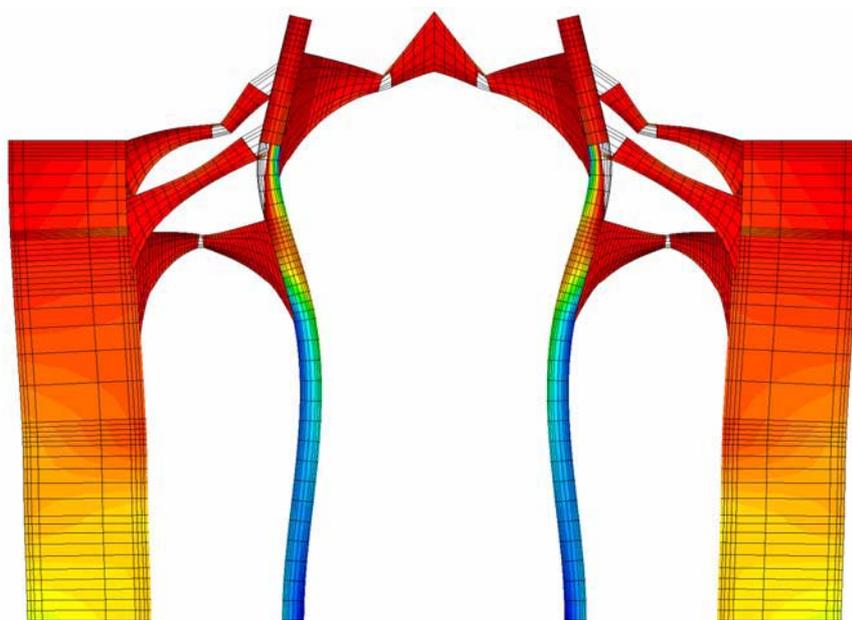
#### 7.2.4 Salas (2002)

Más recientemente, Salas (2002) analiza estructuralmente la catedral mediante dos métodos diferentes: el método de los elementos finitos con un modelo constitutivo de daño isotrópico y la formulación matricial generalizada (esta última comentada en la sección 2.2.3). En este trabajo se realizan comparaciones entre ambos métodos, así como la comprobación de la función de algunos elementos estructurales del edificio.

Como resultados de interés destacan los factores de multiplicación del peso propio necesarios para alcanzar el colapso de la estructura. Al emplear un modelo constitutivo de daño en el caso del análisis por el método de los elementos finitos se obtiene un factor de 1.7. Un valor similar se obtiene en el caso analizado con la formulación matricial generalizada, cuyo mecanismo de colapso se muestra en la figura 7.9. Nótese el sistema de rótulas<sup>1</sup> que se forma (las zonas en blanco indican fisuración del material).

También se debe mencionar el análisis sísmico hecho sobre el edificio, mediante la aplicación de cargas estáticas equivalentes para un período de retorno de mil años, de acuerdo a la normativa sísmica NCSE-02.

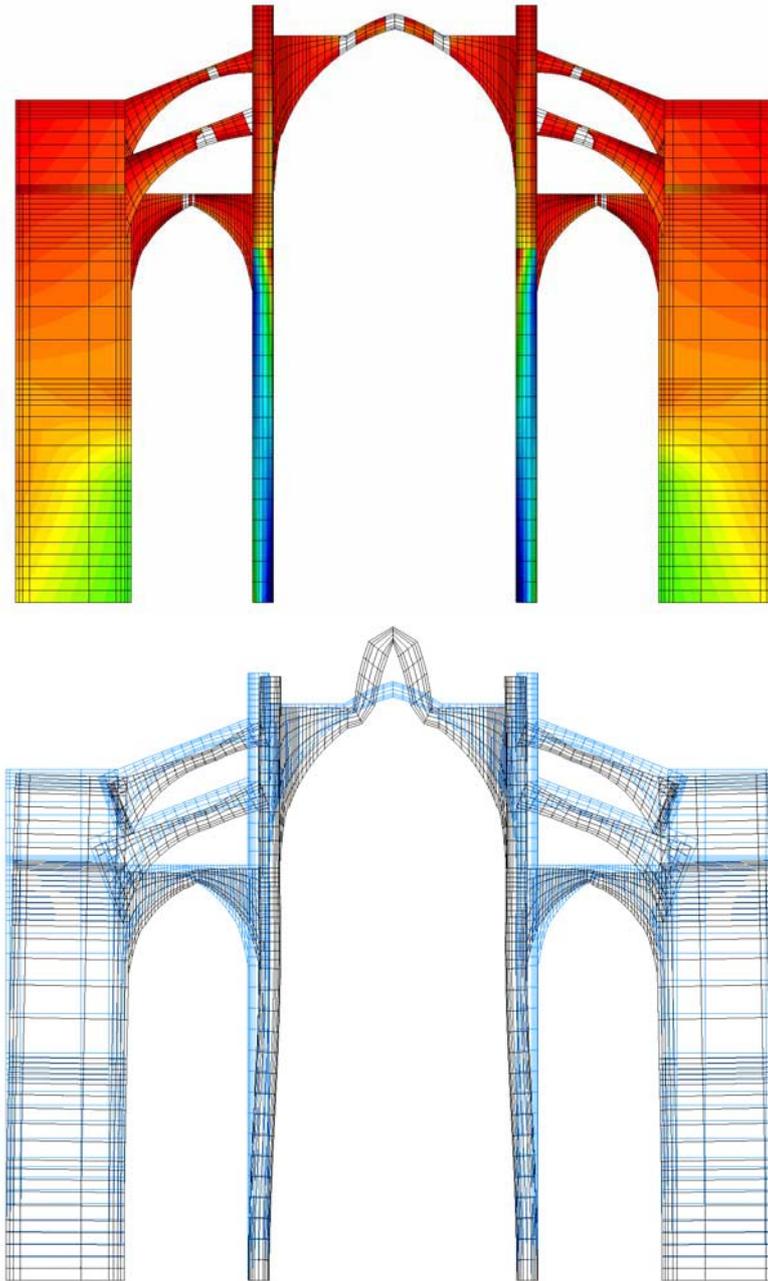
Finalmente, se hacen tres estudios de configuraciones alternativas, con el fin de analizar la validez del diseño original que incluye los sobrepesos en la clave del arco toral y la batería superior de arbotantes. A continuación se citan las conclusiones alcanzadas:



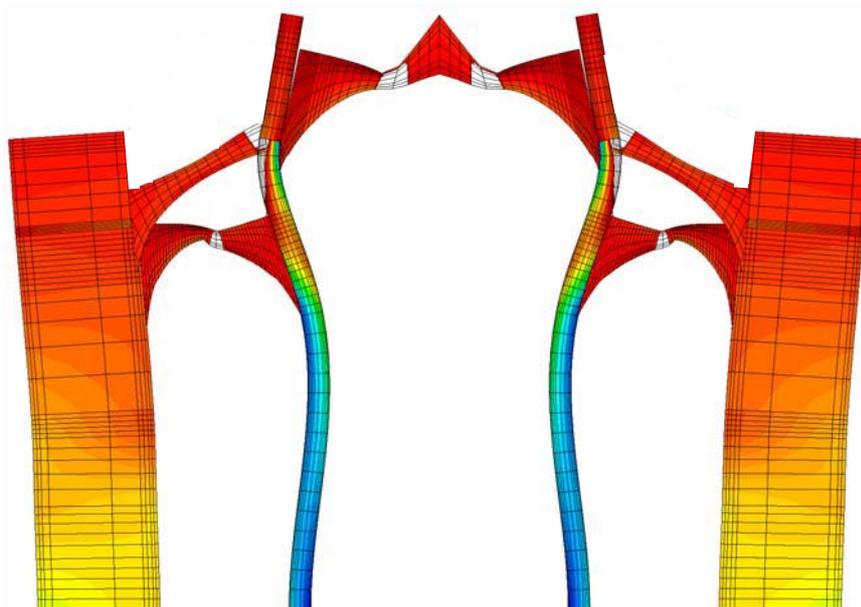
**Figura 7.9** Mecanismo de colapso con un factor de mayoración de carga de 1.7. *Salas (2002)*

<sup>1</sup> Estrictamente hablando, el modelo no es capaz de simular una *rótula* mediante rotaciones finitas, sino zonas de elevada curvatura que se comportan prácticamente como tales.

- *Los sobrepesos colocados en los arcos torales aseguran la estabilidad de la estructura. Se muestran los resultados de un análisis que no incluye estos sobrepesos, donde se alcanza el mecanismo de colapso al aplicar tan solo el 90% del valor total del peso propio. (ver figura 7.10)*



**Figura 7.10** Análisis sin sobrepeso de la bóveda central. Mecanismo de colapso con un factor de carga de 0.9. *Salas (2002)*



**Figura 7.11** Análisis despreciando el efecto de los arbotantes superiores. Mecanismo de colapso con un factor de carga de 0.7. *Salas (2002)*

- *La batería superior de arbotantes contribuye a la estabilidad de la estructura. Se efectuó un cálculo despreciando los efectos del peso y la rigidez de este elemento, alcanzándose el colapso al aplicar el 70% del peso propio de la estructura. La figura 7.11 muestra el mecanismo de colapso.*
- *La estructura es estable sin la pirámide de sobrepeso sobre el arco toral y sin la batería superior de arbotantes simultáneamente. También se estudió este caso particular, donde se desprecia la contribución de ambos elementos estructurales al mismo tiempo. Esta conclusión es interesante, pues pone de manifiesto que de haberse obviado la segunda batería de arbotantes, quizá no habría sido necesaria la inclusión de los contrapesos para evitar la flexión hacia arriba de la clave de los arcos torales. El fallo se alcanzó aplicando el peso propio incrementando por un factor de 1.6.*

### 7.3 Interpretación de las mediciones realizadas *in situ*

Recientemente se ha efectuado un levantamiento topográfico de la Catedral de Mallorca (González y Roca, 2003), donde se han recogido los valores de desplazamientos en ciertos puntos clave de la estructura. Estos desplazamientos dan una idea bastante aproximada de la deformada actual en los diferentes pórticos que conforman la edificación.

Sin embargo, antes de interpretar las mediciones es necesario comprender las condiciones bajo las que tiene lugar el análisis numérico. Este análisis se plantea sobre un *pórtico tipo*, que aproxima las pequeñas o moderadas diferencias que puedan existir entre pórticos a unas características geométricas y materiales representativas de toda la estructura.

Un modelo de este tipo será simétrico en la dirección transversal de la edificación, tanto en geometría como en cargas gravitatorias, y por ende sus resultados también lo serán. Además, al definir un solo pórtico tipo que se repite varias veces en la dirección longitudinal de la edificación es necesario establecer condiciones de contorno de simetría que simulen este fenómeno, tal como se comenta más adelante. Dichas condiciones se asemejan a las de deformación plana, en el sentido de que los desplazamientos longitudinales serán prácticamente nulos, además de que será imposible simular cargas actuantes en esa dirección. Estas dos simetrías limitan el modelo a que los desplazamientos horizontales originados por las cargas gravitatorias obtenidos sean *transversales y simétricos*.

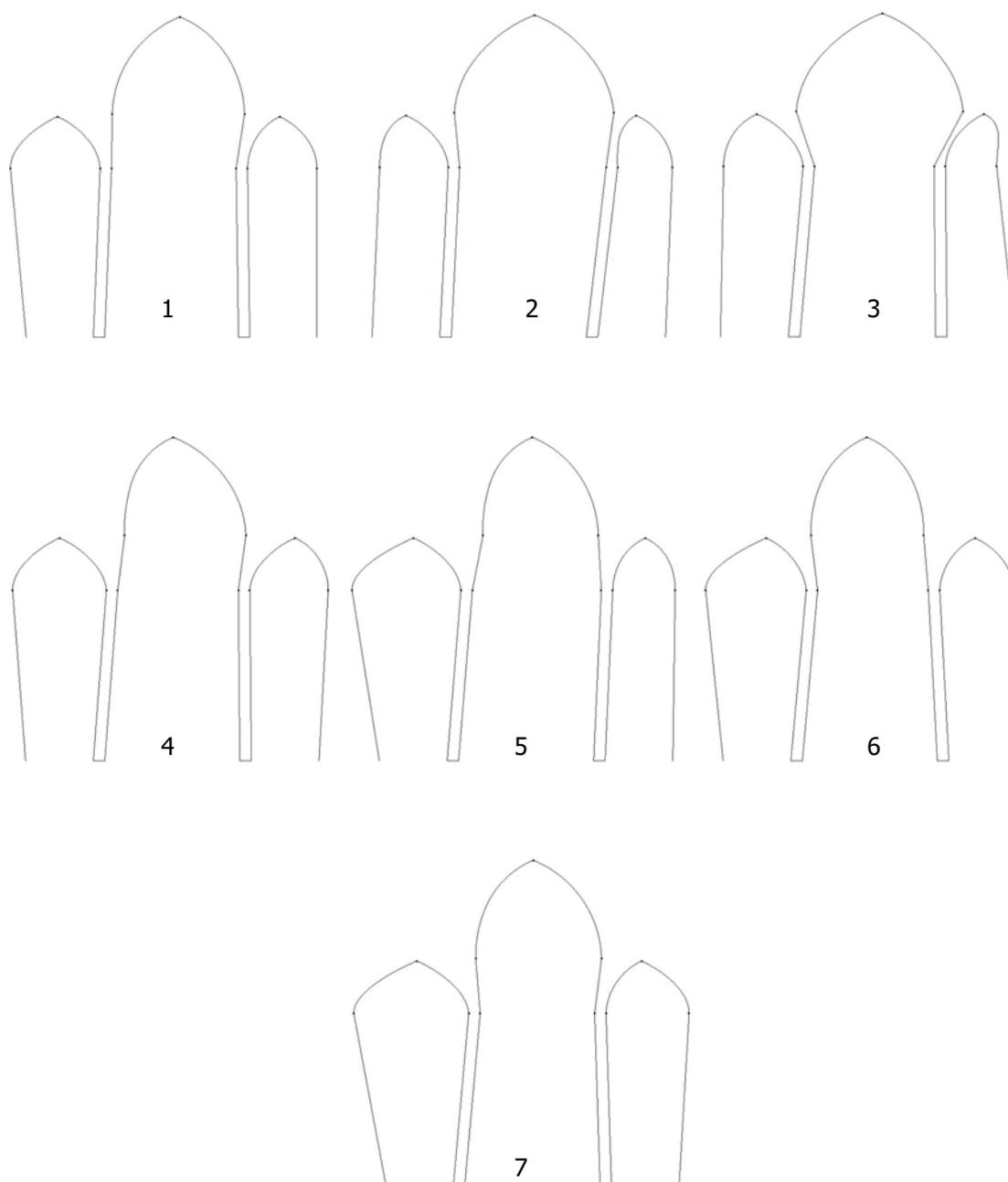
Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores se han escogido de los datos obtenidos del levantamiento topográfico solamente aquellos desplazamientos que puedan ser de interés para la comparación con los resultados numéricos. Dichos datos corresponden a los desplazamientos laterales (los que ocurren en la dirección transversal del edificio) en las claves y los arranques de las bóvedas centrales y laterales.

En la figura 7.12 se muestran las deformadas de cada pórtico, enumerados en orden este-oeste (figura 7.1). Las mediciones se resumen en la figura 7.13, donde se indican los valores de los desplazamientos horizontales en cada uno de los pórticos. La lista de datos dentro de los recuadros corresponde en orden al desplazamiento horizontal (en cm) en cada pórtico, siguiendo el mismo orden que en la figura 7.12.

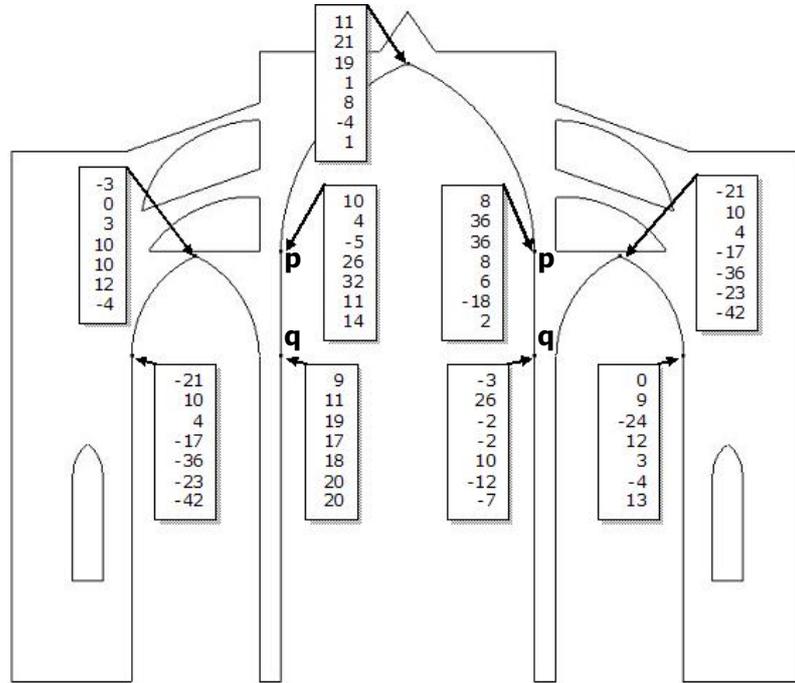
La gran dispersión en estos valores es patente, y por tanto es necesario analizarlos minuciosamente antes de su comparación con los desplazamientos que se obtienen del modelo numérico.

Se podría plantear como hipótesis de partida la existencia de una rotación global del edificio, debido a la cual se pierde la simetría respecto al eje central del pórtico. Luego, los desplazamientos de cada par de puntos simétricos se separan en dos movimientos supuestos:

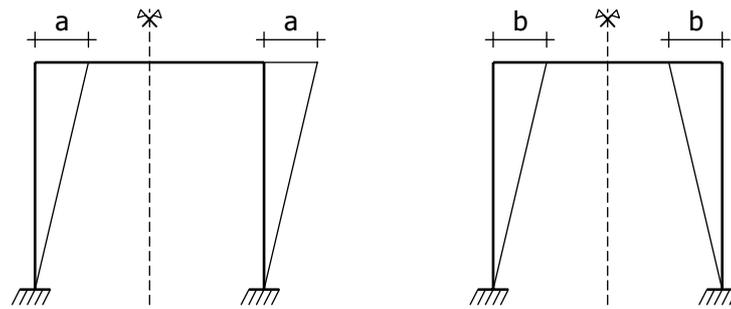
- un movimiento *antisimétrico* respecto a la vertical, representando el desplazamiento lateral global de la estructura ( $a$  en la figura 7.14); y
- un movimiento *simétrico* respecto a la vertical, relacionado con la simetría general de la estructura ( $b$  en la figura 7.14).



**Figura 7.12** Deformadas de los diferentes pórticos, enumerados en orden este-oeste (figura 7.1)



**Figura 7.13** Desplazamientos horizontales [cm] de los diferentes pórticos



**Figura 7.14** Separación en movimiento antisimétrico  $a$  y movimiento simétrico  $b$

Sobre la base de la figura 7.14 se pueden plantear las siguientes ecuaciones

$$d_n = a + b$$

$$d_s = a - b$$

y por tanto

$$a = (d_n + d_s)/2$$

$$b = (d_n - d_s)/2$$

donde  $d_n$  y  $d_s$  son desplazamientos horizontales medidos en el levantamiento topográfico en puntos simétricos de la estructura ubicados a la misma altura.

La observación se limita a los puntos donde acaban los pilares y los puntos de arranque de la bóveda central (puntos p y q en la figura 7.13, respectivamente) donde existen deformaciones notables en la estructura real. Los valores de  $d_n$  y  $d_s$  en esos puntos, así como los resultados de las ecuaciones anteriores en cada pórtico se resumen en la tabla 7.1. Allí también se incluyen los desplazamientos en la clave de la bóveda central, que se suponen relacionados con el valor de  $a$  en cada caso.

| <b>Pórtico</b> | <b>Nivel</b> | $d_n$ | $d_s$ | $a$  | $b$   | <b>Clave central</b> |
|----------------|--------------|-------|-------|------|-------|----------------------|
| <b>1</b>       | inferior (q) | 9     | -3    | 3    | 6     | 11                   |
|                | superior (p) | 10    | 8     | 9    | 1     |                      |
| <b>2</b>       | inferior (q) | 11    | 26    | 18.5 | -7.5  | 21                   |
|                | superior (p) | 4     | 36    | 20   | -16   |                      |
| <b>3</b>       | inferior (q) | 19    | -2    | 8.5  | 10.5  | 19                   |
|                | superior (p) | -5    | 36    | 15.5 | -20.5 |                      |
| <b>4</b>       | inferior (q) | 17    | -2    | 7.5  | 9.5   | 1                    |
|                | superior (p) | 26    | 8     | 17   | 9     |                      |
| <b>5</b>       | inferior (q) | 18    | 10    | 14   | 4     | 8                    |
|                | superior (p) | 32    | 6     | 19   | 13    |                      |
| <b>6</b>       | inferior (q) | 20    | -12   | 4    | 16    | -4                   |
|                | superior (p) | 11    | -18   | -3.5 | 14.5  |                      |
| <b>7</b>       | inferior (q) | 20    | -7    | 6.5  | 13.5  | 1                    |
|                | superior (p) | 14    | 2     | 8    | 6     |                      |

**Tabla 7.1** Desplazamientos horizontales [cm] y su división en componentes simétricas y antisimétricas

Observando cada pórtico por separado se aprecia que algunos poseen valores de  $a$  (supuesto movimiento global) con una magnitud muy similar en ambos niveles (como los números 2, 5 y 7). Igualmente, en el resto de los casos estos valores se encuentran dentro del mismo orden de magnitud. Asimismo, en casi todos los pórticos el desplazamiento horizontal de la clave de la bóveda central es próximo a la magnitud de  $a$ . Esto, junto a lo anterior, evidencia que la descomposición en los movimientos simétrico y antisimétrico es una aproximación aceptable.

Por otra parte, el valor de  $b$  (desplazamiento simétrico) del nivel inferior varía entre 4 y 16 cm (obviando el valor negativo que indica un desplazamiento hacia fuera en el pórtico 2), un rango más adecuado para ser comparado con los resultados obtenidos del modelo numérico simétrico, y que además presenta menor dispersión que los valores absolutos de desplazamientos. Este rango de valores será tomado como referencia para evaluar la exactitud de los resultados obtenidos del análisis numérico de la estructura.

Finalmente, se debe destacar que a pesar del tratamiento dado a las mediciones sigue existiendo una dispersión importante. Es posible que esta dispersión esté relacionada con el proceso constructivo de la edificación, dado que en algunos casos pasaron grandes períodos entre la construcción de un pórtico y otro, e incluso durante la construcción de un mismo pórtico. Estos largos períodos pueden traer como consecuencia el empleo de diferentes técnicas constructivas, al cambiar los arquitectos encargados de la obra o las exigencias de las autoridades que solicitaban su construcción.

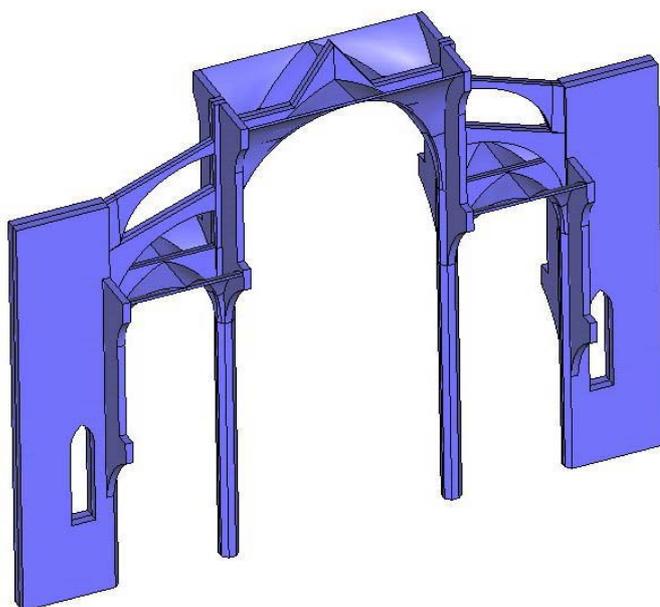
## 7.4 Modelo numérico

### *Geometría*

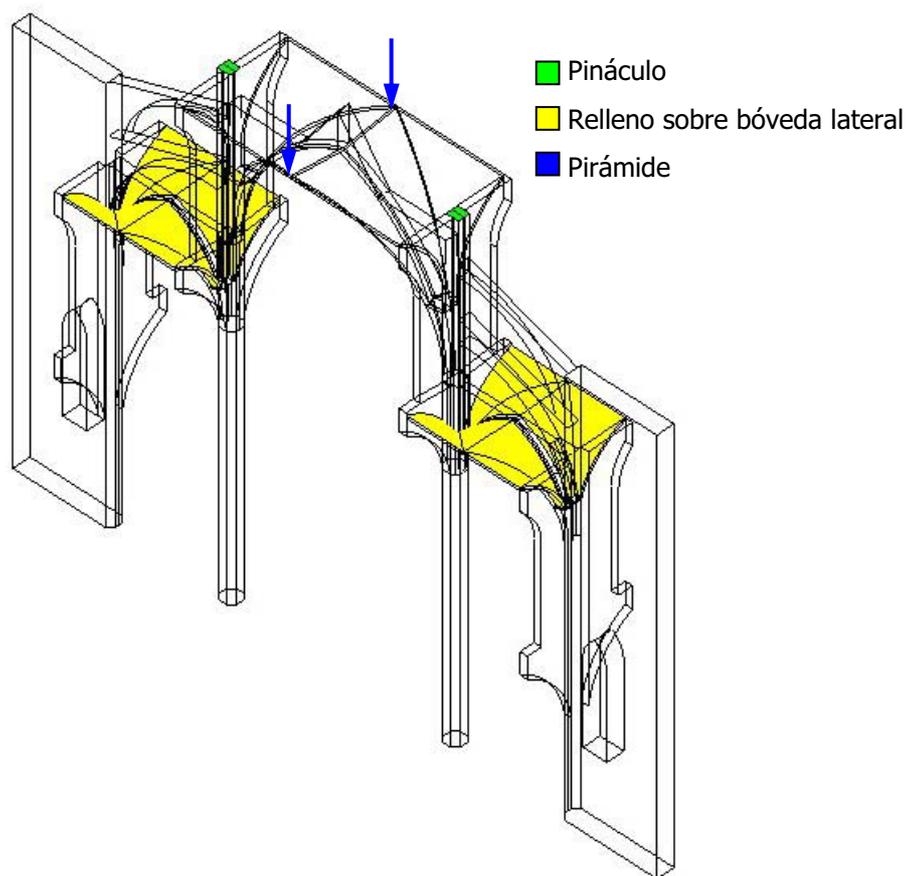
El modelo numérico se construye en tres dimensiones empleando el programa GiD (v. 7), sobre una geometría creada por Casarin y Magagna (2001) y Salas (2002). Se considera un pórtico tipo, que se divide tomando en cuenta las simetrías existentes y definiendo las condiciones de contorno adecuadas, con el fin de reducir el dominio de estudio al mínimo. En la figura 7.15 se muestra la geometría del pórtico tipo analizado.

### *Cargas*

Algunos elementos no estructurales, como los pináculos y las pirámides de sobrepeso en las claves de las bóvedas no se incluyen en el modelo, definiéndose en su lugar las cargas correspondientes. En ambos casos se toman los valores adoptados en Rubió (1912).



**Figura 7.15** Pórtico tipo

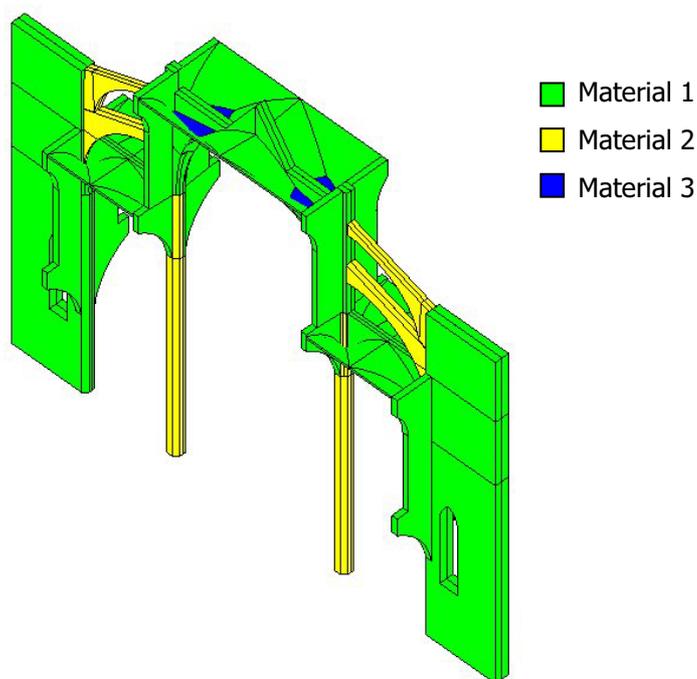


**Figura 7.16** Cargas equivalentes a elementos omitidos en la geometría

Para el pináculo ubicado en la parte superior del claristorio (sobre el eje de la columna), se utiliza un peso de 283.5 kN, repartido en la superficie de apoyo, dando como resultado una carga de 2.70 MPa. El peso de la pirámide en la clave del arco toral es de 44.1 kN, que tras aplicar las condiciones de simetría se representa mediante una carga puntual de 11.03 kN. Finalmente, el relleno sobre las bóvedas laterales también se omite en la geometría, colocándose una carga distribuida equivalente de 3600 Pa (ver figura 7.16).

### *Materiales*

En los casos estudiados con no linealidad material se emplea el modelo de daño tracción/compresión descrito en el apartado 3.3.2. Para definir los parámetros materiales de la obra de fábrica se utilizan los resultados experimentales de ensayos a compresión sobre la piedra (González y Roca 2003) de diferentes zonas de la estructura, y se siguen las recomendaciones del Eurocódigo 6 (EC-6) y PIET 70. Así, y adoptando un criterio basado en la observación de la estructura, se determinan dos materiales principales que conforman el edificio. Un material común para la mayoría de los elementos estructurales: contrafuertes, bóvedas, claristorios y muros; y otro material, más resistente, para los pilares y arbotantes. También se definió un tercer material, más pobre, para simular el relleno de la bóveda central. En la figura 7.17 se muestra la distribución de los materiales en la estructura.



**Figura 7.17** Materiales (las características se indican en la tabla 7.2)

Con el fin de determinar los parámetros necesarios para caracterizar el modelo constitutivo se adopta un criterio que consiste en tomar un valor de resistencia a tracción muy pequeño (5% de la resistencia a compresión), y la rigidez o módulo de Young como mil veces la resistencia a compresión (EC-6). En la tabla 7.2 se resumen los parámetros empleados en la caracterización de los diferentes materiales. En todos ellos se supone un valor de coeficiente de Poisson de 0.2.

|                   | <b>Elementos estructurales</b>               | <b>Módulo de Young (MPa)</b> | <b>Resistencia a compresión (MPa)</b> | <b>Resistencia a tracción (MPa)</b> |
|-------------------|--|------------------------------|---------------------------------------|-------------------------------------|
| <b>Material 1</b> | contrafuertes, bóvedas, claristorios y muros | 2 000                        | 2                                     | 0.1                                 |
| <b>Material 2</b> | pilares y arbotantes                         | 8 000                        | 8                                     | 0.4                                 |
| <b>Material 3</b> | relleno bóveda central                       | 1 000                        | 1                                     | 0.05                                |

**Tabla 7.2** Parámetros materiales adoptados en los análisis

### *Energía de fractura*

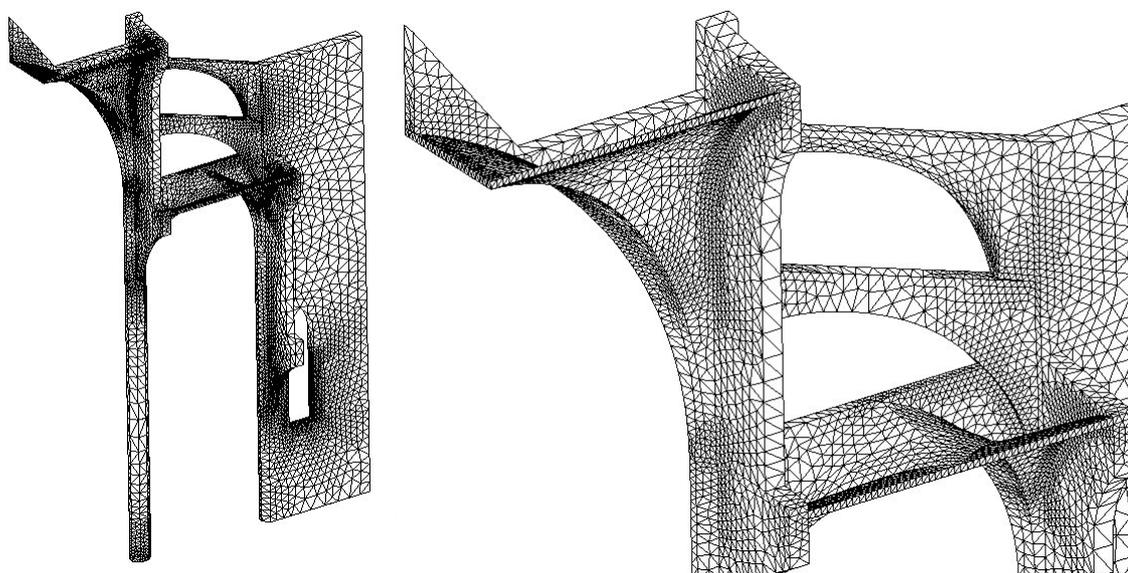
Otro de los parámetros característicos del modelo de daño tracción/compresión es la energía de fractura, la cual define el ablandamiento del material una vez el daño se ha empezado a desarrollar. En los primeros casos estudiados, y en aras de la simplicidad, se supone una energía de fractura infinita, lo que sería aproximadamente equivalente al empleo de un modelo de plasticidad perfecta, donde no existe ablandamiento del material. Este criterio es similar a las recomendaciones presentes en el Eurocódigo 6 (EC-6) para caracterizar el comportamiento de la obra de fábrica. Sin embargo, más adelante se estudia el efecto de la variación de este parámetro.

### *Fluencia*

Para simular la fluencia del material se utiliza el modelo constitutivo de viscoelasticidad con una cadena de Maxwell, detallado en el apartado 3.3.1. Tal como se comenta allí, es necesario definir dos parámetros para su caracterización: la rigidez y el tiempo de retardo de la cadena. Sin embargo, con los datos de monitorización de los que se dispone y debido a la antigüedad de la edificación, es prácticamente imposible obtener valores reales para calibrar dichos parámetros. Por tanto, se tomaron valores arbitrarios para caracterizar la fluencia, relacionados con el seudotiempo (también arbitrario) que se utilizará en el cálculo. Dichos valores se especifican en cada caso.

*Malla de elementos finitos*

Una vez definida la geometría y los materiales del modelo se hicieron varios análisis lineales y no lineales con diversas mallas, con el fin de diferenciar las zonas donde sería recomendable refinar el tamaño de los elementos de aquellas donde se podrían utilizar elementos relativamente grandes. Este proceso de optimización de la malla es importante en análisis tridimensionales con geometría complicada, pues permite reducir el tiempo de cálculo sin perder exactitud en los resultados relevantes. La figura 7.18 muestra la malla de elementos finitos empleada tras considerar las condiciones de simetría. La malla está compuesta por 49.979 elementos tetraédricos de cuatro nodos, con un total de 14.689 nodos. Las zonas de mayor concentración de elementos corresponden a la base del ventanal en el contrafuerte, con un tamaño de arista del tetraedro de 0.2 m. Este mismo tamaño se emplea en la base del pilar y en la zona en que el pilar se une con el claristorio. Un tamaño del orden de 0.3 m se define en el punto de unión de los arbotantes con el claristorio. En estos casos se utilizan tamaños pequeños por ser zonas con gradientes de tensiones relativamente altos, en los que se localiza el daño. En las bóvedas se define un solo elemento en el espesor de 0.25 m y en las zonas de unión de otros elementos estructurales a éstas existe una transición lenta hacia tetraedros más grandes (figura 7.18). Los elementos mayores de la malla tienen un tamaño del orden de 1 m, y se encuentran principalmente en la zona alta del contrafuerte, en la parte central del pilar y en los claristorios.



**Figura 7.18** Malla de elementos finitos

## 7.5 Planteamiento del análisis estructural

El análisis estructural de la Catedral de Mallorca se plantea en tres partes diferenciadas. En primer lugar se estudia el pórtico tipo en tres dimensiones bajo cargas gravitatorias con el modelo de daño distribuido. Luego se hacen varios análisis similares a los anteriores, pero empleando el modelo de daño localizado. Finalmente, la estructura se analiza bajo cargas sísmicas utilizando los modelos de daño distribuido y localizado.

### *Primera parte: cargas gravitatorias, modelo de daño distribuido*

El primer modelo se analiza bajo cargas gravitatorias instantáneas, incluyendo no linealidad material. Luego se realiza el mismo análisis, pero simulando el proceso constructivo en dos fases, para observar los efectos del análisis secuencial en la respuesta de la estructura. En el siguiente apartado se analiza el mismo modelo, esta vez añadiendo los efectos diferidos en el tiempo. Finalmente se muestran los resultados del modelo con no linealidad geométrica, comparándolos con el caso anterior.

### *Segunda parte: cargas gravitatorias, modelo de daño localizado*

En primer lugar se realiza un modelo bidimensional del pórtico tipo, equivalente al modelo en tres dimensiones utilizado en cálculos anteriores. Luego se hace un análisis comparativo entre ambos modelos, utilizando el modelo de daño distribuido. Posteriormente se procede con varios análisis bidimensionales empleando el modelo de daño localizado, para finalmente hacer un análisis de sensibilidad ante diversos parámetros materiales. En todos los casos la carga gravitatoria se aumenta de manera ficticia hasta alcanzar el colapso de la estructura.

### *Tercera parte: cargas sísmicas*

Las cargas sísmicas se simulan mediante una fuerza gravitatoria actuante en dirección horizontal. Se emplea un modelo bidimensional en el que se ha eliminado la condición de simetría respecto al eje que pasa por la clave de las bóvedas centrales. Al igual que en la parte anterior, se emplea el modelo de daño localizado, si bien se hace alguna comparación con resultados obtenidos con el modelo de daño distribuido, en dos y en tres dimensiones. Finalmente se hace un análisis incluyendo una barra metálica de refuerzo que une la parte superior del pilar con el contrafuerte.

La tabla 7.3 muestra un resumen de los análisis efectuados sobre la Catedral de Mallorca.

| Análisis | Sección | NLM | NLG | AS | INST | DIF | Modelo | DIM   | Comentarios                          |
|----------|---------|-----|-----|----|------|-----|--------|-------|--------------------------------------|
| 1        | 7.6     | X   |     |    | X    |     | DD     | 3D    |                                      |
| 2        | 7.7     | X   |     | X  | X    |     | DD     | 3D    |                                      |
| 3        | 7.8     | X   |     | X  |      | X   | DD     | 3D    |                                      |
| 4        | 7.9     | X   | X   | X  |      | X   | DD     | 3D    |                                      |
| 5        | 7.10    | X   |     |    | X    |     | DD     | 2D/3D | Gravedad aumentada de forma ficticia |
| 6        |         | X   |     |    | X    |     | DL     | 2D    |                                      |
| 7        | 7.12    | X   |     |    | X    |     | DD     | 2D/3D | Cargas sísmicas                      |
| 8        |         | X   |     |    | X    |     | DL     | 2D    |                                      |
| 9        | 0       | X   |     |    | X    |     | DL     | 2D    | Refuerzo anti-sísmico                |

**Tabla 7.3** Resumen de los análisis efectuados (**NLM**: No Linealidad Material; **NLG**: No Linealidad Geométrica; **AS**: Análisis Secuencial; **INST**: Análisis Instantáneo; **DIF**: Análisis Diferido; **DD**: Daño Distribuido; **DL**: Daño Localizado)

## 7.6 Análisis instantáneo con no linealidad material

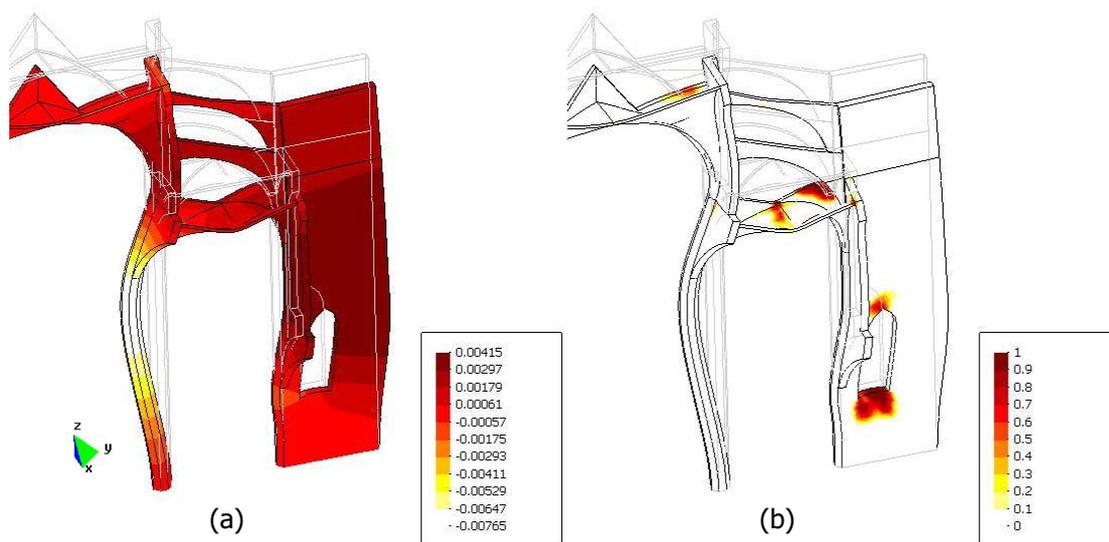
A continuación se presentan los resultados obtenidos en un análisis instantáneo bajo peso propio empleando el modelo constitutivo de daño distribuido tracción-compresión.

En primer lugar se observa el estado tenso-deformacional alcanzado tras aplicar la totalidad del peso propio de la estructura. Debido a la naturaleza no lineal del análisis la carga se aplica en diez incrementos del 10% cada uno.

En la figura 7.19 se muestra la deformada del pórtico tipo aumentada 300 veces. En ella se aprecian los desplomes del pilar hacia la nave central y del contrafuerte hacia la parte exterior de la estructura. Ambas tendencias coinciden cualitativamente con el estado actual observado en la estructura (sección ☉). Sin embargo, los valores cuantitativos (parte (a) de la figura) distan de acercarse a las mediciones reales hechas recientemente en el edificio. El mayor valor de desplazamiento horizontal obtenido en la columna es de 0.76 cm, una magnitud que se encuentra muy por debajo del rango de desplazamientos simétricos estimado en la sección ☉, que va de 4 a 16 cm.

En la figura 7.19b se advierte que el modelo es capaz de reproducir el daño que ocurre en los ventanales de los contrafuertes, del que se tiene evidencia por la presencia de unas fisuras importantes, ya reparadas (figura 7.20). También se observa daño en la bóveda lateral y en el muro ubicado sobre la bóveda central. En general, el resto de la estructura está prácticamente intacto. En el análisis se obtuvieron valores despreciables de daño a compresión.

Tras el análisis anterior, se llevó a cabo uno similar, pero incrementando de manera ficticia el peso de la estructura hasta alcanzar el colapso. Si bien estas condiciones de carga son poco realistas, su estudio puede ser útil para apreciar el mecanismo de fallo que se forma, así como para determinar el factor de carga necesario para llegar al colapso.

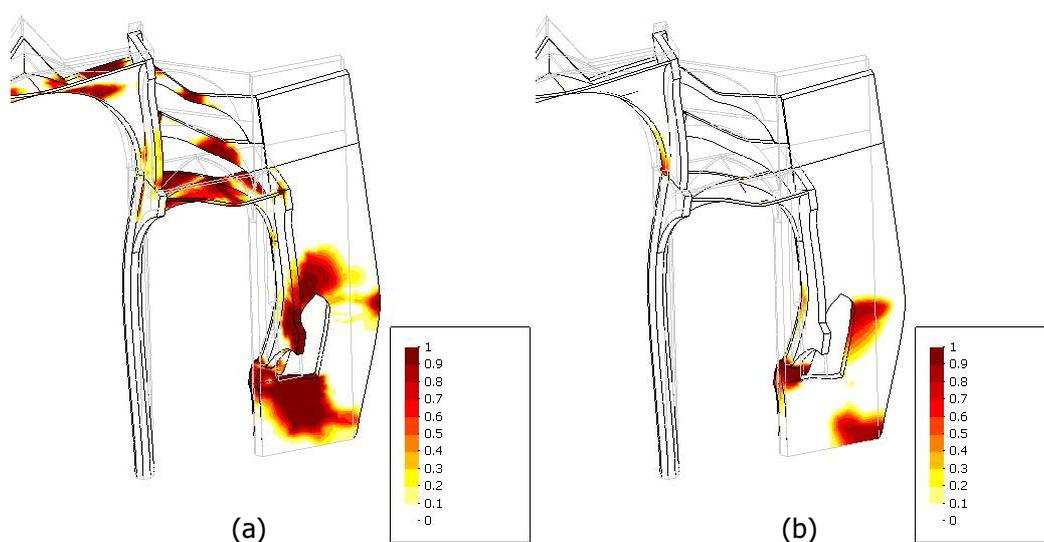


**Figura 7.19** Deformada x 300 (a) Desplazamientos horizontales [m] (b) Daño a tracción



**Figura 7.20** Fisuras en los ventanales de los contrafuertes

La figura 7.21 muestra el mecanismo de colapso de la estructura. Se observa que la estructura falla principalmente a causa de la fractura que ocurre en el contrafuerte, a la altura de la base del ventanal. Allí se concentra gran cantidad de daño a tracción y en zonas muy próximas, también a compresión. Por su parte, la bóveda lateral está dañada casi completamente. Finalmente destacan las rótulas que se forman en los arbotantes y algo de daño en la bóveda central. El factor de carga alcanzado en el colapso es de aproximadamente 2. Estos resultados se vuelven a revisar en la sección 7.10, cuando se comparan con los que se obtienen del modelo de daño localizado.



**Figura 7.21** Mecanismo de colapso (a) Daño a tracción (b) Daño a compresión

## 7.7 Análisis secuencial para la simulación del proceso constructivo con no linealidad material

El objetivo del siguiente análisis es evaluar la posibilidad de que efectivamente los desplomes de los pilares ocurrieron durante el levantamiento de la catedral, a causa del procedimiento empleado por los constructores.

Según un estudio basado en documentos antiguos relacionados con la administración de los recursos para llevar a cabo la obra, presentado en el informe de González y Roca (2003), el proceso habitual para construir un pórtico tipo podría haber sido el siguiente: Se comienza por los contrafuertes y por las capillas laterales (figura 7.22a). Luego se erigen los pilares, tal como se muestra en la figura 7.22b. Posteriormente se construyen las bóvedas laterales, quedando la forma de la figura 7.22c. En esta configuración, los empu-

jes horizontales provenientes de las bóvedas laterales (ver figura) no están compensados por elementos estructurales. Así, es probable que los desplomes de los pilares se deban a este desequilibrio ocurrido durante la construcción de la catedral. Finalmente, tras la construcción de la bóveda central se tiene el pórtico completo mostrado en la figura 7.22d.

La aproximación en el modelo numérico para simular el proceso constructivo consiste en la división de la estructura en dos partes mediante un corte horizontal justo por encima de la bóveda lateral, tal como se observa en la figura 7.23. Así, y partiendo del mismo modelo geométrico descrito en el apartado anterior, el cálculo se efectúa en dos fases: primero se analiza la parte inferior solamente, y luego, mediante la herramienta de activación/desactivación de elementos, se “activan” los elementos del resto de la estructura, continuando con el cálculo a partir del estado tenso-deformacional obtenido en la primera fase.

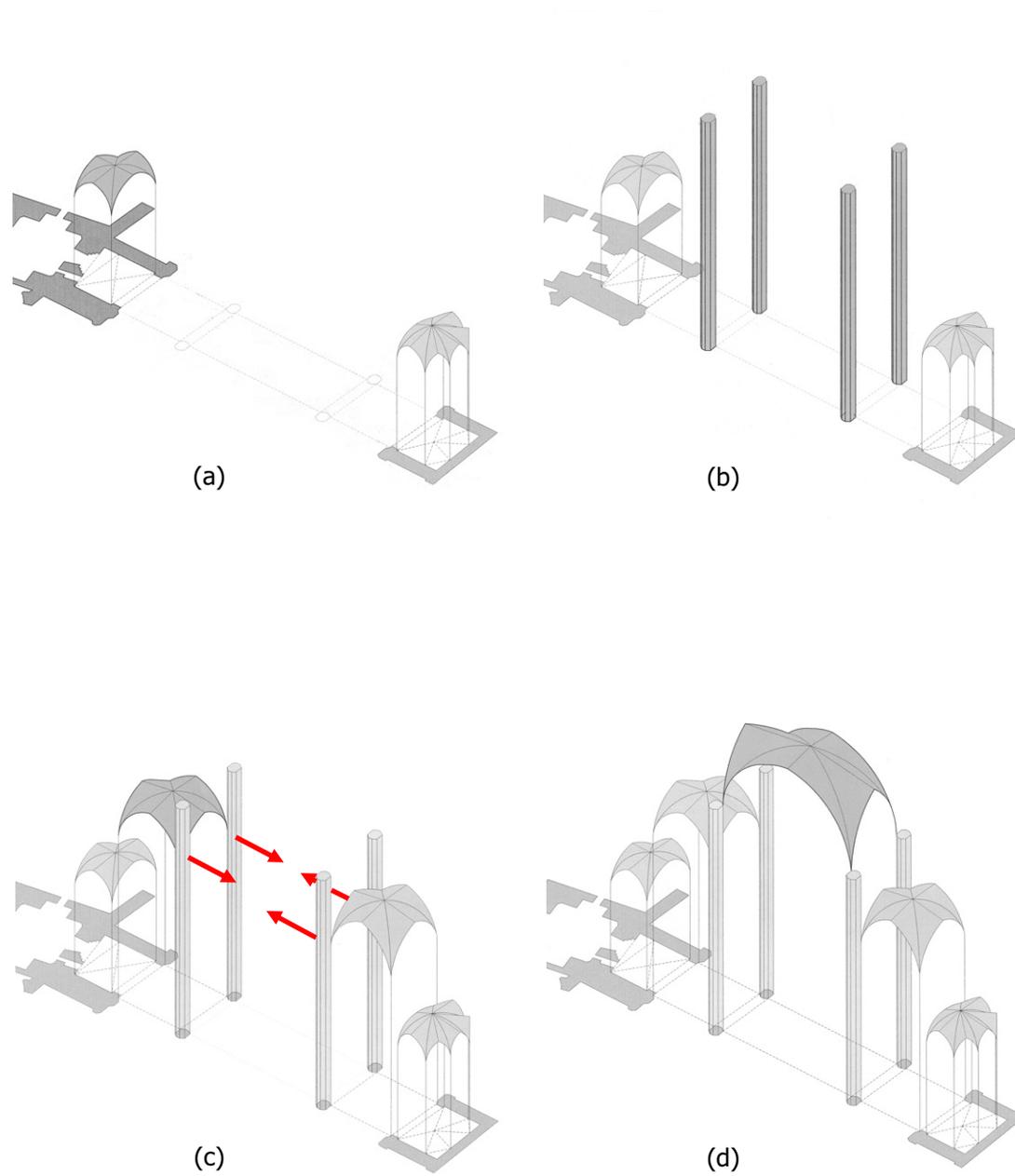
En este cálculo se tomaron en cuenta las consideraciones comentadas en el apartado C.2.1, respecto a la modificación de las coordenadas de los elementos que se activan en la segunda fase de construcción.

Una vez efectuado el cálculo, se observaron varios fenómenos de interés en la primera fase de construcción. El primero de ellos es el desplazamiento horizontal en la parte superior del pilar, que alcanza los 3 cm (unas cuatro veces el valor obtenido en el caso analizado en una sola fase) lo que confirmaría que estos desplomes de las columnas sí pudieron haber ocurrido durante la construcción de la estructura.

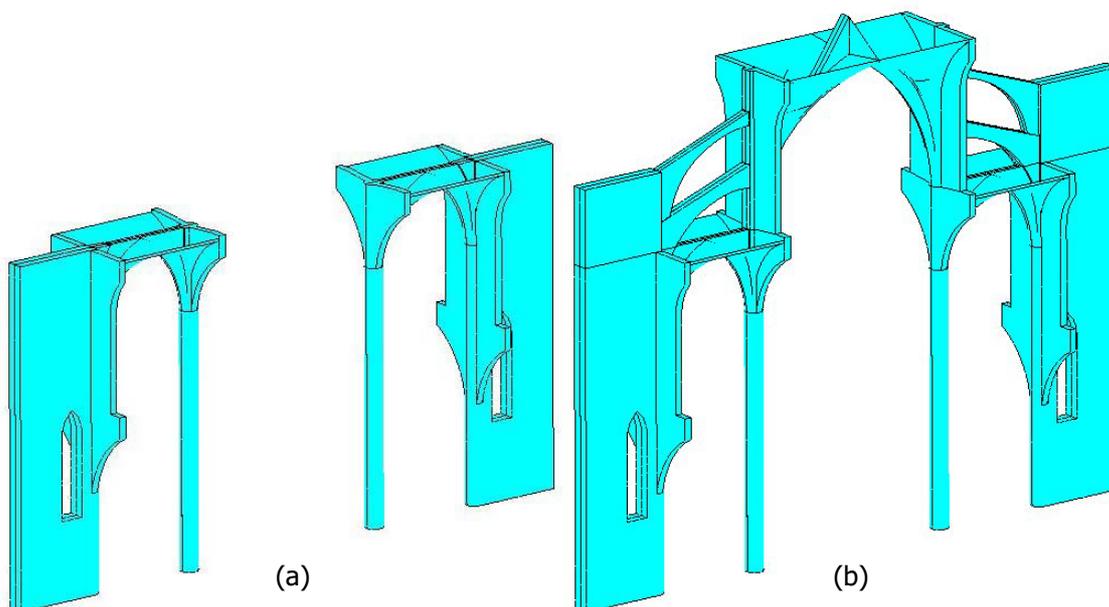
Respecto a la distribución del daño, se observa una mayor afectación del material en la cara interna del pilar (figura 7.24) que no se encontraba en el análisis anterior, así como más zona dañada en el muro ubicado sobre la bóveda lateral. A simple vista no se han observado estos daños en la estructura real, si bien esta zona aún no ha sido objeto de una inspección detallada.

Lo más remarcable es que, a pesar del aparente desequilibrio, esta configuración parcial de la estructura parece estable, y por tanto podría ser que realmente la construcción hubiera seguido esta secuencia.

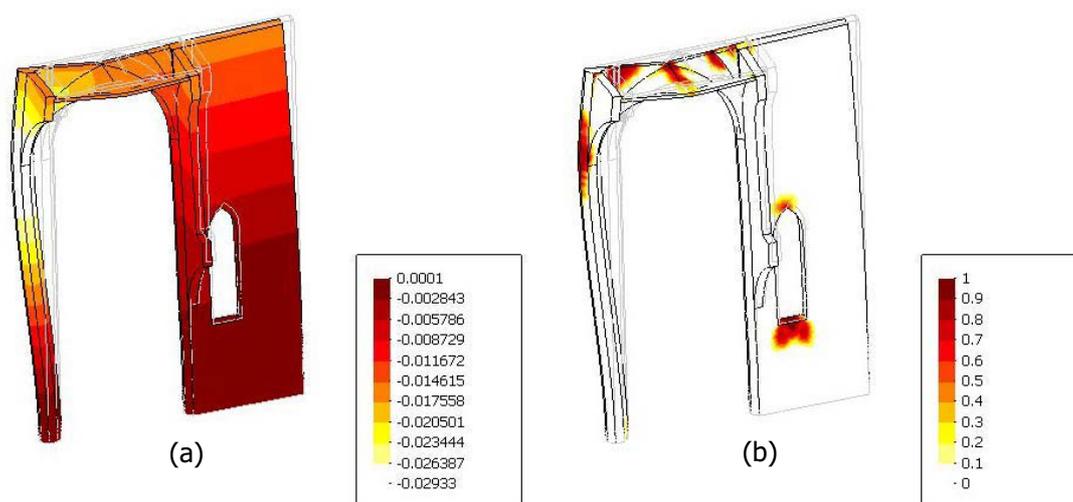
Tras la segunda fase de construcción, se observa que el desplazamiento horizontal de la parte superior del pilar ha disminuido respecto a la primera fase, como se muestra en la figura 7.25a. Este efecto es esperable, ya que los empujes provenientes de la bóveda central actúan en dirección contraria a aquellos originados por la bóveda lateral. Así, el valor obtenido es de 1.84 cm, que sigue siendo más del doble de los 0.76 cm obtenidos en el caso sin simular el proceso constructivo.



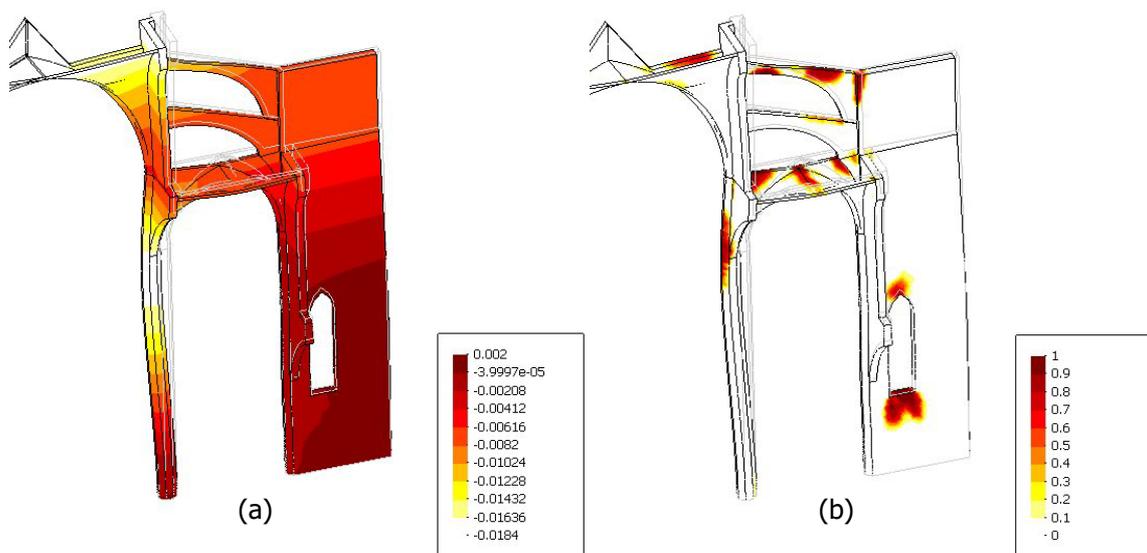
**Figura 7.22** Proceso constructivo: (a) Capillas (b) Pilares (c) Bóvedas laterales (d) Bóveda central



**Figura 7.23** (a) Primera fase de construcción (b) Segunda fase de construcción



**Figura 7.24** Primera fase de construcción. Deformada x 50 (a) Desplazamientos horizontales [m] (b) Daño a tracción



**Figura 7.25** Segunda fase de construcción. Deformada x 50 (a) Desplazamientos horizontales [m] (b) Daño a tracción

Al igual que el caso anterior, el daño a compresión aparece en una zona muy pequeña de la estructura, con valores muy reducidos en ambas fases. A todos los resultados mostrados que implican el análisis secuencial (en esta sección y siguientes) se les ha aplicado el procedimiento para su correcta visualización descrito en la sección C.2.2.

## 7.8 Análisis secuencial diferido con no linealidad material

El siguiente análisis estructural está relacionado con las deformaciones diferidas en el tiempo. Las cargas aplicadas durante largos períodos producen un efecto de fluencia en el material que pudiera ser de importancia en el caso de este edificio.

Uno de los objetivos de este análisis es observar si las deformaciones que se aprecian actualmente en la edificación pudieron haber sido causadas por la fluencia del material. También se busca estudiar la posibilidad de que las deformaciones diferidas en el tiempo, en caso de seguir progresando, puedan llevar la estructura al colapso.

En este estudio se utiliza igualmente el análisis secuencial para simular el proceso constructivo, pero esta vez en tres etapas. Las dos primeras coinciden con el modelo anterior, mientras que en la tercera fase se deja transcurrir el tiempo, para observar el aumento de las deformaciones debido a la fluencia.

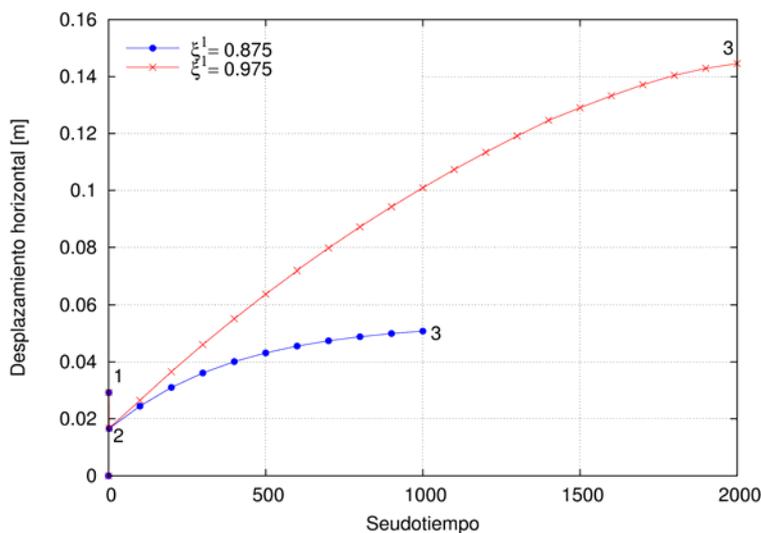
Antes de efectuar el cálculo es necesario determinar los parámetros viscoelásticos del material, de acuerdo a la sección 3.3.1. En primer lugar hay que definir el porcentaje de la rigidez del material susceptible a la fluencia (es decir, el factor  $\xi^i = E^i/E$  de la figura 3.5, para  $i = 1$ ). En este sentido, se han tomado dos valores relativamente altos, con el fin de estudiar la estructura en condiciones más bien extremas, y al mismo tiempo observar la incidencia de este factor en los resultados. Los valores adoptados son  $\xi^1 = 0.875$  y  $\xi^1 = 0.975$ , lo que indica que en el primer caso la rigidez puede descender hasta en un 87.5%, y en el segundo hasta en un 97.5%.

En ambos cálculos se utiliza un tiempo de retardo  $\tau = 50$  unidades de tiempo. Este parámetro es de menor importancia, pues su influencia es relativa a la cantidad de pasos de tiempo necesarias para completar el cálculo. En este caso el análisis se lleva a cabo para un seudotiempo de aplicación de carga constante (tercera fase) de hasta 2.000 unidades de tiempo. Las dos fases de construcción ocurren en una unidad de tiempo cada una, de manera que sus efectos son prácticamente instantáneos.

Es importante hacer hincapié en el hecho de que este estudio tiene sólo valor cualitativo, al desconocerse la magnitud real de la fluencia, siendo prácticamente imposible calibrar los parámetros materiales necesarios en el modelo.

Al estudiar las deformaciones diferidas en el tiempo combinadas con la construcción por fases se pueden originar diferentes modos de fluencia de signos contrarios. En el caso particular de la Catedral de Mallorca se observa que en la primera etapa de construcción la dirección de los desplazamientos horizontales en la parte superior del pilar tiende hacia el interior de la catedral, mientras que la activación de la segunda fase origina una tendencia inversa. Por tanto, es interesante observar qué modo de deformación prevalece sobre el otro al incluir la fluencia.

En la figura 7.26 se muestra el desplazamiento horizontal de la parte superior del pilar en función del tiempo, para cada uno de los valores de  $\xi^1$  usados en el cálculo. Destacan tres puntos de cada curva: el punto 1 es el desplazamiento tras la primera etapa de construcción, mientras que el punto 2 es el valor al completar la estructura (final de la segunda fase). Nótese lo comentado anteriormente: los empujes ocasionados por la presencia de la bóveda central actúan en sentido opuesto a la tendencia de la estructura de la primera fase. Finalmente, el punto 3 de cada curva es el desplazamiento alcanzado tras la fluencia. Para el caso del material con menor capacidad de fluencia ( $\xi^1 = 0.875$ ) se observa una tendencia a la estabilización tras unas 1000 unidades de seudotiempo, mientras que en el otro caso ( $\xi^1 = 0.975$ ) esta tendencia se alcanza luego de 2000 unidades de seudotiempo. Asimismo, se observa un incremento del desplazamiento del orden del 300% al aumentar la capacidad de fluencia del material del 87.5% al 97.5%.

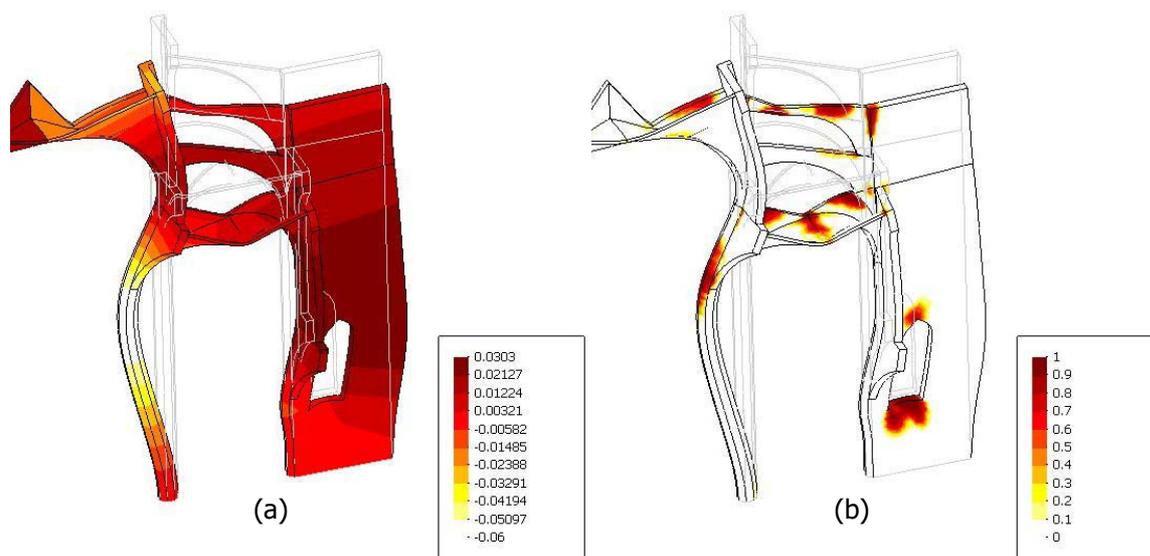


**Figura 7.26** Respuesta en el tiempo para diferentes valores de  $\xi^1$  para el caso geoméricamente lineal (valores positivos indican desplazamiento hacia la bóveda central)

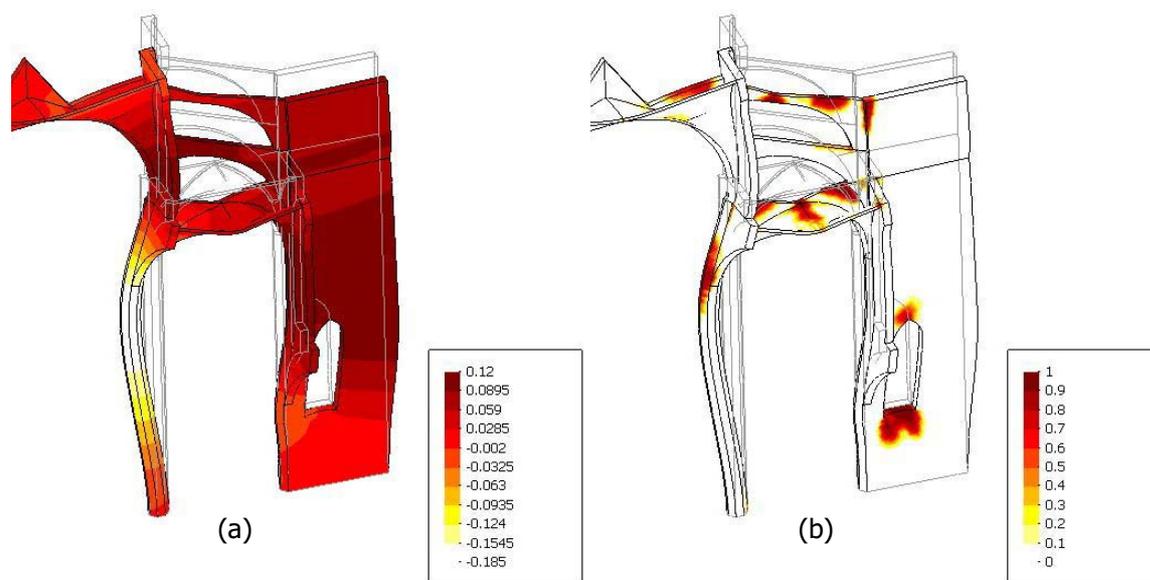
La tendencia de la estructura a estabilizarse es esperable, dadas la naturaleza del modelo constitutivo de viscoelasticidad empleado y las hipótesis de linealidad geométrica bajo las cuales se está trabajando. Por otro lado destacan los efectos del parámetro  $\xi^1$  empleado, con el cual se puede regular la capacidad de fluencia de la estructura, influyendo tanto en la magnitud final de los desplazamientos como en el tiempo necesario para la estabilización de dichos desplazamientos.

De acuerdo a lo anterior, y tal como se muestra en las figuras 7.27 y 7.28, la tendencia final de la parte superior del pilar es a desplomarse hacia la nave central. Esto coincide con lo observado en la estructura real. Además, el valor cuantitativo del desplazamiento horizontal para el caso con  $\xi^1 = 0.975$  es más cercano al medido en la realidad, al estar entre los 6 y 18 cm, coincidiendo con el rango aproximado obtenido en el apartado 7.4 (4 a 16 cm).

Con relación a los valores de daño finales, no se observan variaciones importantes respecto al final de la segunda fase (antes de la fluencia) en los valores de tracción ni de compresión. Esto es esperable, pues al trabajar bajo las hipótesis de pequeñas deformaciones y pequeños desplazamientos, el aumento de la deformación por fluencia no implica un aumento en el estado tensional de la estructura y, por tanto, el índice de daño se mantiene inalterado por la fluencia.



**Figura 7.27** Tercera fase de construcción (fluencia tras 1000 unidades de tiempo) con  $\xi^1=0.875$ . Deformada x 50 (a) Desplazamientos horizontales [m] (b) Daño a tracción



**Figura 7.28** Tercera fase de construcción (fluencia tras 2000 unidades de tiempo) con  $\xi^1=0.975$ . Deformada x 10 (a) Desplazamientos horizontales [m] (b) Daño a tracción

## 7.9 Análisis secuencial diferido con no linealidad material y geométrica

El siguiente paso en el estudio estructural de la Catedral de Mallorca consiste en realizar un análisis bajo las hipótesis de no linealidad geométrica. La formulación empleada, que se detalla en el capítulo 3, es la de pequeñas deformaciones y grandes desplazamientos, utilizando la formulación lagrangiana total.

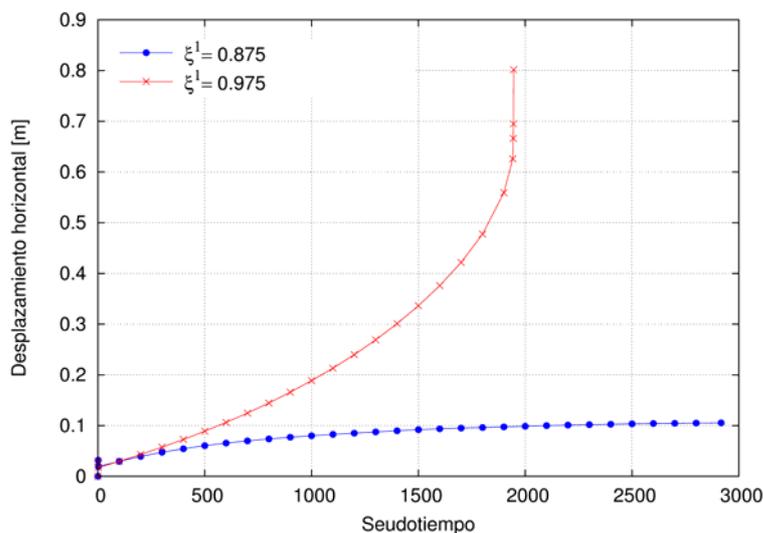
Para esto se toma el modelo anterior, que incluye el proceso constructivo en dos fases más una tercera para tener en cuenta los efectos de fluencia, y se analiza empleando el modelo de grandes desplazamientos. El objetivo principal de este análisis es observar si las deformaciones diferidas en el tiempo pueden incrementar la magnitud del daño de la estructura y, por ende, causar un posible colapso por fluencia. Además, se espera obtener valores de desplazamientos mayores que aquellos obtenidos en los modelos anteriores, geoméricamente lineales. Al igual que en el apartado anterior, se hacen sendos análisis para valores  $\xi^1$  de 0.875 y de 0.975.

En ambos casos, y tal como se esperaba, en las dos primeras etapas de cálculo (cuando el material aún no ha experimentado fluencia) los resultados obtenidos son muy similares a aquellos obtenidos del modelo de pequeños desplazamientos. Esto es natural dados el tipo de estructura y de materiales, donde se espera que los desplazamientos sean relativamente pequeños, independientemente de las hipótesis geométricas adoptadas.

Sin embargo, en la tercera etapa se observan los efectos del modelo empleado, al aparecer diferencias significativas respecto a los resultados anteriores. Esto se pone de manifiesto en la figura 7.29, donde se muestra la evolución del desplazamiento horizontal en la parte superior del pilar de ambos casos, en las tres fases de carga. Valores positivos representan desplazamientos hacia la bóveda central.

En primer lugar, si se compara la figura 7.29 con la figura 7.26 (casos geoméricamente lineales) se aprecian unos desplazamientos sensiblemente mayores cuando se emplean las hipótesis de grandes desplazamientos. Además, existen diferencias importantes según el parámetro  $\xi^1$  adoptado en los casos no lineales por la geometría. Concretamente, para el caso con  $\xi^1 = 0.875$  la estructura tiende a estabilizarse tras 3000 unidades de tiempo de cálculo, con un desplazamiento horizontal en la parte superior del pilar del orden de 12 cm. Sin embargo, si se utiliza  $\xi^1 = 0.975$ , la estructura colapsa antes de alcanzar las 2000 unidades de tiempo de cálculo. El mecanismo de colapso se muestra en la figura 7.31.

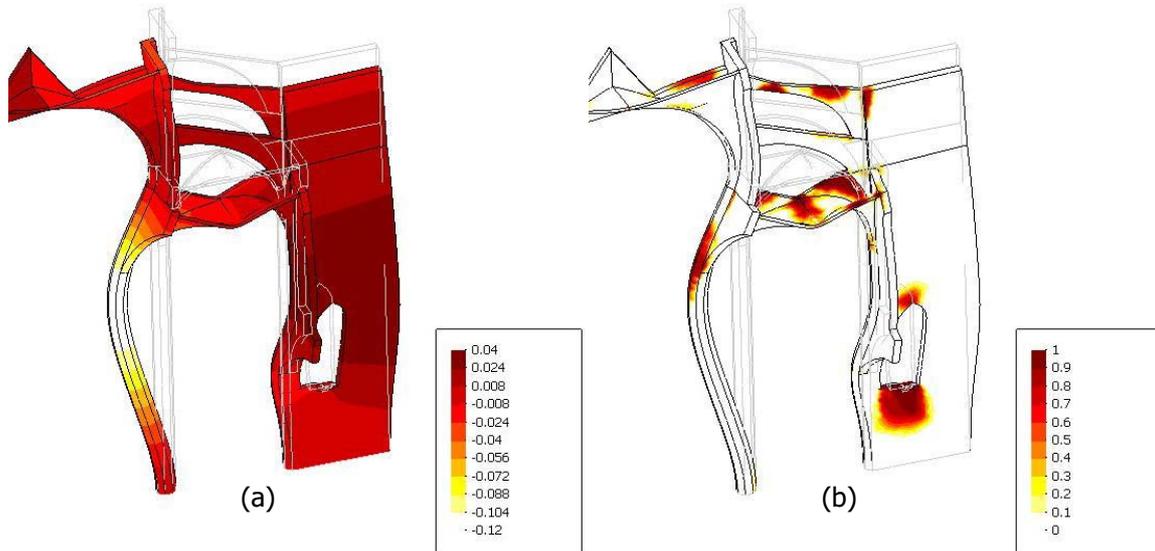
En la figura 7.30a se muestra la distribución de los desplazamientos horizontales en la estructura al final del análisis, para el caso con  $\xi^1 = 0.875$ . En la parte (b) de la misma figura se puede apreciar la distribución del daño a tracción al final del cálculo. Al comparar con los casos geoméricamente lineales, se observa una distribución del daño similar, con un poco más de área dañada en el caso de grandes desplazamientos.



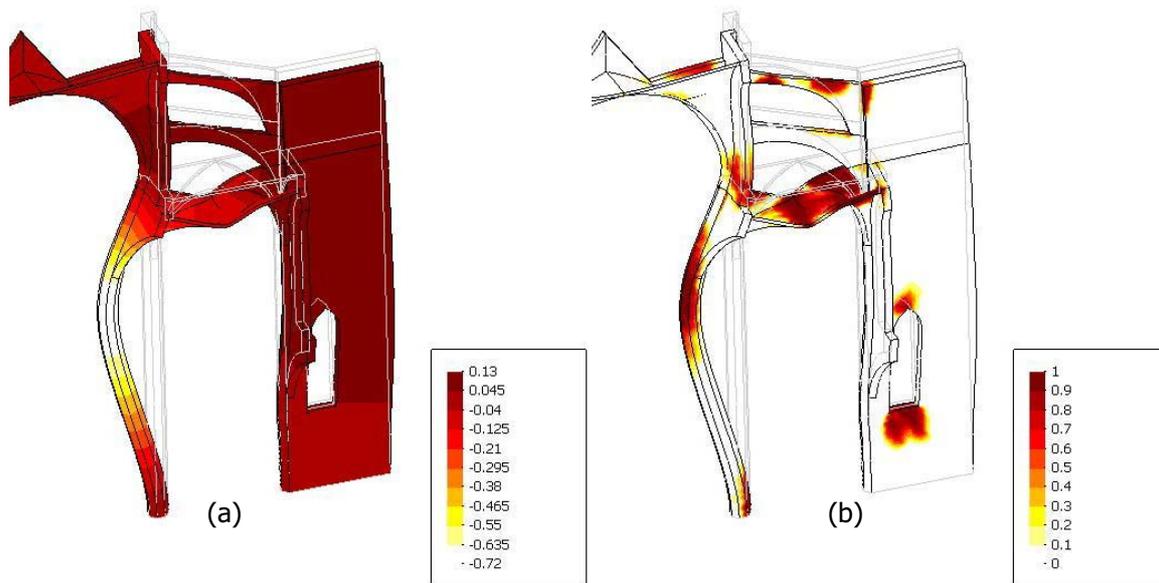
**Figura 7.29** Respuesta en el tiempo para diferentes valores de  $\xi^1$  para el caso geoméricamente no lineal (valores positivos indican desplazamiento hacia la bóveda central)

Por otra parte, en el modelo con  $\xi^1 = 0.975$  se aprecian unos desplazamientos horizontales sensiblemente mayores (figura 7.31a) antes del colapso, así como una distribución del daño a tracción mucho más extendida (figura 7.31b). Esto se observa principalmente en la bóveda lateral (zona causante del colapso de la estructura) y en la cara interna de la unión del pilar con el claristorio. De aquí se puede concluir que los efectos geométricos combinados con los modelos constitutivos propuestos pueden hacer evolucionar el daño como consecuencia de las deformaciones diferidas en el tiempo. Esto implica, además, que el modelo numérico propuesto es capaz de simular el colapso de la estructura debido a la fluencia.

De estos análisis se puede concluir que para evaluar la seguridad de la estructura respecto a la fluencia que experimenta el material es necesario hacer una monitorización de las deformaciones a lo largo del tiempo. De esta manera, se podría calibrar la curva deformación vs. tiempo con datos *in situ*, e identificar a cuál de los dos casos mostrados en la figura 7.29 se asemeja más. Además, un estudio más exhaustivo permitiría conocer también en qué período de tiempo se encuentra la catedral actualmente, respecto al tiempo de referencia utilizado en el análisis.

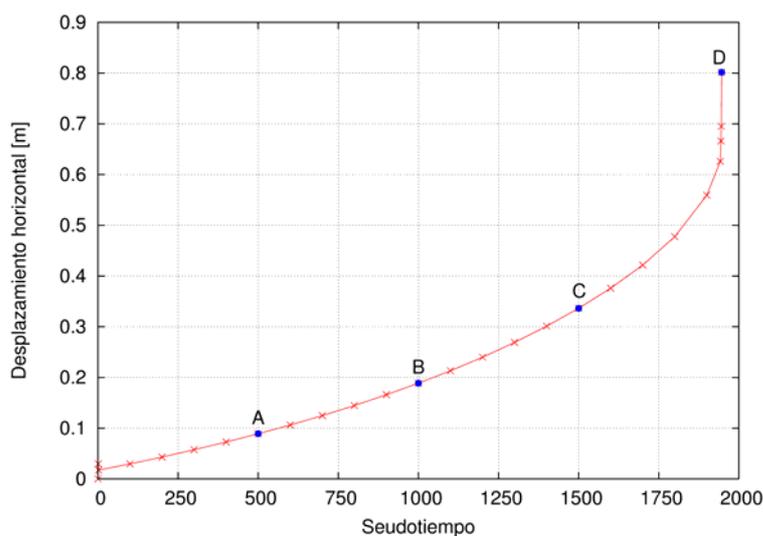


**Figura 7.30** Tercera fase (fluencia tras 3000 unidades de tiempo) con no linealidad geométrica y  $\xi^1 = 0.875$ .  
Deformada x 30 (a) Desplazamientos horizontales [m] (b) Daño a tracción



**Figura 7.31** Tercera fase (fluencia tras 1950 unidades de tiempo) con no linealidad geométrica y  $\xi^1 = 0.975$ .  
Deformada x 5 (a) Desplazamientos horizontales [m] (b) Daño a tracción

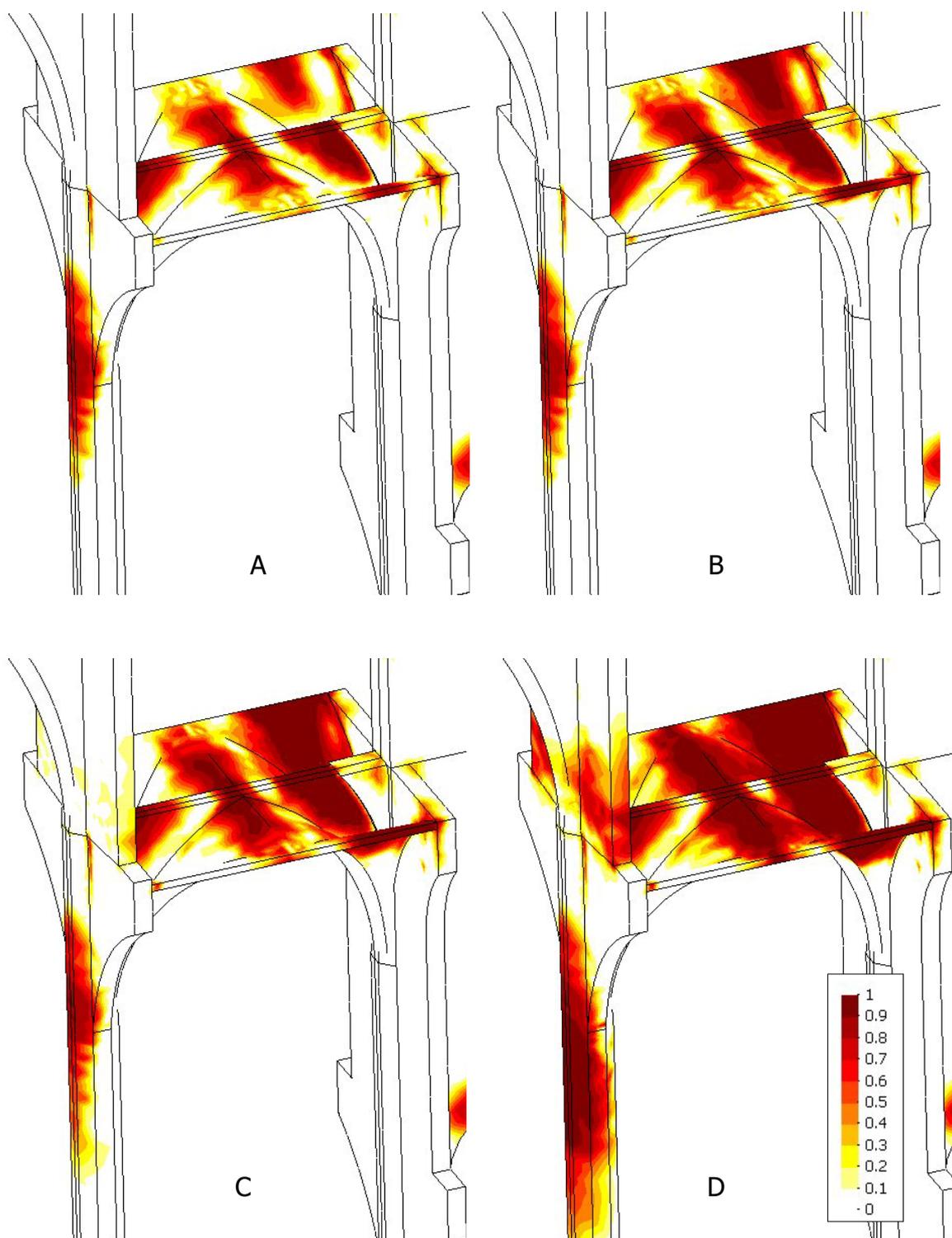
Por último, se hace una evaluación cualitativa del estado general de la estructura durante el proceso que finalmente provoca su colapso. La figura 7.32 muestra la variación del desplazamiento horizontal en la parte superior del pilar durante el análisis de fluencia. Allí se resaltan cuatro puntos del cálculo en los que a continuación se estudia la distribución global del daño a tracción.



**Figura 7.32** Respuesta en el tiempo en el caso con grandes desplazamientos para  $\xi^1=0.975$

Observando la variación de la distribución del daño en la estructura durante el cálculo, se aprecia que los mayores incrementos de daño causados por la fluencia ocurren en la zona de la bóveda lateral, en la cara interior del pilar y en el claristorio principal. Por tanto, la observación se centra en esa zona de la estructura.

En la figura 7.33 se muestra el estado de la estructura para cada uno de los puntos resalados en la figura 7.32. Allí se aprecia que ya para un tiempo de 500 unidades (punto A) existe un daño importante en la bóveda lateral y en el muro. Asimismo, la cara interna del pilar en el arranque del claristorio ya aparece afectada. Cuando el cálculo arriba a las 1000 unidades de tiempo (punto B), la tendencia de los desplazamientos es prácticamente lineal, con un ligero incremento del daño en la bóveda y muro. Ya en el punto C, para 1500 unidades de tiempo, los desplazamientos se han incrementado de manera importante, con gran parte de la bóveda lateral dañada y con zonas del pilar y claristorio hasta entonces intactas mostrando un daño incipiente. Finalmente, cuando la estructura está a punto de colapsar (punto D), los desplazamientos tienen valores muy altos, mientras que la bóveda lateral está dañada prácticamente en su totalidad. Asimismo, tanto el pilar como el claristorio presentan una zona dañada mucho mayor.



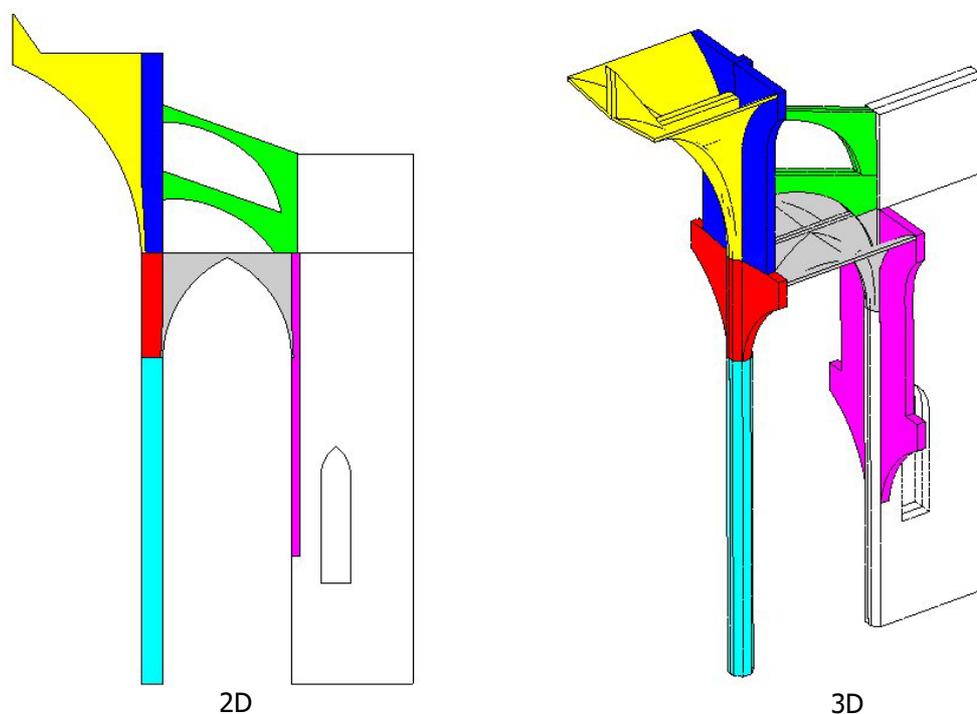
**Figura 7.33** Distribución del daño a tracción en la bóveda lateral y el pilar para los estadios indicados en la figura 7.32

## 7.10 Localización de fisuras. Análisis bajo cargas gravitatorias

### *Modelo geométrico bidimensional*

De acuerdo a lo comentado en el capítulo 5, el algoritmo para la simulación de las fisuras discretas ha sido desarrollado e implementado sólo para casos bidimensionales. Por esta razón, y para probar su aplicabilidad, se ha creado un modelo del pórtico tipo de la Catedral de Mallorca en dos dimensiones.

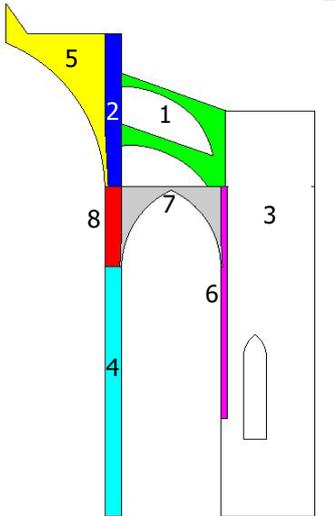
El criterio utilizado para obtener una geometría bidimensional equivalente a la original se basa en mantener los pesos de los diferentes elementos estructurales constantes. En este sentido, se construye un modelo en tensión plana cuya geometría se divide en función de la geometría tridimensional, de manera que puedan definirse diferentes espesores para mantener el peso total de cada elemento estructural igual al original. En la figura 7.34 se muestra la equivalencia de dichos elementos estructurales entre los casos en dos y tres dimensiones.



**Figura 7.34** Equivalencia entre los modelos 2D y 3D. Los elementos estructurales de cada color tienen el mismo peso

A continuación se hace un análisis elástico sobre la geometría bidimensional para su comparación con los resultados equivalentes en 3D. Una vez realizado dicho análisis, se llevan a cabo otros similares, modificando levemente los espesores de algunos elementos estructurales (variando también su densidad de manera que el peso total del elemento se mantenga constante) con el fin de ajustar sus rigideces para obtener una deformada lo más parecida posible a la del modelo de referencia. En la figura 7.35 se compara la deformada 2D conseguida tras los ajustes con la deformada original, mostrando también la distribución de desplazamientos totales en la estructura. La tabla 7.4 resume los espesores finales para cada elemento estructural.

| Elemento            | Espesor [m] |   |
|---------------------|-------------|---|
| Arbotantes          | 0.90        | 1 |
| Claristorio         | 3.44        | 2 |
| Contrafuerte        | 1.55        | 3 |
| Pilar               | 1.24        | 4 |
| Bóveda central      | 1.53        | 5 |
| Claristorio lateral | 2.71        | 6 |
| Bóveda lateral      | 0.97        | 7 |
| Pilar/claristorio   | 2.80        | 8 |

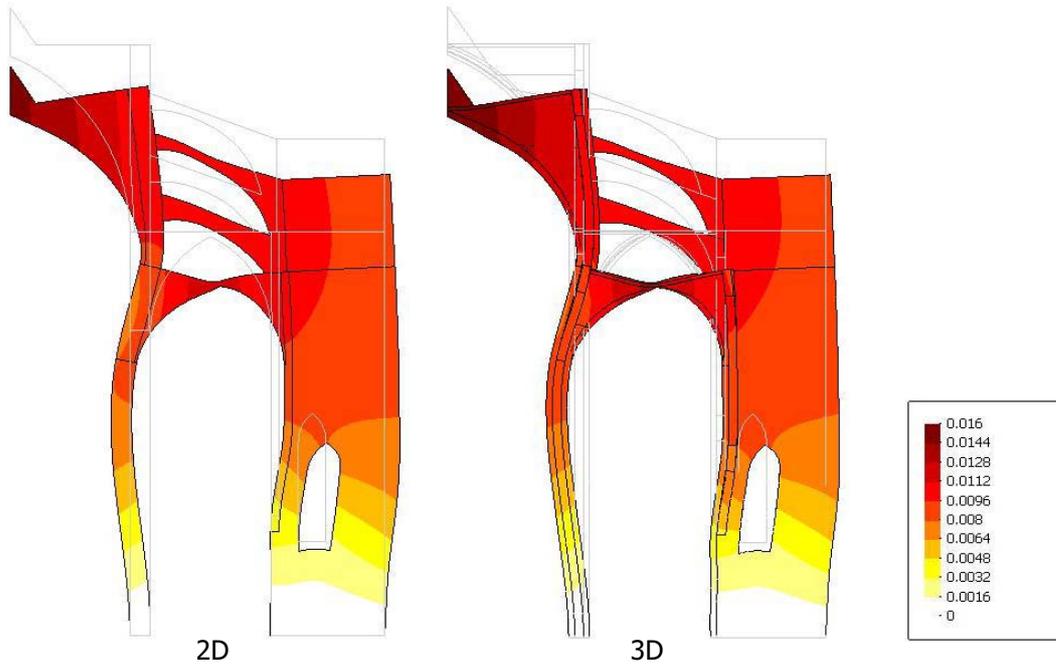


**Tabla 7.4** Espesores empleados en el análisis de tensión plana para los diferentes elementos estructurales

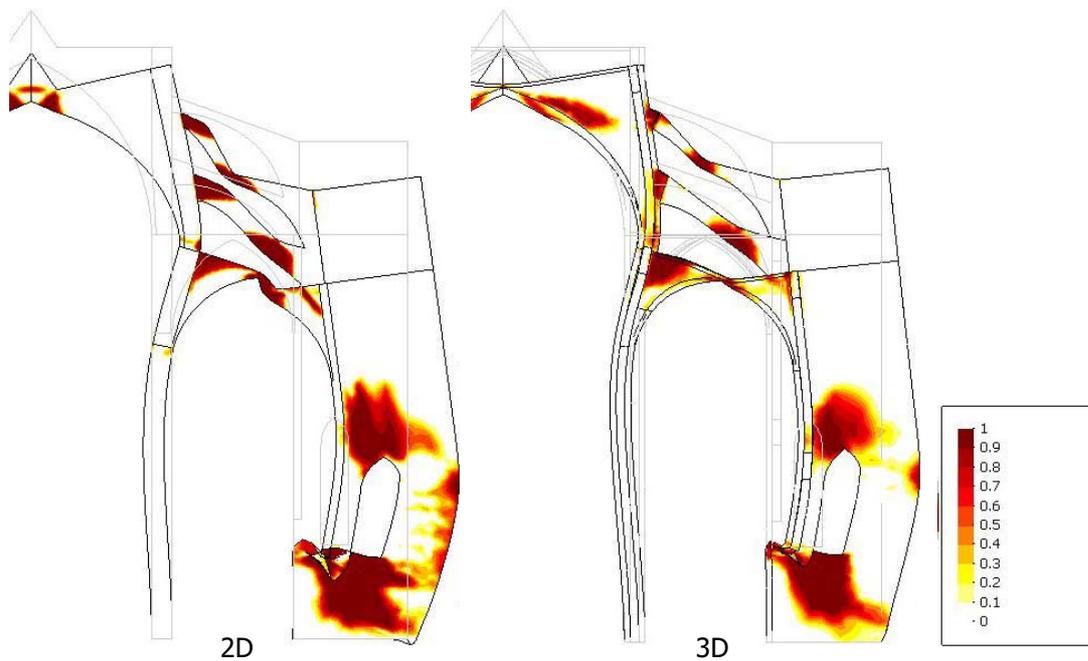
#### *Modelo de daño distribuido*

Una vez conseguido un modelo bidimensional adecuado, se realiza un análisis bajo peso propio con no linealidad material utilizando el modelo de daño distribuido tracción-compresión. En este análisis se aumenta ficticiamente la magnitud de la gravedad hasta llegar al colapso de la estructura. Estos resultados se comparan a continuación con aquellos obtenidos con el modelo tridimensional que se muestran en la sección 7.6.

En primer lugar, se observa que ambas estructuras alcanzan el fallo prácticamente bajo la misma magnitud de carga, que está alrededor de la gravedad amplificada por un factor de 2, tal como se muestra en la figura 7.37. Por otra parte se observa que el mecanismo de colapso es muy similar, destacando una rotura completa del contrafuerte a la altura del ventanal. Esta rotura se debe principalmente al daño a compresión que allí se genera, tal como se aprecia en la figura 7.36. De allí también se puede afirmar que en general la distribución del daño a tracción del modelo bidimensional se aproxima bastante a la obtenida en el modelo 3D.



**Figura 7.35** Comparación de los casos bidimensional y tridimensional. Análisis elástico. Deformada x 300 y desplazamientos totales [m]



**Figura 7.36** Comparación de los casos bidimensional y tridimensional. Análisis con daño distribuido. Mecanismo de colapso y daño a tracción

Comparando estos resultados con los obtenidos por Salas (2002) (apartado 7.2.4), se aprecian similitudes importantes. Por ejemplo, las dos rótulas del arbotante superior se forman prácticamente en la misma ubicación. También coinciden las rótulas bajo la base de la pirámide en la bóveda central y en la clave de la bóveda lateral. Asimismo, en todos los casos se crea una rótula en la unión del arbotante inferior con el claristorio. Es importante destacar que el modelo de FMG utilizado por Salas no es capaz de simular la presencia del ventanal en el contrafuerte, y por tanto no puede representar el colapso del material en esa zona.

Observando la formación y ubicación de las rótulas, se puede concluir que la estructura colapsa porque se convierte en un mecanismo. Sin embargo, es importante destacar que parte de este mecanismo, en concreto la rótula del contrafuerte, se forma debido al daño a compresión. Esto se comenta con más detalle en el apartado 0.

#### *Modelo de daño con localización de fisuras*

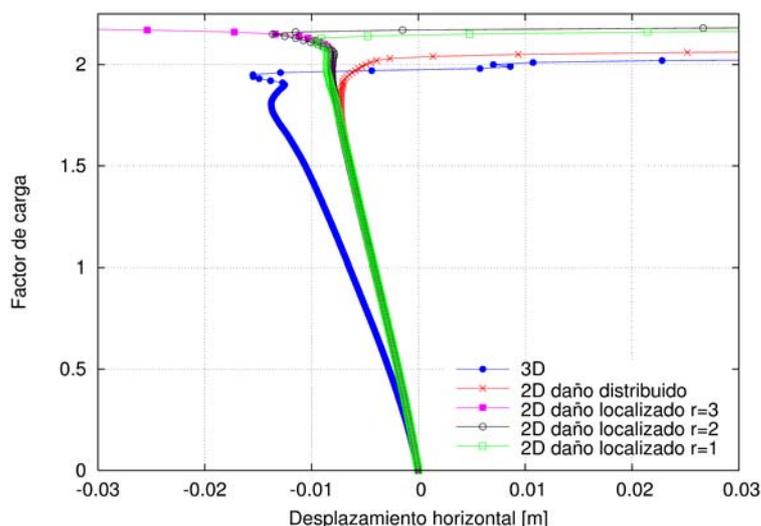
Después de observar y aceptar los resultados del modelo bidimensional, se procedió a la elaboración de diversos análisis con el algoritmo de daño localizado, utilizando este mismo modelo.

Los primeros análisis se hicieron variando el *radio de exclusión inicial* (ver sección 5.4), que es la distancia mínima que puede existir entre dos inicios de fisura. El algoritmo está diseñado para que todas las fisuras se inicien en los bordes del dominio en estudio, y por tanto, este radio de exclusión actúa solamente en los elementos del contorno. Se hicieron análisis con tres radios de exclusión inicial diferentes, de uno, dos y tres metros. Este parámetro se puede relacionar con el tamaño de los sillares, si se supone que las fisuras se crearán siempre en los planos de debilidad causados por la presencia de las juntas. En el caso concreto de la Catedral de Mallorca el tamaño promedio de los sillares es menor a un metro. Sin embargo, en los análisis no se han utilizado radios menores a este valor, ya que en esos casos los resultados son muy similares al modelo de daño distribuido, y no se aprecia correctamente el fenómeno de localización.

Cada uno de los tres modelos mencionados fue elaborado con dos pasos de carga diferentes (factores de incremento de carga de 0.01 y 0.02), dando un total de seis análisis. A continuación se comentan los resultados obtenidos.

En la figura 7.37 se muestran las curvas de desplazamiento horizontal vs. factor de carga de los modelos de daño distribuido 2D y 3D y de los modelos analizados con el algoritmo de daño localizado. Todas las curvas corresponden a los casos de incremento de carga de 0.01, dado que no se encontraron diferencias significativas al aumentar este valor a 0.02.

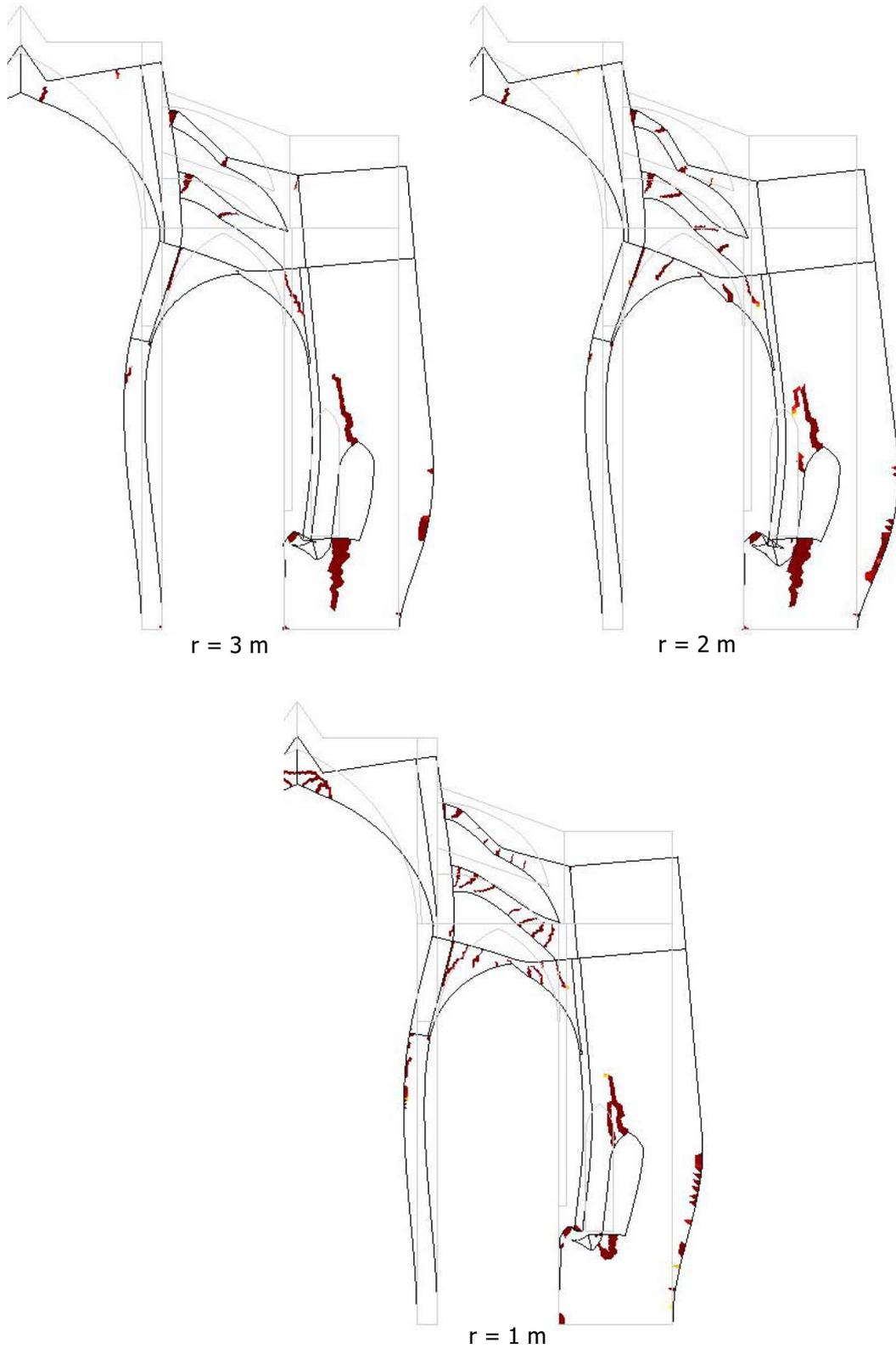
Tal como se comentaba arriba, la carga última del modelo tridimensional corresponde aproximadamente a un factor de carga de 2, mientras que la del modelo 2D es de 2.05, un 2.5% mayor. Al utilizar el algoritmo de daño localizado la resistencia de la estructura aumenta cerca de un 5% respecto al modelo de daño distribuido, alcanzando un factor de carga de fallo de 2.15.



**Figura 7.37** Comparación de cargas de colapso bajo cargas gravitatorias ( $r$  = radio de exclusión inicial)

En este sentido se observan dos aspectos importantes: por una parte la aproximación al modelo bidimensional es aceptable también en el rango inelástico, y por otra la mayor resistencia de los modelos con localización de fisuras es entendible dado que en estos casos la propagación del daño se encuentra limitada por la misma naturaleza del algoritmo de rastreo. Finalmente, se debe destacar la diferencia en el desplazamiento alcanzado en la carga última entre los modelos bidimensionales y el tridimensional. Esta diferencia se ha aceptado, tomando en cuenta que al calibrar el modelo de tensión plana se ha tomado como criterio la deformada de *toda* la estructura, y no los desplazamientos de un punto concreto. Si el modelo se calibrase para aproximar mejor los desplazamientos del punto que se grafica en la figura 7.37, se acentuarían los errores en otras zonas de la estructura.

Los mecanismos de fallo en los modelos con localización de fisuras también son muy semejantes a los obtenidos en los modelos con daño distribuido. Se forman las fisuras en el ventanal, así como las rótulas de la clave de la bóveda lateral y de los arbotantes. Al igual que el caso anterior, el colapso de la estructura viene dictado por la rótula formada por daño a compresión en la base del ventanal. Se observa que la disminución del radio de exclusión inicial hace que las fisuras tiendan a agruparse de manera similar a las zonas dañadas de los modelos sin localización. Es importante destacar que el radio de exclusión inicial (que es un parámetro arbitrario) afecta solamente al número de fisuras que se forman, y que esto no influye en la carga última ni en el mecanismo de colapso. En la figura 7.38 se muestran los mecanismos de colapso y las fisuras de los modelos con los tres radios de exclusión utilizados, para incrementos de carga de 0.01.



**Figura 7.38** Análisis con el modelo de daño localizado. Mecanismo de colapso y daño a tracción para los tres radios de exclusión inicial ( $r$ ) utilizados

## 7.11 Análisis de sensibilidad

A continuación se muestra el análisis de sensibilidad ante la variación de tres parámetros importantes en la caracterización del material: la resistencia a tracción, la resistencia a compresión y la energía de fractura. En cada uno de los análisis se estudia la estructura con un incremento de las cargas de peso propio hasta la rotura.

### 7.11.1 Resistencia a tracción

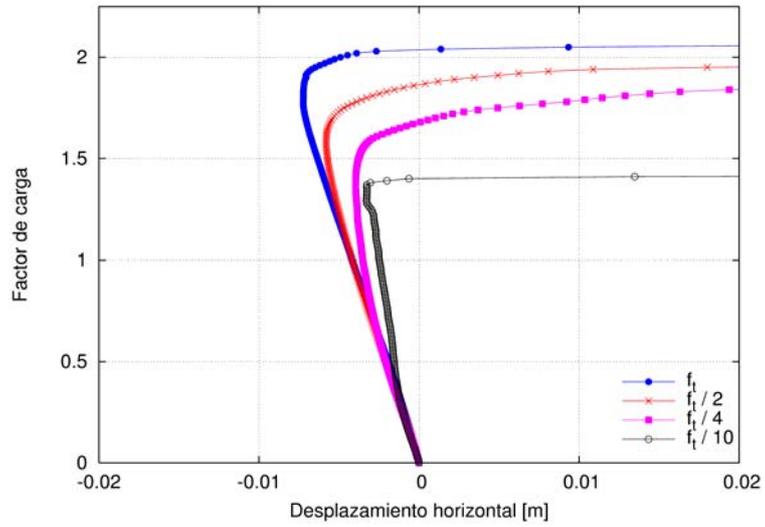
Uno de los parámetros materiales más difíciles de estimar en las edificaciones históricas es la resistencia a tracción de la obra de fábrica. De hecho, muchos modelos empleados en el estudio de estructuras de este material suponen una resistencia a tracción nula. Ya que los análisis realizados hasta ahora suponen un valor de resistencia a tracción basado en criterios empíricos, es deseable estudiar el efecto que tiene la variación de este parámetro en los resultados.

Así, se tomó el modelo 2D con daño distribuido y el modelo con localización de fisuras y radio de exclusión inicial de 3 m, y se corrieron varios casos modificando el valor de la resistencia a tracción. El resto de los parámetros se conservó constante en todos los análisis.

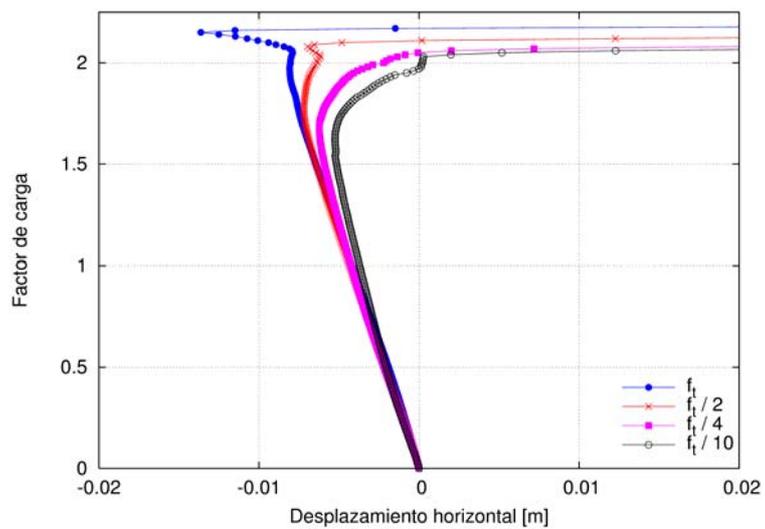
Adicionalmente al caso con resistencia original, los casos estudiados comprenden tres resistencias diferentes disminuidas dos, cuatro y diez veces respectivamente. En la figura 7.39 se aprecia la disminución de la carga de colapso de la estructura cuando se emplea el modelo de daño distribuido, destacando la existencia de una relación directa entre esta magnitud y la resistencia a tracción del material.

Por su parte, la figura 7.40 muestra que en el caso con localización de fisuras el descenso de la resistencia estructural es prácticamente despreciable, tendiendo a converger a un valor aproximadamente 5% menor al inicial. Esta característica es importante, ya que se observa poca influencia de un factor que es difícil de estimar correctamente antes del cálculo. Por otra parte, tanto la distribución de fisuras como el mecanismo de colapso son bastante semejantes en todos los casos.

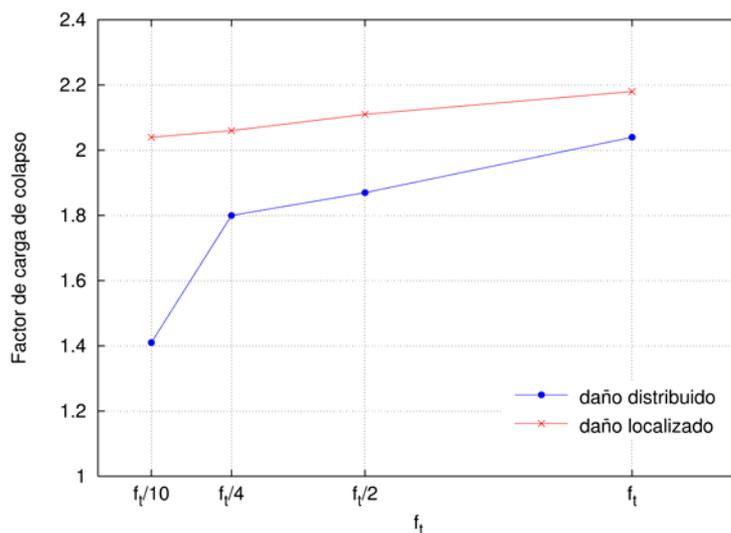
Finalmente, en la figura 7.41 se grafica el factor de carga de colapso obtenido para cada una de las resistencias a tracción utilizadas en los análisis con el modelo de daño distribuido y con el modelo de daño localizado. Allí se aprecia cómo el modelo de daño localizado es menos sensible a la variación de la resistencia a tracción del material.



**Figura 7.39** Variación de la resistencia a tracción. Modelo con daño distribuido



**Figura 7.40** Variación de la resistencia a tracción. Modelo con daño localizado



**Figura 7.41** Relación entre la resistencia a tracción y el factor de carga última

### 7.11.2 Energía de fractura a tracción

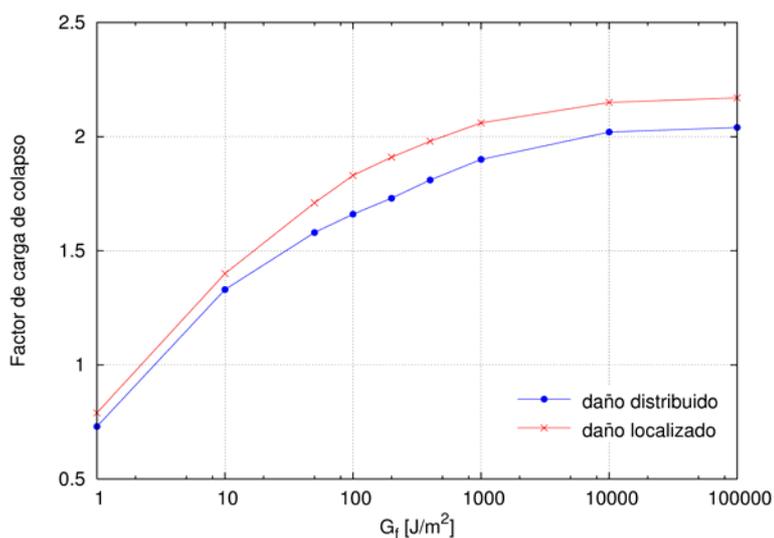
A falta de ensayos adecuados para su determinación, la energía de fractura a tracción del material se estima de forma empírica, al igual que el valor de resistencia a tracción. Por simplicidad, en todos los análisis aquí presentados se utiliza un valor de energía de fractura infinito. Sin embargo, es de interés observar qué influencia puede tener en los resultados el empleo de valores finitos de energía de fractura a tracción. Para ello, se estudiaron varios casos con diferentes valores de energía de fractura, tanto para el modelo de daño distribuido como para el modelo de daño localizado. El rango de valores utilizado va desde  $1 \text{ J/m}^2$  (comportamiento prácticamente frágil perfecto) hasta  $10\,000 \text{ J/m}^2$  (comportamiento prácticamente plástico perfecto).

En la figura 7.42 se muestra la relación entre el factor de carga de colapso y el valor de energía de fractura a tracción utilizado en todos los casos. En primer lugar, se observa que esta relación es muy similar para los modelos de daño distribuido y de daño localizado. Esto probablemente se deba a que cuando la energía de fractura disminuye, el modelo de daño distribuido tiende a localizarse y por tanto su comportamiento se asemeja al obtenido a partir del modelo de daño localizado.

Por otro lado, de la figura 7.42 también se desprende que el uso de un material más frágil disminuye de forma importante la carga última alcanzada por la estructura. En concreto, el caso más frágil estudiado ( $G_f = 1 \text{ J/m}^2$ ) falla con tan sólo el 35% de la carga necesaria

para el colapso en el caso dúctil ( $G_f$  infinita). Esto ocurre en ambos modelos (distribuido y localizado). Es natural que los modelos de menor energía de fractura colapsen antes, ya que en estos casos existe una disipación de energía más rápida y por tanto los elementos dañados transfieren tensiones a sus vecinos más rápidamente también, acelerando el proceso de deterioro estructural. Este tipo de comportamiento del modelo numérico empleado puede ser problemático cuando se desee estimar la carga de colapso de edificios históricos, ya que normalmente no se dispone de información para determinar la energía de fractura real del material. Sin embargo, y tal como se comenta más adelante, los mecanismos de colapso son prácticamente independientes del valor de energía de fractura utilizado.

También se observa que en los casos frágiles con daño distribuido se presentan algunos problemas numéricos, como por ejemplo el desprendimiento total de uno o más nodos. En algunos casos se observa también daño prematuro en algunos elementos estructurales, aún cuando no se alcance el colapso. Esto no ocurre cuando se utiliza el modelo de daño localizado, ya que por su naturaleza nunca existirá un nodo que pertenezca a un grupo de elementos totalmente dañados. Sin embargo, en todos los casos se crea un mecanismo de colapso similar al obtenido en el modelo original de energía de fractura a tracción infinita, regido por la falla a compresión del contrafuerte a la altura del ventanal.



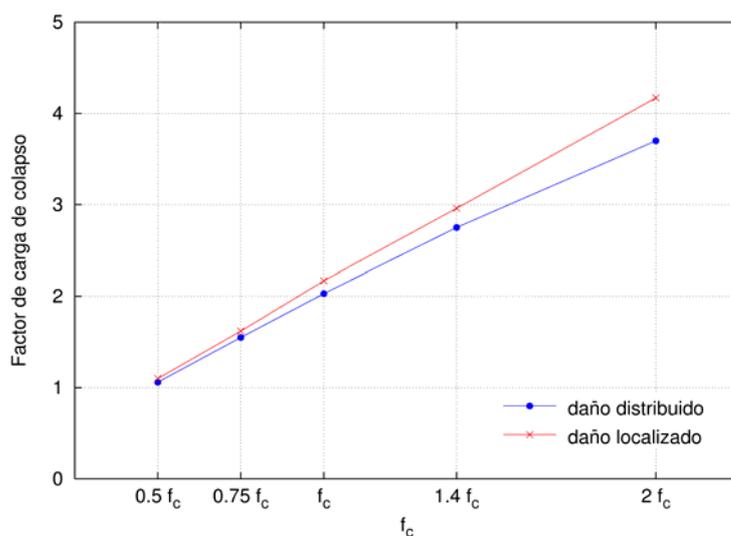
**Figura 7.42** Relación entre la energía de fractura a tracción y el factor de carga última

### 7.11.3 Resistencia a compresión

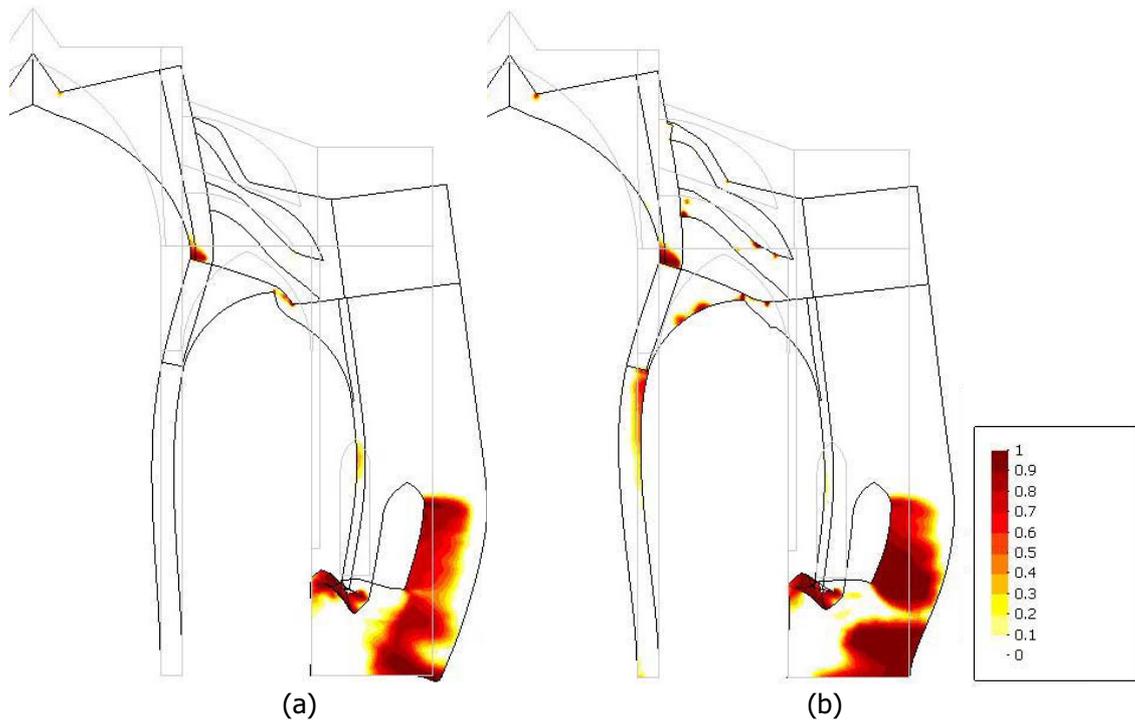
Finalmente, se hizo un análisis de sensibilidad de la resistencia a compresión del material. Partiendo del modelo original de la sección 7.4, se hicieron análisis con dos valores de resistencia inferiores y dos superiores. Así, la resistencia a compresión inicial ha sido multiplicada por los factores 0.5, 0.75, 1.4 y 2 para ejecutar sendos cálculos y observar la carga de colapso que se obtiene. Los resultados para ambos modelos de daño (distribuido y localizado) se presentan en la figura 7.43.

La relación lineal que se obtiene indica que el mecanismo de colapso no se crea solamente por el daño a tracción de la estructura, sino que interviene el fallo a compresión. Tal como se ha comentado anteriormente, el colapso se produce por la rotura completa del contrafuerte a la altura del ventanal. Y esta rotura es causada por el daño a compresión en esa zona. Por tanto, es natural que la carga última sea directamente proporcional al valor de la resistencia a compresión del material.

Es importante subrayar que todos los mecanismos de colapso obtenidos son similares, con aplastamiento del material cerca de la base del ventanal, tal como se muestra en la figura 7.44. Finalmente, se debe destacar que la relación entre la resistencia a compresión y la carga de colapso es prácticamente independiente del modelo de daño utilizado, siendo ligeramente más acentuada en el caso del modelo localizado.



**Figura 7.43** Relación entre la resistencia a compresión y el factor de carga de colapso



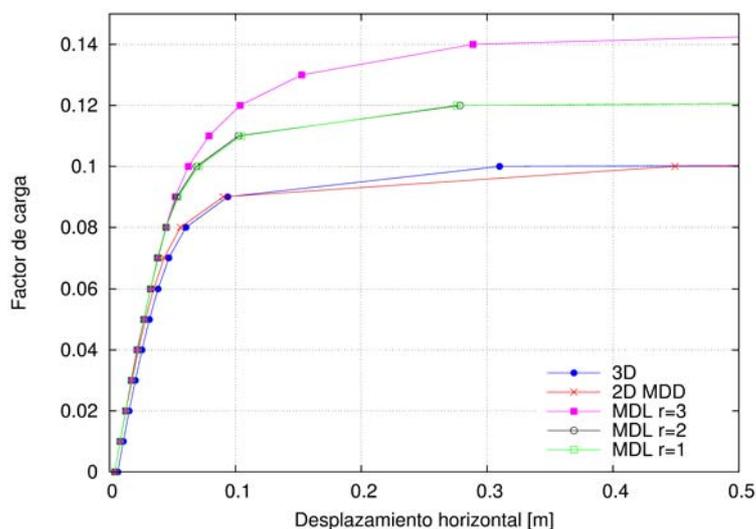
**Figura 7.44** Daño a compresión en el momento del colapso (a) Modelo de daño distribuido (b) Modelo de daño localizado

## 7.12 Análisis bajo cargas sísmicas

Con la intención de examinar los efectos del método de localización de fisuras en otros tipos de análisis, se procedió a la elaboración de un estudio de la Catedral de Mallorca bajo cargas horizontales transversales. Al perder la simetría en esta dirección se tuvieron que generar nuevos modelos, tanto en 3D como en 2D, que incluyeran el pórtico en la totalidad de su anchura. Los criterios en que se basa la generación de estos modelos son los mismos que se utilizaron en los modelos anteriores.

Cada análisis se divide en dos fases: en la primera se analiza el peso propio de manera normal, y en la segunda se aplica, como una aproximación simple de cargas sísmicas, la gravedad en dirección horizontal. Tal como se hizo anteriormente y con propósitos comparativos, se analizan casos con los modelos de daño distribuido y de daño localizado.

En la figura 7.45 se muestra el desplazamiento horizontal en la parte superior del pilar derecho contra el factor de carga aplicado sobre la gravedad horizontal. Nótese que todas las curvas arrancan en un desplazamiento diferente de cero, que es el desplazamiento que tiene el punto tras la aplicación del peso propio.

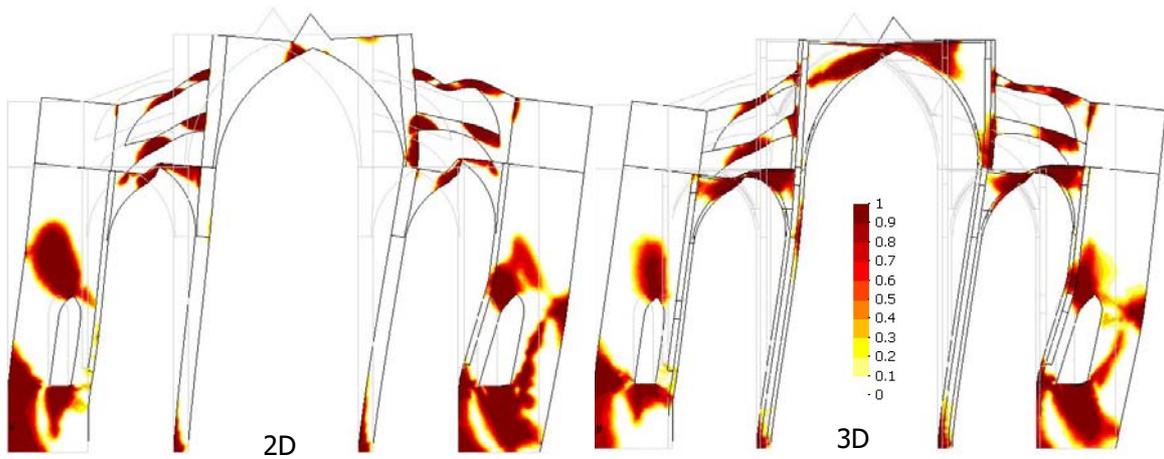


**Figura 7.45** Comparación de cargas de colapso bajo cargas sísmicas (MDD: Modelo de daño distribuido; MDL: Modelo de daño localizado)

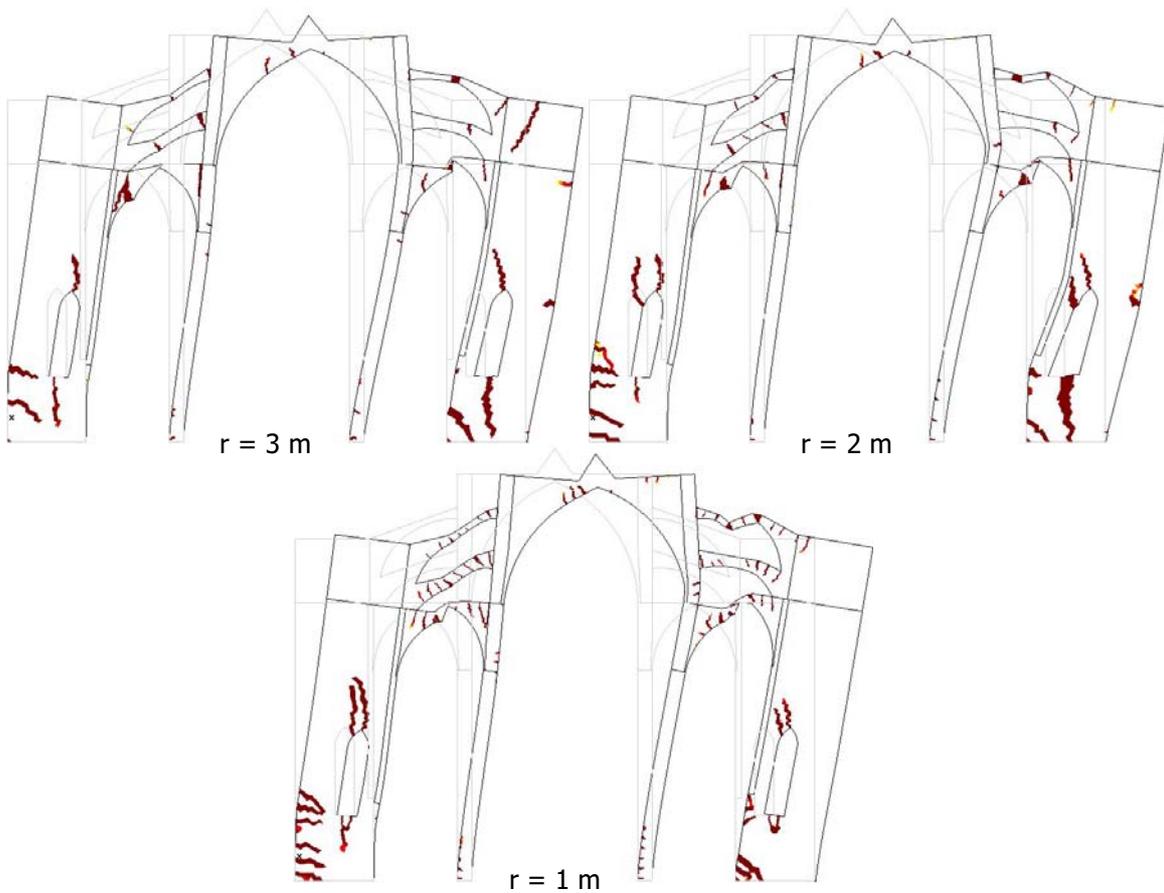
Se observa una coincidencia casi perfecta de la carga última entre los dos casos estudiados con el modelo de daño distribuido (2D y 3D), mientras que la utilización del modelo con localización hace que este valor sea mayor. Cuando se utiliza un radio de exclusión inicial de 3 m el colapso se alcanza en una carga un 40% mayor que la de los modelos distribuidos, notándose aquí los efectos de restringir la propagación del daño. Al disminuir el radio de exclusión la estructura falla con un factor de carga 20% mayor, mostrando la tendencia al modelo de daño distribuido. Sin embargo, los valores coinciden para los radios de 2 y 1 m, poniéndose de manifiesto que esta tendencia no es directa, y que existe un rango de radios en los que la respuesta obtenida es similar.

Es importante destacar que los factores de carga de gravedad horizontal oscilan entre 0.1 y 0.14, valores cercanos a los que resultan de la norma NCSE-02 como aceleración sísmica de cálculo para un período de retorno de 1000 años en la zona de Palma de Mallorca.

Al examinar las deformadas y la distribución del daño de los modelos de daño distribuido en dos y tres dimensiones (mostrados en la figura 7.46) se aprecian unos mecanismos de colapso muy similares, con un par de pequeñas diferencias. La primera es que las rótulas que se forman en los arbotantes y en la bóveda lateral están más marcadas en el modelo bidimensional. La otra diferencia a destacar está en el daño de la bóveda central, mucho mayor en el modelo en tres dimensiones. Esto es aceptable dada la complejidad geométrica original, que es difícil de representar con un elemento de tensión plana.



**Figura 7.46** Análisis sísmico con daño distribuido. Mecanismo de colapso y daño a tracción



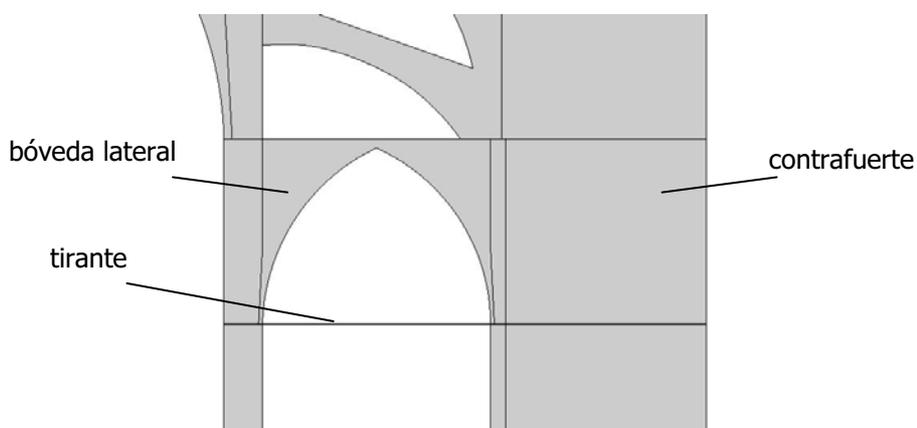
**Figura 7.47** Análisis sísmico con daño localizado. Mecanismo de colapso y daño a tracción para los tres radios de exclusión inicial ( $r$ ) utilizados

El modelo con localización y radio de exclusión mayor (3 m) muestra menos rótulas que los casos con daño distribuido, tal como se aprecia en la figura 7.47. Esto, añadido al incremento excesivo de la carga última hace suponer que este radio no es adecuado para este análisis. Por su parte, los modelos de menor radio de exclusión muestran mecanismos de fallo más parecidos a los de referencia. A destacar el sistema de rótulas que se crea en los arbotantes y bóveda lateral.

### 7.13 Simulación de refuerzo sísmico

Finalmente, se realizaron unos cálculos bidimensionales tomando los modelos comentados en el apartado anterior y agregando un tirante de acero de 4 cm<sup>2</sup> de sección que une las bases de las bóvedas laterales, tal como se muestra en la figura 7.48. El resto de las condiciones del problema (parámetros, carga, etc.) se mantienen inalterados.

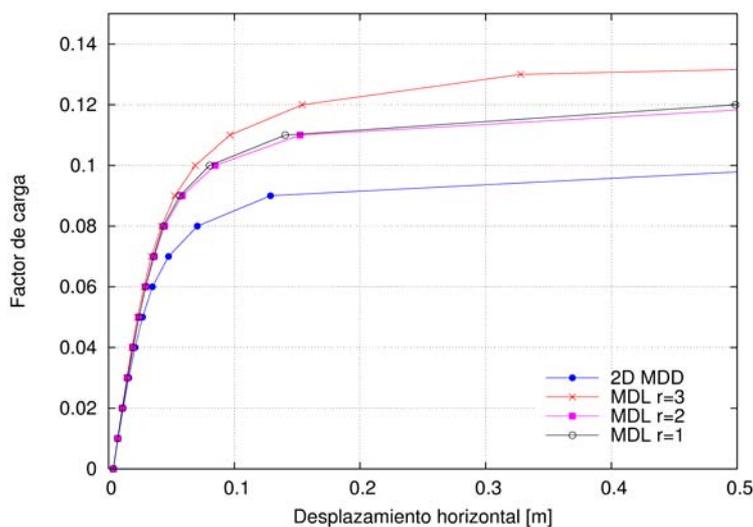
Al igual que en los casos anteriores, en la figura 7.49 se muestran las curvas de los desplazamientos relacionados con los desplomes de los pilares contra el factor de carga "sísmica". La primera diferencia que se aprecia al compararlas con las curvas del caso anterior es que los desplazamientos horizontales tras la aplicación del peso propio (arranques de las curvas) son sensiblemente menores, con un valor que ronda el 50% de las originales. Al aplicar las cargas sísmicas, el comportamiento de las cuatro curvas es muy similar al caso sin tirante, donde las cargas últimas cuando se define un radio de exclusión inicial de 1 m y de 2 m coinciden, siendo un poco mayores que el valor del caso con daño distribuido y menores que el caso de radio igual a 3 m.



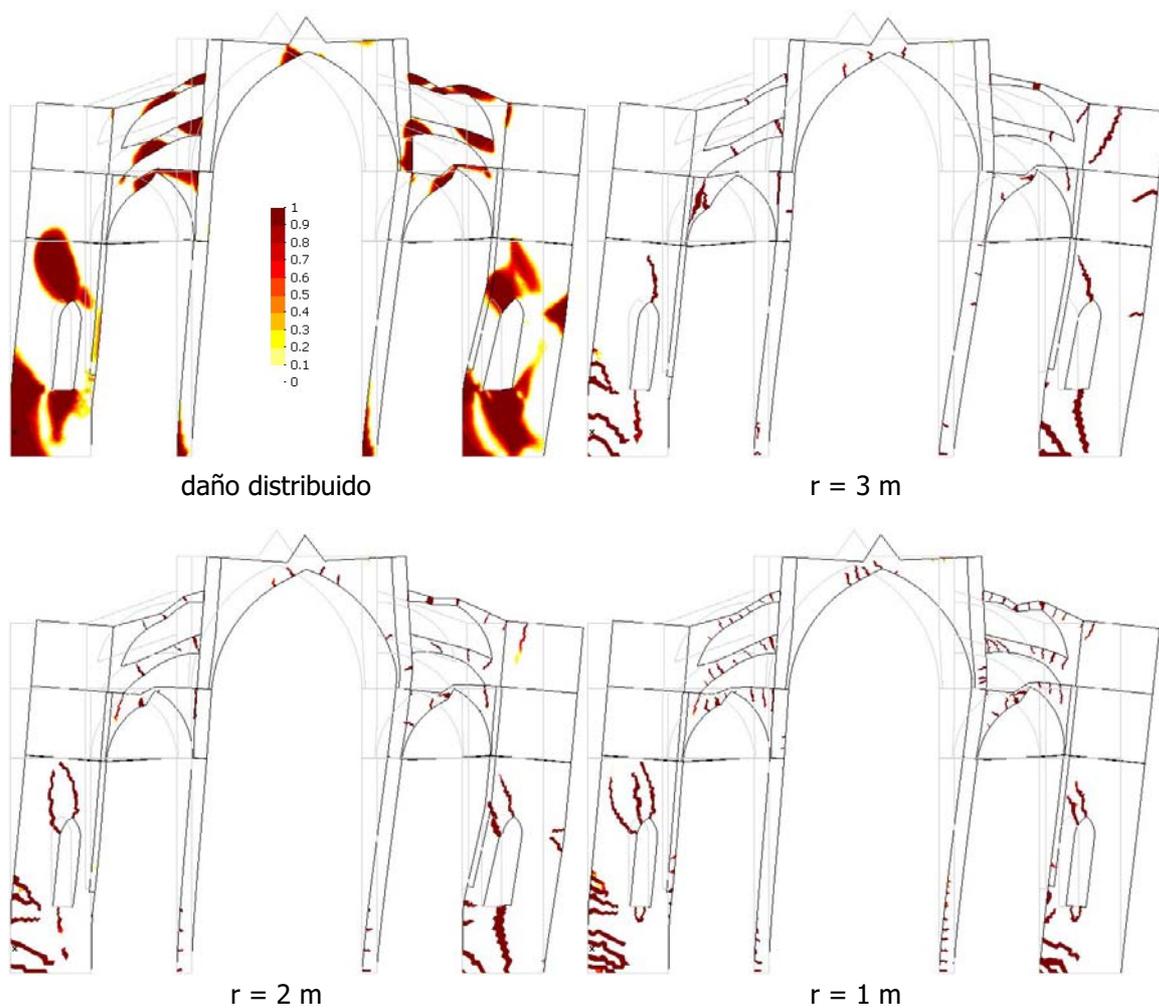
**Figura 7.48** Ubicación de tirante de refuerzo

Sin embargo, en todos los casos la estructura colapsa con un factor de carga ligeramente inferior al alcanzado en los casos anteriores. Esto permite concluir que la presencia del refuerzo propuesto es favorable bajo las acciones gravitatorias normales, pero en cambio puede ser contraproducente bajo cargas horizontales. Lo anterior puede deberse a las tracciones que transmite el contrafuerte (mucho más pesado) al pilar a través del tirante, lo que provoca el colapso prematuro.

Por su parte, los mecanismos de colapso no difieren mucho de aquellos alcanzados sin tirante, y se repite el hecho de que el caso con radio 3 m no es capaz de formar suficientes rótulas, y por esto sobreestima la carga última. En la figura 7.50 se muestran la deformada y la distribución del daño de los casos con daño distribuido y con localización de fisuras para los tres *radios de exclusión inicial*, donde se pueden observar las semejanzas con los casos equivalentes sin tirante.



**Figura 7.49** Comparación de cargas de colapso bajo cargas sísmicas con tirante de refuerzo (MDD: Modelo de daño distribuido; MDL: Modelo de daño localizado)



**Figura 7.50** Análisis sísmico con tirante de refuerzo. Mecanismo de colapso y daño a tracción para el caso de daño distribuido y para los tres radios de exclusión inicial ( $r$ ) de daño localizado utilizados

# C

## Sobre el análisis secuencial del proceso constructivo

En este apartado se aborda el tema de los detalles implicados en la elaboración de un análisis secuencial por etapas para la simulación del proceso constructivo de edificaciones. En primer lugar se describen las prestaciones existentes en el código COMET que se pueden aprovechar en análisis de este tipo, y se comentan aspectos relativos a su implementación. Luego se abordan las dificultades prácticas que se han encontrado al intentar analizar la construcción de estructuras por fases, y las técnicas empleadas para solventar estas dificultades.

### C.1 Aspectos previos

De acuerdo a lo comentado anteriormente, el programa COMET, desarrollado en el Centro Internacional de Métodos Numéricos en la Ingeniería (CIMNE), se ha empleado como base para la implementación de las herramientas propuestas para el análisis estructural de edificios históricos. Este programa permite dividir el cálculo en diferentes etapas o *intervalos*, de manera que puedan cambiarse ciertas condiciones de un intervalo a otro.

Por ejemplo, es posible hacer un análisis bajo una función de carga dada y luego continuar ese mismo análisis, en otro intervalo, con una carga diferente.

Bajo este esquema de intervalos se encuentra implementada la herramienta de *activación/desactivación* de elementos. Un elemento está *activo* cuando se encuentra bajo las condiciones normales de cálculo, es su situación por defecto. Un elemento *inactivo* sencillamente es ignorado completamente en el cálculo, como si nunca hubiera sido definido. El sistema de activación/desactivación de elementos permite cambiar el estado de activo a inactivo y viceversa de cualquier número de elementos de un intervalo a otro.

Utilizando entonces la activación/desactivación de elementos es posible simular el proceso constructivo de una edificación. Esto se hace definiendo una malla de elementos finitos sobre la totalidad del dominio al inicio del cálculo, todos ellos inactivos. Para el primer intervalo se activan los elementos que pertenecen a la primera fase de construcción, y se lleva a cabo el cálculo de manera normal. En el siguiente intervalo se activan los elementos correspondientes a la segunda fase, y se continúa el cálculo de las dos fases juntas, la primera de ellas ya deformada. Repitiendo este procedimiento hasta completar todas las etapas de construcción se obtiene una reproducción del proceso constructivo completo de la edificación.

Tal como se ha comentado en el capítulo anterior, es posible que la estructura de algunas edificaciones antiguas se vea afectada significativamente por el proceso seguido durante su construcción. Por tanto, la herramienta de activación/desactivación de elementos puede ser empleada para simular dicho proceso, y obtener una mejor aproximación del estado tenso-deformacional actual al momento de analizar la estructura.

Aún cuando el análisis se define por etapas de construcción, el dominio de estudio original es continuo, y por tanto en fases intermedias de cálculo existirán nodos que pertenecen tanto a elementos activos como inactivos. En estos casos, cuando se activan los elementos que hacen frontera con la fase anterior, algunos de sus nodos ya poseen valores de desplazamientos. Sin embargo, el programa define estos desplazamientos de tal manera que no generen tensiones dentro de ese elemento, mediante el concepto de *deformaciones iniciales*. Sencillamente, cuando el elemento frontera se activa, ya está deformado, pero su estado tensional es nulo, como corresponde a todos los elementos "nuevos" de ese intervalo.

## C.2 Aspectos prácticos

En general, cuando se realiza un análisis secuencial donde se utiliza la activación/desactivación de elementos es necesario observar detenidamente las implicaciones que esta técnica conlleva. Es importante entender exactamente el comportamiento de la estructura en cada fase, y asegurarse de que los resultados no se están viendo afectados de manera espuria por la técnica de activación/desactivación de elementos. Sin embargo, estas consideraciones pueden variar significativamente según el problema analizado. Por

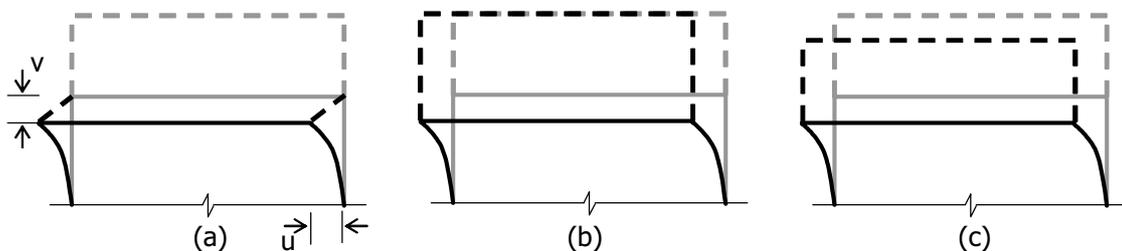
tanto, es difícil crear un método general que tome en cuenta y corrija los detalles relativos a la técnica de activación/desactivación de elementos para todos los casos. A continuación se comentan las consideraciones a tomar en cuenta para el caso del análisis de la secuencia constructiva por fases de una edificación histórica.

Existen un par de consideraciones a tomar en cuenta cuando se simula el proceso constructivo de estructuras. La primera de ellas tiene que ver con la ubicación inicial de los elementos que no están activos desde la primera fase, y la segunda está relacionada con el postproceso de los resultados.

### C.2.1 Modificación de coordenadas de elementos pertenecientes a fases avanzadas de construcción

Ya que las construcciones suelen seguir un orden ascendente, normalmente los elementos pertenecientes a fases avanzadas estarán ubicados *encima* de los elementos de fases iniciales. Los elementos activos desde fases anteriores estarán deformados, y por tanto hay que asegurar que los elementos nuevos estén ubicados correctamente para evitar situaciones irreales que podrían falsear los resultados.

En una situación como la mostrada en la figura C.1 los elementos de la primera fase (en línea continua) se han desplazado hacia abajo y hacia la izquierda, antes de activar la segunda fase de construcción (en línea discontinua). Así, hay que tomar una decisión respecto a las coordenadas iniciales de los elementos pertenecientes a la segunda fase. Si se conservan sus coordenadas originales (figura C.1a), existiría una excentricidad  $u$  que podría, según el caso, afectar los resultados. Los elementos se pueden desplazar hacia la izquierda para evitar dicha excentricidad (figura C.1b), aunque seguiría existiendo un aumento en el área (o volumen) inicial de los elementos frontera, lo que se traduce en un incremento de la carga gravitatoria. Esto se puede solventar moviendo también verticalmente las coordenadas de los elementos una magnitud  $v$ , como se muestra en la figura C.1c.



**Figura C.1** Esquema de activación de elementos en dos fases (a) Elementos de la segunda fase en coordenadas originales (b) Coordenadas de elementos de la segunda fase modificadas horizontalmente (c) Coordenadas de elementos de la segunda fase modificadas horizontal y verticalmente

El efecto de la excentricidad descrito en el párrafo anterior cobra importancia cuando se trabaja bajo las hipótesis de no linealidad geométrica, donde el desplazamiento  $u$  puede alcanzar valores finitos y por ende afectar realmente a los resultados si no es tomado en cuenta. Ya que algunos análisis realizados en este trabajo son geoméricamente no lineales, se ha implementado un método para eliminar dichas excentricidades. Además, si la magnitud de  $u$  es muy grande puede ocurrir que los elementos frontera de la fase nueva se distorsionen demasiado, originando problemas numéricos.

Respecto a los efectos del desplazamiento vertical  $v$ , para los casos estudiados el aumento ficticio del volumen de los elementos frontera es despreciable respecto al volumen total de las fases de construcción. Sin embargo, su corrección se efectuó igualmente, ya que era de fácil inclusión dentro del método de corrección de la excentricidad horizontal.

El método de corrección de la excentricidad se implementó en un programa independiente (bajo el lenguaje FORTRAN 90), que usado junto con el COMET, corrige las coordenadas iniciales de los elementos de las fases posteriores. Dicho programa tiene como datos de entrada la malla de elementos finitos (coordenadas de nodos y conectividades) y su separación en las distintas fases de construcción. También es necesario introducir las componentes de un vector de desplazamientos, denotado  $\mathbf{v}_d$ . El programa es capaz entonces de tomar las coordenadas de los nodos de las fases inactivas y sumarle el valor de  $\mathbf{v}_d$  definido por el usuario. El resultado es una malla de elementos finitos con parte de sus nodos con coordenadas modificadas.

El procedimiento general es el siguiente:

- i. Se hace el análisis de la estructura en su primera fase
- ii. Se observan las magnitudes de desplazamientos en los nodos frontera con la siguiente fase, se toma un valor medio y se asigna este valor a  $\mathbf{v}_d$
- iii. Se modifican las coordenadas de los elementos finitos de la nueva fase mediante el programa descrito arriba, utilizando el valor de  $\mathbf{v}_d$  calculado en el paso anterior
- iv. Se continúa con el análisis de la estructura, esta vez con la malla modificada y hasta la siguiente fase de construcción
- v. Se vuelve al paso ii, tantas veces como fases de construcción existan

De esta manera, se puede simular el hecho de que cada fase de construcción nueva se apoya sobre la configuración deformada de la fase anterior, tal como ocurre en la realidad.

Como último comentario al respecto, es importante recalcar que cuando se trabaja bajo las hipótesis de pequeños desplazamientos, las diferencias que se obtienen aplicando el procedimiento anterior respecto al empleo de la malla original en todas las fases de cálculo

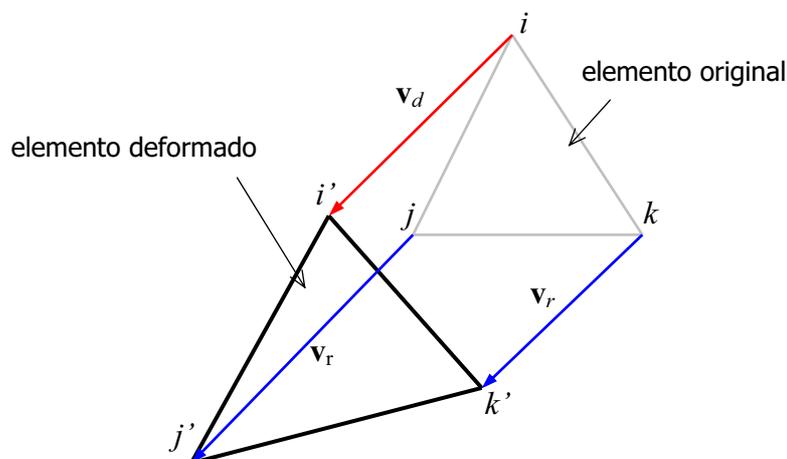
lo son casi despreciables. Sin embargo, cuando existen efectos geoméricamente no lineales, las excentricidades originadas por los cambios de fase cobran relevancia.

### C.2.2 Consideraciones para el postproceso de los resultados

La otra consideración respecto al análisis estructural secuencial tiene que ver con la visualización de los resultados en el postproceso. Existe un problema cuando se desea observar resultados al final de fases intermedias de construcción, el cual se detalla a continuación.

Si se toma como ejemplo un elemento cualquiera perteneciente a la frontera entre fases, al final de alguna fase intermedia de carga, se observa que los nodos pertenecientes a fases activas hasta ese momento tendrán unos desplazamientos obtenidos del cálculo. Por su parte, los nodos que aún no se han activado tendrán valores de desplazamientos definidos artificialmente, mediante la modificación de sus coordenadas originales, siguiendo el procedimiento descrito en el apartado precedente.

Lo anterior se ilustra en la figura C.2, donde se muestra el elemento frontera en un análisis secuencial en dos etapas, tras el cálculo de la primera de ellas. Allí los nodos  $i$ ,  $j$  y  $k$  están en sus coordenadas originales, pero de ellos sólo  $j$  y  $k$  estuvieron activos en la primera fase de construcción. Las coordenadas de  $j'$  y  $k'$  corresponden entonces a la ubicación de los nodos luego de sendos desplazamientos obtenidos en el análisis, denotados en general  $\mathbf{v}_r$ . Para efectuar la segunda fase del cálculo es necesario modificar las coordenadas del nodo  $i$ , mediante el vector  $\mathbf{v}_d$ , calculado tal y como se indica en la sección anterior. A raíz de esto, en el fichero de resultados sólo quedarán recogidos los valores de  $\mathbf{v}_r$ , porque los de  $\mathbf{v}_d$  están contemplados ya en la malla modificada en el fichero de datos.



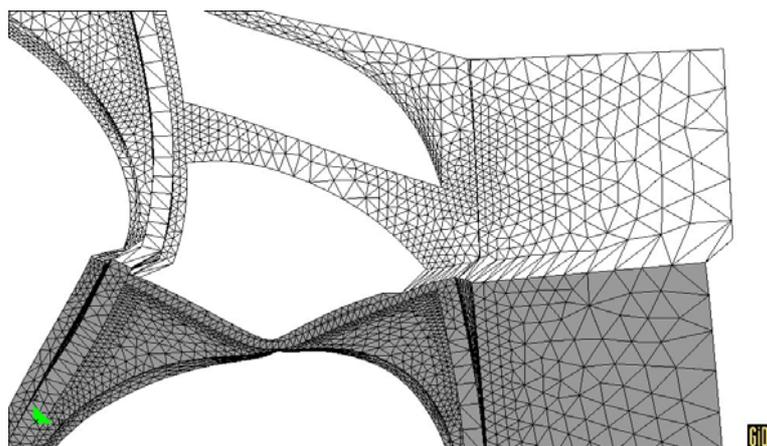
**Figura C.2** Caso típico de un elemento frontera entre fases

Cuando en el postproceso se dibuja la deformada de la estructura con los resultados de la primera fase, ocurre lo que cabe esperar: el campo de desplazamientos aparece continuo en la frontera entre fases. Sin embargo, cuando se aplica un factor aumentativo de la deformada para su mejor apreciación, se genera un escalón en la frontera entre fases. Esto es natural, ya que, como se comentó antes, en el fichero de resultados todos aquellos elementos inactivos poseen un desplazamiento nulo que se mantiene como tal luego de multiplicarse por el factor de magnificación respectivo. Este fenómeno se muestra en la figura C.3.

Para corregir esta distorsión en la visualización del postproceso, se optó por modificar el fichero de resultados, añadiendo su valor de desplazamiento inicial a los nodos pertenecientes a los elementos inactivos en esa fase.

En resumen, la modificación que debe hacerse en las coordenadas originales de los elementos inactivos en esa fase para evitar excentricidades espurias debe hacerse también en el fichero de resultados para la correcta visualización de la deformada aumentada por un factor multiplicativo.

Para la modificación del fichero de postproceso se utiliza el mismo programa descrito en la sección anterior, pero modificando el fichero de resultados en lugar del fichero de datos. Así, en vez de cambiarse las coordenadas de los nodos inactivos, se modifica su vector de desplazamientos en el fichero de resultados.



**Figura C.3** Salto o "escalón" al visualizar la deformada *amplificada* de la estructura en una fase intermedia de construcción. Elementos activos en oscuro, inactivos en blanco.

# 8

## Conclusiones

### 8.1 Recapitulación

Al inicio de este trabajo se plantea su objetivo principal: formular un modelo numérico capaz de estudiar el comportamiento estructural de edificios históricos de obra de fábrica. Para ello se estudian en primer lugar las características de este material, así como las particularidades que presentan las construcciones antiguas. Como referencia se toma la Catedral de Mallorca, de la que se dispone de información proveniente de una campaña de monitorización llevada a cabo recientemente, así como de diversos análisis estructurales elaborados por diferentes autores.

Una vez definidas las características que debe incluir el modelo numérico se establece su planteamiento, basado en el Método de los Elementos Finitos. Asimismo, se describen las formulaciones de los modelos constitutivos propuestos para el análisis.

Posteriormente se plantea el problema de la simulación numérica de fisuras. Se hace un estudio del estado del conocimiento al respecto, y se propone un *algoritmo de rastreo* como solución al problema. Este algoritmo, empleado en combinación con el modelo de daño distribuido, se denomina *modelo de daño localizado*. El procedimiento consiste en un sistema de etiquetas o *flags* para distinguir dos tipos de elementos finitos en cada paso de carga: aquellos que serán susceptibles al daño y aquellos que no lo serán. Los criterios

que se siguen para definir esta separación dependen de la magnitud y de la dirección de las tensiones principales de tracción en cada elemento. De esta manera, por cada fisura se crea una ruta o *track* de elementos que usarán el modelo constitutivo de daño, mientras que el resto de los elementos se define con comportamiento elástico lineal. Su implementación se limita, hasta el momento, a casos bidimensionales con elementos triangulares de tres nodos. Se hace un proceso de validación que consiste en contrastar los resultados obtenidos con el modelo con comportamientos observados en diversos ensayos experimentales.

Luego se hace un análisis de un arco semicircular bajo carga asimétrica utilizando el método propuesto. Allí se evalúa el alcance y las limitaciones del método, haciendo un amplio estudio de los factores que intervienen en un análisis estructural de estas características.

Finalmente, se analiza la estructura de la Catedral de Mallorca. En primer lugar se realizan varios análisis tridimensionales sobre un pórtico tipo, en los que se estudian los efectos del proceso constructivo y de la fluencia del material, empleando el modelo de daño distribuido. Luego se analiza la estructura sobre un modelo bidimensional equivalente, para aplicar el modelo de daño localizado propuesto. Se realizan comparaciones entre los resultados obtenidos con ambos modelos, así como varios análisis de sensibilidad frente a diversos parámetros materiales. Por último, se estudia la Catedral frente a cargas sísmicas, simulando la presencia de unos refuerzos metálicos en la base de las bóvedas laterales.

## 8.2 Conclusiones

Una vez presentados los recursos teóricos relacionados con la materia, formulado el modelo propuesto y obtenidos los resultados de una serie de análisis, a continuación se presentan las conclusiones de este estudio, de la siguiente manera:

### 8.2.1 Sobre el estado del conocimiento

- Para obtener resultados realistas en el análisis de una estructura histórica es necesaria la utilización de modelos materiales no lineales, capaces de simular efectos de degradación o fluencia del material. En este sentido, los cálculos bajo las hipótesis de elasticidad lineal sólo son útiles como una primera aproximación para obtener una idea general del comportamiento de la estructura.
- Los efectos de la anisotropía son importantes en la respuesta estructural de la obra de fábrica.

- Las acciones a las que están sometidos normalmente los edificios históricos son las cargas gravitatorias en grandes períodos, las cargas sísmicas, las cargas de viento y las acciones climáticas (cambios de temperatura, humedad, etc.)
- La mayoría de los análisis estructurales sobre edificios históricos se realizan bajo las hipótesis de linealidad geométrica.

### 8.2.2 Sobre el modelo de análisis

- La inclusión de efectos geoméricamente no lineales pueden influir de manera importante en el estado tensional de la estructura.
- Es posible simular el proceso constructivo en sus diferentes etapas mediante el método de activación/desactivación de elementos durante el cálculo.
- Con el modelo de daño localizado se obtiene una configuración y propagación del daño en materiales cuasifrágiles más realista que la que se consigue al emplear el modelo de daño distribuido en su forma original. Se ha demostrado que la dependencia patológica que posee el modelo de daño distribuido respecto a la orientación de la malla de elementos finitos no existe en el modelo de daño localizado.
- La inclusión del algoritmo de rastreo en el modelo de daño localizado no incrementa de forma significativa el coste computacional del cálculo.
- Para el caso particular de elementos a flexión simple se encuentra que hay ocasiones en las que el complejo estado tensional en la punta de la fisura hace que el algoritmo de rastreo no pueda determinar correctamente la dirección de propagación. Esto ocurre principalmente cuando la punta de la fisura se acerca al eje neutro de la sección flexionada. Para solucionar esto se ha propuesto la incorporación de un parámetro adicional: el *ángulo de curvatura máxima*. Este parámetro no es una propiedad del material, sino que depende de las características particulares de cada problema. El empleo de este parámetro arroja buenos resultados en la simulación de fisuras discretas a flexión.

### 8.2.3 Sobre la aplicación del modelo propuesto

- El análisis de una estructura de obra de fábrica mediante el modelo de daño localizado permite reproducir consistentemente el desarrollo gradual de un fenómeno equivalente a la formación de rótulas plásticas, hasta alcanzar el mecanismo de colapso. En los análisis realizados los mecanismos obtenidos suelen ser bastante realistas y esperables.

- A nivel estructural, los resultados alcanzados con el modelo de daño localizado presentan menor dependencia al valor de la resistencia a tracción que aquellos obtenidos con el modelo de daño distribuido en su forma original.
- Se demuestra que la incorporación de efectos geoméricamente no lineales puede ser relevante al simular el comportamiento estructural de ciertos edificios históricos.
- Se demuestra que la simulación del proceso constructivo de un edificio histórico puede explicar estados de deformación que de otra manera no se podrían justificar.

#### 8.2.4 Sobre el estudio estructural de la Catedral de Mallorca

- Se determina un posible mecanismo de colapso causado por la degradación (daño) del material, en combinación con los efectos reológicos (fluencia) originados por los largos períodos de aplicación de las cargas. La simulación de dicho mecanismo de colapso no se puede obtener si no se incluyen los efectos geoméricamente no lineales en el modelo.
- Los fuertes desplomes presentes en los pilares de la catedral pueden deberse al proceso seguido en la construcción de la estructura, combinado con el efecto de fluencia causado por el largo período de aplicación de las cargas.
- Se determinan posibles líneas de trayectoria de fisuras en el pórtico tipo de la catedral, originadas por diversos efectos (peso propio, fuerzas sísmicas, fluencia, etc.)
- Un refuerzo metálico en las bases de las bóvedas laterales no es una solución adecuada para aumentar la estabilidad de la estructura frente a cargas sísmicas. Sin embargo, es recomendable efectuar un análisis más exhaustivo que incluya los efectos dinámicos del sismo, debido al carácter aproximado del método de análisis utilizado (fuerzas estáticas equivalentes).

### 8.3 Principales contribuciones

- Formulación del *modelo de daño localizado*. El modelo de daño localizado tiene la misma formulación que el modelo de daño distribuido, pero la propagación del daño se restringe a un elemento de ancho para cada fisura, mediante una técnica externa; en este caso, el algoritmo de rastreo local.
- Desarrollo del modelo de daño localizado. El modelo de daño localizado permite la simulación de fisuras discretas en materiales cuasifrágiles mediante un algoritmo de rastreo en combinación con el modelo de daño escalar trac-

ción/compresión. El uso de este modelo no amerita parámetros materiales adicionales para su caracterización. Sólo se incorporan el *radio de exclusión inicial* para los casos de varias fisuras, y el *ángulo de curvatura máxima*, para los casos de fisuración a flexión simple.

- Aplicación del modelo de daño localizado al análisis de estructuras de obra de fábrica. En general, es posible simular mecanismos de colapso más realistas que los obtenidos con el modelo de daño distribuido.
- Análisis secuencial del proceso constructivo de edificios históricos. Se demuestra que el estado tenso-deformacional de una estructura antigua puede ser dependiente del proceso seguido para su construcción. Asimismo, se comentan aspectos importantes que hay que tener en cuenta al momento de utilizar el método de activación/desactivación de elementos para la simulación del proceso constructivo.
- Colapso por fluencia del material. Se demuestra que en un edificio histórico el colapso puede alcanzarse por efectos de deformaciones diferidas en el tiempo. Esto se logra mediante la utilización combinada de los modelos constitutivos de daño y de viscoelasticidad, bajo una formulación geoméricamente no lineal (grandes desplazamientos y pequeñas deformaciones).
- Análisis de la Catedral de Mallorca. Se ha analizado estructuralmente la Catedral de Mallorca, obteniéndose conclusiones útiles respecto al proceso constructivo empleado, a posibles mecanismos de colapso y la viabilidad de refuerzos antisísmicos.

## 8.4 Futuras líneas de investigación

A la luz de los resultados obtenidos en el presente trabajo, se lista a continuación una serie de áreas en las que es de interés continuar la investigación:

- **Extrapolación del algoritmo de rastreo a casos tridimensionales.** Esta tarea puede resultar bastante compleja por varias razones. Por una parte, en dos dimensiones la fisura es una recta, cuya propagación se define mediante un punto y un ángulo. En el caso tridimensional la fisura se define como una superficie, y la propagación se realiza mediante un frente que en principio podría tener una forma arbitraria dentro del dominio de elementos 3D. Así, la cantidad de variables en juego para establecer la propagación de una fisura aumenta sensiblemente. Por otro lado, y tal como se comenta en el capítulo correspondiente, en la implementación del algoritmo de rastreo 2D se ha detectado un alto grado de casuística que debe ser tomado en cuenta si se desea un método robusto. Esta casuística también aumenta de modo importante al extrapolar el algoritmo al caso tridimensional. Sin embargo, el potencial que

tendría el modelo de daño localizado en 3D es importante, en particular para el análisis de estructuras históricas, donde por lo general existen elementos resistentes (como las bóvedas) que difícilmente se pueden aproximar con un análisis bidimensional.

- **Estudio del efecto tamaño.** Conocido como la propiedad de los materiales cuasifrágiles de presentar diferentes curvas de respuesta carga-desplazamiento en función del tamaño del espécimen analizado. Es posible estudiar este efecto mediante un modelo numérico, sin embargo es necesario que el mismo sea capaz de reproducir fisuras localizadas correctamente. Así pues, el modelo de daño localizado se presenta como una herramienta idónea para realizar análisis de este tipo.
- **Incorporación de la anisotropía.** La inclusión de un modelo constitutivo anisótropo para la obra de fábrica permitiría observar la influencia de las direcciones reales de las juntas entre bloques de piedra o ladrillo en los resultados obtenidos con el modelo de daño localizado. Esto podría mejorar sensiblemente la simulación, permitiendo reproducir mecanismos de fallo más cercanos a la realidad. Los efectos de la anisotropía pueden incluirse, o bien definiendo un comportamiento elástico del material diferente según la dirección en que actúan las solicitaciones, o bien definiendo un comportamiento no lineal del material (resistencias y leyes de ablandamiento) en función de dichas direcciones. Para la simulación de la anisotropía en la obra de fábrica bastaría con diferenciar los comportamientos para cada una de las tres direcciones cartesianas principales (ortotropía).
- **Análisis dinámico.** Para un mayor conocimiento sobre el comportamiento estructural de la Catedral de Mallorca es recomendable hacer una serie de análisis donde se incluyan los efectos dinámicos de las cargas sísmicas o de viento. Estos efectos, combinados con las diferentes herramientas empleadas en este trabajo (simulación del proceso constructivo, fluencia del material, fisuras discretas, etc.) pueden aportar información muy importante para evaluar la respuesta de la estructura ante cargas dinámicas.
- **Simulación de fisuras discretas en flexión simple.** En el presente trabajo se propone una solución al problema de la simulación de las fisuras discretas en secciones bajo flexión simple. En general, los resultados obtenidos han sido satisfactorios, si bien ha sido necesaria la incorporación de un parámetro adicional, como es el *ángulo de curvatura máxima*. Sin embargo, puede ser de interés estudiar más a fondo el fenómeno, concentrándose en la disipación de energía y la distribución de tensiones *fuera* de la zona de la fisura, e intentar evitar la utilización de un parámetro externo al problema.
- **Análisis de fractura en modo I y modo II.** También se recomienda el empleo del modelo de daño localizado para estudiar estados tensionales mixtos, de fractura en modo I y modo II simultáneamente.

# Referencias

- ANTONACCI, E.; BEOLCHINI, G.C.; DI FABIO, F. y GATTULLI, V. (2001) The dynamic behaviour of the Basilica S. Maria di Collemaggio. En *2nd. International Congress on Studies in Ancient Structures*, editado por Dr. Görüm Arun y Nadide Seçkin. Yildiz Technical University, Estambul, Turquía. pp. 411-420
- ARAIZA, G. (2005) Reparación y refuerzo de paredes de obra de fábrica. Estudio experimental de la respuesta ante tensiones de corte. *Tesis Doctoral*. Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, España.
- ATKINSOS, R.H., AMADEI, B.P., SAEB, S. y STURE, S. (1989) Response of masonry bed joints in direct shear. *J. Struct. Engrg. ASCE*, **115(9)**, pp. 2276-2296.
- BACKES, H.P. (1985) On the behaviour of masonry under tension in the direction of the bed joints (en alemán). *Tesis doctoral*. Aachen University of Technology, Aachen, Alemania.
- BATHE, K.-J. (1996) *Finite Elements Procedures*. Prentice-Hall, Inc. New Jersey, U.S.A.
- BATTEN, J. (2002) *Creep Mechanics*. Springer-Verlag. Berlín, Alemania.
- BAŽANT, Z.P. (1976) Instability, ductility and size effect in strain softening concrete. *ASCE J. Eng. Mech.* **102**, pp. 331-144.
- BAŽANT, Z.P. y JIRÁSEK, M. (2002) Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: Survey of progress. *J. of Engineering Mechanics, ASCE*, **128**, pp. 1119-1149.

- BAŽANT, Z.P. y OH, B.H. (1983) Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and Structures*, **16**, 155-177.
- BAŽANT, Z.P. y PIJAUDIER-CABOT, G. (1988) Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence. *J. Appl. Mech.* **55**, pp. 287-293.
- BELYTSCHKO, T. y BLACK, T. (1999) Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.* **45(5)**, pp. 601-620.
- BELYTSCHKO, T.; FISH, J. y ENGELMANN, B.E. (1988) A finite element with embedded localization zones. *Comput. Meths. Appl. Mech. Eng.* **70**, pp. 59-89.
- BELYTSCHKO, T.; LIU, W.K. y Moran, B. (2000) *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley & Sons, Inc. New York, U.S.A.
- BERTO, L.; SCOTTA, R.; VITALIANI, R. y SAETTA, A. (2001) An orthotropic damage model for non linear masonry walls analysis: Irreversible strain and friction effects. En *Historical Constructions. Possibilities of numerical and experimental techniques*. Editado por Paulo B. Lourenço y Pere Roca. Universidad de Minho. Guimarães, Portugal. pp. 637-646
- BINDA, L.; ANZANI, A. y SAISI, A. (2003) Failures due to long-term behaviour of heavy structures: the Pavia Civic Tower and the Noto Cathedral. En *Structural Studies, Repairs and Maintenance of Heritage Architecture VIII*. Editado por C.A. Brebbia. Witpress, Southampton, UK. pp. 99-108.
- BRENCICH, A. y DE FRANCESCO, U. (2004) Assessment of multispan masonry arch bridges. Part I: A simplified approach. *Journal of Bridge Engineering ASCE*, **9 (6)**, pp. 582-590.
- BRENCICH, A.; GAMBAROTTA, L. y GHIA, A. (2001) Structural models for the assessment of the masonry dome of the Basilica of S. Maria of Carignano in Genoa. En *Historical Constructions. Possibilities of numerical and experimental techniques*. Editado por Paulo B. Lourenço y Pere Roca. Universidad de Minho. Guimarães, Portugal. pp. 675-684
- BREZZI, F. y FORTIN, M. (1991) *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer, New York, U.S.A.
- BROOKS, J.J. (1986) Composite models for predicting elastic and long-term movements in brickwork walls. *Proc. Brit. Mas. Soc.* **1**.
- CALVI, B., MACCHI, G. y ZANON, P. (1985) Random cyclic behaviour of reinforced masonry under shear action. *7<sup>th</sup> Int. Brick Masonry Conf.* Melbourne, Australia.

- CAROL, I.; RIZZI, E. y WILLIAM K. (1998) On the formulation of isotropic and anisotropic damage. *Computational Modelling of Concrete Structures*, editado por De Borst, Bicanic, Mang y Meschke. Balkema, Rotterdam.
- CASAPULLA, C. y JOSSA, P. (2001) A safety method in static analysis of block masonry. En *Historical Constructions. Possibilities of numerical and experimental techniques*. Editado por Paulo B. Lourenço y Pere Roca. Universidad de Minho. Guimarães, Portugal. pp. 757-768
- CASARIN, F. y MAGAGNA, E. (2001) Analisi strutturale della Cattedrale di Palma de Mallorca (en italiano). *Tesina de grado*. Facoltà Di Ingegneria. Università Degli Studi Di Padova, Padova, Italia.
- CERVERA, M. (2003) Viscoelasticity and rate-dependent continuum damage models. *Monografía CIMNE, M79*. Centre Internacional de Mètodes Numèrics en l'Enginyeria, Barcelona, España. Julio 2003.
- CERVERA, M. y CHIUMENTI, M. (2006) Smearred crack approach: back to the original track. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.* En imprenta.
- CERVERA, M., AGELET DE SARACÍBAR, C. y CHIUMENTI, M. (2002) COMET Data Input Manual v. 5.0. *Reporte Técnico CIMNE IT-308*. Centre Internacional de Mètodes Numèrics en l'Enginyeria CIMNE. Barcelona, España.
- CERVERA, M., OLIVER, J. y GALINDO, M. (1992) Numerical analysis of dams with extensive cracking resulting from concrete hydratation: simulation of a real case. *Dam Engineering* **3(1)**. pp. 1-22.
- CERVERA, M.; CHIUMENTI, M. y AGELET DE SARACÍBAR, C. (2003) Shear band localization via local J2 continuum damage mechanics. *Monografía. CIMNE, M78*. Centre Internacional de Mètodes Numèrics en l'Enginyeria, Barcelona, España. Julio 2003.
- CERVERA, M.; OLIVER, J. y PRATO, T. (1998) A thermo-chemo-mechanical model for the hydratation and aging of concrete. *Computational Modelling of Concrete Structures*. Balkema, Rotterdam, The Netherlands.
- CHAVES, E.W.V. (2003) A three dimensional setting for strong discontinuities modelling in failure mechanics. *Tesis doctoral*. Universidad Politècnica de Catalunya, Barcelona, España.
- CHOO, B.S.; COUTIE, M.G. y GONG, N.G. (1991) Finite-element analysis of masonry arch bridges using tapered elements. *Proc. Instn Civ. Engrs, Part 2*, **91**, pp. 755-770.
- CLOUGH, R.W. (1962) The stress distribution of Norfolk Dam. *Structures and Materials Research*. Department of Civil Engineering, Series 100, **19**, University of California, Berkeley, California, EE.UU.

- COMET. *Software para el análisis termo-mecánico acoplado*. Centre Internacional de Mètodes Numèrics en l'Enginyeria CIMNE. Barcelona, España.
- COMI, C.; MARIANI, S. y PEREGO, U. (2002) From localized damage to discrete cohesive crack propagation in nonlocal continua. En *Fifth World Congress on Computational Mechanics, WCCM V*. Editado por H.A. Mang, F.G. Rammerstorfer y J. Eberhardsteiner. Vienna, Austria.
- COMO, M.; IANNIRUBERTO, U. e IMBIMBO, M. (2001) Limit analysis of the structures of Colosseum. *Historical Constructions. Possibilities of numerical and experimental techniques*. Editado por Paulo B. Lourenço y Pere Roca. Universidad de Minho. Guimarães, Portugal. pp. 665-673
- CREAZZA, G.; SAETA, A.V.; MATTEAZZI, R. y VITALIANI, R. (2001) Analysis of masonry structures reinforced by FRP. En *Historical Constructions. Possibilities of numerical and experimental techniques*. Editado por Paulo B. Lourenço y Pere Roca. Universidad de Minho. Guimarães, Portugal. pp. 539-545
- CREAZZA, G.; SAETTA, A.; MATTEAZZI, R. y VITALIANI, R. (2000) Analyses of masonry vaulted structures by using 3-D damage model. En *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS*. Barcelona, España.
- CURTIN, W.G. (1987) *Structural masonry designer's manual*. BSP Professional Books. Londres, Inglaterra.
- D'AYALA, D. y CASAPULLA, C. (2001) Limit analysis of hemispherical domes with finite friction. En *Historical Constructions. Possibilities of numerical and experimental techniques*. Editado por Paulo B. Lourenço y Pere Roca. Universidad de Minho. Guimarães, Portugal. pp. 617-626.
- DE BORST, R. (1991) Simulation of strain localization: a reappraisal of the Cosserat continuum. *Eng. Comp.* **8**, pp. 317-332.
- DE BORST, R. (2001) Some recent issues in computational failure mechanics. *Int. J. Num. Meth. Eng.* **52**, pp. 63-95.
- DE BORST, R. y MÜHLHAUS, H.B. (1992) Gradient-dependent plasticity: Formulation and algorithmic aspects. *Int. J. Num. Meth. Eng.* **35**, pp. 521-539.
- DE BORST, R.; SLUYS, L.J.; MÜHLHAUS, H.B. y PAMIN, J. (1993) Fundamental issues in finite element analysis of localization of deformation. *Eng. Comp.* **10** pp. 99-122.
- DE VREE, J.H.P.; BREKELMANS, W.A.M. y VAN GILS, M.A.J. (1995) Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics. *Comp. & Struct.* **55**, pp. 581-588.

- DÍEZ, P.; ARROYO, M. y HUERTA, A. (2000) Adaptivity based on error estimation for viscoplastic softening materials. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, **5**, pp. 87-112.
- DREI, A. y FONTANA, A. (2001) Load carrying capacity of multiple-leaf masonry arches. *Historical Constructions. Possibilities of numerical and experimental techniques*. Editado por Paulo B. Lourenço y Pere Roca. Universidad de Minho. Guimarães, Portugal. pp. 547-555
- DUBÉ, J.-F.; PIJAUDIER-CABOT, G. y LA BORDERIE, C. (1996) Rate dependent damage model for concrete in dynamics. *J. of Eng. Mech. ASCE*, **122**, pp.939-947.
- DVORKIN, E.N.; CUITIÑO, A.M. y GIOIA, G. (1990) Finite elements with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions. *Int. J. Num. Meth. Eng.* **30**, pp. 541-564.
- EC-6 (1997). Eurocódigo 6. Proyecto de Estructuras de Fábrica. Comité Europeo de Normalización. AENOR. Madrid.
- FRUNZIO, G.; MONACO, M. y GESUALDO, A. (2001) 3D F.E.M. analysis of a Roman arch bridge. En *Historical Constructions. Possibilities of numerical and experimental techniques*. Editado por P. Lourenço y P. Roca. Universidad de Minho, Guimarães, Portugal. pp. 591-597.
- GAGO, A.S. y LAMAS, A.R.G. (2001) Structural analysis of the vault of the church of S. Francisco in Évora. *Historical Constructions. Possibilities of numerical and experimental techniques*. Editado por Paulo B. Lourenço y Pere Roca. Universidad de Minho. Guimarães, Portugal. pp. 769-776
- GÁLVEZ, CENDÓN, D.A. y PLANAS, J. (2002) Influence of shear parameters on mixed-mode fracture of concrete. *International Journal of Fracture*, **118**, pp. 163-189.
- GÁLVEZ, J.C., ELICES, M., GUINEA, G.V. y PLANAS, J. (1998) Mixed mode fracture of concrete under proportional and nonproportional loading. *International Journal of Fracture*, **94**, pp. 267-284.
- GAMBAROTTA, L. y LAGOMARSINO, S. (1997) Damage models for the seismic response of brick masonry shear walls. Part II: The continuum model and its applications. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **26**, pp. 441-462.
- GANZ, H.R. y THÜRLIMANN, B. (1984) Tests on masonry walls under normal and shear loading. *Reporte 7502-4*. Institute of Structural Engineering, ETH, Zurich, Suiza.
- GiD (v. 7) *Software para pre y postproceso gráfico*. Centre Internacional de Mètodes Numèrics en l'Enginyeria CIMNE. Barcelona, España. [www.gidhome.com](http://www.gidhome.com)

- GONZÁLEZ, J.L y ROCA, P. (2003) Estudio, diagnóstico, peritación y en su caso planteamiento de actuaciones, sobre el comportamiento constructivo-estructural de la Catedral de Santa María, en la ciudad de Palma, Isla de Mallorca (Baleares). Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, España.
- HALL, F.R. y HAYHURST, D.R. (1991) Modelling of grain size effects in creep crack growth using a nonlocal continuum damage approach. *Proc. R. Soc. Lond.* **A 433**, pp. 405-421.
- HAMID, A. (1978) Behaviour characteristics of concrete masonry. *Tesis Doctoral*. Universidad de McMaster, Hamilton, Canadá.
- HAMID, A. y DRYSDALE, R.G. (1980) Behaviour of brick masonry under combined shearing and compression loading. *2<sup>nd</sup> Canadian Masonry Symposium*, Ottawa, Canadá.
- HEERES, O.M. y DE BORST, R. (1999) Performance of low-order triangular elements during plastic flow. *Eng. Comp.* **16**, pp. 70-87.
- HEGEMEIER, G.A. (1978) On the behaviour of joints in concrete masonry. *North Amer. Masonry Conf.*, Boulder, Colorado, EE.UU.
- HEYMAN, J. (1999) El esqueleto de piedra. Teoría, historia y restauración de estructuras de fábrica. Instituto Juan de Herrera/CEHOPU, Madrid.
- HILSDORF, H.K. (1969) Investigation into the failure mechanism of brick masonry loaded in axial compression. *Proc. Int. Symp. on Masonry Structural Systems*, Texas, EE. UU., pp. 34-41.
- HUANG, Y. (1993) *Pavement Analysis and Design*. Prentice-Hall, Inc. New Jersey, U.S.A.
- HUERTA, S. (1996) La teoría del arco de fábrica: desarrollo histórico. *Revista del Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, OP N° 38, Ingeniería e Historia I*. pp. 18-29.
- HUERTA, S. (1998) Mechanical behaviour of arches and vaults. En *Structural Analysis of Historical Constructions II*. Editado por P. Roca, J.L. González, E. Oñate y P.B. Lourenço. CIMNE, Barcelona, España. pp. 1-6
- HUERTA, S. (2001) Mechanics of masonry vaults: the equilibrium approach. En *Historical Constructions. Possibilities of numerical and experimental techniques*. Editado por Paulo B. Lourenço y Pere Roca. Universidad de Minho. Guimarães, Portugal. pp. 47-70
- HUERTA, S. y LÓPEZ, G. (1997) Stability and consolidation of an ashlar barrel vault with great deformations: the church of Guimarei. En *Structural Studies, Repairs and Maintenance of Historical Buildings*. Editado por S. Sánchez-Beitia y C.A. Brebbia. Computational Mechanics Publications. Southampton, UK and Boston, USA. pp. 587-596

- HUGHES, T.J.R. (1987) *The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice-Hall, Inc. New Jersey, U.S.A.
- JIRÁSEK, M. (1998) Nonlocal models for damage and fracture: comparison of approaches. *Int. J. Num. Meth. in Eng.* **52**, pp. 63-95.
- JIRÁSEK, M. (2000) Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. *Comp. Meth. App. Mech. Eng.* **188**, pp. 307-330.
- JIRÁSEK, M. (2002) Objective modelling of strain localization. *Revue Française de Génie Civil.* **6**, pp. 1119-1132.
- JIRÁSEK, M. y PATZÁK B. (2001) Models for quasibrittle failure: theoretical and computational aspects. En *European Conference on Computational Mechanics, ECCM-2001*. Cracovia, Polonia.
- JU, J.W. (1989) On energy-based coupled elastoplastic damage theories: constitutive modelling and computational aspects. *Int. J. Sol. and Struct.* **25**, pp. 803-833.
- JU, J.W. (1990) Isotropic and anisotropic damage variables in continuum damage mechanics. *J. of Eng. Mech. ASCE.* **116**, pp. 2764-2770.
- LARSSON, R. y RUNESSON, K. (1996) Element-embedded localization band based on regularized displacement discontinuity. *J. Eng. Mech. ASCE* **122**, pp. 402-4011.
- LOFTI, H.R. y SHING, P.B. (1995) Embedded representation of fracture in concrete with mixed finite elements. *Int. J. Num. Meth. Eng.* **38**, pp. 1307-1325.
- LOURENÇO, P.B. (1996) *Computational strategies for masonry structures. Tesis doctoral*. Delft University Press. Delft, The Netherlands.
- LOURENÇO, P.B. (1998) Experimental and numerical issues in the modelling of the mechanical behaviour of masonry. En *Structural Analysis of Historical Constructions II*. Editado por P. Roca, J.L. González, E. Oñate y P.B. Lourenço. CIMNE, Barcelona, España. pp. 57-91.
- LOURENÇO, P.B. (2001) Analysis of historical constructions: from thrust-lines to advanced simulations. En *Historical Constructions. Possibilities of numerical and experimental techniques*. Editado por Paulo B. Lourenço y Pere Roca. Universidad de Minho. Guimarães, Portugal. pp. 91-116
- LOURENÇO, P.B., BARROS, J.O. y OLIVEIRA, J.T. (2004) Shear testing of stack bonded masonry. *Construction and Building Materials*, **18**, pp. 125-132.
- LOURENÇO, P.B.; MOURÃO, S. (2001) Safety assessment of Monastery of Jerónimos, Lisbon. En *Historical Constructions. Possibilities of numerical and experimental techniques*. Editado por Paulo B. Lourenço y Pere Roca. Universidad de Minho. Guimarães, Portugal. pp. 697-706

- LOURENÇO, P.B.; OLIVEIRA, D.V.; MOURÃO, S. (2001) Numerical analysis as a tool to understand historical structures. The example of the church of Oteiro. en *2nd. International Congress on Studies in Ancient Structures*. Editado por Dr. Görüm Arun y Nadide Seçkin. Yildiz Technical University, Estambul, Turquía. pp. 355-364
- MACCHI, G. (2001) Diagnosis of the façade of St. Peter's Basilica in Rome. En *Historical Constructions. Possibilities of numerical and experimental techniques*. Editado por P. Lourenço y P. Roca. Universidad de Minho, Guimarães, Portugal. pp. 309-317.
- MANZOLI, O.L. (2005) Simulação de propagação de fratura mediante modelos constitutivos locais combinados com técnica de construção progressiva da trajetória da descontinuidade. En el *Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*. Granada, España.
- MATTIASSON, K. (1981) Numerical results from large deflection beam and frame problems analysed by means of elliptic integrals. *Int. J. Num. Meth. Eng.* **17(1)**, pp. 145-153.
- MAYNOU, J. (2001) Estudi estructural del pòrtic tipus de la Catedral de Mallorca mitjançant l'estàtica gràfica. *Tesina de Especialidad*. ETSECCPB, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España.
- MELE, E.; GATTO, D. y DE LUCA, A. (2001) Structural analysis of basilica churches: A case study. En *Historical Constructions. Possibilities of numerical and experimental techniques*. Editado por Paulo B. Lourenço y Pere Roca. Universidad de Minho. Guimarães, Portugal. pp. 729-738
- MELI, R. (1973) Behaviour of masonry walls under lateral loads. En *5<sup>th</sup> World Congress on Earthquake Engineering*, pp. 853-862.
- MÖES, N., DOLBOW, J. y BELYSCHO, T. (1999) A finite element method for crack growth without remeshing. *Int. J. Num. Meths. in Eng.* **46**, pp. 131-150.
- MOLINS, C. (1996a) Characterization of the mechanical behaviour of masonry. *Structural Analysis of Historical Constructions*, editado por P. Roca, J.L. González, A.R. Marí y E. Oñate. CIMNE, Barcelona, España. pp. 86-122.
- MOLINS, C. (1996b) Un modelo para el análisis del comportamiento resistente de construcciones de obra de fábrica. *Tesis doctoral*. Departamento de Ingeniería de la Construcción, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, España.
- MOLINS, C. (1998) Numerical simulation of the ultimate response of arch bridges. En *Structural Analysis of Historical Constructions II*. Editado por p. Roca, J.L. González, E. Oñate y P.B. Lourenço. CIMNE, Barcelona, España. pp. 93-123.

- MOLINS, C. y ROCA, P. (1997a) Numerical modelling of wall masonry structures. En *Proceedings of the International Congress on Studies in Ancient Structures*. Editado por Görün Özşen. Yildiz Technical University, Estambul, Turquía. pp. 497-506.
- MOLINS, C. y ROCA, P. (1997b) Analysis of 3D systems composed of load bearing walls. En *Structural Studies, Repairs and Maintenance of Historical Buildings*. Editado por S. Sánchez-Beitia y C.A. Brebbia. Computational Mechanics Publications. Southampton, UK and Boston, USA. pp. 387-396.
- MOLINS, C. y ROCA, P. (1998) Capacity of masonry arches and spatial frames. *Journal of Structural Engineering*, **124 (6)**, pp. 653-663
- NCSE-02 (2002) Norma de Construcción Sismorresistente: Parte General y de Edificación. Ministerio de Fomento. Madrid, España.
- NGO, D. y SCORDELIS, A.C. (1967) Finite elements analysis of reinforced concrete beams. *ACI Journal*, **64 (14)**, pp. 152-163.
- NILSON, A.H. (1968) Nonlinear analysis of reinforced concrete by the finite element method. *ACI Journal*, **65(9)**, pp. 757-776.
- NOORU-MOHAMED, M.B. (1992) Mixed-mode fracture of concrete: an experimental approach. *Tesis doctoral*. Delft University of Technology. Delft, Holanda.
- NUSS, L.K., NOLAND, J.L. y CHINN, J. (1978) The parameters influencing shear strength between clay masonry units & mortar. *North Amer. Masonry Conf.*, Boulder, Colorado, EE.UU.
- OLIVEIRA, D.V. (2000) Mechanical Characterization of stone and brick masonry. *Report 00-DEC/E-4*, Universidade do Minho, Guimarães, Portugal.
- OLIVER, J. (1989) A consistent characteristic length for smeared cracking models. *Int. J. Num. Meth. Eng.* **28**, pp. 461-474.
- OLIVER, J. (1995) Continuum modelling of strong discontinuities in solid mechanics using damage models. *Computational Mechanics*, **17**, pp. 277-296.
- OLIVER, J. y AGELET, C. (2000) Mecánica de Medios Continuos para Ingenieros. Edicions UPC. Barcelona, España.
- OLIVER, J. y HUESPE (2004) Continuum approach to material failure in strong discontinuity settings. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.* **193**, 3195-3220.
- OLIVER, J.; HUESPE, A.E., SAMANIEGO, E. y CHAVES, E.W.V. (2004) Continuum approach to the numerical simulation of material failure in concrete. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.* **28**, pp. 609-632.

- OLLER, S.; CAR, E. y LUBLINER, J. (2003) Definition of a general implicit orthotropic yield criterion. *Comp. Meth. in App. Mech. and Eng.* **192**, pp. 895-912.
- OÑATE, E. (1995) Cálculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos. Análisis Estático Lineal. *Segunda edición*. CIMNE. Barcelona, España.
- OÑATE, E.; HANGANU, A.; BARBAT, A.; OLLER, S.; VITALIANI, R.; SAETTA, A. y SCOTTA, R. (1997) Structural analysis and durability assessment of historical constructions using a finite element damage model. *Structural Analysis of Historical Constructions*. Editado por P. Roca, J.L. González, A.R. Marí y E. Oñate. CIMNE, Barcelona, España. pp. 189-244.
- ORDUÑA A. y LOURENÇO P. (2001) Limit analysis as a tool for the simplified assessment of ancient masonry structures. En *Historical Constructions. Possibilities of numerical and experimental techniques*. Editado por P. Lourenço y P. Roca. Universidad de Minho, Guimarães, Portugal. pp. 511-520.
- ORDUÑA A. y LOURENÇO, P.B. (2003) Cap model for limit analysis and strengthening of masonry structures. *Journal of Structural Engineering ASCE*, **129:10**, pp. 1367-1375.
- OWEN, D.R.J. y FAWKES, A.J. (1983) Engineering Fracture Mechanics. *Pineridge Press*, Swansea.
- PAGE, A.W. (1980) A biaxial failure criterion for brick masonry in the tension-tension range. *Int. J. of Masonry Construction*, **1 (1)**, pp. 26-29.
- PAGE, A.W. (1981) The biaxial compressive strength of brick masonry. *Proc. Instn Civ. Engrs, Part 2*. **71**, pp. 893-906.
- PAGE, A.W. (1983) The strength of brick masonry under biaxial tension-compression. *Int. J. of Masonry Construction*, **3 (1)**, pp. 26-31.
- PAMIN, J. (1994) Gradient-dependent plasticity in numerical simulation of localization phenomena. *Tesis Doctoral*. Delft University of Technology. Delft, Holanda.
- PAPA, E. y TALIERCIO, A. (2003) Creep modelling of masonry historic towers. *Structural Studies, Repairs and Maintenance of Heritage Architecture VIII*. Editado por C.A. Brebbia. Witpress, Southampton, UK. pp. 131-140.
- PAPA, E.; TALIERCIO, A. y BINDA, L. (2001) Safety assessment of ancient masonry towers. *2nd. International Congress on Studies in Ancient Structures. 2001*, Editado por Dr. Görüm Arun y Nadide Seçkin. Yildiz Technical University, Estambul, Turquía. pp. 345-354.
- PAPA, E.; TALIERCIO, A. y MIRABELLA-ROBERTI, G. (2000) A damage model to predict the behaviour of masonry under sustained loading. *12th International brick/block masonry conference. IB2MaC*. Madrid, España. pp. 1777-1790.

- PEERLINGS, R.H.J.; DE BORST, R.; BREKELMANS, W.A.M. y GEERS, M.G.D. (1998) Gradient-enhanced damage modelling of concrete fracture. *Mechanics of Cohesive-frictional Materials*, **3**, pp. 323-342.
- PIET 70 Obras de fábrica. *Prescripciones del Instituto Eduardo Torroja*. Instituto Eduardo Torroja, Madrid, España (1971).
- PISTONE, G.; RIVA, G. y ZORGNO, A.M. (1997) Structural behaviour of ancient chimneys. *Proceedings of the International Congress on Studies in Ancient Structures*. Editado por Görün Özşen. Yildiz Technical University, Estambul, Turquía. pp. 331-341
- RAIJMAKERS, T.M.J. y VERMELTFOORT, A. T. (1992) Deformation controlled tests in masonry shear walls (en alemán). *Reporte B-92-1156*, TNO-Bouw, Delft, Holanda.
- RASHID, Y. (1996) Analysis of prestressed concrete pressure vessels. *Nuclear Engineering and Design*, **7**, pp. 334-344.
- RING (v. 1.5) *Software para el análisis de puentes de arco de obra de fábrica*. Computational Limit Analysis & Design Unit, University of Sheffield, U.K. [www.ring.shef.ac.uk](http://www.ring.shef.ac.uk)
- ROCA, P. (2001a) Studies on the structure of Gothic Cathedrals. *Historical Constructions. Possibilities of numerical and experimental techniques*. 2001. Editado por Paulo B. Lourenço y Pere Roca. Universidad de Minho. Guimarães, Portugal. pp. 71-90.
- ROCA, P. (2001b) Analysis of gothic structure. *2nd. International Congress on Studies in Ancient Structures. 2001*, Editado por Dr. Görüm Arun y Nadide Seçkin. Yildiz Technical University, Estambul, Turquía. pp. 291-300.
- ROCA, P.; PELLEGRINI, L.; OÑATE, E. y HANGANU, A. (1998) Analysis of the structure of gothic cathedrals. Application to Barcelona Cathedral. *Structural Analysis of Historical Constructions II*. Editado por P. Roca, J.L. González, E. Oñate y P.B. Lourenço. CIMNE, Barcelona, España. pp. 231-258.
- ROCCATI, R. y ROSELLI, M. (2003) Cracks modelling in presence of notch and seizure effects in historical buildings damaged by an earthquake in Piedemont. *Structural Studies, Repairs and Maintenance of Heritage Architecture VIII*. Editado por C.A. Brebbia. Witpress, Southampton, UK. pp. 585-594.
- RODRÍGUEZ-FERRÁN, A.; MORATA, I. y HUERTA, A. (2004) Efficient and reliable nonlocal damage models. *Comput. Methods App. Mech. Eng.* **193**, pp. 3431-3455.
- ROEDE-CABO, G.M. y AYALA, A.G. (2001) An evaluation of methods for the determination of the structural stability of historic masonry arches. *Historical Constructions. Possibilities of numerical and experimental techniques*. Editado por Paulo B. Lourenço y Pere Roca. Universidad de Minho. Guimarães, Portugal. pp. 557-565

- ROTS, J.G. (1988) Computational modelling of concrete fracture. *Tesis doctoral*. Delft University of Technology. Delft, Holanda.
- RUBIÓ I BELLVER, J. (1912) Conferencia acerca de los conceptos orgánicos, mecánicos y constructivos de la catedral de Mallorca. *Anuario de la Asociación de Arquitectos de Cataluña*, Barcelona, España.
- SAETTA, A.; SCOTTA, R. y VITALIANI, R. (2000) An orthotropic fourth-rank damage model for masonry structures. *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS*. Barcelona, España.
- SALAS, A. (2002) Estudio estructural de los porticos tipo de la Catedral de Mallorca. *Tesis de Especialidad*. ETSECCPB, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España.
- SAMANIEGO, E. (2003) Contributions to the continuum modelling of strong discontinuities in two-dimensional solids. *Tesis doctoral*. Universidad Politècnica de Catalunya, Barcelona, España.
- SAMARASINGHE, W. y HENDRY, A.W. (1980) The strength of brickwork under biaxial tensile and compressive stress. *Proc. 7<sup>th</sup> Symposium on Load Bearing Brickwork*. Londres.
- SAMARASINGHE, W.; PAGE, A.W. y HENDRY, A.W. (1982) A Finite element model for the in-plane behaviour of brickwork. *Proc. Instn Civ. Engrs, Part 2*, **73**, pp. 171-178.
- SIMO, J.C. y OLIVER, J. (1994) A new approach to the analysis and simulation of strain softening in solids. En *Fracture and Damage in Quasibrittle Structures*, editado por Z.P. Bažant et al. Londres, pp. 25-39.
- SIMO, J.C.; OLIVER, J. y ARMERO, F. (1993) An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids. *Computational Mechanics*, **12**, pp. 49-61.
- ŠIMUNIĆ BURŠIĆ, M. (2001) Structural analysis of the phases of construction: discovering the secrets of the ancient masters. En *2nd. International Congress on Studies in Ancient Structures*. Editado por Dr. Görüm Arun y Nadide Seçkin. Yildiz Technical University, Estambul, Turquía. pp. 335-344.
- SOFRONIE, R.A.; POPA, G.; NAPPI, A. y FACCHIN, G. (2001) Dynamic response of church steeples. *2nd. International Congress on Studies in Ancient Structures*. Editado por Dr. Görüm Arun y Nadide Seçkin. Yildiz Technical University, Estambul, Turquía. pp. 399-410
- SUKUMAR, N.; MÖES, N; MORAN, B. y BELYSCHO, T. (2000) Extended finite element method for three-dimensional crack modelling. *Int. J. Num. Meths. in Eng.* **48**, 1549-1570.

- TONG, P. y PIAN, T.H.H. (1973) On the convergence of the finite element method for problems with singularity. *Int. J. Solids Struct.* **9**, pp. 313-321.
- TOUMBAKARI, E.E. (1997) Structural analysis of the church of Aghia Triada, Astros, Peloponnesos, Greece. *Proceedings of the International Congress on Studies in Ancient Structures*. Editado por Görün Özşen. Yildiz Technical University, Estambul, Turquía. pp. 507-516
- VALCÁRCEL, J.P.; MARTÍN, E.; DOMÍNGUEZ, E. y ESCRIG, F. (2001) Structural modelling of medieval walls. *Historical Constructions*, editado por P. Lourenço y P. Roca. Universidad de Minho, Guimarães, Portugal. pp. 501-510.
- VERMELTFOORT, A. T. y RAIJMAKERS, T.M.J. (1993) Deformation controlled tests in masonry shear walls, Part 2 (en alemán). *Reporte TUE/BKO/93.08*, Eindhoven University of Technology, Eindhoven, Holanda.
- WANG, W.M.; SLUYS, L.J. y DE BORST, R. (1997) Viscoplasticity for instabilities due to strain softening and strain-rate softening. *Int. J. for Num. Meth. in Eng.* **40**, pp. 3839-3864.
- YOKEL, Y.F. y FATTAL, S.G. (1976) Failure hypothesis for masonry shear walls. *Journal of the Structural Division, ASCE*, **102 ST3**, pp. 515-532.
- ZIENKIEWICZ, O.C. y TAYLOR, R.L. (1994) El método de los elementos finitos, vol. 1. Primera edición en castellano. McGraw-Hill, CIMNE. Barcelona, España.
- ZIENKIEWICZ, O.C.; HUANG, M. y PASTOR, M. (1995a) Softening, localization and adaptative remeshing: capture of discontinuous solutions. *Comp. Mech.* **17**, pp. 98-106.
- ZIENKIEWICZ, O.C.; HUANG, M. y PASTOR, M. (1995b) Localization problems in plasticity using finite elements with adaptative remeshing. *Int. J. Num. Meth. in Geomech.* **19**, pp. 127-148.
- ZUCCHINI, A. y LOURENÇO, P.B. (2002) A Micro-mechanical model for the homogenisation of masonry. *International Journal of Solids and Structures*, **39**, pp. 3233-3255.