

Simulación numérica del comportamiento mecánico de los materiales compuestos

S. Oller

Simulación numérica del comportamiento mecánico de los materiales compuestos

S. Oller

Monografía CIMNE N°-74, Abril 2003

CENTRO INTERNACIONAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA
Edificio C1, Campus Norte UPC
Gran Capitán s/n
08034 Barcelona, España
www.cimne.upc.es

Primera edición: Abril 2003

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL COMPORTAMIENTO MECÁNICO DE LOS
MATERIALES COMPUESTOS**
Monografía CIMNE M74
© El autor

ISBN: 84-95999-24-2

Depósito legal: B-20310-2003

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

i

1 INTRODUCCIÓN	1-1
1.1 Utilización de los materiales compuestos.	1-2
1.1.1 Utilización en la industria del automóvil	1-2
1.1.2 Utilización en la industria aeronáutica	1-2
1.1.3 Utilización de los materiales compuestos en la industria naval	1-3
1.1.4 Utilización de los materiales compuestos en la ingeniería civil	1-4
1.1.4.1 Refuerzos de estructuras	1-5
1.1.4.2 Armaduras en el hormigón	1-5
1.1.4.3 Tirantes	1-6
1.1.4.4 Perfiles de “pultrusión”	1-6
1.2 Propiedades de los Compuestos ~ Características alcanzables.	1-6
1.3 Clasificación de los materiales compuestos.	1-8
1.3.1 Clasificación según su topología	1-8
1.3.2 Clasificación según sus componentes	1-9
1.3.3 Clasificación estructural	1-9
2 ANISOTROPIA MECÁNICA	2-1
2.1 Introducción.	2-1
2.2 Generalidades sobre la formulación anisótropa	2-1
2.3 Función de fluencia y de potencial plástico para materiales isótropos	2-5
2.4 Definición general explícita de un criterio de fluencia isótropo en la configuración referencial.	2-7
2.5 Definición general explícita de un criterio de fluencia ortotropo en la configuración referencial.	2-8
2.6 Definición general implícita de un criterio ortotropo en la configuración referencial	2-11
2.6.1 Transformación del espacio de tensiones.	2-11
2.6.2 Transformación del espacio de deformaciones.	2-14

2.7 Definición general del tensor de transformación de espacio	2-16
2.8 Obtención numérica de la forma matricial del tensor de ajuste	2-18
2.9 Comprobación del criterio ortotropo de Mises-Hill vía mapeo de espacio	2-20
2.10 Anisotropía en la configuración actualizada	2-21
2.10.1 Transformación del espacio de tensiones.	2-22
2.10.2 Transformación del espacio de deformaciones	2-23
2.11 Regla de flujo plástico. Ley de evolución de las variables internas	2-25
2.11.1 Configuración referencial	2-25
2.11.2 Configuración actualizada	2-26
2.12 Definición de la disipación en el espacio isótropo ficticio. Unicidad de disipación	2-27
2.12.1 Configuración referencial	2-28
2.12.2 Configuración actualizada	2-29
2.13 Ecuación constitutiva tangente	2-30
2.13.1 Configuración referencial	2-30
2.13.2 Configuración espacial	2-31

3 TEORÍA DE MEZCLAS 3-1

3.1 Introducción.	3-1
3.2 Teoría de mezclas clásica.	3-4
3.2.1 Expresión de la energía libre	3-4
3.3 Modificación teoría clásica. Modelo serie-paralelo	3-6
3.4 Teoría de mezclas generalizada	3-10
3.5 Teoría de mezclas clásica formulada en grandes deformaciones	3-14
3.5.1 Ecuación de cierre o compatibilidad	3-14
3.5.2 Función de energía libre	3-15
3.5.3 Ecuación constitutiva	3-16
3.5.3.1 Configuración referencial	3-16
3.5.3.2 Configuración actualizada	3-17
3.6 Teoría de mezclas generalizada formulada en grandes deformaciones	3-17
3.6.1 Ecuación constitutiva	3-19
3.7 Modificación de la teoría de mezclas para refuerzo de corta longitud	3-21
3.7.1 Distribución de tensión axial en la fibra	3-23
3.7.2 Distribución de tensión tangencial en la interface	3-25
3.7.3 Modelo constitutivo para fibras cortas	3-26
3.8 Ecuación constitutiva del material compuesto	3-27
3.8.1 Energía libre para compuestos reforzados con fibras cortas	3-27
3.9 Propiedades mecánicas de las fibras en la Teoría de mezclas ~ Comportamiento	

lineal en pequeñas deformaciones	3-31
3.10 Ejemplo de comparación. “Micromodelo” vs. “Teoría de Mezclas” con anisotropía en grandes deformaciones.	3-32
3.11 Simulación del comportamiento de mezclas asfálticas.	3-38
3.11.1 Introducción	3-38
3.11.2 Motivación y descripción del problema	3-39
3.11.3 Parametrización de los materiales. Granulometría simplificada y corrección de las propiedades por relación de aspecto	3-40
3.11.4 Simulación Numérica	3-42

4 DESLIZAMIENTO FIBRA-MATRIZ (DFM) 4-1

4.1 Introducción.	4-1
4.2 Distribución de tensiones a lo largo de la fibra de refuerzo	4-2
4.3 Interacción entre grietas y fibras	4-3
4.4 Modelos constitutivos para materiales compuestos con “DFM”	4-5
4.5 Propuesta para el tratamiento del “DFM”	4-8
4.5.1 Modificación del modelo constitutivo Tratamiento del fenómeno de deslizamiento entre fibra y matriz (DFM)	4-8
4.5.1.1 Introducción	4-8
4.5.1.2 Implementación	4-10
4.6 Expresión del modelo constitutivo elasto-plástico del refuerzo	4-12
4.6.1 Condición de fluencia	4-12
4.6.2 Regla de flujo plástico	4-12
4.7 Formulación Lagrangeana “Total” y “Actualizada”	4-13
4.8 Implementación de la teoría de mezclas y anisotropía en el contexto del “MEF”	4-17
4.9 Fenómeno “DFM”: Micromodelo y Teoría de mezclas con anisotropía.	4-20

5 TEORÍA DE HOMOGENIZACIÓN 5-1

5.1 Introducción y estado del conocimiento.	5-1
5.1.1 Métodos de Promedios.	5-3
5.1.2 Teoría de expansión asintótica.	5-4
5.1.3 Extensión del “Método de los Promedios” y del “Método de Expansión Asintótica” al problema no lineal.	5-6
5.1.4 Otros temas relacionados con la homogeneización.	5-6
5.1.4.1 Condiciones de contorno y su implementación	5-7
5.1.4.2 Solución en dos escalas del problema elástico.	5-8

5.1.4.3 Cuestionamientos a la teoría de homogeneización y utilización de Métodos adaptativos y “multi-grid”.	5-9
5.1.4.4 Homogeneización mediante el Método de Elementos Finitos Voronoi.	5-12
5.2 Teoría de homogeneización basada en la “Periodicidad Local”.	5-14
5.2.1 Introducción.	5-14
5.2.2 Conceptos sobre la estructura periódica.	5-15
5.2.3 Conceptos sobre la estructura periódica.	5-16
5.2.4 Periodicidad local de las variables.	5-16
5.2.4.1 Efecto del campo de desplazamientos periódico	5-18
5.2.5 Homogeneización del tensor de deformaciones.	5-20
5.2.6 La tensión homogeneizada y la ecuación de equilibrio.	5-21
5.2.7 Fundamentos del problema elástico en la Micro-Macro escalas.	5-23
5.2.8 Fundamentos del problema inelástico en la Micro-Macro escalas.	5-26
5.2.9 Determinación del tensor constitutivo elástico para el material compuesto.	5-29
5.2.10 Determinación del tensor constitutivo inelástico cuasi-tangente para el material compuesto Determinación analítica.	5-31
5.2.11 Acoplamiento Micro-Macro estructural.	5-32
5.2.12 Influencia de los efectos locales.	5-34
5.3 Ejemplos de comprobación de la “Teoría de Homogeneización de Periodicidad Local”.	5-37
5.3.1 Comportamiento transversal de una matriz reforzada con fibras largas Prueba de tracción simple.	5-37
5.3.2 Cilindro grueso sometido a presión interna.	5-39
5.3.3 Mampostería homogeneizada, tratada como un material compuesto.	5-42

6 MAMPOSTERÍA – COMPUESTO HOMOGENEIZADO

6.1 Introducción y antecedentes.	6-1
6.2 Propiedades de la mampostería	6-2
6.2.1 Comportamiento de la mampostería en compresión uniaxial	6-2
6.2.2 Comportamiento de la mampostería a tracción uniaxial	6-3
6.2.3 Comportamiento biaxial	6-4
6.2.4 Comportamiento de la mampostería Post-Pico. Ablandamiento o “softening”.	6-6
6.3 Distintos métodos para el cálculo de la mampostería.	6-7
6.4 Modelo constitutivo basado en un caso particular del concepto de homogeneización.	6-9
6.4.1 Modelo constitutivo.	6-10
6.4.1.1 Ecuaciones del “Modo 1”.	6-10

6.4.1.2 Ecuaciones del “Modo 2”.	6-13
6.4.1.3 Ecuaciones del “Modo 3”.	6-17
6.4.1.4 Ecuaciones del “Modo 4”.	6-20
6.4.1.5 Resumen de los parámetros mecánicos homogenizados para una “celda” en 3-D.	6-22
6.4.1.6 Flujo Plástico Homogeneizado.	6-25
6.5 Ejemplo de comprobación de la formulación.	6-28

7 PANDEO INELÁSTICO en COMPUESTOS REFORZADOS.	7-1
7.1 Introducción.	7-1
7.2 Descripción del fenómeno – Estado del conocimiento.	7-2
7.2.1 Carga crítica de Euler.	7-2
7.2.2 Modelo de Rosen.	7-3
7.2.3 Modelos micro-mecánicos.	7-4
7.2.3.1 Formulación en elementos finitos.	7-4
7.2.3.2 Formulación simplificada.	7-5
7.2.4 Modelos de daño mecánico.	7-7
7.3 Modelo de pérdida de rigidez por pandeo de los compuestos con fibras largas.	7-11
7.3.1 Introducción.	7-11
7.3.2 Definición general del modelo de fibras.	7-12
7.3.3 Definición de la variable de pérdida de rigidez por pandeo.	7-12
7.3.3.1 Participación de la fibra.	7-14
7.3.3.2 Participación de la matriz.	7-15
7.3.3.3 Propuesta de la variable de pérdida de rigidez por pandeo.	7-17
7.4 Principales características del modelo.	7-17
7.5 Disipación de energía.	7-22
7.6 Ejemplo de comprobación.	7-24

PRESENTACIÓN

El presente trabajo resume la tarea de investigación llevada a cabo por el autor en el área de los “materiales compuestos” durante los últimos doce años (desde 1990). El mismo refleja la actividad realizada personalmente, junto a otros investigadores y también a través de los estudiantes de fin de carrera y doctorado que he dirigido en esta línea de trabajo¹.

Los temas que aquí se incluyen están orientados fundamentalmente a la modelización constitutiva y evaluación de estructuras construidas en materiales compuestos. Los mismos han sido y muchos de ellos siguen siendo originales, por lo que no representan una mera continuidad de las corrientes investigadoras que estaban en desarrollo en cada momento.

Cada uno de los conceptos aquí presentados sólo representa un resumen de trabajos más amplios del autor y sus colaboradores, cuyos textos completos pueden consultarse siguiendo las correspondientes referencias enunciadas en cada caso. También es conveniente hacer notar que todos ellos son temas aún abiertos que necesitan de la participación de más personas y años de dedicación. De la lectura de esta memoria puede quedar en claro que no todos los temas se encuentran al mismo nivel de desarrollo conceptual ni técnico. Algunos de ellos constituyen ideas más cerradas que otros, pero en general todos ellos dejan claro que el estudio numérico-mecánico de los compuestos es un área con mucho futuro, tanto como materia de estudio como así también en las posibilidades que puede ofrecer a la industria y a mejorar su utilización en beneficio de la sociedad en general.

Esta línea de trabajo, iniciada en el año 1990, ha avanzado en dos vertientes distintas de investigación. La primera a través de la “Teoría de Mezclas de Sustancias” y sus modificaciones y la segunda profundizando en la “Teoría de Homogeneización”. Ambas líneas han dado lugar a una importante producción científica y dos tesis doctorales, la del Dr. Eduardo Car² y la del Dr. Fernando Zalamea³.

El objetivo de la investigación fue inicialmente, y actualmente sigue siendo, un trabajo orientado a diseñar materiales compuestos a partir de las propiedades básicas de sus com-

¹ **Investigadores que participaron en la obtención de los desarrollos que se presenta en esta memoria:** E. Barbosa (4), J. Benaque (3), E. Car (1), S. Botello (7), S. Gutiérrez (1), J. López (1), J. Lubliner (6), B. Lucchini (5), J. A. Mayugo (8), L. Neamtu (2), J. Miquel (1,2), S. Oller (1,2), E. Oñate (1,2), J. M. Puig (1), F. Rastellini (1), F. Zalamea (1).

(1) Universitat Politècnica de Catalunya, España

(2) Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería,

(3) Universidade de São Paulo, Brasil,

(4) Universidade de Belo Horizonte, Brasil,

(5) Universidad Nacional de Tucumán, Argentina,

(6) University of California –Berkeley, U.S.A.

(7) Universidad de Guanajuato, México.

(8) Universitat de Girona, España

² Eduardo Car (2000). Modelo Constitutivo para el Estudio del Comportamiento Mecánico de los Materiales Compuestos. Universidad Politécnica de Cataluña - Departamento de Resistencia de Materiales y Estructuras en la Ingeniería - Barcelona - España. Directores: S. Oller, E. Oñate.

³ Fernando Zalamea (2001). Modelización de Compuestos Mediante la Teoría de Homogeneización. Universidad Politécnica de Cataluña - Departamento de Resistencia de Materiales y Estructuras en la Ingeniería - Barcelona - España. Directores: J. Miquel, S. Oller.

ponentes, sin que sea necesario tratar el compuesto como un único material. Esta “inquietud” motiva el permanente desarrollo que se está llevando a cabo y abre las puertas al “diseño del material” apropiado para cada estructura. La complicación y dificultad que presenta el estudio de este tema ha exigido la aplicación a fondo de muchas de las técnicas previamente desarrolladas por el autor en otras líneas de trabajo, como plasticidad, anisotropía, introducción de movimientos de sólido rígido a través de la ecuación constitutiva, inestabilidad local mediante una formulación constitutiva, grandes deformaciones, problemas de delaminación, fatiga en compuestos, etc. Todo esto ha sido acompañado de un profundo trabajo informático al nivel de bases de datos y en paralelización, habiéndose desarrollado un código de elementos finitos –PLCd2⁴– que ha servido a modo de “banco de desarrollos y pruebas” para hacer posible estas formulaciones. Actualmente, toda esta tecnología está siendo traspasada al programa COMET⁵, que es un código de elementos finitos desarrollado por el CIMNE para propósitos más generales.

Actualmente se sigue en la investigación en compuestos, incluyendo en el comportamiento fenómenos provocados por la acción de temperatura y humedad, estudiando con más profundidad los fenómenos de deslizamiento fibra matriz. También se está tratando de llevar estas formulaciones a elementos finitos estructurales, como es el caso de láminas y membranas.

Sergio Oller

Barcelona, Marzo de 2003

⁴ Luccioni B., Oller S. (1994). Manual del Programa PLCd. Laboratorio de Estructuras, Universidad Universidad Nacional de Tucumán Argentina. Informe Técnico D-07-94.

⁵ Cervera M., Agelet C. and Chiumenti M. (2002). COMET: Coupled Mechanical and Thermal Analysis. Data input manual. *Technical Report CIMNE N° IT-308*. Barcelona, Spain.

1 INTRODUCCIÓN

La utilización de materiales compuestos en el diseño de estructuras se ha visto incrementada notablemente en los últimos años. Esta tendencia se debe al hecho de la posibilidad de diseñar el material con ciertas propiedades especiales y con ellos se consiguen cualidades mecánicas superiores a los materiales tradicionales.

Estos materiales presentan una muy favorable relación resistencia-peso y rigidez-peso, son resistentes a la corrosión, térmicamente estables y resultan especialmente adecuados para estructuras en las que el peso constituye una variable fundamental en el proceso de diseño. Los componentes estructurales que requieren gran rigidez, resistencia a los impactos, formas complejas y considerable volumen de producción resultan ideales para ser fabricados a partir de materiales compuestos. Por ello, su utilización en la fabricación de piezas para la industria aeronáutica, aeroespacial, naval y de automóviles se ha extendido en los últimos años^{1,2}.

Entre las dificultades que se encuentran para la utilización de los materiales compuestos con fines estructurales está la falta de tecnología para garantizar las uniones entre piezas y también la dificultad de realizar un diseño fiable, pues las técnicas analíticas convencionales utilizadas para el estudio de materiales tradicionales no resultan adecuadas para el análisis de materiales compuestos. Hay también ciertas incertidumbres sobre la durabilidad y el envejecimiento de estos materiales que hace necesario más estudios que garanticen la integridad de los mismos al cabo de un largo período de utilización. Tampoco ha resultado del todo satisfactoria la representación de un compuesto mediante un único material ortotropo con propiedades del conjunto, sobre todo cuando el comportamiento de al menos uno de sus componentes ha superado el límite de elasticidad. Puede observarse en distintas referencias los intentos que ha habido para modelar el comportamiento de materiales compuestos, utilizando la técnica de elementos finitos para el análisis y diseño de estructuras, donde la correlación entre los análisis y los resultados experimentales no resulta del todo satisfactoria^{1,3}.

¹ Ali R. (1996). Use of finite element technique for the analysis of composite structures. *Computers & Structures*. 58, No. 5. pp. 1015-1023.

² O'Rourke B. P. (1989). The use of composite materials in the design and manufacture of formula 1 racing cars. *Proc. Inst. Mech. Engng.* C387/025. pp. 39-48.

³ Clintworth J. and Macmillian S. (1992). *Effective analysis of laminated composite structures*. Benchmark (NAFEMS). pp. 20-22.

1.1 Utilización de los materiales compuestos.

1.1.1 Utilización en la industria del automóvil

La utilización de materiales compuestos con fines estructurales en general es baja y particularmente en la industria del automóvil tampoco destaca sobre las demás⁴, aunque su uso es relevante en el mundo del automóvil de competición y en los laboratorios de prueba de la industria automotriz, donde se demuestra el alto potencial que tiene este tipo de materiales. Los automóviles especiales, por ejemplo los vehículos de Fórmula 1, resultan extremadamente sofisticados en diseño, construcción y operación y por ello han realizado grandes inversiones en tecnología que les permite obtener ventajas respecto del resto de los otros sectores de la industria del automóvil. Como resultado, gracias al gran desarrollo e impulso que les ha dado la industria aeronáutica los materiales compuestos han comenzado a ser muy utilizados a partir del año 1980. Los diseñadores de automóviles de carrera deben respetar ciertas reglas impuestas en cuanto a la resistencia, rigidez y peso de los coches. El peso del vehículo constituye también una variable fundamental en el momento de definir los materiales que se utilizarán en la construcción del casco de los coches. La solución a este problema se obtiene optimizando la geometría, y la calidad de los materiales a emplear.

La utilización en la industria del automóvil de materiales compuestos reforzados con fibras se remonta al año 1950. En aquella época se utilizaban mucho los compuestos de matriz de resina poliéster y refuerzo de fibra de vidrio orientada aleatoriamente. Este material se ha utilizado hasta finales de la década de 1980.

A partir de la década de los años 80 comienza la utilización de materiales compuestos reforzados con fibras de carbono. Este uso se ha generalizado debido a que presentan una elevada relación resistencia-peso y rigidez-peso; son resistentes a la corrosión, térmicamente estables y resultan especialmente adecuados para estructuras en las que el peso constituye una variable fundamental en el proceso de diseño. En la actualidad en los vehículos de Fórmula 1 el 75% de los mismos está constituido por materiales compuestos, porcentaje que se incrementa a diario.

La utilización de materiales compuestos ha permitido por un lado mejorar las prestaciones de los vehículos y por otro incrementar la seguridad de los mismos debido a la gran capacidad de estos materiales para absorber energía ante impactos. Adicionalmente a las partes estructurales, los materiales compuestos se utilizan en otras partes de los vehículos tales como discos de freno de carbono-carbono, embragues y como aislante térmico. Los discos de freno de carbono-carbono permiten una significativa reducción del peso de los mismos al igual que un aumento en la capacidad de frenado del vehículo.

La más reciente innovación ha sido el diseño de componentes de suspensión con materiales compuestos en el año 1992 por parte del equipo McLaren, lo que permitió una reducción del 50-60% del peso, lo que se traduce en una reducción de la inercia.

1.1.2 Utilización en la industria aeronáutica

La utilización de materiales compuestos en la industria aeronáutica es anterior a la de la industria automotriz. Se la considera como precursora en el uso de estos materiales en di-

⁴ Noguchi M. (1993). Present and Future of Composite Materials for Automotive Application in Japan. *Proceedings of the Ninth International Conference on Composite Materials ICCM 9 Metal Matrix Composites*. Ed. A. Miravete. pp. 97 - 110. University of Zaragoza - Woodhead Publishing Limited

versas aplicaciones. La elevada resistencia y rigidez junto a menores costos y peso de los materiales compuestos son los principales factores que han permitido su uso en la industria aeroespacial. El peso constituye la variable fundamental para la elección del material a utilizar en las estructuras de aeronaves. La utilización a gran escala de estos materiales en motores de aviación se debe a Rolls-Royce, utilizando en partes del sistema de compresión de la turbina RB108 plástico reforzado con fibra de vidrio.

En motores, los materiales compuestos de matriz polimérica (PMC) compiten con el titanio en su utilización debido a que presentan una elevada relación resistencia-peso y rigidez-peso. Los materiales compuestos de matriz metálica (MMC) resultan potencialmente atractivos en situaciones en que elevadas temperaturas puedan dañar los materiales compuestos de matriz polimérica. En zonas de temperaturas muy elevadas se utilizan materiales compuestos de matriz cerámica (CMC). Los materiales CMC son conceptualmente diferentes a los PMC y a los MMC debido a que las fibras modifican la forma de propagación de las fisuras en el material y no actúan como un refuerzo de una matriz⁵.

La introducción de motores de “grandes álabes” (“big-fan”) en los primeros años de la década de los 70 coincide con la amplia disponibilidad de los materiales compuestos reforzados con fibras de carbono. Con la introducción de estos materiales se lograba una mejora de sus características y una disminución considerable de peso. A pesar de las ventajas citadas, estos álabes no superaban las pruebas de choque contra aves y el material compuesto fue reemplazado por titanio.

A excepción de los propios álabes y de la zona de combustión, la mayor parte de la estructura vista desde el exterior de una turbina está constituida por material compuesto reforzado con fibras de carbono. En el interior de una turbina muy pocas piezas están realizadas en material compuesto. A pesar de esto los materiales compuestos representan alrededor del 10% en peso de una turbina.

En el futuro, la utilización de los materiales compuestos deberá extenderse hacia la zona interior de la turbina. Los programas de desarrollo de motores para aviación civil impulsados por Rolls-Royce tienen como objetivo construir los álaes y la estructura de soporte de los mismos en material compuesto reforzado con fibras de carbono.

En los motores de aviación destinados a uso militar las partes realizadas con materiales compuestos son diferentes a aquellos utilizados con fines civiles, debido fundamentalmente a que estos motores se montan directamente en la estructura del avión y no tiene una cubierta exterior. En la actualidad se encuentran bajo desarrollo diversas partes realizadas con materiales MMC y CMC.

1.1.3 Utilización de los materiales compuestos en la industria naval

El uso de materiales compuestos orgánicos (OMC) en aplicaciones marinas data del año 1940. En la actualidad su uso se ha extendido a pequeñas embarcaciones. La utilización en grandes navíos y estructuras offshore no se ha generalizado debido fundamentalmente a que los diseñadores y constructores de este tipo de estructuras no están familiarizados con este tipo de material y deben desarrollar nuevas tecnologías que permitan su aplicación en la industria naval. Existe en la actualidad una fuerte demanda de materiales compuestos para la fabricación de embarcaciones, submarinos y estructuras offshore debido a que permiten una reducción en peso del 25-50% con respecto a los materiales tradicionales (alumi-

⁵ Ruffles R. (1993). Applications of advanced composites in gas turbine aero engines. *Proceedings of the Ninth International Conference on Composite Materials ICCM 9 Metal Matrix Composites*. Ed. A. Miravete. pp. 123 - 130. University of Zaragoza - Woodhead Publishing Limited.

nio y acero). Además, tienen una elevada resistencia a la corrosión (que se traduce en una disminución del mantenimiento), baja conductividad térmica, no resultan atraídas por campos magnéticos y su reparación resulta sencilla.

En la industria naval el uso de materiales compuestos reforzados con fibras de vidrio se ha extendido debido fundamentalmente a que presenta una muy buena relación precio-resistencia. Hay fibras de vidrios muy apropiadas para resistir los agentes marinos y otras que se utilizan con fines estructurales con una alta resistencia a la fatiga.

La aplicación naval más significativa de los materiales es en la construcción de buques buscaminas, debido a que este tipo de embarcaciones requiere fundamentalmente materiales con bajas propiedades magnéticas y buena resistencia a cargas de impacto. Otra aplicación la constituyen las embarcaciones de patrulla rápida. En la marina comercial existen aplicaciones en embarcaciones pesqueras pequeñas (< 25 m longitud) que se benefician en la reducción del peso y en el mantenimiento. En estructuras offshore los materiales compuestos se utilizan debido a su bajo peso y elevada resistencia a la corrosión. En el sector de las embarcaciones de competición los materiales compuestos reforzados con fibras de carbono y aramida resultan muy utilizados debido fundamentalmente a su elevada resistencia en comparación con los materiales compuestos reforzados con fibras de vidrio, minimizan el peso y permiten construir embarcaciones de altas prestaciones. En el mundo de la competición los diseños utilizan tecnología de punta, lo que permite obtener datos valiosos en cuanto a las prestaciones de los materiales que resultan útiles en otras aplicaciones en la industria naval.

Los materiales compuestos de matriz de resina termoestable y refuerzos de fibra de altas prestaciones (aramida, carbono) resultan adecuados para estructuras que requieren poco peso con buenas características mecánicas. A pesar de poseerlas es necesario realizar mejoras y ensayos para establecer su respuesta bajo condiciones de servicio, por ejemplo degradación a la exposición por largo tiempo en agua de mar, cargas de fatiga impacto o resistencia al fuego.

Los materiales compuestos resultan especialmente indicados para colocar en su interior sensores y actuadores durante el proceso de fabricación con el objetivo de controlar deformaciones, temperaturas, vibraciones, rigidez, etc. Esta característica puede facilitar información a diseñadores para optimizar el diseño estructural y los factores de seguridad en las estructuras.

Los materiales CMC y MMC se utilizan solo en casos excepcionales en los que se requiere elevada resistencia a las temperaturas y rigidez.

Los métodos de ensayo de materiales compuestos se basan en los realizados en la industria aeronáutica y algunos no pueden aplicarse a la industria naval, por lo tanto, es necesario definir ensayos y metodologías que permitan caracterizar estos materiales para aplicaciones en esta industria.

1.1.4 Utilización de los materiales compuestos en la ingeniería civil

La aplicación de materiales compuestos con fines estructurales en obras civiles comienza a ser relevante en la última década, ya que anteriormente su presencia en este campo ha sido casi inexistente. Hallan su aplicación en la industria de la construcción en estructuras sometidas a la acción de ambientes agresivos, partes de plataformas offshore, depósitos, anclajes al terreno, construcciones no conductivas y no magnéticas, refuerzos de estructuras, armaduras pasivas, armaduras activas, cables, tableros para pasarelas, perfilería y recubrimientos de túneles.

1.1.4.1 Refuerzos de estructuras

De los diversos métodos empleados en el refuerzo de estructuras, el encolado de chapas de acero mediante adhesivo estructural es uno de los sistemas más ampliamente utilizado y de mayor eficacia gracias al desarrollo de las técnicas adhesivas. A pesar de la eficacia demostrada por las láminas encoladas de acero, estas presentan algunos inconvenientes:

- Las láminas de acero constituyen elementos de peso elevado, lo que dificulta su manejo y puesta en obra. Son necesarios medios auxiliares para su colocación, los cuales deben permanecer por elevados períodos de tiempo con las consiguientes molestias en el tránsito en el caso de refuerzos de pasos a sobrenivel.
- Corrosión en las láminas, que afecta a su resistencia y a la adherencia entre la lámina y el hormigón.
- Necesidad de superficies de hormigón planas que permitan el perfecto encolado de las láminas.

El sistema de refuerzos de estructuras con materiales compuestos ha sido desarrollado en los Laboratorios Federales Suizos para el Ensayo de Materiales (EMPA) en la década de los 80 con el objetivo de solventar los inconvenientes citados anteriormente y ante el elevado número de estructuras existentes que requieren ser reforzadas.

La utilización de laminados compuestos de fibra de carbono y resina epoxi en el refuerzo de estructuras de hormigón, metálicas, de madera, etc. comienza a ser una alternativa al sistema de refuerzo convencional mediante el encolado de chapas de acero. El aumento en el uso de materiales compuestos para refuerzos se debe fundamentalmente a las mejores prestaciones mecánicas, buena resistencia a la corrosión y bajo peso que facilita su transporte, manejo y colocación en obra. La primera aplicación a escala de este tipo de refuerzo data del año 1991 en el puente Ibach en Lucerna.

Este sistema se aplica en diversos países, y tan sólo en Suiza y Alemania el número de realizaciones de refuerzos de estructuras con láminas de material compuesto encoladas asciende a 250 y existen más de 1000 en el mundo, concentradas en países tales como Suiza, Alemania, Japón, EE.UU. y Canadá. Gracias al empleo de medios auxiliares más ligeros durante un tiempo menor se pueden llegar a obtener ahorros de hasta un 25% en el proceso total de refuerzo de la estructura, compensando el mayor costo económico del material compuesto frente al del acero⁶.

1.1.4.2 Armaduras en el hormigón

Otra utilización de los compuestos reforzados con fibras es la de sustituir las armaduras utilizadas para el armado de hormigón o en tendones de pretensado. Se aplica fundamentalmente en ocasiones en que el uso del acero como armadura del hormigón presenta problemas de corrosión, magnetismo etc.. La alternativa la constituye el redondo compuesto por fibra de vidrio revestida por una matriz termoendurecible (poliéster o epoxi). La adherencia entre el hormigón y este tipo de refuerzo es muy alta ya que se obtienen superficies con relieves comparables a las de los redondos de acero.

Actualmente las aplicaciones son muy variadas: losas no magnéticas, velos delgados de hormigón (las armaduras pueden estar muy próximas a la superficie exterior), tierra armada, tirantes de arriostramientos, etc.

⁶ G. Pulido M. D. y Sobrino J. (1996). Los materiales compuestos en el refuerzo de puentes. *Revista Internacional de Ingeniería de Estructuras*. Vol. 3, pp. 75-95. No.1.

1.1.4.3 Tirantes

Los tirantes de fibras se utilizan fundamentalmente en aplicaciones donde existen problemas de corrosión, o en edificios de comunicaciones o transmisiones donde los tirantes metálicos serían susceptibles de calentamiento por absorción de la energía radiante o de interferencias en la transmisión de ondas electromagnéticas.

Para el caso de esfuerzos de tracción de nivel medio alto (hasta 2700 MPa.) se utilizan fibras de vidrio y para esfuerzos superiores se usan fibras de carbono o aramida. Un ejemplo de aplicación lo constituye la conocida Torre de Telecomunicaciones de Colserolla de 268 metros de altura de la ciudad de Barcelona. En este caso se utilizó una fibra de aramida y cada uno de los tirantes se compone de siete cordones de 50 mm colocados dentro de una vaina de polietileno.

1.1.4.4 Perfiles de “pultrusión”

Los perfiles fabricados por el proceso de pultrusión se utilizan en edificios industriales donde existe el peligro de corrosión debido a la presencia de ácidos. Un ejemplo lo constituyen las plantas de obtención de aluminio, donde la presencia de vapores de hidróxido de sodio y ácido hidroclórico genera serios problemas de corrosión. Otro ejemplo de aplicación lo constituyen los edificios industriales destinados para ensayos de ordenadores y productos electrónicos debido a las propiedades aislantes de estos materiales a ondas electromagnéticas.

1.2 Propiedades de los Compuestos – Características alcanzables.

Los materiales compuestos surgen como consecuencia de la búsqueda de materiales alternativos que reúnan una o más de las siguientes características:

- Bajo costo,
- Buen comportamiento estructural,
- Bajo peso,
- Posibilidad de producción en forma masiva.

Estas premisas pueden cumplirse de muy diversas formas, así, las propiedades de los polímeros sintéticos pueden ser incrementadas, en gran medida, a través de mezclar componentes diferentes, que juntos dan lugar a un material con más capacidad estructural que una sustancia simple.

Los materiales compuestos son utilizados en diversos sectores industriales debido a las características económicas que presentan, pues reducen sustancialmente el volumen de materiales de alto costo colocándolos exclusivamente en las direcciones y/o zonas en las que son realmente requeridas.

Los materiales que se obtienen presentan las siguientes características:

- Buen aislamiento térmico y acústico,
- Resistencia a algunos agentes químicos.

- Disipación de energía provocada por la microfisuración en las interfaces de sus componentes de modo que el comportamiento general de la estructura no presenta una brusca caída de su resistencia última,
- Bajo peso, economía y facilidad de transporte y reducción de pesos muertos,
- Excelente comportamiento ante la corrosión en ambientes agresivos,
- Elevadas propiedades mecánicas,
- Alta resistencia al fuego,
- Configuración sandwich que permite conseguir bajos coeficientes de conductividad térmica,
- Inertes al agua y a agentes químicos diversos.

El componente más comúnmente utilizado está en forma de partículas o en forma de fibras. En el primero de los casos las partículas de un material o materiales específicos están adheridas entre sí mediante una matriz continua con bajo módulo de elasticidad. En compuestos fibrosos el refuerzo puede orientarse en la dirección que sea necesaria para proporcionar resistencia y rigidez óptimas. Gracias a la moldeabilidad del material pueden seleccionarse las formas estructurales que se consideren más efectivas.

En la industria de la construcción se utilizan la fibra de vidrio, la fibra de carbono o aramida, o la combinación de ambas para obtener fibras híbridas. La fibra de vidrio y el polímero de poliéster o epoxi se utilizan para conformar un material compuesto fibroso que recibe el nombre de poliéster. Entre las principales desventajas que presentan los materiales compuestos es posible mencionar:

- Los materiales presentan en general un comportamiento no-lineal aún para tensiones muy bajas,
- Al concluir el proceso de fabricación del material compuesto, este suele presentar tensiones residuales muy difíciles de cuantificar debido a las variaciones de temperatura,
- Los materiales de refuerzo en un compuesto (fibras, partículas, etc.), generalmente cambian sus propiedades mecánicas por influencia del medio ambiente.

Para la utilización de materiales compuestos en componentes estructurales es necesario realizar un diseño específico del material a utilizar. Esto se debe fundamentalmente a la elevada anisotropía y relación de resistencia entre fibra y matriz. Este proceso de diseño del material compuesto se basa en métodos empíricos, observándose en la literatura la ausencia de análisis o simulaciones del comportamiento de estos materiales sometidos a niveles de solicitudes que sobrepasan el límite elástico. Las técnicas convencionales para el análisis de materiales tradicionales son inadecuadas para el análisis de materiales compuestos. Tampoco ha resultado satisfactorio el estudio a través de elementos finitos de un compuesto representado por un único material con propiedades del conjunto. La principal dificultad que se encuentra con el método de los elementos finitos con modelos constitutivos convencionales es la imposibilidad de modelar el comportamiento de materiales altamente anisótropos sometidos a cargas que superan los límites de elasticidad de al menos un componente del material compuesto. Por ello, resulta necesario modelar materiales compuestos a partir de teorías que permitan simular el comportamiento de materiales con alta anisotropía y con deformaciones permanentes direccionadas; con comportamiento diferenciado para

cada sustancias que conforman el compuesto; con un buen tratamiento de la fase de reforzamiento con fibras; con capacidad de representar el deslizamiento relativo entre matriz y fibra (debonding); con capacidad de representar el pandeo local del refuerzo; con capacidad de simular grandes desplazamientos y deformaciones y otros fenómenos colaterales a estos mencionados. Todos estos fenómenos inducen a una pérdida de resistencia y rigidez global del material compuesto con pérdida de linealidad en la respuesta del conjunto.

1.3 Clasificación de los materiales compuestos.

Es muy difícil definir un material compuesto dada sus cualidades, composición, propiedades, forma de fabricación, etc. Por esta razón hay distintas maneras de clasificar los materiales compuestos y con seguridad cada uno de ella acertaría en la forma de hacerlo. En este caso, y para ser coherente con el posterior desarrollo del trabajo, se presenta la siguiente clasificación:

1.3.1 Clasificación según su topología

Entre las posibles clasificaciones, está la que se basa en su configuración topológica, es decir en como son y como se distribuyen los componentes: materiales de matriz compuesta, materiales de matriz compuesta con fibras cortas y/o largas, materiales laminados y también una combinación de cada uno de estos tipos enunciados. En la Figura 1.1 se observa la clasificación de los materiales compuestos según sea su configuración topológica.

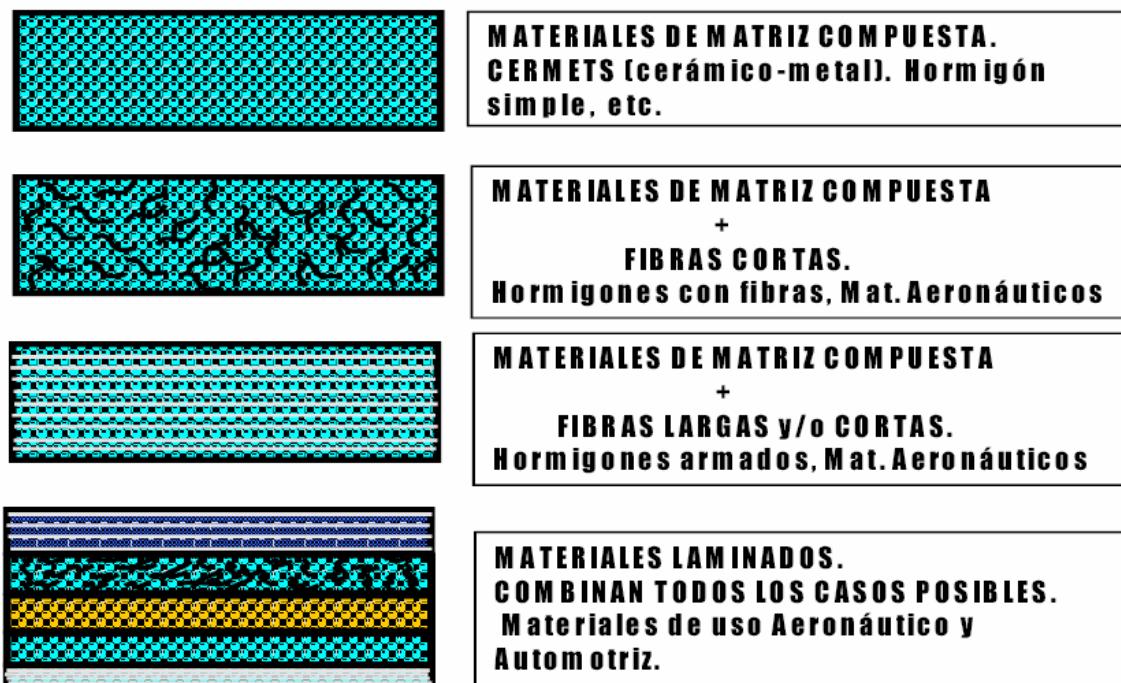


Figura 1.1 – Clasificación de los materiales compuestos según su topología.

1.3.2 Clasificación según sus componentes

Los materiales compuestos pueden también clasificarse según el tipo y forma en que están constituidos:

- **Fibrosos:** Compuestos por fibras continuas cortas o largas, en una dos o tres direcciones, o bien distribuidas en forma aleatoria aglutinados por una matriz. A su vez esta matriz puede estar formada por dos o más materiales.
- **Particulados:** Formados por partículas que puntualmente trabajan aglutinadas por una matriz.
- **Laminares:** Compuestos por capas o constituyentes laminares con características de resistencia en magnitud y dirección diferentes.
- **Hojuelados:** Compuestos por hojuelas planas inmersas en una matriz.
- **Relleno esqueleto:** formado por un esqueleto lleno por otro material.

Los más utilizados son los fibrosos, en los cuales las fibras asumen el papel de resistir las acciones mecánicas y la matriz sirve como aglutinante y protector del medio ambiente. La resistencia mecánica de las fibras es del orden de 25 a 50 veces mayor que la matriz. En el caso del hormigón a tracción esta relación es del orden de 100 veces. Esto provoca un comportamiento fuertemente anisótropo.

Al aplicar una carga en un material compuesto se producen en su interior esfuerzos y para lograr una buena transición de estos entre fibra y matriz se coloca una resina y una encima.

La función de la matriz es la de repartir y transmitir las cargas a las fibras. En el caso de laminados compuestos las propiedades de resistencia al corte son muy importantes. La matriz cumple la función de asegurar la continuidad de desplazamientos entre láminas en todo el espesor de la estratificación e influye en el modo de rotura.

En láminas sometidas a compresión la matriz influye en la longitud de pandeo de las fibras. Las matrices más comunes están constituidas por polímeros, metálicos y cerámicos.

Las más utilizadas son las poliméricas, que a su vez se clasifican en: polímeros termoplásticos, polímeros termoestables y polímeros espumados.

Las propiedades mecánicas en estado sólido para un material termoplástico son generalmente no-lineales con un módulo de elasticidad muy bajo y un comportamiento dúctil. Los materiales termoendurecibles tienen unas propiedades muy linealizables con un alto módulo de elasticidad y comportamiento frágil.

1.3.3 Clasificación estructural

Desde el punto de vista del estudio del comportamiento mecánico, los materiales compuestos pueden clasificarse según su,

- **Estructura básica.** En este caso se considera en la clasificación la estructura a nivel de las moléculas singulares o mallas cristalinas,
- **Estructura microscópica.** Se tiene en cuenta para la clasificación la interacción fibra-matriz, su influencia en la distribución de tensiones y la aparición de fallas, discontinuidades o fisuras bajo condiciones de cargas elementales,

- Estructura macroscópica. Se considera en la clasificación al material compuesto desde un punto de vista macroscópico, como una combinación de sustancias diferentes, que contribuyen al estado de equilibrio del conjunto.

En este trabajo se presentará un estudio estructural desde el punto de vista macroscópico, considerando las siguientes hipótesis:

- Las fibras se distribuyen uniformemente en la matriz,
- Existe perfecta adherencia entre la matriz y el refuerzo. En otro capítulo más adelante, se incorporará a la formulación, la influencia del desplazamiento relativo entre matriz y refuerzo,
- La matriz no contiene vacíos ni defectos,
- No existen tensiones residuales en el material compuesto provenientes de posibles defectos en la fabricación. Sin embargo, es posible incluirlos como condiciones iniciales.

Una extensa descripción sobre los tipos de materiales compuestos y de componentes, formas de fabricación y aplicaciones industriales, puede consultarse en Miravete (2000)⁷ y Car (2000)⁸.

⁷ Miravete A. (2000). *Materiales Compuestos. Vol. 1 y Vol. 2*. Director de la obra: Antonio Miravete.

⁸ Car E. (2000). *Modelo constitutivo continuo para el estudio del comportamiento mecánico de los materiales compuestos*. Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Cataluña.

2 ANISOTROPIA MECÁNICA

2.1 Introducción.

Los modelos constitutivos desarrollados para la simulación del comportamiento de materiales simples isótropos no resultan apropiados para el análisis de materiales compuestos, entre varios motivos de distinta importancia por la fuerte anisotropía de estos materiales. Tampoco ha resultado satisfactoria la representación de un compuesto mediante un único material ortotrópico con propiedades del conjunto, por ello también se presentará en el próximo capítulo la teoría de mezclas.

Existen diversas formulaciones para materiales anisótropos que presentan una respuesta constitutiva no-lineal (Hill (1971)¹), (Bassani (1977)² , (Barlat and Lian (1989)³, (Barlat et al. (1991)⁴). Estas teorías, en general, se basan en formular funciones umbral de discontinuidad —fluencia— y potencial plástico anisótropas; lo que obliga a desarrollar nuevos procedimientos para integrar la ecuación constitutiva.

La formulación anisótropa que se presenta en este capítulo está orientada a generalizar cualquier formulación clásica isótropa lineal y no lineal (plasticidad, viscoplasticidad, daño, etc.). Se basa en transportar, desde un *espacio real anisótropo* a otro *espacio ficticio isótropo*, todos los parámetros constitutivos del material y su estado tensional y deformacional. Una vez allí, se utiliza un modelo constitutivo isótropo junto a todas las técnicas y procedimientos desarrollados para ecuaciones constitutivas isótropas.

2.2 Generalidades sobre la formulación anisótropa

La formulación de una ley constitutiva adecuada para sólidos ortotrópicos o anisótropos elasto-plásticos no proporcionales^{*} constituye un problema de elevada complejidad, más aun cuando hay comportamiento en grandes desplazamientos y deformaciones. Los materiales compuestos reforzados con fibras constituyen una forma simplificada de materiales no proporcionales anisótropos compuestos de dos sustancias. La descripción del comportamiento en régimen elástico de un sólido anisótropo no presenta grandes dificultades. Es

¹ Hill .R (1971). *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford University Press.

² Bassani J. L. (1977). Yield characterization of metals with transversely isotropic plastic properties. *Int. J. Mech. Sci.* vol 19, pp. 651.

³ Barlat F. and Lian J. (1989). Plastic behavior and stretchability of sheet metals. Part I: A yield function for orthotropic sheet under plane stress conditions. *Int. Journal of Plasticity*, vol. 5, pp. 51.

⁴ Barlat F. and Lege D. J. and Brem J. C. (1991). A six-component yield function for anisotropic materials. *Int. Journal of Plasticity*, vol. 7, pp. 693.

* NOTA: Se entiende por material no proporcional a aquel en el cual la relación entre los módulos elásticos del material en dos direcciones cualesquiera no es igual a la relación entre las resistencias en las mismas direcciones

posible utilizar para tal fin las formas generales de la teoría de la elasticidad⁵ (Matthews and Rawlings (1994)⁶), (Pendleton and Tuttle (1989)⁷), sin embargo en el campo inelástico no se encuentran experiencias generales y satisfactorias.

La formulación de la función umbral de discontinuidad —fluencia— y todos los conceptos que de ella derivan constituye un problema de difícil solución en la mecánica. La formulación general de funciones de fluencia anisótropas debe tender al comportamiento de materiales isótropos como un caso particular del anisótropo y debe poseer las propiedades de funciones isótropas como describen Malvern (1969)⁸, Gurtin (1981)⁹ y Chen and Han (1988)¹⁰. Estas propiedades se refieren a la simetría** de la función de fluencia y a su convexidad.

Los primeros intentos de formular funciones de fluencia para materiales ortótropos no proporcionales se deben a Hill¹¹, quien en 1948 consiguió extender el modelo isótropo de von Mises al caso ortótropo y luego modificado en reiteradas publicaciones posteriores (Hill (1965)¹²), (Hill (1979)¹³), (Hill (1990)¹⁴). La principal limitación de esta formulación y sus modificaciones se encuentra en la imposibilidad de representar el comportamiento de materiales sensibles a la presión, como por ejemplo es el caso de los geomateriales o materiales compuestos. Diversos autores han propuesto funciones de fluencia en el espacio de tensiones para materiales anisótropos, entre ellos se puede mencionar Bassani (1977)² y Barlat et al. (1989, 1991)^{3,4}. Barlat et al. (1991) utilizan una transformación lineal del estado tensional del material anisótropo multiplicando todos los componentes del tensor de tensiones por diferentes constantes. Karafillis and Boyce (1993)¹⁵ proponen una expresión general para superficies de fluencia de materiales policristalinos que permite describir materiales isótropos y anisótropos. La anisotropía del material la describen introduciendo un conjunto de variables tensoriales irreducibles. Este conjunto de variables tensoriales permite realizar una transformación lineal del estado tensional del material anisótropo a un estado que denominan IPE (Isotropic Plasticity Equivalent Material).

Dvorak y Bahei-El-Din (1982)¹⁶ utilizaron también operadores tensoriales junto al criterio de fluencia de von Mises para el análisis de materiales compuestos. Diversos autores han utilizado tensores de cuarto orden en la formulación de criterios de fluencia para mate-

⁵ Hull D. (1987). *An Introduction to Composite Materials*. Cambridge University Press.

⁶ Matthews F. L. and Rawlings R. D. (1994). *Composite Materials: Engineering and Science*. Chapman and Hall.

⁷ Pendleton R.L. and Tuttle M.E. (1989). *Manual on Experimental Methods for Mechanical Testing of Composites*. Elsevier Applied Science Publishers.

⁸ Malvern L.E. (1969). *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall.

⁹ Gurtin M. E. (1981). *An introduction to continuum mechanics*. Academic Press. New York.

¹⁰ Chen W. F. and Han D. J. (1988). *Plasticity for structural engineers*. Springer-Verlag. New York.

** NOTA: Dado un estado de tensiones principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, la función de fluencia resulta simétrica si se cumple $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \equiv f(\sigma_3, \sigma_1, \sigma_2)$.

¹¹ Hill R. (1948). *A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals*. Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. Vol. 193, pp. 281 - 297.

¹² Hill R. (1965). Micro mechanics of elastoplastic materials. *J. Mech. Phys. Solids*. Vol. 13, pp. 89-101.

¹³ Hill R. (1979). Theoretical plasticity of textured aggregates. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*. Vol. 85, pp. 179 - 191, No 1.

¹⁴ Hill R. (1990). Constitutive modelling of orthotropic plasticity in sheet metals. *J. Mech. Phys. Solids*. Vol. 38, pp. 405 - 417, No. 3.

¹⁵ Karafillis A. P. and Boyce M. C. (1993). A general anisotropic yield criterion using bounds and a transformation weighting tensor. *J. Mech. Phys. Solids*. Vol. 41, pp. 1859 - 1886.

number = 12

¹⁶ Dvorak G. J. and Bahei-El-Din Y. A. (1982). Plasticity analysis of fibrous composites. *J. App. Mech.* Vol. 49, pp. 327 - 335.

riales anisótropos entre ellos se puede citar a Shih and Lee (1978)¹⁷, Eisenberg and Yen (1984)¹⁸ y Voyiadjis and Foroozesh(1990)¹⁹. Voyiadjis y Thiagarajan (1995)²⁰ realizan el estudio de materiales compuestos reforzados unidireccionalmente formulando una superficie de fluencia general que depende de un tensor de cuarto orden.

La formulación anisótropa que se desarrolla en este capítulo, permite realizar una generalización de la teoría isótropa clásica. Esta formulación se basa en aplicar una transformación lineal tanto al tensor de tensiones como al de deformaciones a través de tensores de cuarto orden que contienen la información de la anisotropía del material. Esta transformación lineal garantiza la convexidad de la función de fluencia y del potencial plástico (Eggerton (1969))²¹. La convexidad de la función de fluencia asegura el cumplimiento de la segunda ley de la termodinámica y garantiza que luego de aplicar una carga plástica, monótona creciente, cualquier descarga conduce a un estado elástico. Esta teoría que se denomina de transformación de espacios, se basa en las ideas propuestas por Betten (1981)²² (1988)²³ y utiliza el concepto de “*tensor de tensiones mapeado*” que permite el transporte del tensor de tensiones desde un *espacio real* a un *espacio de tensiones ficticio*. La transformación generalizada del tensor de tensiones del material anisótropo se representa esquemáticamente en la Figura 2.1. Este concepto permite utilizar los algoritmos usados para el caso de materiales isótropos, con las consiguientes ventajas en la implementación computacional del modelo.

En trabajos previos, diversos autores han desarrollado una generalización de la teoría de plasticidad isótropa al caso anisótropo (Oller et. al. (1993)²⁴), (Oller et. al. (1993)²⁵). La idea básica consistía en modelizar el comportamiento de un sólido en el *espacio anisótropo real* a través de un sólido ideal en el *espacio isótropo ficticio* (ver Figura 2.1). El modelo se basa en realizar una transformación lineal del tensor de tensiones suponiendo que las deformaciones elásticas son idénticas en ambos espacios lo cual introduce una limitación en la teoría anisótropa mapeada. Esta limitación exige respetar la proporcionalidad entre el límite de resistencia y el módulo de elasticidad para cada dirección del material. Para evitar esta hipótesis simplificativa, Oller et. al. (1995)²⁶ proponen que la aplicación lineal se realice tanto sobre el espacio de tensiones como sobre el de deformaciones.

El modelo constitutivo que se detalla en este capítulo resulta aplicable a materiales que presentan una fuerte anisotropía, como es el caso de los materiales compuestos reforzados con fibras, y resulta de una generalización de la teoría de la plasticidad clásica. El comportamiento anisótropo del material se formula a través de un espacio ficticio isótropo de tensiones y deformaciones que resulta de una transformación tensorial lineal de los espacios reales de tensiones y deformaciones anisótropo. Los parámetros que intervienen en la defi-

¹⁷ Shih C. F. and Lee D. (1978). Further developments in anisotropic plasticity. *J. Engng Mater. Technol.* Vol. 105, pp. 242

¹⁸ Eisenberg M. A. and Yen C. F. (1984). The anisotropic deformation of yield surfaces. *J. Engng. Mater. Technol.* Vol. 106, pp. 355

¹⁹ Voyiadjis G. Z. and Foroozesh M. (1990). Anisotropic distortional yield model. *J. Appl. Mech.* Vol. 57, pp. 537.

²⁰ Voyiadjis G.Z. and Thiagarajan G. (1995). A damage cyclic plasticity model for metal matrix composites. *Constitutive Laws, Experiments and Numerical Implementation*.

²¹ Eggleston H. G. (1969). *Convexity*. Cambridge University Press.

²² Betten J. (1981). Creep theory of anisotropic solids. *J. Rheol.* Vol. 25, pp. 565-581.

²³ Betten J. (1988). Application of tensor functions to the formulation of yield criteria for anisotropic materials. *Int. J. Plasticity*, Vol. 4, pp. 29-46.

²⁴ Oller S. , Oñate E. , Miquel J. and Botello S. (1993). A finite element model for analysis of multiphase composite materials. *Ninth International Conference on Composite Materials*. Ed. A. Miravete. Zaragoza - Spain.

²⁵ Oller S. , Oñate E. and Miquel J. (1993). Simulation of anisotropic elastic-plastic behaviour of materials by means of an isotropic formulation. *2nd. US Nat. Congr. Comput. Mech.* Washington DC.

²⁶ Oller S. , Botello S. , Miquel J. and Oñate E. (1995) An anisotropic elastoplastic model based on an isotropic formulation. *Engineering Computations*, Vol. 12, No. 3, pp. 245-262.

nición del tensor de transformación se obtienen a través de ensayos experimentales. La ventaja en la utilización de este tipo de modelos consiste en la posibilidad de utilizar las mismas funciones de fluencia, potenciales plásticos y métodos de integración de la ecuación constitutiva desarrollados para materiales isótropos. Toda la información de la anisotropía del material se encuentra contenida en los tensores de cuarto orden de transformación de los espacios de tensiones (\mathbf{A}^S , o $\mathbf{a}^r = \vec{\phi}(\mathbf{A}^S)$ en las configuraciones referencial y actualizada respectivamente) y deformaciones (\mathbf{A}^E , o $\mathbf{a}^e = \vec{\phi}(\mathbf{A}^E)$ en las configuraciones referencial o actualizada respectivamente). La utilización de la teoría de transformación de espacios permite obtener una metodología para la definición de modelos anisótropos de carácter generalizado.

La formulación que resulta de este procedimiento es completamente general y permite realizar análisis de materiales compuestos que presentan un grado de anisotropía elevado.

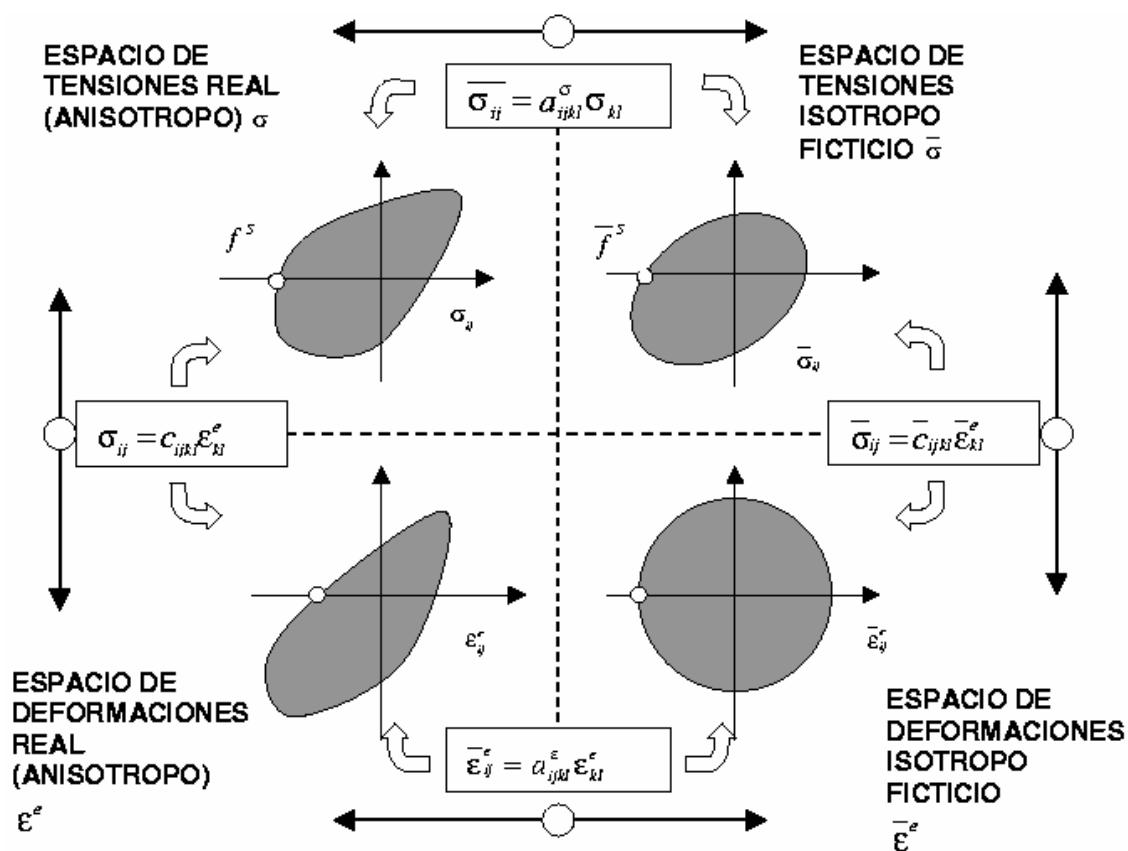


Figura 2.1 – Transformación de espacios. Espacios de tensiones y deformaciones reales y ficticios en pequeñas deformaciones.

2.3 Función de fluencia y de potencial plástico para materiales isótropos

En los apartados siguientes se presenta un modelo elasto plástico que puede formularse indistintamente en la configuración referencial o actualizada utilizando la cinemática lagrangeana total o actualizada (Green and Naghdi (1971)²⁷), (Lubliner (1990)²⁸). Este modelo constitutivo permite simular el comportamiento no-lineal de materiales sometidos a grandes deformaciones plásticas y pequeñas deformaciones elásticas debido a que para la definición de la energía libre elástica se utiliza un potencial cuadrático (García Garino and Oliver (1992)²⁹), (Lubliner (1990)²⁸).

Las funciones de fluencia y potencial plástico pueden definirse en el espacio de tensiones de Kirchhoff (configuración actualizada) de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \text{Función de fluencia : } \mathbb{F}^{\tau}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{f}^{\tau}) = 0 \\ \text{Función de potencial : } \mathbb{G}^{\tau}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{g}) = \text{cte} \end{cases} \quad (2.1)$$

donde $\mathbb{F}^{\tau}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{f}^{\tau}) = 0$ y $\mathbb{G}^{\tau}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{g}) = \text{cte}$, representan las funciones de fluencia y potencial plástico en la configuración actualizada, $\boldsymbol{\tau}$ es el tensor de tensión de Kirchhoff, \mathbf{g} el tensor métrico en la configuración espacial, $\boldsymbol{\alpha}$ el grupo de variables internas y \mathbf{f}^{τ} el tensor de resistencia en el umbral del límite elástico del material en la configuración actualizada. También pueden estar definidas estas funciones en la configuración referencial, esto es:

$$\begin{cases} \text{Función de fluencia : } \mathbb{F}^S(\mathbf{S}, \mathbf{G}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{f}^S) = 0 \\ \text{Función de potencial : } \mathbb{G}^S(\mathbf{S}, \mathbf{G}) = \text{cte} \end{cases} \quad (2.2)$$

donde $\mathbb{F}^S(\mathbf{S}, \mathbf{G}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{f}^S) = 0$ y $\mathbb{G}^S(\mathbf{S}, \mathbf{G}) = \text{cte}$, representan las funciones de fluencia y potencial plástico en la configuración referencial, \mathbf{S} es el tensor de tensión de Piola Kirchhoff, \mathbf{G} es el tensor métrico en la configuración referencial, que para un sistema coordenado ortogonal $\mathbf{G} = \mathbf{I}$, $\boldsymbol{\alpha}$ es el grupo de variables internas y \mathbf{f}^S es el tensor de resistencia en el umbral del límite elástico del material en la configuración referencial. Es necesario destacar que las funciones $\mathbb{F}^{\tau}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{f}^{\tau})$, $\mathbb{F}^S(\mathbf{S}, \mathbf{G}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{f}^S)$, $\mathbb{G}^{\tau}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{g})$, y $\mathbb{G}^S(\mathbf{S}, \mathbf{G})$, son funciones isótropas, simétricas y convexas.

La función de fluencia y potencial plástico en el caso más general puede expresarse como una función de 6 variables independientes, componentes del tensor de tensiones

$$\begin{cases} \text{Función de fluencia : } \mathbb{F}^S(S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{12}, S_{13}, S_{23}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{f}^S) = 0 \\ \text{Función de potencial : } \mathbb{G}^S(S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{12}, S_{13}, S_{23}) = \text{cte} \end{cases} \quad (2.3)$$

o en función de las tensiones principales en el caso isótropo:

²⁷ Green A. E. and Nagdhi P. M. (1971). Some remarks on elastic-plastic deformation at finite strains. *Int. J. of Eng. Sc.*, Vol 9, pp. 1219-1229.

²⁸ Lubliner J. (1990). *Plasticity Theory*. Macmillan Publishing, U.S.A.

²⁹ García Garino G. and Oliver J. (1992). A numerical model for elastoplastic large strain problems. Fundamentals and applications. *Computational Plasticity III*. Ed. D.R.J. Owen and E. Oñate and E. Hinton. Vol. 1, pp. 117-129, CIMNE, Barcelona, Spain.

$$\begin{cases} \text{Función de fluencia : } \mathbb{F}^S(S_1, S_2, S_3, \alpha, \mathbf{f}^S) = 0 \\ \text{Función de potencial : } \mathbb{G}^S(S_1, S_2, S_3) = \text{cte} \end{cases} \quad (2.4)$$

que resultan de una transformación del estado tensional. Las funciones de fluencia y potencial plástico se dicen isótropas si se cumple que para cualquier transformación ortogonal se verifica la condición de invariancia de la función de fluencia o del potencial (Mavern(1969)⁸), esto es,

$$\begin{cases} \text{Función de fluencia : } \mathbb{F}^S(a_{ip} a_{jq} S_{pq}, \alpha, \mathbf{f}^S) = \mathbb{F}^S(S_{ij}, \alpha, \mathbf{f}^S) = 0 \\ \text{Función de potencial : } \mathbb{G}^S(a_{ip} a_{jq} S_{pq}) = \mathbb{G}^S(S_{ij}) = \text{cte} \end{cases} \quad (2.5)$$

donde $a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}$ representa una transformación ortogonal y δ_{ij} son las componentes del tensor de Kronecker. Los materiales isótropos satisfacen la condición de invariancia y esto permite escribir la función de fluencia y potencial plástico en función de los invariantes del tensor de tensiones, esto es:

$$\begin{cases} \text{Función de fluencia : } \mathbb{F}^S(I_1, I_2, I_3, \alpha, \mathbf{f}^S) = 0 \\ \text{Función de potencial : } \mathbb{G}^S(I_1, I_2, I_3) = \text{cte} \end{cases} \quad (2.6)$$

En el caso de materiales que satisfacen la condición de incompresibilidad plástica³⁰, las funciones de fluencia y potencial plástico resultan:

$$\begin{cases} \text{Función de fluencia : } \mathbb{F}^S(J_2, J_3, \alpha, \mathbf{f}^S) = 0 \\ \text{Función de potencial : } \mathbb{G}^S(J_2, J_3) = \text{cte} \end{cases} \quad (2.7)$$

donde J_2 y J_3 representan el segundo y tercer invariante de la parte desviadora del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff (configuración referencial). En forma análoga, en la configuración actualizada se tiene que las funciones de fluencia y potencial plástico resultan isótropas si se verifica la condición de invariancia de la función de fluencia o del potencial, y para el caso de materiales que satisfacen la condición de incompresibilidad plástica se escriben como:

$$\begin{cases} \text{Función de fluencia : } \mathbb{F}^\tau(j_2, j_3, \mathbf{g}, \alpha, \mathbf{f}^\tau) = 0 \\ \text{Función de potencial : } \mathbb{G}^\tau(j_2, j_3, \mathbf{g}) = \text{cte} \end{cases} \quad (2.8)$$

donde j_2 y j_3 representan el segundo y tercer invariante de la parte desviadora del tensor de tensiones de Kirchhoff (configuración actualizada).

³⁰ NOTA: La condición de incompresibilidad plástica se verifica cuando función de fluencia no está afectada de la parte esférica del tensor de tensiones

2.4 Definición general explícita de un criterio de fluencia isótropo en la configuración referencial.

En este apartado se establece una forma general para definir un criterio de fluencia isótropo cuya resistencia en el límite elástico en tracción f_t es distinto al umbral en compresión f_c . Esto es,

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^S(\mathbf{S}, f) = & \frac{1}{f^2} (S_x^2 + S_y^2 + S_z^2) - \frac{\hat{\lambda}}{f^2} \cdot (S_y S_z + S_z S_x + S_x S_y) + \\ & + \frac{(2 + \hat{\lambda})}{f^2} \cdot (S_{yz}^2 + S_{xz}^2 + S_{xy}^2) + \frac{2 \cdot \hat{\alpha}}{f^2} (S_x + S_y + S_z) - 1 = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Siendo $f = \sqrt{f_t f_c}$ el umbral de resistencia equivalente, $\hat{\alpha} = \frac{1}{2} [(f_c/f_t) - (f_t/f_c)] = \frac{1}{2f} (f_c^2 - f_t^2)$ un coeficiente de ajuste y $\hat{\lambda}$ un parámetro a determinar que permite precisar la naturaleza del criterio de fluencia. Puede también representarse la forma general isótropa de este criterio de fluencia, ecuación (2.1), como,

$$\mathbb{F}^S(\mathbf{S}, f) = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{S} - 1 = 0$$

o en forma desarrollada,

$$\left\{ S_x, S_y, S_z, S_{xy}, S_{yz}, S_{xz} \right\} \cdot \frac{1}{f^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 + \frac{2\hat{\alpha}f}{S_x} & -\frac{\hat{\lambda}}{2} & -\frac{\hat{\lambda}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\hat{\lambda}}{2} & 1 + \frac{2\hat{\alpha}f}{S_y} & -\frac{\hat{\lambda}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\hat{\lambda}}{2} & -\frac{\hat{\lambda}}{2} & 1 + \frac{2\hat{\alpha}f}{S_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 + \hat{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 + \hat{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 + \hat{\lambda} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \\ S_{xy} \\ S_{yz} \\ S_{xz} \end{Bmatrix} - 1 = 0 \quad (2.10)$$

Donde $\mathbf{S}^T = \{S_x, S_y, S_z, S_{xy}, S_{yz}, S_{xz}\}$ es una matriz columna que representa la parte simétrica del tensor de tensiones y \mathbf{P} una matriz cuadrada que permite recuperar la forma canónica expresada en la ecuación (2.1).

Este criterio así formulado define el umbral del comportamiento elástico de distintos tipos de materiales, pasando desde geomateriales a metales, a partir de definir adecuadamente sus coeficientes $\hat{\alpha}$ y $\hat{\lambda}$. Suponiendo el caso hipotético de un metal en el cual se cumple la siguiente relación de resistencia $f_c \equiv f_t \equiv f \Rightarrow \hat{\alpha} = 0$ y $\hat{\lambda} = 1$, entonces se recupera el clásico *criterio de von Mises* (Lubliner (1990)²⁸), cuya expresión se transcribe a continuación,

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^S(\mathbf{S}, f) = & \frac{1}{f^2} (S_x^2 + S_y^2 + S_z^2) - \frac{1}{f^2} (S_y S_z + S_z S_x + S_x S_y) + \\ & + \frac{3}{f^2} \cdot (S_{yz}^2 + S_{xz}^2 + S_{xy}^2) - 1 = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

y su representación matricial en función de la matriz de von Mises $\mathbf{P}^{\text{Mises}}$, toma la siguiente forma,

$$\mathbb{F}^S(\mathbf{S}, f) = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{P}^{\text{Mises}} \cdot \mathbf{S} - 1 = 0$$

$$\left\{ S_x, S_y, S_z, S_{xy}, S_{yz}, S_{xz} \right\} \cdot \frac{1}{f^2} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \\ S_{xy} \\ S_{yz} \\ S_{xz} \end{Bmatrix} - 1 = 0 \quad (2.12)$$

La forma del *criterio de Mises-Schleicher* (Lubliner (1990)²⁸) se recupera suponiendo que $f_c > f_t \Rightarrow \hat{\alpha} > 0$ y $\hat{\lambda} = 1$, y el *criterio de Drucker-Prager* (Lubliner (1990)²⁸), se obtiene reordenando la ecuación (2.1) y estableciendo la resistencia equivalente $f = \sqrt{f_t f_c}$, $\hat{\alpha} = \frac{1}{2}[(f_c/f_t) - (f_t/f_c)] = \frac{1}{2f}(f_c^2 - f_t^2)$, y $\hat{\lambda} = 1 + 3\hat{\alpha}^2$. Esto es,

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^s(\mathbf{S}, f) = & \sqrt{(S_x^2 + S_y^2 + S_z^2) - (S_y S_z + S_z S_x + S_x S_y)} + 3 \cdot (S_{yz}^2 + S_{xz}^2 + S_{xy}^2) + \\ & + \frac{\hat{\alpha}}{1 + \hat{\alpha}^2} (S_x + S_y + S_z) - \frac{f}{\sqrt{1 + \hat{\alpha}^2}} = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Estas definiciones generales de los criterios de fluencia permitirán a continuación añadir un grado más de generalidad permitiendo pasar a la definición de criterios de fluencia ortotrópicos.

2.5 Definición general explícita de un criterio de fluencia ortotropo en la configuración referencial.

De la misma forma que Hill (1948)¹¹, (1990)¹⁴ ha formulado su criterio de fluencia para materiales ortotrópicos, a partir de una generalización del criterio de von Mises, la ecuación (2.1) puede ahora generalizarse a una formulación ortotropa explícita que tiene la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^S(\mathbf{S}, \mathbf{f}^S) = & \left(\frac{S_x^2}{f_x^2} + \frac{S_y^2}{f_y^2} + \frac{S_z^2}{f_z^2} \right) - \hat{\lambda}_1 \left(\frac{S_y S_z}{f_y f_z} \right) - \hat{\lambda}_2 \left(\frac{S_z S_x}{f_z f_x} \right) - \hat{\lambda}_3 \left(\frac{S_x S_y}{f_x f_y} \right) + \\ & + \left(\frac{S_{yz}^2}{f_{yz}^2} + \frac{S_{xz}^2}{f_{xz}^2} + \frac{S_{xy}^2}{f_{xy}^2} \right) + 2 \cdot \left(\hat{\alpha}_x \frac{S_x}{f_x} + \hat{\alpha}_y \frac{S_y}{f_y} + \hat{\alpha}_z \frac{S_z}{f_z} \right) - 1 = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

En la cual x, y, z son las direcciones de los ejes de ortotropía, en tanto $\mathbf{f}^S = \{f_x, f_y, f_z, f_{xy}, f_{yz}, f_{xz}\}$, son los umbrales de resistencias en el límite elástico expresa-

das en dicho sistema referencial y $\hat{\alpha}_i = \frac{1}{2}[(f_c/f_t)_i - (f_t/f_c)_i]$, con $i = x, y, z$. Como puede observarse, la ecuación (2.14) tiende a una forma isótropa, ecuación (2.1), cuando se cumplen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_2 = \hat{\lambda}_3 &\equiv \hat{\lambda} & ; \quad \hat{\alpha}_x = \hat{\alpha}_y = \hat{\alpha}_z = \hat{\alpha} &\equiv \frac{1}{2} \left[\left(\frac{f_c}{f_t} \right) - \left(\frac{f_t}{f_c} \right) \right] \\ f_x = f_y = f_z &\equiv f = \sqrt{f_c f_t} & ; \quad f_{yz} = f_{xz} = f_{xy} &\equiv f_\tau = \frac{f}{\sqrt{2 + \hat{\lambda}}} = \frac{\sqrt{f_c f_t}}{\sqrt{2 + \hat{\lambda}}}\end{aligned}\quad (2.15)$$

En estas últimas expresiones se observa la dependencia entre magnitudes isótropas y ortótropas.

El criterio de fluencia ortótropo de Mises-Hill se obtiene a partir de la ecuación (2.14) forzando la igualdad entre las resistencias a tracción y compresión en cada dirección de ortotropía $\hat{\alpha}_x = \hat{\alpha}_y = \hat{\alpha}_z = 0$, y además sometiendo los $\hat{\lambda}_i$ a la siguiente restricción,

$$\hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 \hat{\lambda}_3 + \hat{\lambda}_1^2 + \hat{\lambda}_2^2 + \hat{\lambda}_3^2 = 4 \quad (2.16)$$

Resultando de esta particularización el criterio de fluencia de Mises-Hill,

$$\begin{aligned}\mathbb{F}^S(\mathbf{S}, \mathbf{f}^S) &= (G + H) S_x^2 + (F + H) S_y^2 + (F + G) S_z^2 - 2 F S_y S_z - 2 G S_z S_x - \\ &- 2 H S_x S_y + 2 L S_{yz}^2 + 2 M S_{xz}^2 + 2 N S_{xy}^2 - 1 = 0\end{aligned}\quad (2.17)$$

Este mismo criterio de Hill puede escribirse según la siguiente forma matricial,

$$\begin{aligned}\mathbb{F}^S(\mathbf{S}, \mathbf{f}^S) &= \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{P}^{\text{Mises}} \cdot \mathbf{S} - 1 = 0 \\ \mathbb{F}^\sigma(\mathbf{S}, \mathbf{f}^S) &= \left\{ S_x, S_y, S_z, S_{xy}, S_{yz}, S_{xz} \right\} \cdot \begin{bmatrix} (H+G) & -H & -G & 0 & 0 & 0 \\ -H & (F+H) & -F & 0 & 0 & 0 \\ -G & -F & (G+H) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2M \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \\ S_{xy} \\ S_{yz} \\ S_{xz} \end{bmatrix} - 1 = 0\end{aligned}\quad (2.18)$$

Donde $\mathbf{S}^T = \{S_x, S_y, S_z, S_{xy}, S_{yz}, S_{xz}\}$ es la parte simétrica del tensor de tensiones y \mathbf{P}^{Hill} una matriz cuadrada que permite recuperar la forma canónica expresada en la ecuación (2.17).

Comparando la ecuación (2.17) con la (2.14), resulta la siguiente relación entre los parámetros de Mises Hill y los umbrales de resistencia,

$$\begin{cases} \frac{1}{f_x^2} = (G + H) & ; \quad \frac{\hat{\lambda}_1}{f_y f_z} = 2F & ; \quad \frac{1}{f_{yz}^2} = 2L \\ \frac{1}{f_y^2} = (F + H) & ; \quad \frac{\hat{\lambda}_2}{f_x f_z} = 2G & ; \quad \frac{1}{f_{xz}^2} = 2M \\ \frac{1}{f_z^2} = (F + G) & ; \quad \frac{\hat{\lambda}_3}{f_x f_y} = 2H & ; \quad \frac{1}{f_{xy}^2} = 2N \end{cases} \quad (2.19)$$

Tal que despejando F , G , y H de la segunda columna de la ecuación (2.19) y sustituyéndola en la primera, se obtiene un sistema de ecuaciones en $\hat{\lambda}_i$, cuyas raíces son,

$$\begin{cases} \hat{\lambda}_1 = \frac{f_z^2 f_x^2 - f_z^2 f_y^2 + f_y^2 f_x^2}{f_y f_z f_x^2} \\ \hat{\lambda}_2 = \frac{-f_z^2 f_x^2 + f_z^2 f_y^2 + f_y^2 f_x^2}{f_x f_z f_y^2} \\ \hat{\lambda}_3 = \frac{f_z^2 f_x^2 + f_z^2 f_y^2 - f_y^2 f_x^2}{f_y f_x f_z^2} \end{cases} \quad (2.20)$$

De donde puede deducirse el cumplimiento de la condición exigida por la ecuación (2.16). Sustituyendo la ecuación (2.20) en la (2.19), resultan las constantes de Hill en función de los umbrales de resistencia,

$$\begin{cases} F = \frac{\hat{\lambda}_1}{2f_y f_z} = \frac{f_z^2 f_x^2 - f_z^2 f_y^2 + f_y^2 f_x^2}{2f_y^2 f_z^2 f_x^2} & ; \quad L = \frac{1}{2f_{yz}^2} \\ G = \frac{\hat{\lambda}_2}{2f_x f_z} = \frac{-f_z^2 f_x^2 + f_z^2 f_y^2 + f_y^2 f_x^2}{2f_y^2 f_z^2 f_x^2} & ; \quad M = \frac{1}{2f_{xz}^2} \\ H = \frac{\hat{\lambda}_3}{2f_x f_y} = \frac{f_z^2 f_x^2 + f_z^2 f_y^2 - f_y^2 f_x^2}{2f_y^2 f_z^2 f_x^2} & ; \quad N = \frac{1}{2f_{xy}^2} \end{cases} \quad (2.21)$$

Como puede observarse a partir de la definición de los parámetros de Hill, el criterio de fluencia (2.17) recupera a la forma isótropa de von Mises, ecuación (2.11), en el caso particular que se cumplan las siguientes condiciones,

$$\hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_2 = \hat{\lambda}_3 \equiv \hat{\lambda} = 1 \quad ; \quad f_x = f_y = f_z \equiv f \quad ; \quad f_{yz} = f_{xz} = f_{xy} \equiv f_\tau = \frac{f}{\sqrt{2 + \hat{\lambda}}} = \frac{f}{\sqrt{3}} \quad (2.22)$$

La ecuación (2.14) se transforma en el criterio ortotropo de Hill-Schleicher (Lubliner (1990)²⁸), cuando además de la ecuación (2.16) se cumple también la relación de ortotropía $\hat{\alpha}_x + \hat{\alpha}_y + \hat{\alpha}_z > 0$.

2.6 Definición general implícita de un criterio ortotropo en la configuración referencial

Como se ha visto en el apartado anterior, los procedimientos tradicionales que permiten obtener las ecuaciones constitutivas para materiales anisótropos elastoplásticos se basan en la descripción de una superficie de fluencia y una superficie de potencial plástico en función de las propiedades características del material. Satisfacer las condiciones de invariancia en estos casos resulta muchas veces difícil y en algunos casos es imposible.

La *definición general implícita* de un criterio de fluencia ortotropo tiene por objetivo utilizar como base una “*formulación isótropa en el espacio ficticio*” para luego transformarla a una “*formulación ortotropa implícita en el espacio real*”. Esto significa que no es necesario expresar explícitamente la forma matemática de este criterio ortotropo, sino sólo basta con expresar matemáticamente su forma isótropa y admitir la existencia de una transformación numérica que permita pasar del criterio isótropo a otro ortotropo implícito.

Esta formulación implícita de la ortotropía que se ha mencionado cualitativamente ya se conoce como “*teoría de mapeo de espacio*” (Sobotka (1969)³¹, Boehler and Sawczuk (1970)³², Beten (1981)²², Oller et alt. (1995)²⁶, (1996)^{33,34}, (1998)³⁵, Car et alt. (1999)^{36,37}, (2000)⁴¹), que consiste en admitir la existencia de dos espacios de tensiones, uno definido en σ que se denomina “espacio real de tensiones en la configuración referencial” Ω^S , donde reside el “criterio de fluencia ortotropo implícito” $\mathbb{F}^S(\mathbf{S}, \mathbf{f}^S) = 0$, y otro definido en $\bar{\mathbf{S}}$ denominado “espacio ficticio de tensiones en la configuración referencial” $\bar{\Omega}^S$, donde reside el “criterio de fluencia isótropo explícito” $\bar{\mathbb{F}}^S(\bar{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{f}}^S) = 0$. Además, entre ambos espacios existe un tensor de cuarto orden de transformación de espacio \mathbf{A}^S , simétrico, que permite transformar biunívocamente una imagen del tensor de tensiones definido en un espacio en el otro y viceversa. Este procedimiento garantiza la condición de invariancia (Oller et al. (1995)²⁶), (Casas et al. (1998)³⁸) (ver Figura 2.1).

2.6.1 Transformación del espacio de tensiones.

La transformación del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff del espacio anisótropo real al espacio isótropo ficticio, que garantiza la invariancia previamente definida, se realiza a través de la siguiente expresión (Oller et al. (1995)²⁶)

³¹ Sobotka, Z. (1969). Theorie des plastischen Fließens von anisotropen Körpern. *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 49, pp. 25-32.

³² Boehler, J. P., and Sawczuk, A. (1970). Équilibre limite des sols anisotropes. *J. Mécanique*, Vol. 9, pp. 5-32.

³³ Oller, S., Oñate, E., Miquel Canet, J., and Botello, S. (1996-a). A plastic damage constitutive model for composite materials. *Int. Jour. Solids Struct.*, Vol. 33, No. 17, pp. 2501-2518.

³⁴ Oller, S., Oñate, E., and Miquel Canet, J. (1996-b). A mixing anisotropic formulation for analysis of composites. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 12, 471-482.

³⁵ Oller, S., Rubert, J., Las Casas, E., Oñate, E., and Proença, S. (1998). Large Strains Elastoplastic Formulation For Anisotropic Materials. *First Esafom Conference on Material Forming*, ed. by J. Chenot, J. Agassant, P. Montmitinet, B. Bergnes, N. Billon, pp. 191194. Sophia Antipolis (France) March. 1998.

³⁶ Car, E., Oller, S. and Oñate, E. (1999-a). Numerical Constitutive Model For Laminated Composite Materials. *Second ESAFOM Conference on Material Forming*. Minho, Portugal, Ed. J. A. Covas, pp. 147-150.

³⁷ Car, E., Oller, S., and Oñate, E. (1999-b). A Large Strain Plasticity Model for Anisotropic Material - Composite Material Application. *Int. J. Plasticity*, Vol.17, No. 11, pp. 1437-1463.

³⁸ Las Casas E., Oller S., Rubert J., Proença and Oñate E. (1998). A Large Strain Explicit Formulation for Composites. Proceedings of the Fourth World Congress on Computational Mechanics. Ed. S. Idelsohn, E. Oñate and E. Dvorkin. CIMNE, Barcelona, Spain.

$$\bar{S}_{IJ} \stackrel{\text{def}}{=} A_{IJKL}^S S_{KL} \quad (2.23)$$

donde \mathbf{A}^S es un tensor de cuarto orden definido como el operador lineal $\mathbf{A}^S : S_2 \rightarrow S_2$ que establece la relación entre el espacio de los tensores simétricos de tensiones reales y ficticias respectivamente en la configuración referencial, $\bar{\mathbf{S}}$ es el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff en el espacio ficticio y \mathbf{S} es el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff en el espacio anisótropo real. El tensor de cuarto orden \mathbf{A}^S se define en la configuración referencial y permanece constante en esta configuración. La condición de fluencia del material anisótropo en el espacio isótropo ficticio se expresa como:

$$\bar{\mathbb{F}}^S(\bar{\mathbf{S}}, \mathbf{C}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{f}^{\bar{S}}) = 0 \quad (2.24)$$

donde $\bar{\mathbb{F}}^S$ es la función de fluencia en la *configuración referencial* y en el *espacio isótropo ficticio* y se diferencia de la función de fluencia en el *espacio anisótropo* \mathbb{F}^S en los argumentos que ambas funciones contienen.

La definición del “*criterio de fluencia implícito ortotrópico*”, resulta de admitir que en el espacio ficticio isótropo existe un criterio de fluencia isótropo del tipo $\bar{\mathbf{S}}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \bar{\mathbf{S}} - 1 = 0$, equivalente al que se ha definido en la ecuación (2.12), y que es imagen del criterio ortotrópico que se está buscando aproximar. Esta afirmación se demostrará a continuación sustituyendo en el criterio de fluencia ortotrópico la transformación de espacio de tensiones, de donde resulta el “*criterio de fluencia ortotrópico en el espacio isótropo ficticio*”,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) Criterio Ortotrópico en el Espacio Real de Tensiones: } \mathbb{F}^S(\mathbf{S}, \mathbf{f}^S) = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{P}^{\text{Ort}} \cdot \mathbf{S} - 1 = 0 \\ \mathbb{F}^S(\mathbf{S}, \mathbf{f}^S) \equiv \mathbb{F}^S(\bar{\mathbf{S}}, \mathbf{A}^S, \mathbf{f}^{\bar{S}}) = \left[(\mathbf{A}^S)^{-1} \cdot \bar{\mathbf{S}} \right]^T \cdot \mathbf{P}^{\text{Ort}} \cdot \left[(\mathbf{A}^S)^{-1} \cdot \bar{\mathbf{S}} \right] - 1 = 0 \\ \mathbb{F}^S(\bar{\mathbf{S}}, \mathbf{A}^S, \mathbf{f}^{\bar{S}}) = \bar{\mathbf{S}}^T \cdot \underbrace{\left[(\mathbf{A}^S)^{-T} \cdot \mathbf{P}^{\text{Ort}} \cdot (\mathbf{A}^S)^{-1} \right]}_{\mathbf{P}} \cdot \bar{\mathbf{S}} - 1 = 0 \\ \text{b) Criterio Ortotrópico en el Espacio Isótropo Ficticio: } \bar{\mathbb{F}}^S(\bar{\mathbf{S}}, \mathbf{f}^{\bar{S}}) = \bar{\mathbf{S}}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \bar{\mathbf{S}} - 1 = 0 \end{array} \right. \quad (2.25)$$

de donde se deduce el tensor \mathbf{A}^S que permite obtener la relación $\mathbf{P}^{\text{Ort}} = (\mathbf{A}^S)^T \cdot \mathbf{P} \cdot (\mathbf{A}^S)$ que hay entre las matrices \mathbf{P}^{Ort} (definida por el criterio ortotrópico implícito cuya ecuación se quiere aproximar, ecuación (2.25).a) y \mathbf{P} (definida por el criterio isótropo ficticio adoptado). Elegido entonces el *criterio de fluencia isótropo* $\bar{\mathbb{F}}^S(\bar{\mathbf{S}}, \mathbf{f}^{\bar{S}}) = \bar{\mathbf{S}}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \bar{\mathbf{S}} - 1 = 0$, que servirá de base para la obtención del *criterio ortotrópico implícito* $\mathbb{F}^S(\mathbf{S}, \mathbf{f}^S) = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{P}^{\text{Ort}} \cdot \mathbf{S} - 1 = 0$, sólo queda por definir la forma en que se obtiene el *tensor de transformación de espacio* \mathbf{A}^S , que se hará en el seguidamente.

En la definición de la forma y propiedades del operador tensorial \mathbf{A}^S introducido es necesario tener en cuenta la siguiente simetría

$$A_{IJKL}^S = A_{JIKL}^S = A_{ILJK}^S \quad (2.26)$$

Se parte de la hipótesis de que el tensor de cuarto orden de transformación de espacio de tensiones \mathbf{A}^S presenta la simetría

$$A_{IJKL}^S = A_{KLJ}^S \quad (2.27)$$

Como una primera aproximación puede definirse el operador lineal \mathbf{A}^S en la siguiente forma simplificada (Oller *et al* (1995)²⁶) que conduce a un tensor de cuarto orden cuyas simetrías permite su representación en forma de matriz cuadrada diagonal

$$A_{IJKL}^S = f_{IK}^{\bar{S}} \cdot (f_{JL}^S)^{-1} \quad (2.28)$$

donde $f_{IK}^{\bar{S}}$ y f_{JL}^S son los tensores de segundo orden de tensiones que representan la resistencia correspondiente a los espacios isótropo ficticio y anisótropo real. La definición del operador lineal dada en la ecuación (2.28) no es unívoca ya que en general no es posible la obtención de un tensor de cuarto orden (81 componentes) a partir de la información de 10 deos tensores de segundo orden (9 componentes cada uno). Así, la ecuación (2.28) se verifica solo para el caso de tensores diagonales.

En forma más general, el tensor de transformación de tensiones A_{IJKL}^S puede ajustarse a cualquier comportamiento anisótropo en el espacio de tensiones, a partir las propiedades del material y la forma del criterio de fluencia plástico que se establezca en los espacios isótropo y anisótropo. Esto es,

$$A_{IJKL}^S = (W_{IJRS} w_{RSKL})^{-1} \quad (2.29)$$

Donde W_{IJRS} contiene la información de los umbrales de resistencia en cada dirección de ortotropía y w_{RSKL} es un tensor cuyo objetivo es ajustar la función de los criterios ortotrópicos propuestos; ambos tensores serán definidos más adelante³⁹.

La determinación del límite elástico, o umbrales de resistencia, se realiza sobre ensayos experimentales reales y por lo tanto con la pieza en estado deformado (configuración actualizada). Por consiguiente, este valor límite obtenido se encuentra en la configuración actualizada.

El umbral de resistencia necesario para hallar el tensor \mathbf{A}^S resulta de obtener el valor de este límite de resistencia en la configuración referencial y por lo tanto debe realizarse el *transporte hacia atrás* (“*pull-back*”) de la tensión límite obtenida en un ensayo uniaxial, esto es:

$$\mathbf{f}^S = \tilde{\phi}(\mathbf{f}^\tau) \quad (2.30)$$

donde \mathbf{f}^S y \mathbf{f}^τ son los tensores de resistencias en la configuración referencial y actualizada respectivamente y $\tilde{\phi}(\bullet)$ es el operador de transporte entre las dos configuraciones (“*pull-back*”), función del tensor gradiente de las deformaciones. El cálculo de este tensor se obtiene componente a componente a partir del tensor gradiente de las deformaciones, que para el caso unidimensional resulta

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{l_f}{l_0} \quad (2.31)$$

donde l_0 es la longitud de la probeta ensayada en forma uniaxial y l_f es la longitud de la probeta en la configuración actualizada, correspondiente a la tensión en la que se verifica la

³⁹ S. Oller, E. Car and J. Lubliner (2001). Definition of a general implicit orthotropic yield criterion. Submitted in *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.

pérdida de linealidad en la respuesta. Teniendo en cuenta que $\tau = J \sigma$ y que $\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} : (J \sigma) : \mathbf{F}^{-T}$, el valor de la resistencia del material resulta:

$$\mathbf{f}^s = \frac{l_0}{l_f} (\mathbf{f}^\sigma) \quad (2.32)$$

donde \mathbf{f}^s y \mathbf{f}^σ son las resistencias del material en la configuración referencial y actualizada respectivamente.

2.6.2 Transformación del espacio de deformaciones.

La transformación de espacios definida en la ecuación (2.23) sólo puede aplicarse a materiales proporcionales, esto es, materiales cuya relación entre las tensiones de fluencia y el módulo de Young para cada dirección del espacio es constante,

$$f_{11}/C_{11} = f_{22}/C_{22} = \dots = f_{23}/C_{23} \quad (2.33)$$

Donde f_{ij} y C_{ij} representan respectivamente la resistencia y el módulo elástico del material en la configuración referencial para la dirección del espacio $i - j$. Esto implica que el tensor de deformación elástica debe ser el mismo en los espacios real y ficticio (Oller *et al.*, (1995)²⁵). Con el objetivo de generalizar la formulación a diversos materiales Oller et al. (1995)²⁶ proponen también una transformación del espacio de deformaciones reales.

Se define la relación entre las deformaciones de Green-Lagrange elásticas en el espacio "anisótropo real" E_{IJ}^e y las deformaciones de Green-Lagrange elásticas en el espacio "isótropo ficticio" \bar{E}_{IJ}^e (ver Figura 9) a través de la siguiente relación

$$\bar{E}_{IJ}^e \stackrel{\text{def}}{=} A_{IJKL}^E E_{KL}^e \quad (2.34)$$

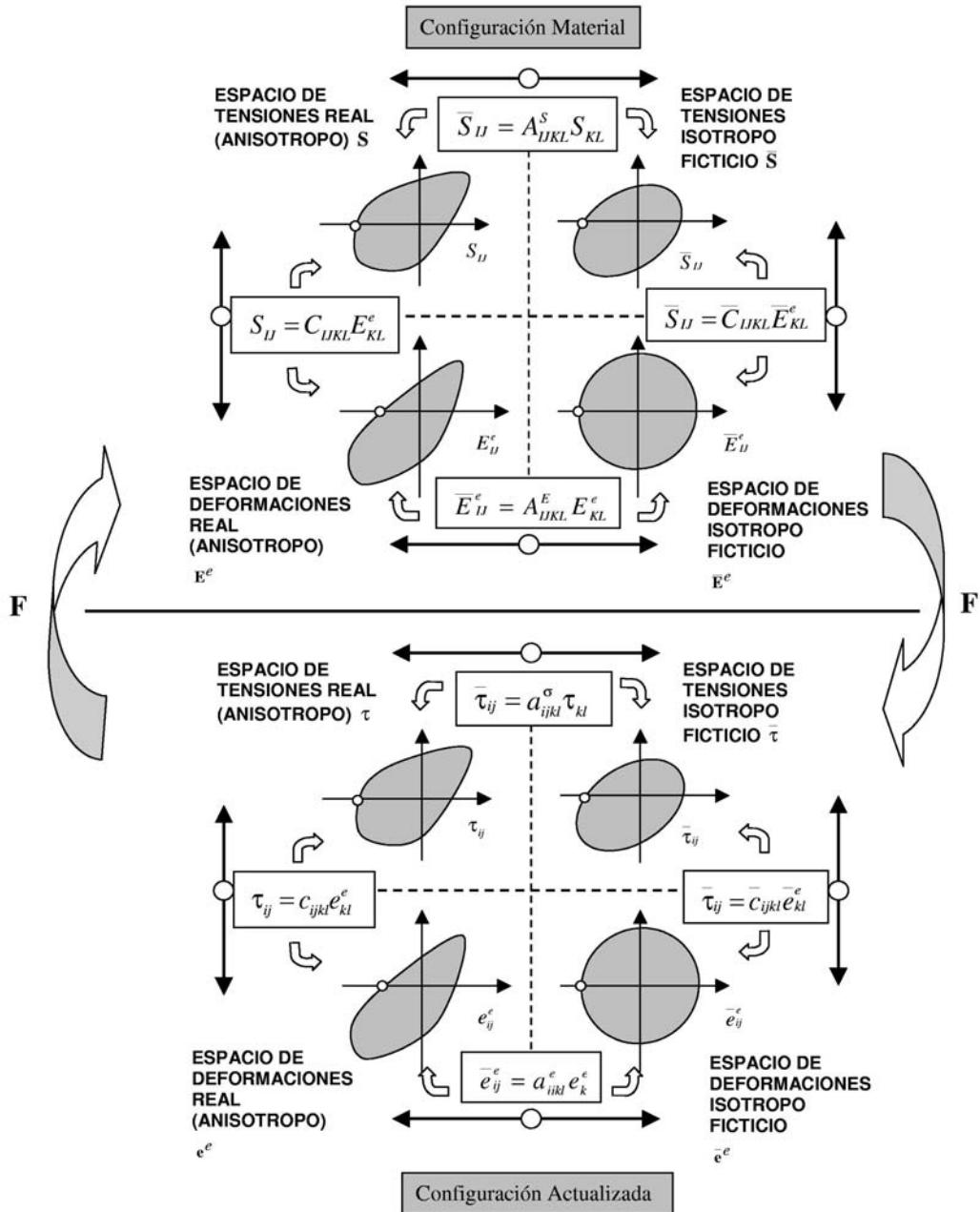


Figura 2.2 – Transformación de espacios. Espacios de tensiones y deformaciones reales y ficticios en grandes deformaciones.

donde \mathbf{A}^E es un tensor de cuarto orden definido como el operador lineal $\mathbf{A}^E : S_2 \rightarrow S_2$ que establece la relación entre los espacios de deformación de Green-Lagrange real E_{IJ}^e y

ficticio \bar{E}_{IJ}^e . Esta hipótesis implica no-unicidad en las deformaciones elásticas que se desarrollan en los dos espacios. El *tensor de transformación de las deformaciones* \mathbf{A}^E puede calcularse teniendo en cuenta la ecuación (2.23) y (2.34) de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}\bar{\mathbb{C}}_{IJMN}^S \bar{E}_{MN}^e &= A_{IJKL}^S \mathbb{C}_{KLRS}^S E_{RS}^e \\ \bar{\mathbb{C}}_{IJMN}^S A_{MNRS}^E E_{RS}^e &= A_{IJKL}^S \mathbb{C}_{KLRS}^S E_{RS}^e \\ \bar{\mathbb{C}}_{IJMN}^S A_{MNRS}^E &= A_{IJKL}^S \mathbb{C}_{KLRS}^S \\ A_{MNRS}^E &= (\bar{\mathbb{C}}_{IJMN}^S)^{-1} A_{IJKL}^S \mathbb{C}_{KLRS}^S\end{aligned}\quad (2.35)$$

Donde $\bar{\mathbb{C}}^S$ es un tensor constitutivo arbitrario definido en el *espacio isótropo ficticio* y \mathbb{C}^S es el tensor constitutivo en el *espacio anisótropo real*. La elección de $\bar{\mathbb{C}}^S$ es arbitraria y puede estar representado por las propiedades de cualquier material isótropo conocido, debido a que sólo se utiliza para trabajar en el espacio ficticio y luego se cancela su influencia al regresar al espacio real. Teniendo en cuenta la ecuación (2.35), es posible establecer la relación entre los tensores constitutivos en el espacio anisótropo real e isótropo ficticio,

$$\mathbb{C}_{KLRS}^S = (A_{IJKL}^S)^{-1} \bar{\mathbb{C}}_{IJMN}^S A_{MNRS}^E \quad (2.36)$$

El tensor constitutivo anisótropo real \mathbb{C}^S y el tensor de transformación de tensiones \mathbf{A}^S están expresados en coordenadas locales, por lo tanto resulta necesario expresarlos en el sistema de referencia global a través de un tensor de rotación de cuarto orden \mathbf{R} , esto es

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_{IJKL}^S &= R_{IJRS} (\mathbb{C}_{RSPQ}^S)_{loc} R_{PQKL} \\ A_{IJKL}^S &= R_{IJRS} (A_{RSPQ}^S)_{loc} R_{PQKL}\end{aligned}\quad (2.37)$$

donde $(\mathbb{C}^S)_{loc}$ es el tensor constitutivo de cuarto orden, en el espacio anisótropo real, expresado en un sistema de referencia local y $(\mathbf{A}^S)_{loc}$ es el tensor de cambio de espacios en direcciones de ortotropía local. El tensor de rotaciones \mathbf{R} se define como

$$R_{IJKL} = r_{IK} r_{JL} \quad (2.38)$$

Donde $r_{IK} = \cos[(\vec{e}_I)_{glob}, (\vec{e}_K)_{loc}]$, siendo $(\vec{e}_I)_{glob}$ y $(\vec{e}_K)_{loc}$ los versores unitarios correspondientes a las componente i-ésima y j-ésima de los sistemas de referencias global y local respectivamente. El tensor de rotación \mathbf{R} tiene en cuenta los ángulos entre las direcciones principales del material anisótropo y el sistema de coordenadas globales.

2.7 Definición general del tensor de transformación de espacio \mathbf{A}^S

Existen distintos caminos para definir el tensor de transformación de espacio \mathbf{A}^S , ejemplo de ello puede verse en trabajos de Beten (1981)²², Oller *et alt.* (1995)²⁶, (1996)^{33,34}, (1998)³⁵, Car *et alt.* (1999)^{36,37}, (2000)⁴¹, etc. A pesar de que estas definiciones permiten obtener criterios de fluencia ortótropos adecuados, son difíciles de ajustar “exactamente” al comportamiento de un material deseado. Para evitar esta limitación, se formaliza a continuación una nueva definición del tensor \mathbf{A}^S que permite ajustar exactamente un criterio de

fluencia isótropo a otro ortotropo cualquiera, a través la teoría de mapeo de espacio. Esto se consigue a través de la siguiente relación,

$$\left(\mathbf{A}_{IJKL}^S\right)^{-1} \equiv \mathbf{B}_{IJKL}^S = W_{IJKL} w_{RSKL} \quad (2.39)$$

Donde $W_{RSKL} = \omega_{RK}\omega_{SL}$ contiene la información de los umbrales de resistencia al límite elástico en cada dirección de ortotropía, siendo $\omega_{IJ} = \text{Diag}\{\omega_{\{xx\}}; \omega_{\{yy\}}; \omega_{\{zz\}}\} = \text{Diag}\{\sqrt{f_x/f}; \sqrt{f_y/f}; \sqrt{f_z/f}\}$, tal que aprovechando las simetrías del tensor W_{RSKL} , resulta la siguiente forma matricial,

$$W_{IJKL} = \omega_{IK}\omega_{JL} = \begin{bmatrix} \omega_{\{xx\}}\omega_{\{xx\}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{\{yy\}}\omega_{\{yy\}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{\{zz\}}\omega_{\{zz\}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{\{xx\}}\omega_{\{yy\}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{\{yy\}}\omega_{\{zz\}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{\{zz\}}\omega_{\{xx\}} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow W_{IJ} = \omega_{II}\omega_{JJ} = \begin{bmatrix} \omega_{xx}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{yy}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{zz}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{xx}\omega_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{yy}\omega_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{zz}\omega_{xx} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

y w_{IJKL} es un tensor cuyo objetivo es ajustar la función del criterio ortotropo propuesto y que tiene la forma y las simetrías que se indica en la siguiente representación matricial,

$$w_{IJKL} = \begin{bmatrix} \alpha_{\{xx\}\{xx\}} & \alpha_{\{xx\}\{yy\}} & \alpha_{\{xx\}\{zz\}} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{\{yy\}\{xx\}} & \alpha_{\{yy\}\{yy\}} & \alpha_{\{yy\}\{zz\}} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{\{zz\}\{xx\}} & \alpha_{\{zz\}\{yy\}} & \alpha_{\{zz\}\{zz\}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{\{xy\}\{xy\}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{\{yz\}\{yz\}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{\{zx\}\{zx\}} \end{bmatrix} \rightarrow w_{IJ} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{zx} \end{bmatrix}; \text{ con: } \alpha_{xy} \neq \alpha_{yx}; \alpha_{xz} \neq \alpha_{zx}; \alpha_{yz} \neq \alpha_{zy} \quad (2.41)$$

Esta forma reducida de expresar los tensores \mathbf{w} y \mathbf{W} , aprovechando su simetría, permite simplificar la obtención del tensor de transformación de espacio en la siguiente forma,

$$\left(\mathbf{A}_{IJ}^S\right)^{-1} \equiv \mathbf{B}_{IJ}^S = W_{IK} w_{KJ} \quad (2.42)$$

La forma isótropa se recupera forzando la igualdad de resistencia en todas las direcciones $f_x = f_y = f_z = f$, con lo que el tensor $\omega_{ij} \equiv \delta_{ij}$ coincide con el “delta de Kronecker” y la forma matricial del tensor de ajuste $w_{IJ} = I_{IJ} = \mathbf{I}$ también coincide con la identidad de segundo orden. Esta afirmación se confirmará en el siguiente apartado.

2.8 Obtención numérica de la forma matricial del tensor de ajuste w_{IJ}

El procedimiento de obtención del tensor de ajuste resulta de forzar el cumplimiento de la igualdad expresada en la ecuación (2.25), luego de haber adoptado las formas matriciales de los tensores \mathbf{W} y \mathbf{w} . Esto es

$$\begin{aligned} & [(\mathbf{B}^S)^T \cdot \mathbf{P}^{\text{Ort}} \cdot (\mathbf{B}^S)] - \mathbf{P} = \mathbf{0} \\ & [(\mathbf{W} \cdot \mathbf{w})^T \cdot \mathbf{P}^{\text{Ort}} \cdot (\mathbf{W} \cdot \mathbf{w})] - \mathbf{P} = \mathbf{0} \\ & [\mathbf{w}^T \cdot (\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{P}^{\text{Ort}} \cdot \mathbf{W}) \cdot \mathbf{w}] - \mathbf{P} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.43)$$

De la solución de este sistema de ecuaciones cuadrático en \mathbf{w} resulta la parte simétrica de este tensor $\mathbf{w} = w_{IJ}$. Esto permite obtener el tensor de cambio de espacio $\mathbf{A}^S = (\mathbf{W} \cdot \mathbf{w})^{-1}$ que da lugar a un *criterio de fluencia ortotropo* del tipo $\bar{\mathbf{S}}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \bar{\mathbf{S}} - 1 = 0$, y que coincide exactamente en forma implícita con el criterio ortotropo deseado $\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{P}^{\text{Ort}} \cdot \mathbf{S} - 1 = 0$.

La solución analítica de la ecuación (2.43) puede constituir un problema complejo, dependiendo del criterio de fluencia ortotropo que se quiera aproximar, por lo que es conveniente abordar la solución de dicha ecuación por la vía numérica. La solución de éste sistema de ecuaciones no lineal en \mathbf{w} , resulta de aplicar el método de Newton Raphson (Press *et alt.* (1992)⁴⁰) a la siguiente ecuación de restricción,

$$\begin{aligned} R_{IJ} &= \left[w_{IK}^T \left(W_{KR}^T P_{RS}^{\text{Ort}} W_{ST} \right) w_{TJ} \right] - P_{IJ} = 0 \\ R_{IJ} &= \left[w_{KI} \left(W_{RK} P_{RS}^{\text{Ort}} W_{ST} \right) w_{TJ} \right] - P_{IJ} = 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

Donde R es una matriz simétrica que expresa el residuo a eliminar mediante el método de Newton Raphson. La exigencia de anular el residuo R puede hacerse mediante la linealización del mismo en la vecindad de la solución actual, iteración $(i+1)$. Para ello se expresa dicha condición mediante una expansión en serie de Taylor truncada en su primera variación,

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{R}^{i+1} \cong \mathbf{R}^i + \left[\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{w}} \right]^i \cdot \Delta \mathbf{w}^{i+1} \\ 0 &= R_{IJ}^{i+1} \cong R_{IJ}^i + \underbrace{\left[\frac{\partial R_{IJ}}{\partial w_{UV}} \right]_i}_{J_{IJUV}^i} \cdot \Delta w_{UV}^{i+1} \end{aligned} \quad (2.45)$$

⁴⁰ Press, W. H., Teulosky, S. A., Vetterling, W. T. and Flannery, B. P. (1992). *Numerical recipes in Fortran 77. The art of scientific computing. Volume I*. Cambridge University Press.

Donde J_{IUV} representa el operador jacobiano de cuarto orden. Sustituyendo la ecuación (2.44) en la (2.45), resulta,

$$\Delta w_{UV}^{i+1} = -\underbrace{\left\{ 2 I_{KIU} \left(W_{RK} P_{RS}^{\text{Ort}} W_{ST} \right) w_{TJ} \right\}_i^{-1} \cdot \left[\left\{ w_{KI} \left(W_{RK} P_{RS}^{\text{Ort}} W_{ST} \right) w_{TJ} \right] - P_{IJ} \right\}}_{\{J_{IUV}\}^{-1}} \quad (2.46)$$

que permite obtener el valor actual de la incógnita mediante la siguiente actualización,

$$w_{UV}^{i+1} = w_{UV}^i + \Delta w_{UV}^{i+1} \quad (2.47)$$

Está será la solución buscada en la iteración $(i+1)$, si y solo si el residuo R cumple con la condición impuesta en la ecuación (2.44).

A pesar de las simplificaciones a nivel matricial realizadas en las ecuaciones (2.40), (2.41), (2.42) y (2.43), la resolución de la ecuación (2.46) sigue siendo de una complejidad alta, debido a que exige la inversión del tensor jacobiano de cuarto orden $\{J_{IUV}\}^{-1}$. Una forma simplificada de resolver este sistema de ecuaciones consiste en representar los tensores R y w en forma de matrices columnas, con lo que el operador jacobiano J_{IUV} se reduce a una matriz cuadrada J_{IJ} . Esta simplificación a nivel operativo, que ayuda a la resolución del sistema de ecuaciones no lineales, se detalla en el siguiente algoritmo de solución simplificado,

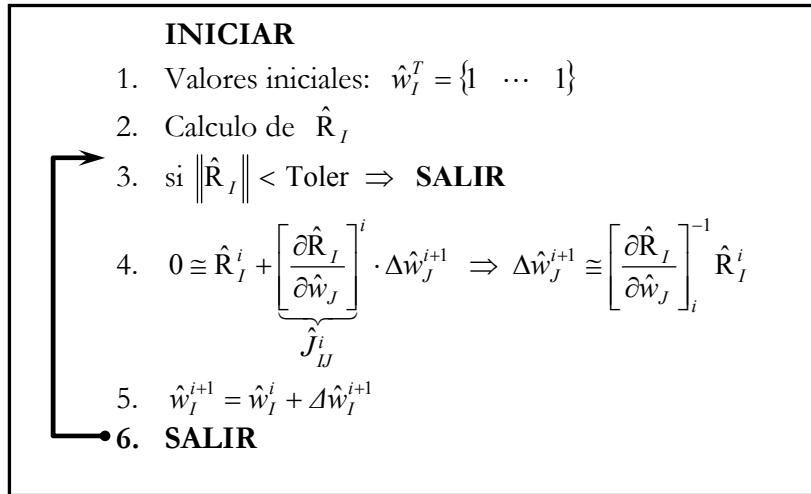


Tabla 2.1 – Algoritmo de Newton Raphson para resolver la ecuación (2.44)

Siendo \hat{R}_I una matriz columna que se utiliza para expresar el residuo en este algoritmo. Esto es,

$$R_{IJ} = \begin{bmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} & 0 & 0 & 0 \\ R_{yx} & R_{yy} & R_{yz} & 0 & 0 & 0 \\ R_{zx} & R_{zy} & R_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{xz} \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{R}_I = \begin{bmatrix} R_{xx} \\ R_{yy} \\ \vdots \\ R_{xy} \\ \vdots \\ R_{xz} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

La incógnita también se expresa en forma de matriz columna como,

$$w_{IJ} = \begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{xz} \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{w}_I = \begin{Bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ \vdots \\ \beta_{xy} \\ \vdots \\ \beta_{xz} \end{Bmatrix} \quad (2.49)$$

Y la matriz jacobiana se construye en forma dimensionalmente compatible a las dos definiciones anteriores como se muestra a continuación,

$$\hat{J}_{IJ} = \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}_I}{\partial w_J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{xx}}{\partial \alpha_{xx}} & \frac{\partial R_{xx}}{\partial \alpha_{yy}} & \dots & \frac{\partial R_{xx}}{\partial \beta_{xz}} \\ \frac{\partial R_{yy}}{\partial \alpha_{xx}} & \frac{\partial R_{yy}}{\partial \alpha_{yy}} & \dots & \frac{\partial R_{yy}}{\partial \beta_{xz}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial R_{xz}}{\partial \alpha_{xx}} & \frac{\partial R_{xz}}{\partial \alpha_{yy}} & \dots & \frac{\partial R_{xz}}{\partial \beta_{xz}} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

2.9 Comprobación del criterio ortotropo de Mises-Hill vía mapeo de espacio

A modo de ejemplo se mostrará a continuación una comparación, en el plano de tensiones principales ($\sigma_1 - \sigma_2$), entre el criterio de fluencia de Mises-Hill obtenido a través de la teoría de mapeo de espacio y su forma original. Aquí se muestra la perfecta coincidencia entre ambas formas de obtener el criterio de fluencia de Mises-Hill. Para este fin se procede a la resolución de la ecuación (2.42) por Newton Raphson, de donde resulta el tensor $\mathbf{w} = w_{IJ}$ que conduce a formular un tensor \mathbf{A}^S que ajusta el criterio de fluencia isótropo de von Mises al criterio de fluencia ortotropo de Mises-Hill a través de la teoría de mapeo de espacio.

A modo de ejemplo, se supone un hipotético material ortotropo en estado de deformación plana, que tiene las siguientes resistencia en cada una de las direcciones de ortotropía: $f_x = 100 \text{ MN/m}^2$, $f_y = 200 \text{ MN/m}^2$, $f_z = 100 \text{ MN/m}^2$, $f_{xy} = 50 \text{ MN/m}^2$. La resistencia isótropa de comparación adoptada es $f = 100 \text{ MN/m}^2$.

Con esta información se obtiene el tensor W_{IJ} (ecuación (2.40)), y a continuación se calcula la matriz que define el criterio de fluencia ortotropo $P^{\text{Ort}} = P^{\text{Hill}}$ (ecuación (2.18)), y también la que define el criterio de fluencia isótropo adoptado $P = P^{\text{Mises}}$ (ecuaciones (2.10) y (2.12)). Despues de estos pasos previos, se obtiene la forma matricial del residuo R_{IJ} , ecuación (2.44), y su ordenamiento en forma de matriz columna R_I , según la ecuación (2.48). De esta forma, el residuo $R_I(\mathbf{w})$ queda en función del tensor de ajuste \mathbf{w} y por lo tanto puede calcularse el jacobiano expresado en la ecuación (2.50).

De la resolución del algoritmo de Newton-Raphson (Tabla 2.1), se obtiene la siguiente solución para el tensor de ajuste

$$\hat{w}_I = \begin{Bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ \alpha_{xy} \\ \alpha_{yx} \\ \beta_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.75471 \\ 0.53851 \\ 0.98793 \\ 0.49396 \\ -0.61237 \end{Bmatrix} \Rightarrow \quad (2.51)$$

$$\Rightarrow \hat{w}_{IJ} = \begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & 0 \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.75471 & 0.98793 & 0 \\ 0.49396 & 0.53851 & 0 \\ 0 & 0 & -0.61237 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo adecuadamente este resultado en la ecuación (2.42), se obtiene el tensor de mapeo de espacio buscado, expresado en forma de matriz cuadrada,

$$B_{IJ}^S = W_{IK} w_{KJ} = \begin{bmatrix} \omega_{xx}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{yy}^2 & 0 \\ 0 & \omega_{xx}\omega_{yy} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & 0 \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{xy} \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (2.52)$$

$$\Rightarrow A_{IJ}^S = (B_{IJ}^S)^{-1} = \begin{bmatrix} -0.60207 & 0.55227 & 0 \\ 0.55227 & 0.4219 & 0 \\ 0 & 0 & -1.1547 \end{bmatrix}$$

Este tensor, sustituido en la ecuación (2.25), permite obtener un criterio de fluencia ortotropo implícito equivalente al expresado en la ecuación (2.25).

En la Figura 2.3 puede verse, sobre el espacio de tensiones principales, el criterio de fluencia de von Mises isótropo y el de Mises-Hill ortotropo clásico, para los datos de resistencia definidos al inicio de este apartado. En la misma figura se muestra también el ajuste conseguido con la ecuación ((2.25).b) a través del tensor $A_{IJ}^S = (W_{IK} w_{KJ})^{-1}$, obtenido éste último de la ecuación (2.52). Por último, se representa en la misma figura el resultado obtenido también con la ecuación ((2.25).b), pero utilizando el tensor de mapeo de espacio $A_{IJ}^S = (W_{IJ})^{-1}$ sin ajuste; es decir obtenido en la forma clásica de la teoría de mapeo de espacio que puede consultarse en Beten (1981)²², Oller *et alt.* (1995)²⁶, (1996)^{33,34}, (1998)³⁵, Car *et alt.* (1999)^{36,37}, (2000)⁴¹, etc..

2.10 Anisotropía en la configuración actualizada

Luego de un detallado estudio de la generalización del modelo elastoplástico isótropo en la configuración referencial, es posible extender el tratamiento de la anisotropía a la configuración actualizada en forma análoga a lo realizado en la configuración referencial. Se presentan a continuación los tensores de cuarto orden que definen la aplicación lineal que relaciona los espacios anisótropo real e isótropo ficticio de tensiones y deformaciones en la configuración actualizada y se demostrará la veracidad de esta formulación, lo que da una gran generalidad a la teoría desarrollada.

2.10.1 Transformación del espacio de tensiones.

La relación lineal entre los espacios de tensiones de Kirchhoff isótropo ficticio y anisótropo real en la configuración actualizada (ver Figura 2.2) se propone a través de la siguiente transformación

$$\bar{\tau}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} a_{ijkl}^{\tau} \tau_{kl} \quad (2.53)$$

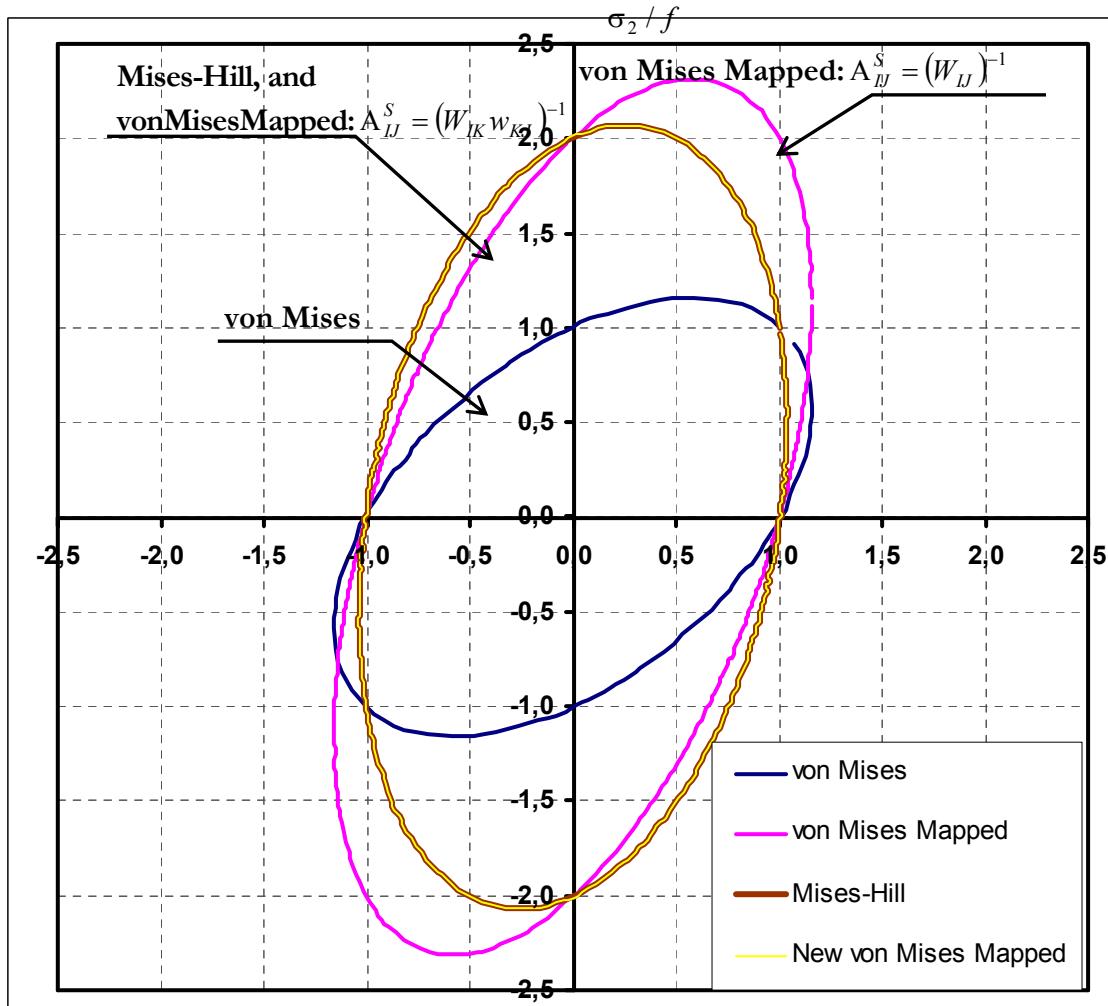


Figura 2.3 – Representación en el plano $(\sigma_1 / f - \sigma_2 / f)$, del criterio de fluencia isótropo de von Mises y los criterios de fluencia ortótropos de Mises-Hill y las aproximaciones a este criterio obtenidas a través de la teoría de mapeo de espacio, con $A_{IJ}^S = (W_{IK} \alpha_{KJ})^{-1}$ y sin ajuste $A_{IJ}^S = (W_{IJ})^{-1}$.

siendo a^τ un tensor de cuarto orden definido como el operador lineal $a^\tau : S_2 \rightarrow S_2$ que establece la relación entre el espacio de los tensores simétricos de tensiones reales y ficticias respectivamente en la configuración actualizada, $\bar{\tau}$ es el tensor de tensiones de Kirchhoff en el espacio ficticio y τ es el tensor de tensiones de Kirchhoff en el espacio anisótropo real. El tensor de cuarto orden $a^\tau = \tilde{\phi}(A^S)$ procede de la transformación del tensor de

transformación de tensiones en la configuración referencial. La condición de fluencia del material anisótropo en el espacio isótropo ficticio se expresa como:

$$\bar{\mathbb{F}}^{\tau}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{f}^{\tau}) = 0 \quad (2.54)$$

donde $\bar{\mathbb{F}}^{\tau}$ es la función de fluencia en la *configuración actualizada* y en el *espacio isótropo ficticio* y se diferencia de la función de fluencia en el *espacio anisótropo* \mathbb{F}^{τ} en los argumentos que ambas funciones contienen.

En el contexto de deformaciones finitas el operador lineal \mathbf{a}^{τ} , que relaciona los espacios de tensiones de Kirchhoff ficticio y real, no es constante. Esto se debe al cambio de configuración, al que es sometido el tensor de transformación de tensiones en la configuración referencial $\mathbf{a}^{\tau} = \bar{\phi}(\mathbf{A}^S)$ en función de los gradientes de deformaciones \mathbf{F} , como se demostrará a continuación.

La transformación que experimenta el tensor de tensiones cuando pasa de la configuración referencial a la actualizada, se expresa como,

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \bar{\phi}(\bar{\mathbf{S}}) \Rightarrow \bar{\tau}_{ij} = F_{il} \bar{S}_{lj} (F_{jJ})^T \quad (2.55)$$

Sustituyendo el segundo tensor de Piola-Kirchhoff en el espacio isótropo ficticio por la expresión dada en la ecuación (2.23), se tiene:

$$\bar{\tau}_{ij} = F_{il} (A_{ijkl}^S S_{kl}) (F_{jJ})^T \quad (2.56)$$

y el tensor de tensiones anisótropo real en la configuración referencial se obtiene realizando el *pull-back* del tensor de tensiones anisótropo de Kirchhoff, esto es:

$$\mathbf{S} = \bar{\phi}(\bar{\boldsymbol{\tau}}) \Rightarrow S_{kl} = (F_{kk})^{-1} \tau_{kl} (F_{ll})^{-T} \quad (2.57)$$

Reemplazando la expresión de la tensión (2.57) en la ecuación (2.56) se obtiene:

$$\bar{\tau}_{ij} = \underbrace{[F_{il} A_{ijkl}^S (F_{kk})^{-1} (F_{ll})^{-T} (F_{jJ})^T] \tau_{kl}}_{\mathbf{a}_{ijkl}^{\tau}} \quad (2.58)$$

De la ecuación anterior se obtiene que el tensor de transformación de espacios de tensiones en la configuración actualizada es una función del gradiente de las deformaciones, que expresa la cinemática del sistema referencial, y del tensor de transformaciones de espacios de tensiones en la configuración referencial (ver Figura 2.2)

$$\mathbf{a}_{ijkl}^{\tau} = [F_{il} (F_{kk})^{-1} (F_{ll})^{-T} (F_{jJ})^T] A_{ijkl}^S \quad (2.59)$$

donde \mathbf{F} es el tensor gradiente de la deformaciones.

2.10.2 Transformación del espacio de deformaciones

En forma análoga a lo presentado en el apartado 2.6.2, la transformación de espacios definida en la ecuación (2.53) solo puede aplicarse a materiales proporcionales (ecuación (2.33)). Al igual que ocurría en la configuración referencial, esto implica que el tensor de deformación elástica debe ser el mismo en los espacios real y ficticio de la configuración

actualizada. Nuevamente, con el objetivo de generalizar la formulación a diversos materiales Car (2000)⁴¹ propone también una transformación del espacio de deformaciones reales.

Se define la relación entre las deformaciones elásticas de Almansi en el espacio "anisótropo real" e_{ij}^e y las deformaciones elásticas de Almansi en el espacio "isótropo ficticio" \bar{e}_{ij}^e (ver Figura 2.2) a través de la siguiente relación

$$\bar{e}_{ij}^e \stackrel{\text{def}}{=} a_{ijkl}^e e_{kl}^e \quad (2.60)$$

Tal que en forma análoga a lo expresado en el apartado 2.6.2 a^e es un tensor de cuarto orden definido como el operador lineal $a^e : S_2 \rightarrow S_2$ que establece la relación entre los espacios de deformaciones de Almansi reales y ficticios respectivamente, \bar{e} es el tensor de deformaciones de Almansi en el espacio isótropo ficticio y e es el tensor de deformaciones de Almansi en el espacio anisótropo real.

El operador lineal a^e se encuentra definido en la configuración actualizada y debido al cambio de configuración no permanece constante. En el contexto de deformaciones finitas este operador es función del tensor de cambio de tensiones en la configuración material $a^e = \underline{\phi}(\mathbf{A}^E)$ y de los gradientes de deformaciones \mathbf{F} , como se demostrará a continuación.

La transformación que experimenta el tensor de deformaciones de Almansi cuando pasa de la configuración referencial a la actualizada, se expresa como,

$$\bar{e} = \underline{\phi}(\mathbf{E}) \Rightarrow \bar{e}_{ij} = (F_{il})^{-T} \bar{E}_{lj} (F_{jl})^{-1} \quad (2.61)$$

Sustituyendo el tensor de deformaciones de Green-Lagrange en el espacio isótropo ficticio por la expresión análoga a la dada en la ecuación (2.34), se tiene:

$$\bar{e}_{ij} = (F_{il})^{-T} (A_{IJKL}^E E_{KL}) (F_{jl})^{-1} \quad (2.62)$$

El tensor de deformaciones de Green-Lagrange anisótropo real en la configuración referencial se obtiene realizando el *pull-back* del tensor de deformaciones anisótropo de Almansi, esto es:

$$\mathbf{E} = \underline{\phi}(\mathbf{e}) \Rightarrow E_{KL} = (F_{Kk})^T e_{kl} (F_{lL}) \quad (2.63)$$

Reemplazando la expresión de la deformación (2.63) en la ecuación (2.62) se obtiene:

$$\bar{e}_{ij} = \underbrace{\left[(F_{il})^{-T} A_{IJKL}^E (F_{Kk})^T (F_{lL}) (F_{jl})^{-1} \right]}_{a_{ijkl}^e} e_{kl} \quad (2.64)$$

De la ecuación anterior se obtiene que el tensor de transformación de espacios de deformaciones en la configuración actualizada es una función del gradiente de las deformaciones, que expresa la cinemática del sistema referencial, y del tensor de transformaciones de espacios de deformaciones en la configuración referencial (ver Figura 2.2)

$$a_{ijkl}^e = \left[(F_{il})^{-T} (F_{Kk})^T (F_{lL}) (F_{jl})^{-1} \right] A_{IJKL}^E \quad (2.65)$$

⁴¹ Car E. (2000). *Modelo constitutivo continuo para el estudio del comportamiento mecánico de los materiales compuestos*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña. Barcelona, España.

donde \mathbf{F} es el tensor gradiente de la deformaciones.

2.11 Regla de flujo plástico. Ley de evolución de las variables internas

A continuación se presenta la regla de flujo y la ley de evolución de las variables internas que rigen el comportamiento de un material anisótropo genérico en régimen plástico. En forma análoga a lo realizado en apartados anteriores la formulación se establece en las configuraciones referencial y actualizada.

2.11.1 Configuración referencial

En la configuración referencial la ley de evolución de la deformación plástica en el espacio anisótropo está dada por la siguiente regla de normalidad

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathbb{G}^S}{\partial \mathbf{S}} \quad (2.66)$$

Teniendo en cuenta que toda la información de la anisotropía del material está contenida en el tensor de transformación \mathbf{A}^S , se propone la siguiente función de potencial plástico para el sólido anisótropo

$$\mathbb{G}^S(\mathbf{S}, \mathbf{C}) = \overline{\mathbb{G}}^S(\mathbf{S}, \mathbf{A}^S, \mathbf{C}) = \overline{\mathbb{G}}^S(\bar{\mathbf{S}}, \mathbf{C}) = \mathcal{K} \quad (2.67)$$

Reemplazando la ecuación (2.67) en la ecuación (2.66) resulta el siguiente incremento de la cuota plástica de la deformación de Green-Lagrange

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathbb{G}^S}{\partial \mathbf{S}} = \dot{\lambda} \frac{\partial \overline{\mathbb{G}}^S}{\partial \bar{\mathbf{S}}} : \frac{\partial \bar{\mathbf{S}}}{\partial \mathbf{S}} = \dot{\lambda} \frac{\partial \overline{\mathbb{G}}^S}{\partial \bar{\mathbf{S}}} : \mathbf{A}^S = (\dot{\bar{\mathbf{E}}}^p)^S : \mathbf{A}^S \quad (2.68)$$

donde $(\dot{\bar{\mathbf{E}}}^p)^S = \dot{\lambda} \frac{\partial \overline{\mathbb{G}}^S}{\partial \bar{\mathbf{S}}}$ es el flujo plástico normal al potencial isótropo $\overline{\mathbb{G}}^S$. El concepto de aditividad de las deformaciones en la configuración referencial⁴² permite extender la regla de transformación de las deformaciones a la cuota plástica de las deformaciones, es decir:

$$\dot{\bar{\mathbf{E}}}^p = \mathbf{A}^E : \dot{\mathbf{E}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{A}^E : \frac{\partial \mathbb{G}^S}{\partial \mathbf{S}} = \dot{\lambda} \mathbf{A}^E : \frac{\partial \overline{\mathbb{G}}^S}{\partial \bar{\mathbf{S}}} : \frac{\partial \bar{\mathbf{S}}}{\partial \mathbf{S}} = \dot{\lambda} \mathbf{A}^E : \underbrace{\frac{\partial \overline{\mathbb{G}}^S}{\partial \bar{\mathbf{S}}}}_{\mathfrak{R}^S} : \mathbf{A}^S = \mathbf{A}^E : (\dot{\bar{\mathbf{E}}}^p)^S : \mathbf{A}^S \quad (2.69)$$

donde $\dot{\bar{\mathbf{E}}}^p$ es el cambio temporal de la deformación plástica isótropa ficticia en la configuración referencial. Obsérvese que \mathfrak{R}^S es el flujo normal a la superficie potencial en el

⁴² NOTA: El concepto de aditividad de las deformaciones establece que $\dot{\mathbf{E}}^e = \dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}}^p$ y al ser \mathbf{A}^E una aplicación lineal, la cuota elástica de la deformación de Green-Lagrange resulta $\mathbf{A}^E : \dot{\mathbf{E}}^e = \mathbf{A}^E : \dot{\mathbf{E}} - \mathbf{A}^E : \dot{\mathbf{E}}^p$ con lo cual se obtiene $\dot{\mathbf{E}}^e = \dot{\mathbf{E}} - \dot{\bar{\mathbf{E}}}^p$ donde la ley de evolución de la deformación plástica en el espacio isótropo resulta $\dot{\bar{\mathbf{E}}}^p = \mathbf{A}^E : \dot{\mathbf{E}}^p$.

espacio isótropo. Este flujo afectado por el tensor A_{IJKL}^S permite obtener la regla de flujo asociada al espacio anisótropo de tensiones, $\mathfrak{R}^S = \bar{\mathfrak{R}}^S : \mathbf{A}^S$. La transformación $\tilde{\mathfrak{R}}^S = \mathbf{A}^S : \bar{\mathfrak{R}}^S$ introduce la influencia de la anisotropía elástica en el flujo anisótropo. La ley de evolución de las variables internas $\alpha = \{\dots, \alpha_S, \dots\}$ viene dada por la siguiente regla general

$$\alpha_S = \dot{\lambda} (\mathbf{H}^m)_S : \frac{\partial \mathbb{G}^S}{\partial \mathbf{S}} = \dot{\lambda} (\mathbf{H}^m)_S : \frac{\partial \bar{\mathbb{G}}^S}{\partial \bar{\mathbf{S}}} : \frac{\partial \bar{\mathbf{S}}}{\partial \mathbf{S}} = \dot{\lambda} (\mathbf{H}^m)_S : \frac{\partial \bar{\mathbb{G}}^S}{\partial \bar{\mathbf{S}}} : \mathbf{A}^S = (\mathbf{H}^m)_S : \left(\frac{\dot{\bar{\mathbb{E}}}}{\partial \bar{\mathbf{S}}} \right)^S : \mathbf{A}^S \quad (2.70)$$

donde $(\mathbf{H}^m)_S$ es un tensor de segundo orden, función del estado de tensiones actualizado y de la variable de endurecimiento plástico también actualizada. En el caso más simple de la teoría de la plasticidad toma la forma del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff y en este caso $\dot{\alpha}_S$ coincide con la densidad de energía plástica o dissipación. La ley de evolución de la variable interna resulta:

$$\bar{\Xi}_{\text{mec}}^p = \dot{\Psi}^P = \alpha_S = \dot{\lambda} \bar{\mathbf{S}} : \frac{\partial \bar{\mathbb{G}}^S}{\partial \bar{\mathbf{S}}} \quad (2.71)$$

2.11.2 Configuración actualizada

En la configuración actualizada la ley de evolución de la deformación plástica en el espacio anisótropo está dada por la siguiente regla de normalidad

$$L_v(\mathbf{e}^p) = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathbb{G}^\tau}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \dot{\lambda} \frac{\partial g^\tau}{\partial \boldsymbol{\tau}} \quad (2.72)$$

donde $\mathbb{G}^\tau(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{g}) = g^\tau(\boldsymbol{\tau}) = k$ y $g = g(\boldsymbol{\tau})$. Teniendo en cuenta que toda la información de la anisotropía del material está contenida en el tensor de transformación \mathbf{a}^τ , se propone la siguiente función de potencial plástico para el sólido anisótropo

$$\mathbb{G}^\tau(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{g}) = \bar{\mathbb{G}}^\tau(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{a}^\tau, \mathbf{g}) = \bar{\mathbb{G}}^\tau(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{g}) = k \quad (2.73)$$

Reemplazando la ecuación (2.73) en la ecuación (2.72) resulta el siguiente incremento de la cuota plástica de la deformación de Green-Lagrange

$$\mathbf{d}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathbb{G}^\tau}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \dot{\lambda} \frac{\partial \bar{\mathbb{G}}^\tau}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \dot{\lambda} \frac{\partial \bar{\mathbb{G}}^\tau}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} : \mathbf{a}^\tau = L_v(\bar{\mathbf{e}}^p)^\tau : \mathbf{a}^\tau \quad (2.74)$$

donde $L_v(\bar{\mathbf{e}}^p)^\tau = \dot{\lambda} \frac{\partial \bar{\mathbb{G}}^\tau}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}}$ es el flujo plástico normal al potencial isótropo $\bar{\mathbb{G}}^\tau$. El concepto de aditividad de las deformaciones en la configuración actualizada, en forma análoga a la configuración referencial⁴² permite extender la regla de transformación de las deformaciones totales a la cuota plástica de las deformaciones, es decir:

$$\bar{\mathbf{d}}^p = \mathbf{a}^e : \mathbf{d}^p = \dot{\lambda} \mathbf{a}^e : \frac{\partial \mathbb{G}^\tau}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \dot{\lambda} \mathbf{a}^e : \frac{\partial \bar{\mathbb{G}}^\tau}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \dot{\lambda} \mathbf{a}^e : \underbrace{\frac{\partial \bar{\mathbb{G}}^\tau}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}}}_{\tilde{\mathfrak{R}}^\tau} : \mathbf{a}^\tau = \mathbf{a}^e : L_v(\bar{\mathbf{e}}^p)^\tau : \mathbf{a}^\tau \quad (2.75)$$

donde $\bar{\boldsymbol{d}}^p$ representa el cambio temporal de la deformación plástica isótropa ficticia en la configuración actualizada. Obsérvese que $\bar{\boldsymbol{\tau}}^\tau$ es el flujo normal a la superficie potencial en un espacio isótropo. Este flujo afectado por el tensor a_{ijkl}^τ permite obtener la regla de flujo asociada al espacio anisótropo de tensiones, $\mathfrak{R}^\tau = \bar{\boldsymbol{\tau}}^\tau : \boldsymbol{a}^\tau$. La transformación $\tilde{\mathfrak{R}}^\tau = \boldsymbol{a}^e : \bar{\boldsymbol{\tau}}^\tau$ introduce la influencia de la anisotropía elástica en el flujo anisótropo. La ley de evolución de las variables internas $\boldsymbol{\alpha} = \{\dots, \alpha_\tau, \dots\}$ viene dada por la siguiente regla general

$$\alpha_\tau = \dot{\lambda}(\mathbf{h}^m)_\tau : \frac{\partial \mathbb{G}^\tau}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \dot{\lambda}(\mathbf{h}^m)_\tau : \frac{\partial \bar{\mathbb{G}}^\tau}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} : \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \dot{\lambda}(\mathbf{h}^m)_\tau : \frac{\partial \bar{\mathbb{G}}^\tau}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} : \boldsymbol{a}^\tau = (\mathbf{h}^m)_\tau : L_v(\bar{\boldsymbol{e}}^p)^\tau : \boldsymbol{a}^\tau \quad (2.76)$$

donde $(\mathbf{h}^m)_\tau$ es un tensor de segundo orden, función del estado de tensiones actualizado y de la variable de endurecimiento plástico también actualizada. En el caso más simple de la teoría de la plasticidad toma la forma del tensor de Kircchoff y en este caso $\dot{\alpha}_\tau$ coincide con la densidad de energía plástica o disipación. La ley de evolución de la variable interna resulta:

$$\bar{\Xi}_{\text{mec}}^p = \dot{\psi}^P = \alpha_\tau = \dot{\lambda} \bar{\boldsymbol{\tau}} : \frac{\partial \bar{\mathbb{G}}^\tau}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \quad (2.77)$$

La magnitud de la deformación plástica así obtenida, resulta igual a la disipación plástica expresada en la ecuación (2.71). Esta igualdad garantiza la objetividad de la formulación y muestra que se puede trabajar tanto en la configuración referencial como en la actualizada. Esta afirmación puede demostrarse teniendo en cuenta las operaciones de transporte “*push-forward*” y “*pull-back*”⁴³, partiendo de la disipación en la configuración referencial, se verifica su conservación en la configuración actualizada

$$\begin{aligned} \bar{\Xi}_{\text{mec}}^p &= \dot{\Psi}^p = \bar{\mathbf{S}} : \dot{\bar{\mathbf{E}}}^p = (\mathbf{F}^{-1} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{F}^{-T}) : (\mathbf{F}^T \cdot \bar{\boldsymbol{d}}^p \cdot \mathbf{F}) = \\ &= (\bar{\boldsymbol{\tau}}) : (\underbrace{\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^T}_{\mathbf{I}} \cdot \bar{\boldsymbol{d}}^p \cdot \underbrace{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1}}_{\mathbf{I}}) = \bar{\boldsymbol{\tau}} : \bar{\boldsymbol{d}}^p = \dot{\psi}^P \end{aligned} \quad (2.78)$$

En el siguiente apartado se muestra, además, que la disipación también es la misma en un espacio isótropo ficticio que en el espacio anisótropo real.

2.12 Definición de la disipación en el espacio isótropo ficticio. Unicidad de disipación

Este apartado tiene como objetivo demostrar que la disipación plástica del modelo constitutivo anisótropo desarrollado en los apartados anteriores es igual, independientemente de si se la considera en el espacio anisótropo real o en el espacio isótropo ficticio. Como se ha mencionado anteriormente la utilización del modelo constitutivo en el espacio ficticio tiene la ventaja de poder utilizar todos los algoritmos desarrollados para materiales isótropos con la consiguiente ventaja en la implementación en un código de elementos finitos.

⁴³ NOTA: Considerar la validez del siguiente producto tensorial en las operaciones de cambios de configuración: $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) : \mathbf{C} = \mathbf{B} : (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{C}) = \mathbf{A} : (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^T)$.

2.12.1 Configuración referencial

La magnitud de la energía libre de Helmholtz, para un proceso isotérmico, resulta igual para el espacio anisótropo e isótropo ficticio,

$$\begin{aligned}\Psi(\mathbf{E}^e, \theta, \alpha^m) &= \Psi^e(\mathbf{E}^e, \theta) + \Psi^p(\alpha^m) = \frac{1}{2m^0} [\mathbf{E}^e : \mathbb{C}^S : \mathbf{E}^e] + \Psi^p(\alpha^m) \\ \Rightarrow \mathbf{S} &= m^0 \frac{\partial \Psi(\mathbf{E}^e, \theta, \alpha^m)}{\partial \mathbf{E}^e} = \mathbb{C}^S : \mathbf{E}^e \\ \bar{\Psi}(\bar{\mathbf{E}}^e, \theta, \alpha^m) &= \bar{\Psi}^e(\bar{\mathbf{E}}^e, \theta) + \bar{\Psi}^p(\alpha^m) = \frac{1}{2m^0} [\bar{\mathbf{E}}^e : \bar{\mathbb{C}}^S : \bar{\mathbf{E}}^e] + \bar{\Psi}^p(\alpha^m) \quad (2.79) \\ \Rightarrow \bar{\mathbf{S}} &= m^0 \frac{\partial \bar{\Psi}(\bar{\mathbf{E}}^e, \theta, \alpha^m)}{\partial \bar{\mathbf{E}}^e} = \bar{\mathbb{C}}^S : \bar{\mathbf{E}}^e = \\ &= [\mathbf{A}^S : \mathbb{C}^S : (\mathbf{A}^E)^{-1}] : (\mathbf{A}^E : \mathbf{E}^e) = \mathbf{A}^S : \mathbf{S}\end{aligned}$$

donde $\Psi(\mathbf{E}^e, \theta, \alpha^m) = \bar{\Psi}(\bar{\mathbf{E}}^e, \theta, \alpha^m)$ es la energía libre total en la *configuración referencial, espacio anisótropo e isótropo respectivamente*, y $\Psi^p(\alpha^m) = \bar{\Psi}^p(\alpha^m)$ es la cuota plástica de dicha energía libre. La ecuación constitutiva en la *configuración referencial, espacio isótropo*, surge de considerar la expresión de Clasius-Duhem y las ecuaciones de transformación de espacios de tensiones (2.23) y deformaciones (2.34). La disipación está dada en forma general por:

$$\Xi_{\text{mec}}^p = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}^p - m^0 \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha^m} \dot{\alpha}^m - \frac{1}{\theta} \dot{\mathbf{q}} \cdot \nabla \theta \geq 0 \quad (2.80)$$

El primer término de la expresión de la disipación en la configuración referencial es también posible escribirlo en función de los tensores de transformación de espacios de tensiones \mathbf{A}^S y deformaciones \mathbf{A}^E y de los espacios de tensiones y deformaciones ficticias como

$$\mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}^p = [(\mathbf{A}^S)^{-1} : \bar{\mathbf{S}}] : [(\mathbf{A}^E)^{-1} : \dot{\bar{\mathbf{E}}}^p] \quad (2.81)$$

Reemplazando en esta última la deformación plástica ficticia $\dot{\bar{\mathbf{E}}}^p$ por su expresión (ecuación (2.69)), se obtiene,

$$\begin{aligned}\mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}^p &= \dot{\lambda} (\mathbf{A}^S)^{-1} : \bar{\mathbf{S}} : (\mathbf{A}^E)^{-1} : \mathbf{A}^E : \frac{\partial \bar{\mathbb{G}}^S}{\partial \bar{\mathbf{S}}} : \mathbf{A}^S \\ \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}^p &= \dot{\lambda} \bar{\mathbf{S}} : \frac{\partial \bar{\mathbb{G}}^S}{\partial \bar{\mathbf{S}}} = \bar{\mathbf{S}} : \dot{\bar{\mathbf{E}}}^p\end{aligned} \quad (2.82)$$

Considerando la ecuación anterior y la conservación de la energía, la expresión de la disipación para procesos isotérmicos resulta:

$$\Xi_{\text{mec}}^p = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}^p - m^0 \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha^m} \dot{\alpha}^m = \bar{\mathbf{S}} : \dot{\bar{\mathbf{E}}}^p - m^0 \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \alpha^m} \dot{\alpha}^m \equiv \bar{\Xi}_{\text{mec}}^p \geq 0 \quad (2.83)$$

La expresión anterior muestra la disipación es única, tanto si el modelo se formula en el espacio anisótropo, como si la formulación se realiza en el espacio isótropo equivalente. La implementación computacional de este modelo para anisotropía presenta grandes ventajas. Al tratarse el material en un espacio isótropo ficticio solo es necesario realizar una trans-

formación de los espacios de tensión y deformación a un espacio isótropo ficticio y luego utilizar los algoritmos desarrollados en la literatura clásica para materiales isótropos.

2.12.2 Configuración actualizada

La expresión de la energía libre de Helmholtz en el espacio anisótropo y espacio isótropo ficticio, en la configuración actualizada, para un proceso isotérmico resulta:

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{e}^e, \theta, \alpha^m) &= \psi^e(\boldsymbol{e}^e, \theta) + \psi^p(\alpha^m) = \frac{1}{2m} [\boldsymbol{e}^e : \mathbf{c}^\tau : \boldsymbol{e}^e] + \psi^p(\alpha^m) \\ \Rightarrow \boldsymbol{\tau} &= m \frac{\partial \psi(\boldsymbol{e}^e, \theta, \alpha^m)}{\partial \boldsymbol{e}^e} = \mathbf{c}^\tau : \boldsymbol{e}^e \\ \bar{\psi}(\bar{\boldsymbol{e}}^e, \theta, \alpha^m) &= \psi^e(\bar{\boldsymbol{e}}^e, \theta) + \bar{\psi}^p(\alpha^m) = \frac{1}{2m} [\bar{\boldsymbol{e}}^e : \bar{\mathbf{c}}^\tau : \bar{\boldsymbol{e}}^e] + \bar{\psi}^p(\alpha^m) \\ \Rightarrow \bar{\boldsymbol{\tau}} &= m \frac{\partial \bar{\psi}(\bar{\boldsymbol{e}}^e, \theta, \alpha^m)}{\partial \bar{\boldsymbol{e}}^e} = \bar{\mathbf{c}}^\tau : \bar{\boldsymbol{e}}^e = \\ &= [\boldsymbol{a}^\tau : \mathbf{c}^\tau : (\boldsymbol{a}^e)^{-1}] : (\boldsymbol{a}^e : \boldsymbol{e}^e) = \boldsymbol{a}^\tau : \boldsymbol{\tau}\end{aligned}\quad (2.84)$$

donde $\psi(\boldsymbol{e}^e, \theta, \alpha^m) = \bar{\psi}(\bar{\boldsymbol{e}}^e, \theta, \alpha^m)$ es la energía libre total en la *configuración actualizada, espacio anisótropo e isótropo respectivamente*, y $\psi^p(\alpha^m) = \bar{\psi}^p(\alpha^m)$ es la cuota plástica de dicha energía libre. La ecuación constitutiva en la *configuración actualizada, espacio isótropo*, surge de considerar la expresión de Clasius-Duhem y las ecuaciones de transformación de espacios de tensiones (2.53) y deformaciones (2.60). La disipación está dada en forma general por:

$$\Xi_{\text{mec}}^p = \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{d}^p - m \frac{\partial \psi}{\partial \alpha^m} \dot{\alpha}^m - \frac{1}{\theta} \dot{\mathbf{q}} \cdot \nabla \theta \geq 0 \quad (2.85)$$

El primer término de la expresión de la disipación en la configuración actualizada es también posible escribirlo en función de los tensores de transformación de espacios de tensiones \boldsymbol{a}^τ y deformaciones \boldsymbol{a}^e y de los espacios de tensiones y deformaciones ficticias como

$$\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{d}^p = [(\boldsymbol{a}^\tau)^{-1} : \bar{\boldsymbol{\tau}}] : [(\boldsymbol{a}^e)^{-1} : \bar{\boldsymbol{d}}^p] \quad (2.86)$$

Reemplazando en esta última la deformación plástica ficticia $\bar{\boldsymbol{d}}^p$ por su expresión (ecuación (2.69)), se obtiene,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{d}^p &= \dot{\lambda} (\boldsymbol{a}^\tau)^{-1} : \bar{\boldsymbol{\tau}} : (\boldsymbol{a}^e)^{-1} : \boldsymbol{a}^e : \frac{\partial \bar{\mathbb{G}}^\tau}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} : \boldsymbol{a}^\tau \\ \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{d}^p &= \dot{\lambda} \bar{\boldsymbol{\tau}} : \frac{\partial \bar{\mathbb{G}}^\tau}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} = \bar{\boldsymbol{\tau}} : \bar{\boldsymbol{d}}^p\end{aligned}\quad (2.87)$$

Considerando la ecuación anterior y la conservación de la energía, la expresión de la disipación para procesos isotérmicos resulta:

$$\Xi_{\text{mec}}^p = \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{d}^p - m \frac{\partial \psi}{\partial \alpha^m} \dot{\alpha}^m = \bar{\boldsymbol{\tau}} : \bar{\boldsymbol{d}}^p - m \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \alpha^m} \dot{\alpha}^m \equiv \bar{\Xi}_{\text{mec}}^p \geq 0 \quad (2.88)$$

La expresión anterior muestra la disipación es única, tanto si el modelo se formula en el espacio anisótropo, como si la formulación se realiza en el espacio isótropo equivalente. Al

igual que en la configuración referencial, la implementación computacional de este modelo para anisotropía presenta grandes ventajas. Al tratarse el material en un espacio isótropo ficticio solo es necesario realizar una transformación de los espacios de tensión y deformación a un espacio isótropo ficticio y luego utilizar los algoritmos desarrollados en la literatura clásica para materiales isótropos.

2.13 Ecuación constitutiva tangente

El método de Newton-Raphson, que utiliza matrices de rigidez tangente es una de las técnicas más utilizadas en la aproximación numérica de las ecuaciones que rigen el comportamiento de sólidos elastoplásticos. Por lo tanto, es necesaria una relación incremental entre las tensiones y las deformaciones para obtener el operador lineal tangente. A continuación se presentan los operadores lineales elastoplásticos tangentes continuos que establecen la relación entre el incremento de tensiones y el de deformaciones totales en las configuraciones referencial y actualizada.

El caso de materiales con comportamiento inelástico requiere la integración numérica de sistemas acoplados de ecuaciones diferenciales de pasos de tiempo de primer orden (Simo and Taylor (1985)⁴⁴). El resultado del algoritmo de integración es una función de respuesta no-lineal que define el tensor de tensiones como una función de la historia de deformaciones hasta el paso de tiempo actual. Este algoritmo de integración permite tratar el problema elastoplástico fundamentalmente como un problema linealizado equivalente en el paso de tiempo.

El operador tangente que interviene en el problema linealizado se debe obtener mediante una linealización de la función de respuesta consistente con el algoritmo de integración de la ecuación constitutiva. La utilización de estos operadores tangentes preserva la convergencia cuadrática de esquemas de solución iterativos basados en métodos de Newton (Simo and Taylor (1985)⁴⁴) (Crisfield (1991)⁴⁵). La precisión con la que se obtiene la matriz de rigidez tangente del sistema influye directamente en la velocidad de convergencia y es de una importancia fundamental en la exactitud general del análisis (Ortiz and Popov (1985)⁴⁶).

El operador elastoplástico que se presenta en este apartado es independiente del proceso de integración de la ecuación constitutiva y por lo tanto no preserva la convergencia cuadrática propia de los esquemas de solución basados en métodos de Newton. En la referencia Car (2000)⁴¹, se presenta la expresión del operador lineal elastoplástico tangente consistente con el algoritmo de integración de la ecuación constitutiva. La utilización de este operador permite obtener convergencia cuadrática en el problema no-lineal propio del método Newton-Raphson.

2.13.1 Configuración referencial

La ecuación constitutiva tangente en la configuración referencial se obtiene a partir de la variación temporal de la tensión de Piola Kirchhoff, esto es:

⁴⁴ Simo J. and Taylor R. (1985). Consistent tangent operators for rate-dependent elastoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 48, 101-118.

⁴⁵ Crisfield M. (1991). *Non linear finite element analysis of solids and structures*. John Wiley & Sons Ltd.

⁴⁶ Ortiz M. and Popov E. (1985). Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*. Vol. 21, pp. 1561-1576.

$$\dot{S}_{IJ} = \frac{\partial S_{IJ}}{\partial E_{KL}^e} \dot{E}_{KL}^e \quad (2.89)$$

Teniendo en cuenta que la tensión de Piola Kirchhoff en el espacio anisótropo puede escribirse en función de la tensión en el espacio isótropo ficticio se tiene

$$\begin{aligned} \dot{S}_{IJ} &= \underbrace{\frac{\partial S_{IJ}}{\partial \bar{S}_{RS}}} \underbrace{\frac{\partial \bar{S}_{RS}}{\partial \bar{E}_{MN}^e}} \underbrace{\frac{\partial \bar{E}_{MN}^e}{\partial E_{KL}^e}} \dot{E}_{KL}^e \\ &\quad (A_{LJRS}^S)^{-1} \quad A_{MNKL}^E \\ \dot{S}_{IJ} &= (A_{LJRS}^S)^{-1} \bar{\mathbb{C}}_{RSMN} A_{MNKL}^E \dot{E}_{KL}^e \\ \dot{S}_{IJ} &= (A_{LJRS}^S)^{-1} \bar{\mathbb{C}}_{RSMN} (\dot{\bar{E}}_{MN} - \dot{\bar{E}}_{MN}^p) \end{aligned} \quad (2.90)$$

Teniendo en cuenta la condición de consistencia plástica es posible obtener la ecuación constitutiva en el espacio isótropo ficticio, esto es:

$$\dot{\bar{S}}_{IJ} = \bar{\mathbb{C}}_{IJKL}^{ep} \dot{\bar{E}}_{KL} \quad \text{o también} \quad \dot{\bar{S}} = \bar{\mathbb{C}}^{ep} : \dot{\bar{E}} \quad (2.91)$$

Donde $\bar{\mathbb{C}}^{ep}$ representa el tensor constitutivo elastoplástico tangente en la configuración referencial, espacio isótropo ficticio, y su expresión está dada por la siguiente ecuación

$$\bar{\mathbb{C}}_{IJKL}^{ep} = \bar{\mathbb{C}}_{IJKL} - \frac{(\bar{\mathbb{C}}_{LJRS} \tilde{\mathfrak{R}}_{RS}^S) \otimes \left(\frac{\partial \bar{\mathbb{F}}^S}{\partial \bar{S}_{RS}} \bar{\mathbb{C}}_{RSKL} \right)}{\frac{\partial \bar{\mathbb{F}}^S}{\partial \bar{S}_{PQ}} \bar{\mathbb{C}}_{PQLN} \tilde{\mathfrak{R}}_{LN}^S - \underbrace{\sum_m \frac{\partial \bar{\mathbb{F}}^S}{\partial \alpha_S^m} (h_{TU}^m)_S \tilde{\mathfrak{R}}_{TU}^S}_A} \quad (2.92)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (2.90), que relaciona el tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff en los espacios real y ficticio, es posible obtener la variación de tensión anisótropa real como:

$$\dot{S}_{IJ} = (A_{IJKL}^S)^{-1} \bar{\mathbb{C}}_{KLRS}^{ep} \dot{\bar{E}}_{RS} \quad (2.93)$$

Combinando esta ecuación con la ecuación (2.34), se obtiene la expresión del tensor constitutivo elastoplástico anisótropo como:

$$\dot{S}_{IJ} = \underbrace{(A_{IJKL}^S)^{-1} \bar{\mathbb{C}}_{KLRS}^{ep} A_{RSPQ}^E}_{\mathbb{C}_{IJPQ}^{ep}} \dot{E}_{PQ} \quad \text{o también} \quad \dot{S} = \mathbb{C}^{ep} : \dot{E} \quad (2.94)$$

donde $\mathbb{C}_{IJPQ}^{ep} = (A_{IJKL}^S)^{-1} \bar{\mathbb{C}}_{KLRS}^{ep} A_{RSPQ}^E$ es el tensor elastoplástico anisótropo, que depende del tensor constitutivo elastoplástico tangente isótropo ficticio.

2.13.2 Configuración espacial

La ecuación constitutiva tangente en la configuración espacial se obtiene considerando la variación temporal de la tensión de Kirchhoff, esto es:

$$L_v(\tau_{ij}) = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial e_{kl}^e} L_v(e_{kl}^e) \quad (2.95)$$

Teniendo en cuenta que la tensión de Kirchhoff en el espacio anisótropo puede escribirse a partir de la tensión en el espacio isótropo ficticio se escribe

$$\begin{aligned} L_v(\tau_{ij}) &= \underbrace{\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial \bar{\tau}_{rs}}}_{(a_{ijrs}^\tau)^{-1}} \underbrace{\frac{\partial \bar{\tau}_{rs}}{\partial \bar{e}_{mn}^e} \frac{\partial \bar{e}_{mn}^e}{\partial e_{kl}^e}}_{a_{mnkl}^e} L_v(e_{kl}^e) \\ L_v(\tau_{ij}) &= (a_{ijrs}^\tau)^{-1} \bar{c}_{rsmn} a_{mnkl}^e L_v(e_{kl}^e) \\ L_v(\tau_{ij}) &= (a_{ijrs}^\tau)^{-1} \bar{c}_{rsmn} [L_v(\bar{e}_{mn}) - L_v(\bar{e}_{mn}^p)] \quad ; \quad \bar{d}_{mn}^p \equiv L_v(\bar{e}_{mn}^p) \end{aligned} \quad (2.96)$$

Teniendo en cuenta la condición de consistencia plástica se obtiene la ecuación constitutiva en el espacio isótropo ficticio,

$$L_v(\tau_{ij}) = \bar{c}_{ijkl}^{ep} L_v(\bar{e}_{kl}) \quad \text{o también} \quad L_v(\tau) = \bar{c}^{ep} : L_v(\bar{e}) \quad (2.97)$$

Donde \bar{c}^{ep} representa el tensor constitutivo elastoplástico tangente en la configuración actualizada, espacio isótropo ficticio, y su expresión está dada por la siguiente ecuación

$$\bar{c}_{ijkl}^{ep} = \bar{c}_{ijkl} - \frac{(\bar{c}_{ijrs} \tilde{\mathfrak{R}}_{rs}^\tau) \otimes \left(\frac{\partial \bar{F}^\tau}{\partial \bar{\tau}_{rs}} \bar{c}_{rskl} \right)}{\frac{\partial \bar{F}^\tau}{\partial \bar{\tau}_{pq}} \bar{c}_{pqln} \tilde{\mathfrak{R}}_{ln}^\tau - \underbrace{\sum_m \frac{\partial \bar{F}^\tau}{\partial \alpha_\tau^m} (h_{tu}^m)_\tau \tilde{\mathfrak{R}}_{tu}^\tau}_A} \quad (2.98)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (2.96), que relaciona el tensor de tensiones de Kirchhoff en los espacios real y ficticio, es posible obtener la variación de tensión anisótropa real como:

$$L_v(\tau_{ij}) = (a_{ijkl}^\tau)^{-1} \bar{c}_{klrs}^{ep} L_v(\bar{e}_{rs}) \quad (2.99)$$

Combinando esta ecuación con la ecuación (2.60), se obtiene la expresión del tensor constitutivo elastoplástico anisótropo como:

$$L_v(\tau_{ij}) = \underbrace{(a_{ijkl}^\tau)^{-1} \bar{c}_{klrs}^{ep} a_{rspq}^e}_{c_{ijpq}^{ep}} L_v(\bar{e}_{pq}) \quad \text{o también} \quad L_v(\tau) = c^{ep} : L_v(\bar{e}) \quad (2.100)$$

donde $c_{ijpq}^{ep} = (a_{ijkl}^\tau)^{-1} \bar{c}_{klrs}^{ep} a_{rspq}^e$ es el tensor elastoplástico anisótropo, que depende del tensor constitutivo elastoplástico tangente isótropo ficticio en la configuración actualizada.

Los tensores constitutivos elastoplásticos tangentes obtenidos anteriormente no permiten obtener convergencias cuadráticas en la solución de problemas incrementales basados en métodos de Newton, debido a que en su deducción no se ha tenido en cuenta el procedimiento de integración de la ecuación constitutiva y por lo tanto no es consistente con el mismo.

Los tensores constitutivos elastoplásticos tangentes ficticios dados por las ecuaciones (2.92) y (2.98) resultan simétricos para el caso de plasticidad asociada, mientras que el ten-

sor elastoplástico tangente anisótropo en las configuraciones referencial o actualizada dado por las ecuaciones (2.94) y (2.100) en general son no simétricos (ver Car (2000)⁴¹).

3 TEORÍA DE MEZCLAS

3.1 Introducción.

Los materiales compuestos están formados por diferentes tipos de sustancias inorgánicas u orgánicas. Su estado de equilibrio atómico depende de distintos tipos de ligaduras interatómicas, dando lugar a materiales amorfos o cristalinos.

Las características mecánicas de los materiales compuestos dependen de sus propiedades intrínsecas: estructura macroscópica, tipo de ligadura, estructura cristalina, etc.. También influyen en el comportamiento de estos materiales sus propiedades extrínsecas: características del proceso de fabricación, tamaño de micro-poros y defectos y distribución de los mismos, microfisuras, estados tensionales iniciales, etc. Desde el punto de vista de la simulación del comportamiento constitutivo sólo se puede aportar una contribución en estudios que conduzcan a mejorar las propiedades extrínsecas del compuesto.

Cada una de las sustancias componentes que integran el compuesto condicionan con su propia ley constitutiva el comportamiento del conjunto en función de la proporción del volumen en que participan y de su distribución morfológica dentro del compuesto.

Existen diversas teorías que permiten simular el comportamiento constitutivo de los materiales compuestos (ver una síntesis de ellos en Car (2000)¹, Zalamea (2000)²), una de ellas es la “Teoría de Mezclas” (Trusdell and Toupin (1960)³), que se considera adecuada para la simulación del comportamiento de materiales compuestos en régimen lineal y con ciertas modificaciones permite representar el comportamiento no lineal del material. Por otro lado, esta teoría, en su forma clásica, establece que los materiales componentes, que coexisten en un punto del sólido deben tener la misma deformación (componentes participando en paralelo). Esta hipótesis plantea una fuerte limitación en la utilización de esta teoría para la predicción del comportamiento de los materiales compuestos. Para solucionar este problema, se presente en este capítulo una “formulación general de la teoría de mezcla”, a partir de una ecuación de compatibilidad que se adapta al comportamiento del compuesto (componentes participando en serie-paralelo).

Precisamente en este capítulo se desarrolla una formulación adaptada a materiales de matriz reforzada con fibras y donde la ecuación de compatibilidad entre los materiales componentes proporciona automáticamente el grado de participación cinemática de cada uno de ellos. Esta capacidad, junto al tratamiento de la anisotropía de los materiales componen-

¹ Car E. (2000). *Modelo constitutivo continuo para el estudio del comportamiento mecánico de los materiales compuestos*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña. Barcelona, España.

² Zalamea F. (2000). *Tratamiento numérico de materiales compuestos mediante la teoría de homogeneización*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña. Barcelona, España.

³ Trusdell, C. and Toupin, R. (1960). *The classical Field Theories*. Handbuch der Physik III/I. Springer Verlag, Berlin.

tes (Oller *et al.* (1995)⁴ Car *et al.* (2001)⁵), abre de una manera muy amplia la posibilidad de tratamiento de distintos materiales compuestos de matriz reforzada con fibras.

De forma complementaria a esta formulación general de la teoría de mezclas, se presenta otra formulación que permite extender la validez de esta teoría a materiales compuestos en los cuales ocurren movimientos relativos entre sus materiales componentes. En este capítulo se aborda la solución de este problema a través de dos técnicas:

1. La primera basada en una nueva modificación de la ecuación de compatibilidad del compuesto, que conduce a introducir deformaciones inelásticas -no compatibles- entre los componentes, y
2. La segunda técnica alternativa está basada en la modificación de las propiedades de los materiales componentes, limitando su participación hasta el límite de la capacidad de transmisión de tensiones a través de las interfaces de contacto entre los componentes.

La teoría de mezclas clásica fue estudiada inicialmente por Trusdell y Toupin (1960)³ en el año 1960 y a su vez estos estudios establecieron las bases de otros trabajos posteriores (Green and Naghdi (1965)⁶, Ortiz and Popov (1982)^{7,8}, Oller *et al.* (1996)⁹, Oller and Oñate (1996)¹⁰). La teoría que aquí se presenta es más general que la clásica y representa el comportamiento constitutivo de un material compuesto por “*n*-fases” altamente anisótropas y sin la limitación exigida por la clásica ecuación de compatibilidad de la teoría original, permitiendo que la relación de comportamiento entre las sustancias componentes pueda ser en serie o en paralelo.

Esta teoría de mezclas generalizada podría entenderse como un “gestor de los modelos constitutivos” de cada componente del compuesto, permitiendo considerar la interacción entre las distintas leyes de comportamiento de las diversas fases de un compuesto. Esta técnica de combinación de comportamientos, o de sustancias en este caso particular, permite que cada una de ellas conserve su ley constitutiva original, isótropa o anisótropa, lineal o no-lineal, y a la vez condicione el comportamiento global del conjunto o compuesto.

Como ya se ha mencionado, la forma clásica de la teoría de mezclas es sólo adecuada para simular el comportamiento mecánico de ciertos materiales compuestos, cuyos componentes responden en paralelo (con igual deformación y sin movimientos relativos entre ellos). Materiales que responden a este perfil son aquellos constituidos de matrices con reforzamiento de fibras largas alineadas con la acción de la carga. Para otra orientación de la carga u otros tipos de materiales compuestos, como son los tejidos cuyas fibras tienen diversas orientaciones entre sí, es necesario realizar modificaciones en la teoría clásica. Uno de los objetivos de este capítulo es presentar dicha modificación, que surge de trabajos previos

⁴ Oller S., Botello S., Miquel J., and Oñate E. (1995). An anisotropic elastoplastic model based on an isotropic formulation. *Engineering Computation*, 12 (3), pp. 245-262.

⁵ Car E., Oller S., Oñate E. (2001). A large strain plasticity model for anisotropic materials — Composite material application. *International Journal of Plasticity*, 17, pp. 1437-1463.

⁶ Green A. and Naghdi P. (1965). A dynamical theory of interacting continua.. *Journal Engineering Science*, 3 3-231.

⁷ Ortiz M. and Popov E. (1982). A physical model for the inelasticity of concrete. *Proc. Roy. Soc. London*, A383, 101-125.

⁸ Ortiz M. and Popov E. (1982). Plain concrete as a composite material. *Mechanics of Materials*, 1, 139-150.

⁹ Oller S., Oñate E., Miquel J., and Botello S. (1996). A plastic damage constitutive model for composite materials. *Int. J. Solids and Structures*, 33 (17), 2501-2518.

¹⁰ Oller S., Oñate E. (1996). A Hygro-Thermo-Mechanical constitutive model for multiphase composite materials. *Int. J. Solids and Structures*. Vol.33, (20-22), 3179-3186.

realizados a partir del año 1995 (ver las referencias^{11,12,13,14}). Estos trabajos presentaban un “Modelo Serie-Paralelo” que necesitaba correlaciones con experimentos para ajustar en cada punto el acoplamiento cinemático del material compuesto. En origen, esta teoría tenía en cuenta la orientación de los componentes y asignaba un comportamiento cinemático comprendidos entre un comportamiento extremo en serie y otro extremo en paralelo. Actualmente se ha transformado esta formulación en otra más amplia y versátil que ajusta automáticamente el comportamiento cinemático de cada componente del material compuesto mediante una interpretación de la orientación de las fibras (ver esquema en la Figura 3.1). En este capítulo también se describe brevemente los lineamientos generales de ésta formulación.

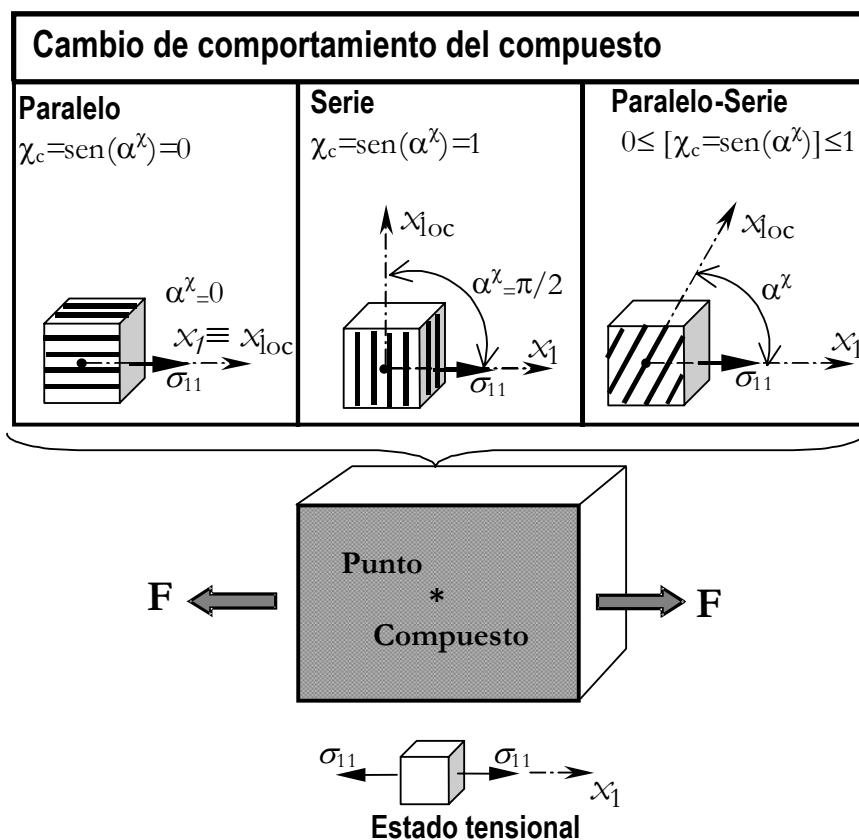


Figura 3.1 – Representación esquemática del comportamiento “serie-paralelo” de un punto de un sólido compuesto.

¹¹ Oller S., Neamtu L., Oñate E. (1995). Una Generalización de la teoría de mezclas clásica para el tratamiento de compuestos en Serie-Paralelo. *I Congreso Nacional de materiales compuestos MATCOMP 95*. Ed. F. París. J. Cañas. Materiales Compuestos 95 - AEMAC, pp 433-438, Sevilla, España.

¹² Neamtu L., Oller S., Oñate E. (1997). A generalized mixing theory Elasto-Damage-Plastic model for finite element analysis of composites. Fifth International Conference on Computational Plasticity – COMPLAS V. Ed. D. R. Owen, E. Oñate, E. Hinton. CIMNE, pp. 1214-1212. Barcelona.

¹³ Oñate E., Neamtu L., Oller S. (1997). Generalization of the classical mixing theory for analysis of composite materials. *International Conference on Advances in Computational Engineering Science (ICES'97)*. Ed S.N. Atluri and G. Yagawa. Tech. Science Press, pp. 625-630 - Georgia U.S.A.

¹⁴ Oñate E., Neamtu L., Oller S. (1997). Un modelo constitutivo para el análisis por el M.E.F. para materiales compuestos. *II Congreso Nacional de materiales compuestos. "MATCOMP 97"*. Ed. J. Güemes y C. Navarro. Materiales Compuestos 97 - AEMAC, pp 206-211 - Madrid. España.

3.2 Teoría de mezclas clásica.

La teoría de mezclas clásica de sustancias básicas se basa en la mecánica del sólido continuo local y se considera adecuada para explicar el comportamiento de un punto de un sólido compuesto. Se basa en el principio de interacción de entre las sustancias que componen el material compuesto, suponiendo las siguientes hipótesis básicas:

- i. En cada volumen infinitesimal de un compuesto participan un conjunto de sustancias componentes;
- ii. Cada componente contribuye en el comportamiento del compuesto en la misma proporción que su participación volumétrica;
- iii. Todos los componentes poseen la misma deformación –ecuación de cierre o compatibilidad–;
- iv. El volumen ocupado por cada componente es mucho menor que el volumen total del compuesto.

La segunda de las hipótesis implica una distribución homogénea de todas las sustancias en cada punto del compuesto. La interacción entre las diferentes sustancias componentes, cada una con su respectiva ley constitutiva, determina el comportamiento del material compuesto y depende básicamente del porcentaje en volumen ocupado por cada componente y de su distribución en el compuesto. Esto permite combinar materiales con comportamientos diferenciados (elástico, elasto-plástico, etc.), donde cada uno de ellos presenta un comportamiento evolutivo gobernado por su propia ley.

La tercera hipótesis establece que en ausencia de difusión atómica* se cumple la siguiente condición de compatibilidad bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones para cada una de las fases del material compuesto:

$$\varepsilon_{ij} = (\varepsilon_{ij})_1 = (\varepsilon_{ij})_2 = \dots = (\varepsilon_{ij})_n \quad (3.1)$$

donde ε_{ij} y $(\varepsilon_{ij})_n$ representan respectivamente las deformaciones del material compuesto y de la componente i -ésima de dicho material compuesto.

3.2.1 Expresión de la energía libre

La energía libre de un material compuesto está dada por la composición aditiva de las energías libres de cada uno de los materiales componentes, ponderadas en función de su participación volumétrica, esto es:

$$m \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \theta, \alpha^m) = \sum_{c=1}^n k_c m_c \Psi_c \left(\boldsymbol{\varepsilon}^e, (\boldsymbol{\varepsilon}^p)_c, \theta, (\alpha^m)_c \right) \Rightarrow \Psi = \sum_{c=1}^n k_c \frac{m_c}{m} \Psi_c \quad (3.2)$$

donde $\Psi_c = \frac{1}{2m_c} (\varepsilon_{ij}^e C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e) + \Psi_c^p$ es la energía libre por unidad de masa y volumen, correspondiente a la c -ésima sustancia componente de la mezcla, k_c es el coeficiente de participación volumétrica, $(\boldsymbol{\varepsilon}^p)_c$ es la deformación plástica de cada fase y $(\alpha^m)_c$ son las variables internas que definen el comportamiento físico de un genérico componente c -ésimo.

* **Nota:** Los fenómenos de difusión atómica se producen a temperaturas cercanas al punto de fusión. En los análisis se considera una temperatura inferior a la correspondiente al punto de fusión.

El factor de ponderación o coeficiente de participación volumétrica k_c permite considerar la contribución de cada fase y se obtiene considerando la participación volumétrica de cada una de los materiales componentes respecto del volumen total

$$k_c = \frac{dV_c}{dV_0} \quad (3.3)$$

donde V_c representa el volumen del componente c -ésimo del material y V_0 es el volumen total del material compuesto. Los coeficientes de participación volumétrica de los distintos componentes de un material compuesto deben satisfacer la condición

$$\sum_{c=1}^n k_c = 1 \quad (3.4)$$

la cual permite recuperar la energía libre para el caso de materiales monofase y garantiza la conservación de la masa. Siguiendo un procedimiento similar al utilizado para materiales simples, a partir de la desigualdad de Clausius-Duhem y aplicando el método de Coleman^{10,15,16,17,18} –con el que se garantiza una disipación positiva– se obtiene la siguiente expresión para la entropía,

$$\eta = -m \frac{\partial \Psi(\varepsilon_{ij}^e, \theta, \alpha_i)}{\partial \theta} = -\sum_{c=1}^n k_c m_c \frac{\partial \Psi_c(\varepsilon_{ij}^e, \theta, \alpha_i)_c}{\partial \theta} = \sum_{c=1}^n k_c \eta_c \quad (3.5)$$

donde η_c es la entropía de cada una de las fases que componen el material. La ecuación constitutiva surge también aplicando el método de Coleman a la desigualdad de Clausius-Duhem.

$$\sigma_{ij} = m \frac{\partial \Psi(\varepsilon_{ij}^e, \theta, \alpha_i)}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sum_{c=1}^n k_c m_c \frac{\partial \Psi_c(\varepsilon_{ij}^e, \theta, \alpha_i)_c}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sum_{c=1}^n k_c (\sigma_{ij})_c \quad (3.6)$$

La ecuación constitutiva secante para el material compuesto (ecuación (3.6)) se escribe:

$$\sigma_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl}^S \varepsilon_{kl}^e = \sum_{c=1}^n k_c (\sigma_{ij})_c = \sum_{c=1}^n k_c (\mathbb{C}_{ijkl}^S)_c (\varepsilon_{kl}^e)_c \quad (3.7)$$

Teniendo en cuenta la condición de compatibilidad expresada por la ecuación (3.1), la deformación para cada componente está dada por

$$(\varepsilon_{kl})_c = \varepsilon_{kl} = (\varepsilon_{kl}^e)_c + (\varepsilon_{kl}^p)_c + (\varepsilon_{kl}^\theta)_c \Rightarrow (\varepsilon_{kl}^e)_c = \varepsilon_{kl} - (\varepsilon_{kl}^p)_c - (\varepsilon_{kl}^\theta)_c \quad (3.8)$$

donde $(\varepsilon_{kl}^e)_c$, $(\varepsilon_{kl}^p)_c$ y $(\varepsilon_{kl}^\theta)_c$ representan las cuotas de deformación elástica, plástica y de origen térmico. La deformación plástica del material compuesto se obtiene desarrollando ambos miembros de la igualdad expresada en la (3.7), considerando la ecuación (3.8) y te-

¹⁵ Lubliner, J., Oliver, J., Oller, S., & Oñate, E. (1989). A plastic-damage model for concrete. International Journal of Solids and Structures, 25(3), 299 - 326.

¹⁶ Lubliner, J. (1985). *Thermomechanics of Deformable Bodies*. Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, U.S.A.

¹⁷ Lubliner, J. (1990). *Plasticity theory*. MacMillan, New York.

¹⁸ Maugin, G. A. (1992). *The thermomechanics of plasticity and fracture*. Cambridge University Press.

niendo en cuenta que en el material compuesto las deformaciones elásticas resultan $(\varepsilon_{kl}^e) = \varepsilon_{kl} - (\varepsilon_{kl}^p) - (\varepsilon_{kl}^\theta)$, esto es^{*},

$$\mathbb{C}_{ijkl}^\sigma (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p - \varepsilon_{kl}^\theta) = \sum_{c=1}^n k_c (\mathbb{C}_{ijkl}^\sigma)_c (\varepsilon_{kl} - (\varepsilon_{kl}^p)_c - (\varepsilon_{kl}^\theta)_c) \Rightarrow \quad (3.9)$$

$$\varepsilon_{kl}^p = (\mathbb{C}_{ijkl}^\sigma)^{-1} \left[\sum_{c=1}^n k_c (\mathbb{C}_{ijkl}^\sigma)_c ((\varepsilon_{kl}^p)_c + (\varepsilon_{kl}^\theta)_c) \right] - \varepsilon_{kl}^\theta \quad (3.10)$$

El tensor constitutivo tangente surge de considerar la variación de la tensión respecto de las deformaciones y está dado por:

$$\mathbb{C}_{ijkl}^\sigma = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = m \frac{\partial^2 \Psi(\varepsilon_{ij}^e, \theta, \alpha_i)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \sum_{c=1}^n k_c (\mathbb{C}_{ijkl}^\sigma)_c \quad (3.11)$$

El tensor conjugado del coeficiente de dilatación térmica resulta de considerar la variación de la energía libre de Helmholtz respecto de las deformaciones y de la temperatura

$$\beta_{ij} = -m \frac{\partial^2 \Psi(\varepsilon_{ij}^e, \theta, \alpha_i)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \theta} = \sum_{c=1}^n k_c (\beta_{ij})_c \quad (3.12)$$

La teoría de mezclas clásica, en la cual se parte de la hipótesis de que el campo de deformaciones es el mismo para todos los componentes del compuesto, es rigurosamente válida sólo si se aplica a materiales cuyos componentes trabajan en paralelo. Estos materiales se caracterizan por que su estado tensional resulta ser la sumatoria de las tensiones de cada componente, ponderadas de forma proporcional al volumen que ocupa cada fase respecto del total –ej.: matriz con fibras largas, hormigón armado, etc.–. En el caso de matrices con refuerzo de corta longitud no resulta válida la hipótesis de igualdad entre las deformaciones de todos los componentes. Para solucionar este inconveniente existen dos alternativas: definir otra ecuación de cierre (ecuación (3.1)), que permita simular adecuadamente los fenómenos que se producen en el material, o realizar una corrección en las propiedades de cada componente y mantener la hipótesis de igualdad deformaciones en cada uno de los componentes del compuesto.

3.3 Modificación teoría clásica. Modelo serie-paralelo

La limitación de la teoría de mezclas clásica ha impulsado a diversas modificaciones de la misma. Una camino posible es la formulación presentada por Oller *et al.* (1995)¹⁹ y Oñate *et al.* (1997)²⁰, que establece una generalización de la teoría de mezclas clásica en pequeñas deformaciones para representar el comportamiento del compuesto cuyos componentes

* Nota: Para deducir esta expresión, también es necesario tener en cuenta la condición de compatibilidad de deformación dada por la ecuación (3.1) y que $\mathbb{C}_{ijkl}^\sigma \varepsilon_{ij}^e = \sum_{c=1}^n k_c (\mathbb{C}_{ijkl}^\sigma)_c (\varepsilon_{ij}^e)_c$

¹⁹ Oller, S., Neamtu, L., & Oñate, E. (1995). Una generalización de la teoría de mezclas clásica para el tratamiento de compuestos en serie/paralelo. Congreso Nacional de Materiales Compuestos, pp. 433 - 438.

²⁰ Oñate, E., Neamtu, L., & Oller, S. (1997). Un modelo constitutivo para el análisis por el “MEF” para materiales compuestos. In J. Güemes & C. Navarro (Eds.), Materiales Compuestos '97, pp. 206 - 211).

participan según una combinación de comportamientos serie-paralelo, situación que implica un ajuste automático de las propiedades del compuesto teniendo en cuenta cada componente y su distribución topológica. Esto permite que en cada punto del sólido cada componente tenga una deformación distinta del contiguo.

La Figura 3.2 muestra un esquema del significado del comportamiento en serie y en paralelo de un genérico material compuesto.

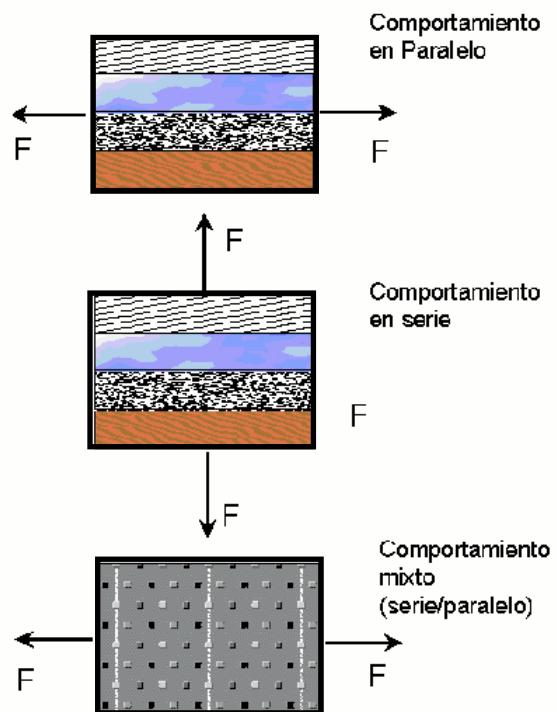


Figura 3.2 – Descripción esquemática del comportamiento serie-paralelo de un compuesto laminado.

La hipótesis fundamental de esta generalización de la teoría de mezclas se basa en la definición del campo de deformaciones del conjunto como una suma ponderada de las contribuciones en serie y en paralelo, esto es:

$$\varepsilon_{ij} = (1 - \aleph) \varepsilon_{ij}^{par} + \aleph \varepsilon_{ij}^{ser} \quad (3.13)$$

donde ε_{ij}^{par} y ε_{ij}^{ser} representan las deformaciones en paralelo y en serie respectivamente y $0 \leq \aleph \leq 1$ es el parámetro de acoplamiento serie-paralelo que relaciona de manera ponderada los dos tipos de deformaciones –comportamientos–. Este parámetro tiene la información de dirección preferente del comportamiento del material en un punto y la relaciona con la dirección de la tensión principal mayor en el punto. Otra forma alternativa para dar valor al parámetro \aleph es mediante ensayos experimentales que caractericen el comportamiento del material en conjunto, situación que describe en forma implícita el acoplamiento de los comportamientos básicos bajo la hipótesis de un modelo energético cerrado²⁰.

Las componentes en paralelo y en serie de la deformación están aproximadas por las siguientes expresiones,

$$\varepsilon_{ij}^{par} \cong \frac{1}{n} \sum_{c=1}^n (\varepsilon_{ij})_c \quad \text{y} \quad \varepsilon_{ij}^{ser} = \sum_{c=1}^n k_c (\varepsilon_{ij})_c \quad (3.14)$$

Como puede observarse en esta ecuación, la deformación en paralelo establece una forma débil de la ecuación de compatibilidad (3.1), y coinciden plenamente en el caso de componentes distribuidos estrictamente en paralelo. Teniendo en cuenta las ecuaciones (3.13) y (3.14), se obtiene la deformación de un punto cuyo comportamiento resulta de una composición de comportamientos en serie y en paralelo a la vez,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= (1 - \aleph) \left[\frac{1}{n} \sum_{c=1}^n (\varepsilon_{ij})_c \right] + \aleph \left[\sum_{c=1}^n k_c (\varepsilon_{ij})_c \right] \\ \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial (\varepsilon_{kl})_c} &= [(1 - \aleph) + \aleph \cdot k_c n] \cdot I_{ijkl} = \hat{\aleph}_c \cdot I_{ijkl} \Rightarrow \begin{cases} \text{Paralelo: } \aleph = 0 \Rightarrow \hat{\aleph}_c = 1 \\ \text{Serie } : \aleph = 1 \Rightarrow \hat{\aleph}_c = k_c n \end{cases}\end{aligned}\quad (3.15)$$

donde $(\varepsilon_{ij})_c$ es la deformación de cada componente del compuesto, n es el número de materiales componentes que participan en cada punto del sólido compuesto, y ε_{ij} es la deformación total de un punto del compuesto. La ecuación (3.15) puede interpretarse como una relajación de los comportamientos básicos serie-paralelo y con influencias recíprocas debido a la utilización de del coeficiente \aleph . Bajo esta hipótesis el acoplamiento supone una redistribución interna ponderada de la energía libre del sistema entre los dos comportamientos básicos.

La energía libre se escribe en la siguiente forma aditiva que es clásica para los materiales compuestos (Oller *et. al.* (1995)¹⁹),

$$\begin{aligned}m \Psi(\varepsilon_{ij}^e, \theta, \alpha_i) &= \sum_{c=1}^n k_c m_c \Psi_c((\varepsilon_{ij}^e)_c, \theta, (\alpha_i)_c) \\ \Psi_c &= \frac{1}{2m_c} ((\varepsilon_{ij})_c - (\varepsilon_{ij}^p)_c) (\mathbb{C}_{ijkl}^\sigma)_c ((\varepsilon_{kl})_c - (\varepsilon_{kl}^p)_c) + \Psi_c^p \Rightarrow \frac{\partial \Psi_c}{\partial (\varepsilon_{ij}^p)_c} = \frac{1}{m_c} (\mathbb{C}_{ijkl}^\sigma)_c ((\varepsilon_{kl})_c - (\varepsilon_{kl}^p)_c)\end{aligned}\quad (3.16)$$

donde Ψ es la energía libre de un material compuesto cuyo comportamiento y Ψ_c es la energía libre de uno de los materiales componentes, α_i representa el conjunto de variables internas del material compuesto, θ es la temperatura y k_c es el coeficiente en que participa el componente *c-esimo* dentro del compuesto.

La entropía del sistema surge de considerar la desigualdad de Clausius-Duhem y está dada por Oller *et al.* (1995)¹⁹

$$\eta = -m \frac{\partial \Psi(\varepsilon_{ij}^e, \theta, \alpha_i)}{\partial \theta} = \sum_{c=1}^n k_c m_c \frac{\partial \Psi_c((\varepsilon_{ij}^e)_c, \theta, (\alpha_i)_c)}{\partial \theta} = \sum_{c=1}^n k_c \eta_c \quad (3.17)$$

La ley constitutiva surge de considerar la desigualdad de Clausius-Duhem y el método de Coleman (Lubliner (1990)¹⁷), conduciendo a la siguiente forma hiperelástica:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= m \frac{\partial \Psi(\varepsilon_{ij}^e, \theta, \alpha_i)}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sum_{c=1}^n m_c k_c \frac{\partial \Psi_c}{\partial (\varepsilon_{kl})_c} \frac{\partial (\varepsilon_{kl})_c}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sum_{c=1}^n k_c (\sigma_{kl})_c (\hat{\aleph}_c \cdot I_{klj})^{-1} \\ &= \sum_{c=1}^n k_c (\mathbb{C}_{klrs}^\sigma)_c ((\varepsilon_{rs})_c - (\varepsilon_{rs}^p)_c) \cdot (\hat{\aleph}_c \cdot I_{klj})^{-1} = \sum_{c=1}^n k_c \hat{\aleph}_c^{-1} \cdot (\mathbb{C}_{ijrs}^\sigma)_c ((\varepsilon_{rs})_c - (\varepsilon_{rs}^p)_c)\end{aligned}\quad (3.18)$$

La tensión así obtenida es exacta para el material en paralelo, en tanto es sólo aproximada para el material en serie, puesto que en el último caso la expresión de la tensión en el com-

puesto tiende al promedio de las tensiones de sus componentes. El tensor constitutivo tangente resulta de considerar el cambio de la tensión respecto del cambio de deformaciones y está dado por:

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_{ijkl}^{\sigma} &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = m \frac{\partial \Psi^2}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \sum_{c=1}^n k_c \frac{\partial (\sigma_{ij})_c}{\partial (\varepsilon_{rs})_c} \frac{\partial (\varepsilon_{rs})_c}{\partial \varepsilon_{kl}} = \\ &= \sum_{c=1}^n k_c \left[(\mathbb{C}_{ktrs}^{\sigma})_c \cdot (\hat{\mathbf{N}}_c \cdot I_{kl})^{-1} \right] \cdot (\hat{\mathbf{N}}_c \cdot I_{rskl})^{-1} = \sum_{c=1}^n k_c \hat{\mathbf{N}}_c^{-2} (\mathbb{C}_{ktrs}^{\sigma})_c\end{aligned}\quad (3.19)$$

Esta formulación que se ha descrito establece una relación simplificada en función de la dirección principal de tensión con respecto a la orientación de comportamiento dominante del material. Esta limitación ha exigido extender la formulación a nivel tensorial, en la cual se pueda relacionar todas las direcciones del tensor de tensiones actuante en el punto, con las direcciones de comportamiento del material en el mismo punto. Esta nueva formulación da lugar a un tensor de acoplamiento $N_{ijkl} \equiv \mathbf{N}$ de cuarto orden, que por las simetrías puede escribirse como una matriz cuadrada y en el caso de materiales ortótropos se reduce a una matriz cuadrada diagonal Oñate *et al.* (1997)¹³. Considerando esta nueva hipótesis de comportamiento, se establece la siguiente definición del campo de deformaciones del material compuesto

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{I} - \mathbf{N}) : \boldsymbol{\varepsilon}^{par} + \mathbf{N} : \boldsymbol{\varepsilon}^{ser} \quad (3.20)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad y \mathbf{N} es la matriz diagonal de acoplamiento serie-paralelo, cuyos elementos cumplen la condición $0 \leq N_{ij} \leq 1$, y pueden también obtenerse de ensayos experimentales. Para esta nueva hipótesis, la energía libre no cambia respecto de la definida en la ecuación (3.16), es decir

$$m \Psi(\varepsilon_{ij}^e, \theta, \alpha_i) = \sum_{c=1}^n k_c m_c \Psi_c ((\varepsilon_{ij}^e)_c, \theta, (\alpha_i)_c) \quad (3.21)$$

Tal que para cada componente se puede también escribir en la forma clásica,

$$\Psi_c = \frac{1}{2m_c} ((\varepsilon_{ij})_c - (\varepsilon_{ij}^p)_c) \mathbb{C}_{ijkl}^{\sigma} ((\varepsilon_{kl})_c - (\varepsilon_{kl}^p)_c) + \Psi_c^p \quad (3.22)$$

Bajo estas nuevas hipótesis la ecuación constitutiva y el tensor constitutivo tangente resultan:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \sum_{c=1}^n k_c [(\mathbf{I} - \mathbf{N}) + n \cdot k_c \cdot \mathbf{N}]^{-1} : (\boldsymbol{\sigma})_c \\ \mathbb{C}^{\sigma} &= \sum_{c=1}^n k_c [(\mathbf{I} - \mathbf{N}) + n \cdot k_c \cdot \mathbf{N}]^{-1} : (\mathbb{C}^{\sigma})_c : [(\mathbf{I} - \mathbf{N}) + n \cdot k_c \cdot \mathbf{N}]^{-1}\end{aligned}\quad (3.23)$$

Este modelo que se ha presentado tiene la ventaja de ser una formulación general y permite analizar un material equivalente utilizando \mathbf{N} o \mathbf{N} sin necesidad de distinguir el tipo de comportamiento de cada uno de los constituyentes del material compuesto. No obstante, esto que parece una ventaja, tiene un problema en la obtención de la deformación $(\varepsilon_{ij})_c$ para cada componente. Para solucionarlo, hay que establecer una formulación cuyo acoplamiento tenga en cuenta la participación del componente “c” en los restantes,

$$\begin{aligned}
 (\varepsilon_{ij})_c &= (\varepsilon_{ij}^e)_c + (\varepsilon_{ij}^p)_c = \varepsilon_{ij} - \left\{ (1-\aleph) \left[\frac{1}{n} \sum_{\forall m \neq c} (\varepsilon_{ij})_m \right] + \aleph \left[\sum_{\forall m \neq c} k_m (\varepsilon_{ij})_m \right] \right\} \\
 \text{con : } (\varepsilon_{ij}^p)_c &= \int_t \dot{\lambda}_c \frac{\partial(\mathbb{G}^\alpha)_c}{\partial(\sigma_{ij})_c} dt
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Como se deduce de la anterior, la solución a este problema sólo resulta por la vía iterativa, partiendo de unas supuestas deformaciones en cada componente y realizando una corrección de las mismas iterativamente hasta alcanzar un estado estacionario en sus magnitudes.

3.4 Teoría de mezclas generalizada

En apartados previos se ha definido la teoría de mezclas clásica y una modificación para ser aplicada a compuestos cuyo comportamiento serie-paralelo invalidaba la hipótesis de compatibilidad de deformaciones. En este apartado se presenta una nueva formulación que está actualmente en desarrollo y que establece una generalización de la teoría de mezclas clásica para hacer posible la resolución de cualquier compuesto de matriz reforzada, sin la limitación exigida por la teoría clásica para tratar la compatibilidad de deformaciones. Por otro lado, este nuevo planteamiento del problema permite ajustar automáticamente la ecuación de cierre del material compuesto, siendo esta la principal mejora respecto de la formulación presentada en el apartado 3.3 .

La teoría de mezclas de sustancias básicas, como ya se ha visto, se basa en la mecánica del sólido continuo local y es adecuada para explicar el comportamiento de un punto de un sólido compuesto cuyos componentes tienen compatibilidad de deformaciones. Se fundamenta en el principio de interacción de sustancias componentes que constituyen el material, suponiendo las siguientes hipótesis:

- i. En cada volumen infinitesimal de un compuesto participan un número finito de sustancias componentes;
- ii. Cada material componente contribuye en el comportamiento del compuesto en la misma proporción que su participación volumétrica;
- iii. Todos los componentes respetan una ecuación de compatibilidad general que se adapta a la topología del compuesto serie-paralelo. Esta es la hipótesis fundamental que diferencia esta formulación de la clásica teoría de mezclas.
- iv. El volumen ocupado por cada componente es mucho menor que el volumen total del compuesto.

La hipótesis básica de **comportamiento en paralelo** implica las siguientes ideas conceptuales (teoría de mezclas clásica), que son resumidas a continuación

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} = k_1 \boldsymbol{\sigma}_1 + \cdots + k_c \boldsymbol{\sigma}_c = \sum_{c=1}^n k_c \boldsymbol{\sigma}_c \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \cdots = \boldsymbol{\varepsilon}_c \\ \Psi_c^e = \frac{1}{2m_c} [\boldsymbol{\varepsilon}_c - \boldsymbol{\varepsilon}_c^p] : (\mathbb{C}^S)_c : [\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_c^p] \\ (\boldsymbol{\sigma}_c) = (\mathbb{C}^\sigma)_c : [\boldsymbol{\varepsilon}_c - \boldsymbol{\varepsilon}_c^p] \equiv (\mathbb{C}^\sigma)_c : [\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_c^p] \\ \mathbb{C}^{\text{par}} = \sum_{c=1}^n k_c (\mathbb{C}^\sigma)_c \end{array} \right. \quad (3.25)$$

La forma complementaria de la formulación en paralelo conduce a la hipótesis de **comportamiento en serie**, que implica las siguientes ideas conceptuales y que se resumen a continuación

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_1 = \cdots = \boldsymbol{\sigma}_c \\ \boldsymbol{\varepsilon} = k_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \cdots + k_c \boldsymbol{\varepsilon}_c = \sum_{c=1}^n k_c \boldsymbol{\varepsilon}_c = \\ = k_1 (\boldsymbol{\varepsilon}_1^e + \boldsymbol{\varepsilon}_1^p) + \cdots + k_c (\boldsymbol{\varepsilon}_c^e + \boldsymbol{\varepsilon}_c^p) = \sum_{c=1}^n k_c (\boldsymbol{\varepsilon}_c^e + \boldsymbol{\varepsilon}_c^p) = \\ = \sum_{c=1}^n k_c (\boldsymbol{\phi}_c : \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}_c^p) \quad \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\varepsilon}^e = \sum_{c=1}^n k_c (\boldsymbol{\phi}_c : \boldsymbol{\varepsilon}^e) \Rightarrow \sum_{c=1}^n k_c \boldsymbol{\phi}_c = \mathbf{I} ; \text{ con } : \boldsymbol{\varepsilon}_c^e = \boldsymbol{\phi}_c : \boldsymbol{\varepsilon}^e \\ \boldsymbol{\varepsilon}^p = \sum_{c=1}^n k_c \boldsymbol{\varepsilon}_c^p \end{array} \right. \\ \Psi_c^e = \frac{1}{2m_c} \boldsymbol{\sigma}_c : (\mathbb{C}^\sigma)_c^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_c \\ (\boldsymbol{\sigma}_c) = (\mathbb{C}^\sigma)_c : [\boldsymbol{\varepsilon}_c - \boldsymbol{\varepsilon}_c^p] \equiv (\mathbb{C}^\sigma)_c : [\boldsymbol{\phi}_c : \boldsymbol{\varepsilon}^e] \equiv (\mathbb{C}^\sigma)_c : [\boldsymbol{\phi}_c : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)] \\ \boldsymbol{\varepsilon}^p = \sum_{c=1}^n k_c \boldsymbol{\varepsilon}_c^p \Rightarrow (\mathbb{C}^{\text{ser}})^{-1} : \boldsymbol{\sigma} = \sum_{c=1}^n k_c (\mathbb{C}^\sigma)_c^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbb{C}^{\text{ser}} = \left[\sum_{c=1}^n k_c (\mathbb{C}^\sigma)_c^{-1} \right]^{-1} \end{array} \right. \quad (3.26)$$

La **tercera hipótesis** de esta teoría de mezclas generalizada (ver hipótesis iii), permite establecer la relación entre la deformación en el compuesto y la deformación de cada componente. Esta ecuación de compatibilidad establece el vínculo entre las hipótesis de comportamiento paralelo, (3.25), con las hipótesis de comportamiento en serie, (3.26). Por esta razón se le denominará hipótesis de compatibilidad serie-paralelo,

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{ij})_c &= \underbrace{(1 - \chi_c) \cdot I_{ijkl} \varepsilon_{kl}}_{(\varepsilon_{ij}^{\text{par}})_c} + \underbrace{\chi_c \cdot [(\phi_{ijkl})_c \cdot (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p) + (\varepsilon_{kl}^p)_c]}_{(\varepsilon_{ij}^{\text{ser}})_c} \\ (\varepsilon_{ij})_c &= [(1 - \chi_c) \cdot I_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \chi_c \cdot (\phi_{ijkl})_c \cdot \varepsilon_{kl}] - \chi_c \cdot \underbrace{[(\phi_{ijkl})_c \varepsilon_{kl}^p - (\varepsilon_{kl}^p)_c]}_{(\hat{\varepsilon}_{kl}^p)_c} \\ \frac{\partial(\varepsilon_{ij})_c}{\partial \varepsilon_{kl}} &= (1 - \chi_c) \cdot I_{ijkl} + \chi_c \cdot (\phi_{ijkl})_c \end{aligned} \quad (3.27)$$

Pudiéndose también representar en las siguientes dos formas:

$$(\varepsilon_{ij})_c = [(1 - \chi_c) \cdot I_{ijkl} + \chi_c \cdot (\phi_{ijkl})_c] : \varepsilon_{kl} - \chi_c (\hat{\varepsilon}_{kl}^p)_c \quad \text{o también: } (\boldsymbol{\varepsilon})_c = [(1 - \chi_c) \cdot \mathbf{I}_4 + \chi_c \cdot (\boldsymbol{\phi})_c] : \boldsymbol{\varepsilon} - \chi_c (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)_c$$

Siendo $(\hat{\epsilon}_{kl}^p)_c$ una deformación plástica que se define con fines operativos y sin sentido físico, que resulta de la deformación plástica media del compuesto, distribuida entre sus componentes según sus respectivas relaciones de rigideces $(\phi_{ijkl})_c \epsilon_{kl}^p$, y de la deformación plástica real del componente $(\epsilon_{kl}^p)_c$. En la misma expresión se tiene $(\epsilon_{ij})_c$ que es la deformación en el componente *c-esimo*, que puede descomponerse en una cuota de participación en paralelo $(\epsilon_{ij}^{\text{par}})_c$ y otra en serie $(\epsilon_{ij}^{\text{ser}})_c$, y ϵ_{kl} la deformación total que ocurre en el compuesto. El parámetro de acoplamiento serie paralelo, $0 \leq [\chi_c = \sin \alpha_\chi] \leq 1$, que depende del ángulo $0 \leq [\alpha_\chi = (x_{\text{Loc}}^f, x_1^\sigma)] \leq \pi/2$, que hay entre la orientación de la tensión principal (x_1^σ) mayor respecto de la orientación de la fibra (x_{Loc}^f). Éste parámetro vale 0 para un comportamiento en paralelo puro y 1 para un comportamiento en serie puro (ver Figura 3.1). Físicamente este parámetro sitúa la posición del refuerzo respecto de la acción.

Otro tensor que participa en la ecuación de compatibilidad (3.27) es el que establece la deformación del componente *c-esimo* cuando todos los componentes que constituyen el compuesto están dispuestos en serie, y resulta a partir de la parte elástica de las ecuaciones (3.26), esto es

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}^e &= k_1 \boldsymbol{\epsilon}_1^e + \cdots + k_c \boldsymbol{\epsilon}_c^e = \sum_{c=1}^n k_c \boldsymbol{\epsilon}_c^e = \\ &= k_1 ((\mathbb{C}^\sigma)_1^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_1) + \cdots + k_c ((\mathbb{C}^\sigma)_c^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_c) = (\mathbb{C}^{\text{ser}})^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \\ &= k_1 \underbrace{((\mathbb{C}^\sigma)_1^{-1} : (\mathbb{C}^{\text{ser}})) : \boldsymbol{\epsilon}^e}_{\Phi_1} + \cdots + k_c \underbrace{((\mathbb{C}^\sigma)_c^{-1} : (\mathbb{C}^{\text{ser}})) : \boldsymbol{\epsilon}^e}_{\Phi_c} = ((\mathbb{C}^{\text{ser}})^{-1} : (\mathbb{C}^{\text{ser}})) : \boldsymbol{\epsilon}^e \quad (3.28) \\ &= k_1 (\Phi_1) + \cdots + k_c (\Phi_c) = \underbrace{\left[\sum_{c=1}^n k_c \Phi_c \right]}_{\mathbf{I}} \quad \text{con: } (\Phi_{ijkl})_c = (\mathbb{C}_{ijrs}^\sigma)^{-1} \mathbb{C}_{rskl}^{\text{ser}} \end{aligned}$$

En esta ecuación $(\mathbb{C}_{ijrs}^\sigma)_c$ es el tensor constitutivo del componente *c-esimo*, y $\mathbb{C}_{rskl}^{\text{ser}} = \left[\sum_{c=1}^n k_c (\mathbb{C}_{rskl}^\sigma)_c^{-1} \right]^{-1}$ es el tensor constitutivo del compuesto cuando sus *n* componentes trabajan en serie puro.

Observese el cumplimiento de las condiciones extremas en la ecuación (3.27). Es decir, para un estado de alineación de la fibra de refuerzo en **paralelo** ($\chi_c = 0$) (teoría de mezclas clásica), se obtiene la deformación $(\epsilon_{ij})_c = (\epsilon_{ij}^{\text{par}})_c = (1 - \chi_c) \cdot I_{ijkl} \epsilon_{kl} = \epsilon_{ij}$ para el componente *c-esimo*, que resulta igual a todos los otros componentes; mientras que para una configuración en la que hay un ordenamiento de los materiales en **serie** ($\chi_c = 1$), se obtiene la deformación $(\epsilon_{ij})_c = (\epsilon_{ij}^{\text{ser}})_c = \chi_c \cdot [(\Phi_{ijkl})_c \cdot (\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^p) + (\epsilon_{kl}^p)_c] \neq \epsilon_{ij}$ para el componente *c-esimo*, que resulta distinta a las de los otros componentes.

La energía libre de un material compuesto serie-paralelo resulta de la suma ponderada de las energías libres de cada componente y éstas a su vez se definen bajo el principio de elasticidad desacoplada, en la que la parte elástica se escribe como

$$\Psi^e = \sum_{c=1}^n k_c \frac{m_c}{m} \Psi_c^e \quad ; \quad \Psi_c^e = \frac{1}{2m_c} [(\epsilon_{ij})_c - (\epsilon_{ij}^p)_c] (\mathbb{C}_{ijkl}^\sigma)_c [(\epsilon_{kl})_c - (\epsilon_{kl}^p)_c] \quad (3.29)$$

O en forma compacta, resulta

$$\Psi^e = \sum_{c=1}^n k_c \frac{m_c}{m} \Psi_c^e = \sum_{c=1}^n k_c \frac{1}{2m} [(\boldsymbol{\epsilon})_c - (\boldsymbol{\epsilon}^p)_c] : (\mathbb{C}^\sigma)_c : [(\boldsymbol{\epsilon})_c - (\boldsymbol{\epsilon}^p)_c] \quad (3.30)$$

Donde el coeficiente de participación volumétrica de cada componente se define como $k_c = v_c/v$, siendo v_c el columnen del componente c -esimo y v el volumen total. También, en la ecuación (3.29), el tensor $(\varepsilon_{ij}^p)_c$ representa la parte irrecuperable de la deformación del componente c -esimo.

La ecuación constitutiva para un simple componente “serie-paralelo” resulta,

$$\begin{aligned} (\sigma_{ij})_c &= m_c \frac{\partial \Psi_c}{\partial (\varepsilon_{ij})_c} = m_c \frac{\partial}{\partial (\varepsilon_{ij})_c} \left[\frac{1}{2m_c} ((\varepsilon_{rs})_c - (\varepsilon_{rs}^p)_c) (\mathbb{C}_{rstu}^\sigma)_c ((\varepsilon_{tu})_c - (\varepsilon_{tu}^p)_c) + \Psi_c^p \right] = \\ &= (\mathbb{C}_{ijtu}^\sigma)_c ((\varepsilon_{tu})_c - (\varepsilon_{tu}^p)_c) \end{aligned}$$

La definición de la ecuación constitutiva para el compuesto se obtiene a partir del potencial definido en la ecuación (3.29), garantizando la condición de disipación del segundo principio de la termodinámica²¹. Así, teniendo en cuenta la ecuación anterior para un solo componente y la derivada de la deformación de un componente respecto de la total (3.27), resulta la ecuación constitutiva del compuesto

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= m \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} = m \sum_{c=1}^n k_c \frac{m_c}{m} \frac{\partial \Psi_c}{\partial (\varepsilon_{kl})_c} \frac{\partial (\varepsilon_{kl})_c}{\partial \varepsilon_{ij}} = \\ &= \sum_{c=1}^n k_c \{ (\mathbb{C}_{klrs}^\sigma)_c [(1-\chi_c) \cdot I_{klj} + \chi_c \cdot (\phi_{klj})_c] \} [(\varepsilon_{rs})_c - (\varepsilon_{rs}^p)_c] \} \end{aligned} \quad (3.31)$$

O en forma compacta, resulta

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= m \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = m \sum_{c=1}^n k_c \frac{m_c}{m} \frac{\partial \Psi_c}{\partial (\boldsymbol{\varepsilon})_c} \cdot \frac{\partial (\boldsymbol{\varepsilon})_c}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \\ &= \sum_{c=1}^n k_c [(1-\chi_c) \cdot \mathbf{I}_4 + \chi_c \cdot (\boldsymbol{\phi})_c]^T : \{ (\mathbb{C}^\sigma)_c : [(\boldsymbol{\varepsilon})_c - (\boldsymbol{\varepsilon}^p)_c] \} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Donde \mathbf{I}_4 es el tensor identidad en cuarto orden. El tensor constitutivo del material compuesto resulta,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{tuij}^\sigma &= m \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{tu} \partial \varepsilon_{ij}} = m \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{tu}} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{tu}} (\sigma_{ij}) = \\ &= \sum_{c=1}^n k_c \{ (\mathbb{C}_{klrs}^\sigma)_c [(1-\chi_c) \cdot I_{klj} + \chi_c \cdot (\phi_{klj})_c] \} \cdot \{ [(1-\chi_c) \cdot I_{rstu} + \chi_c \cdot (\phi_{rstu})_c] \} \end{aligned} \quad (3.33)$$

O en forma compacta, resulta

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^\sigma &= m \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \partial \boldsymbol{\varepsilon}} = m \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} (\boldsymbol{\sigma}) = \\ &= \sum_{c=1}^n k_c [(1-\chi_c) \cdot \mathbf{I}_4 + \chi_c \cdot (\boldsymbol{\phi})_c]^T : \{ (\mathbb{C}^\sigma)_c : [(1-\chi_c) \cdot \mathbf{I}_4 + \chi_c \cdot (\boldsymbol{\phi})_c] \} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Las definiciones previas para la tensión y el tensor constitutivo muestran que la definición cinemática realizada mediante la ecuación (3.27) conduce implicitamente a un cambio en las propiedades del material, o dicho de otra manera, la definición cinemática puede reflejarse como una modificación en el tensor constitutivo (ver ecuación (3.34)).

²¹ Malvern L. (1969). *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Prentice-Hall.

3.5 Teoría de mezclas clásica formulada en grandes deformaciones

En este apartado se presenta la extensión de la teoría de mezclas clásica al campo de las deformaciones finitas. Esta extensión de la formulación se hace necesaria porque los materiales compuestos se encuentran habitualmente sometidos a solicitudes que provocan grandes deformaciones. Una muestra de la importancia de esta afirmación, se observa en el fenómeno de alineación de la fase de refuerzo con respecto a la dirección del esfuerzo al que está sometido el material en grandes deformaciones y desplazamientos. Al final de este capítulo se presenta un ejemplo que ilustra el fenómeno mencionado y muestra también la importancia de completar la formulación de la teoría de mezclas para tratar las grandes deformaciones, caso contrario se incurre en grandes errores.

3.5.1 Ecuación de cierre o compatibilidad

Como se ha visto en apartados anteriores, la tercera hipótesis en la que se basa la teoría de mezclas clásica supone que en ausencia de difusión atómica la deformación es idéntica para todos los componentes del compuesto. Esta hipótesis se debe verificar tanto en la *configuración referencial* como en la *configuración espacial* para cada fase. En la configuración referencial la condición de compatibilidad de deformaciones está dada por (Trusdell & Toupin (1960)³, Oñate *et al.* (1991)²²)

$$E_{IJ} \equiv (E_{IJ})_1 = (E_{IJ})_2 = \dots = (E_{IJ})_n \quad (3.35)$$

donde $E_{ij} = \frac{1}{2}(C_{IJ} - G_{IJ})$ es el tensor de deformaciones de Green-Lagrange donde \mathbf{G} es el tensor métrico material que para un sistema de coordenadas ortogonales se escribe $G_{IJ} = I_{IJ} = \delta_{IJ}$ y $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ es el tensor de deformaciones derecho de Cauchy-Green.

En la configuración actualizada la condición de compatibilidad de deformaciones se propone como:

$$e_{ij} \equiv (e_{ij})_1 = (e_{ij})_2 = \dots = (e_{ij})_n \quad (3.36)$$

donde $e_{ij} = \frac{1}{2}(g^{ij} - b_{ij}^{-1})$ es el tensor de deformaciones de Almansi, $\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$ es el tensor de deformaciones izquierdo de Cauchy-Green y g^{ij} es el tensor métrico espacial dado por $g^{ij} = I_{ij} = \delta_{ij}$ y $F_{iJ} = \frac{\partial x_i}{\partial X_J}$ es el gradiente de deformaciones.

Teniendo en cuenta la definición del tensor derecho de Cauchy-Green y la ecuación de compatibilidad (3.35), se obtiene la ecuación de cierre en función de los gradientes de deformaciones:

$$F_{iJ} \equiv (F_{iJ})_1 = (F_{iJ})_2 = \dots = (F_{iJ})_n \quad (3.37)$$

Esta hipótesis vale rigurosamente sólo si se aplica la teoría de mezclas para materiales con comportamiento en paralelo, es decir, que el estado tensional del compuesto resulta de la suma de las tensiones de cada componente proporcional al volumen que ocupan respecto del total, ej.: matriz con fibras largas, hormigón armado, etc. En el caso de matriz con

²² Oñate, E., Oller, S., Botello, S., & Canet, J. (1991). Methods for analysis of composite material structures (in Spanish). Technical Report 11, CIMNE, Barcelona, Spain.

refuerzo de fibras cortas la hipótesis de que las deformaciones de todos los componentes es igual no es válida. Para solucionar este inconveniente existen dos alternativas: definir otra ecuación de cierre como se ha mostrado en el apartado anterior, o realizar una corrección en las propiedades de cada componente y mantener la ecuación de cierre de la teoría de mezclas clásica ecuaciones (3.35) y (3.36).

3.5.2 Función de energía libre

Los materiales compuestos que cumplen con la ecuación (3.35) y (3.36), satisfacen también la condición básica de la aditividad de la energía libre de sus componentes tanto en la configuración referencial como en la actualizada (Trusdell & Tupin (1960)²³):

$$\begin{aligned} m^0 \Psi(\mathbf{E}^e, \theta, \alpha^m) &= \sum_{c=1}^n k_c m_c^0 \Psi_c(\mathbf{E}_c, (\mathbf{E}^p)_c, \theta, (\alpha^m)_c) \\ m \psi(\mathbf{e}^e, \theta, \alpha^m) &= \sum_{c=1}^n k_c m_c \psi_c(\mathbf{e}_c, (\mathbf{e}^p)_c, \theta, (\alpha^m)_c) \end{aligned} \quad (3.38)$$

donde Ψ_c y ψ_c son las energías libres correspondientes a cada una de las n sustancias componentes de la mezcla definidas en la configuración referencial y la actualizada respectivamente, k_c es el coeficiente de participación volumétrica, $(\mathbf{E}^p)_c$ y $(\mathbf{e}^p)_c$ son las deformaciones plásticas de cada fase en las configuraciones referencial y actualizada respectivamente y $(\alpha^m)_c$ son las variables internas del componente c -esimo, que definen el comportamiento físico irreversible de cada sustancia componente.

La teoría de mezcla de sustancias básicas en grandes deformaciones mantiene la hipótesis en la que todas las sustancias intervienen en la respuesta del compuesto en forma proporcional al volumen que ocupan respecto del volumen total. El coeficiente de participación volumétrica se define en la configuración referencial como:

$$k_c = \frac{dV_c}{dV_0} \quad (3.39)$$

en la que V_c es el volumen del componente y V_0 es el volumen total del compuesto en la configuración referencial. Por otro lado, la ecuación de continuidad²³ establece

$$J = \det \mathbf{F} = \frac{dv_0}{dV_0} \quad (3.40)$$

donde v_0 es el volumen del compuesto en la configuración actualizada. Teniendo en cuenta la ecuación de cierre (3.37) se deduce:

$$\frac{dv_c}{dV_c} = \det \mathbf{F}_c = J \Rightarrow dV_c = \frac{1}{J} dv_c \quad (3.41)$$

Esta ecuación establece que la relación entre el volumen de un componente en la configuración espacial y el volumen del componente en la configuración referencial está dado por el determinante del gradiente de deformaciones. Teniendo en cuenta la (3.41) y (3.39) se puede escribir la relación de participación volumétrica en la configuración actualizada,

²³ Malvern, L. (1969). *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall.

$$k_c = \frac{1}{J} \frac{dv_c}{dV_0} = \frac{dv_c}{dv_0} \quad (3.42)$$

Esta ecuación muestra que el coeficiente de participación volumétrica se mantiene constante en ambas configuraciones. El coeficiente de participación volumétrico de cada componente debe cumplir con la siguiente condición que está relacionada con la ecuación de continuidad (3.40) la conservación de la masa:

$$\sum_{c=1}^n k_c = 1 \quad (3.43)$$

3.5.3 Ecuación constitutiva

Una vez definida la función de energía libre, y a los fines de simular el comportamiento del material compuesto, es necesario definir la ecuación constitutiva del mismo. A continuación se presenta en forma sintética la ecuación constitutiva tanto para la configuración referencial como para la actualizada. Para ello se considera un problema en pequeñas deformaciones elásticas y grandes deformaciones plásticas, en el cual la energía libre será desacoplada en su parte elástica e inelástica, cuya parte elástica es una expresión cuadrática en las deformaciones.

3.5.3.1 Configuración referencial

La definición de la tensión para el compuesto \mathbf{S} se obtiene a partir de la formulación del modelo hiperelástico garantizando la condición de disipación del segundo Principio de la Termodinámica (Malvern (1969)²³), esto es:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= m^0 \frac{\partial \Psi(\mathbf{E}^e, \theta, \alpha^m)}{\partial \mathbf{E}} = \sum_{c=1}^n m_c^0 k_c \frac{\partial \Psi_c(\mathbf{E}, (\mathbf{E}^P)_c, \theta, (\alpha^m)_c)}{\partial \mathbf{E}} = \\ &= \sum_{c=1}^n k_c (\mathbf{S})_c = \sum_{c=1}^n k_c ((\mathbb{C}^S)_c (\mathbf{E}^e)_c) \end{aligned} \quad (3.44)$$

y el tensor constitutivo del compuesto está dado por:

$$\mathbb{C}^S = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = m^0 \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{E}^e, \theta, \alpha^m)}{\partial \mathbf{E} \otimes \partial \mathbf{E}} = \sum_{c=1}^n k_c (\mathbb{C}^S)_c \quad (3.45)$$

donde $(\mathbb{C}^S)_c$ representa el tensor constitutivo tangente anisótropo real para el componente c -esimo.

3.5.3.2 Configuración actualizada

Siguiendo un procedimiento deductivo análogo al realizado con la configuración referencial, la definición de la tensión para el compuesto $\boldsymbol{\tau}$ se obtiene a partir de la formulación del modelo hiperelástico garantizando y la condición de disipación establecida por el “Segundo Principio de la Termodinámica” (Malvern (1969)²³). Esto es,

$$\begin{aligned}\tau &= m \frac{\partial \psi(\mathbf{e}^e, \theta, \alpha^m)}{\partial \mathbf{e}} = \sum_{c=1}^n m_c k_c \frac{\partial \psi_c(\mathbf{e}_c, (\mathbf{e}^p)_c, \theta, (\alpha^m)_c)}{\partial \mathbf{e}} = \\ &= \sum_{c=1}^n k_c (\tau)_c = \sum_{c=1}^n k_c ((\mathbf{c}^\tau)_c (\mathbf{e}^e)_c) = J \boldsymbol{\sigma}\end{aligned}\quad (3.46)$$

Siendo τ y $\boldsymbol{\sigma}$ las tensiones de Kirchoff y Cauchy respectivamente y J el jacobiano, (ver ecuación (3.41)) y el tensor constitutivo del compuesto en la configuración actualizada, resulta,

$$\mathbf{c}^\tau = \frac{\partial \tau}{\partial \mathbf{e}} = m \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{e}^e, \theta, \alpha^m)}{\partial \mathbf{e} \otimes \partial \mathbf{e}} = \sum_{c=1}^n k_c (\mathbf{c}^\tau)_c \quad (3.47)$$

donde $(\mathbf{c}^\tau)_c$ representa el tensor constitutivo tangente anisótropo real para el componente c -esimo.

En la Figura 3.3 se muestra un diagrama de flujo esquemático que describe el algoritmo a seguir en la solución por el método de los elementos finitos, en problemas no-lineales con deformaciones finitas para un material compuesto multifase. En dicha Figura se observa que cada fase tiene su propio modelo constitutivo y resulta independiente de las otras fases que conforman el compuesto.

El algoritmo comienza en la configuración referencial y luego a través de las operaciones de transporte tensorial, desde la configuración referencial a la actualizada (“push-forward”) (Car, (2000)¹), se aborda la solución de la ecuación constitutiva para cada uno de las fases del material compuesto. Cada una de estas fases puede presentar distintos tipos de comportamiento constitutivo (plasticidad, daño, etc.), que a su vez pueden ser isótropos o anisótropos. Una vez determinado el estado tensional de cada uno de los componentes es necesario obtener la tensión del material compuesto a partir de ecuación (3.7), y a partir de ella obtener las fuerzas internas que se desarrollan en cada punto del material. Una vez determinadas las fuerzas internas es necesario verificar el equilibrio de estas con las fuerzas externas aplicadas.

3.6 Teoría de mezclas generalizada formulada en grandes deformaciones

En este apartado se hace una extensión conceptual de las definiciones hechas para la teoría de mezclas clásica en grandes deformaciones (Apartado 3.5). Para ello se plantea la formulación a partir de la hipótesis de no-cumplimiento de la ecuación de compatibilidad (3.36) y sus consecuencias. Por otro lado, este cambio en la hipótesis fundamental de la teoría de mezclas implica la siguiente definición de las funciones de energía libre en la configuración material y actualizada,

$$\begin{aligned}m^0 \Psi(\mathbf{E}^e, \theta, \alpha^m) &= m^0 \sum_{c=1}^n k_c \Psi_c((\mathbf{E})_c, (\mathbf{E}^p)_c, \theta, (\alpha^m)_c) \\ m \psi(\mathbf{e}^e, \theta, \alpha^m) &= m \sum_{c=1}^n k_c \psi_c((\mathbf{e})_c, (\mathbf{e}^p)_c, \theta, (\alpha^m)_c)\end{aligned}\quad (3.48)$$

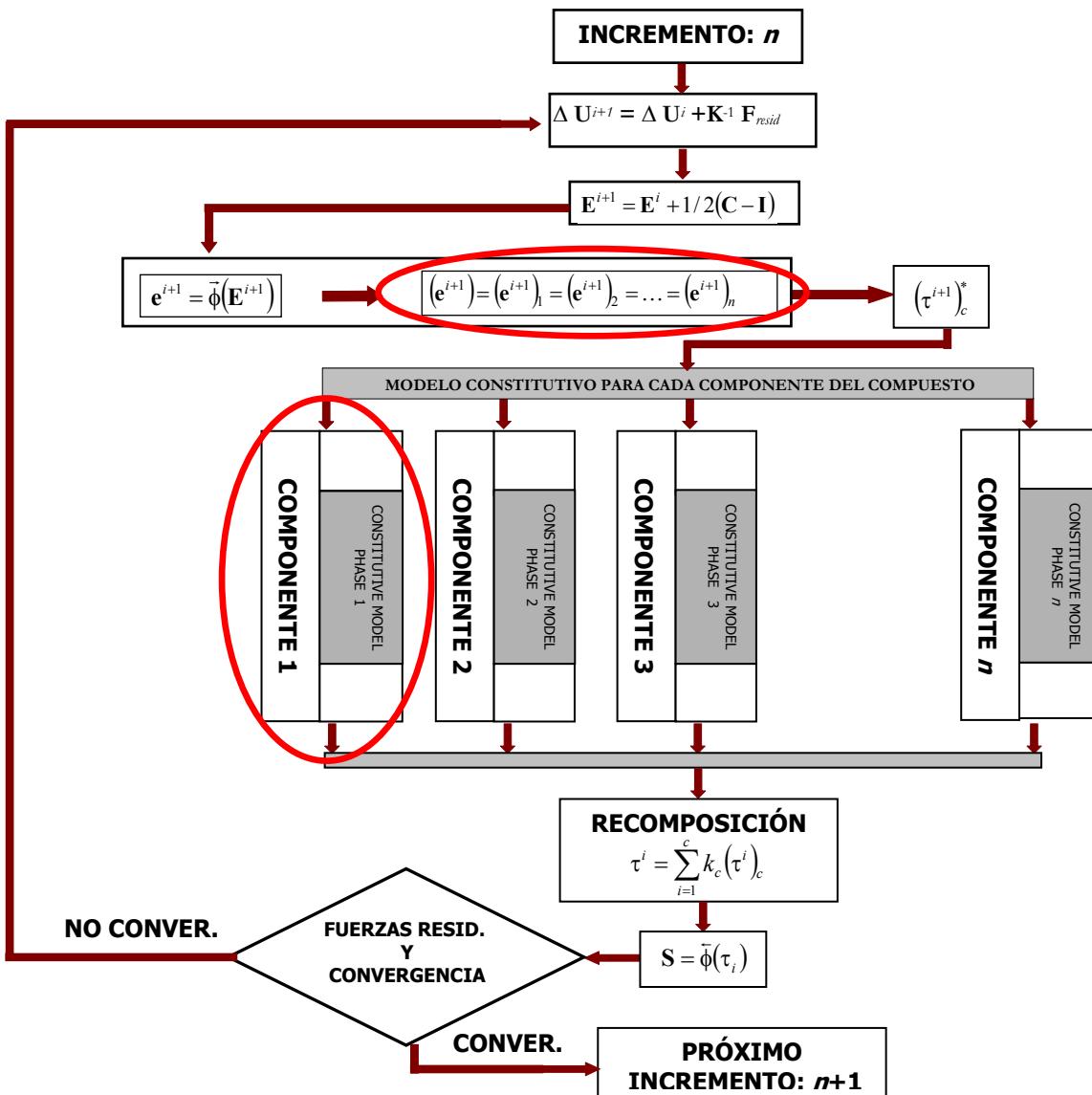


Figura 3.3 – Esquema de solución de un problema no lineal multifase. Algoritmo mixto para la teoría de mezclas clásica en la configuración referencial y actualizada.

donde Ψ_c y ψ_c son las energías libres correspondientes a cada una de las n sustancias componentes de la mezcla definidas en la configuración referencial y la actualizada respectivamente, $k_c = \frac{1}{J} \frac{dv_c}{dV_0} = \frac{dv_c}{dv_0}$ es el coeficiente de participación volumétrica en función de J , $(\mathbf{E})_c = [(1 - \chi_c) \cdot \mathbf{I}_4 + \chi_c \cdot (\Phi)_c] : \mathbf{E} - \chi_c \cdot (\hat{\mathbf{E}}^p)_c$ y $(\mathbf{e})_c = [(1 - \chi_c) \cdot \mathbf{I}_4 + \chi_c \cdot (\phi)_c] : \mathbf{e} - \chi_c \cdot (\hat{\mathbf{e}}^p)_c$ son las deformaciones totales en las configuraciones referencial y actualizada respectivamente, $(\mathbf{E}^p)_c$ y $(\mathbf{e}^p)_c$ son las deformaciones plásticas de cada fase en las configuraciones en las dos configuraciones cinemáticas previamente enunciadas y $(\alpha^m)_c$ son las variables internas del componente c -esimo, que definen el comportamiento físico irreversible de cada sustancia componente^{15,24}, $(\hat{\mathbf{E}}^p)_c$ y $(\hat{\mathbf{e}}^p)_c$ son las deformaciones plásticas que se define con

²⁴ Oller S. (2001). *Fractura mecánica – Un enfoque global*. CIMNE – Ediciones UPC. Barcelona

fines operativos y sin sentido físico (ver ecuación (3.27)). En la definición de la deformación para cada componente intervienen las variables ya introducidas en el apartado 3.4 , con la única diferencia en la forma de obtención del factor de comportamiento en serie para cada configuración, esto es

$$\begin{cases} \left(\Phi_{ijkl} \right)_c = \left(\mathbb{C}_{ijrs}^S \right)_c^{-1} \mathbb{C}_{rskl}^{\text{ser}} & \text{Configuración referencial} \\ \left(\phi_{ijkl} \right)_c = \left(c_{ijrs}^{\tau} \right)_c^{-1} c_{rskl}^{\text{ser}} & \text{Configuración actualizada} \end{cases} \quad (3.49)$$

3.6.1 Ecuación constitutiva

Siguiendo una formulación análoga a la desarrollada para la teoría de mezclas clásica en grandes deformaciones, se presenta a continuación las ecuaciones constitutivas en la configuración referencial y actualizada para la teoría de mezclas generalizadas. Obsérvese que la diferencia fundamental consiste en la definición de la deformación en cada configuración $(\mathbf{E})_c$, pues en esta nueva formulación no es única para todos los componentes $\mathbf{E} \neq (\mathbf{E})_1 \neq \dots \neq (\mathbf{E})_c$, y de aquí resulta la siguiente expresión para la tensión en la configuración referencial,

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= m^0 \frac{\partial \Psi(\mathbf{E}^e, \theta, \alpha^m)}{\partial \mathbf{E}} = \sum_{c=1}^n m_c^0 k_c \frac{\partial \Psi_c}{\partial (\mathbf{E})_c} : \frac{\partial (\mathbf{E})_c}{\partial \mathbf{E}} = \\ &= \sum_{c=1}^n k_c (\mathbf{S})_c : \frac{\partial (\mathbf{E})_c}{\partial \mathbf{E}} = \\ &= \sum_{c=1}^n k_c \left[[(1 - \chi_c) \cdot \mathbf{I}_4 + \chi_c \cdot (\Phi)_c]^T : \left(\mathbb{C}^S \right)_c : [(1 - \chi_c) \cdot \mathbf{I}_4 + \chi_c \cdot (\Phi)_c] : (\mathbf{E}^e)_c \right] \end{aligned} \quad (3.50)$$

y en la configuración actualizada adquiere la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= m \frac{\partial \psi(\mathbf{e}^e, \theta, \alpha^m)}{\partial \mathbf{e}} = \sum_{c=1}^n m_c k_c \frac{\partial \psi_c}{\partial (\mathbf{e})_c} : \frac{\partial (\mathbf{e})_c}{\partial \mathbf{e}} = \\ &= \sum_{c=1}^n k_c (\boldsymbol{\tau})_c : \frac{\partial (\mathbf{e})_c}{\partial \mathbf{e}} = \\ &= \sum_{c=1}^n k_c \left[[(1 - \chi_c) \cdot \mathbf{I}_4 + \chi_c \cdot (\Phi)_c]^T : \left(\mathbb{C}^{\tau} \right)_c : [(1 - \chi_c) \cdot \mathbf{I}_4 + \chi_c \cdot (\Phi)_c] : (\mathbf{e}^e)_c \right] = J \boldsymbol{\sigma} \end{aligned} \quad (3.51)$$

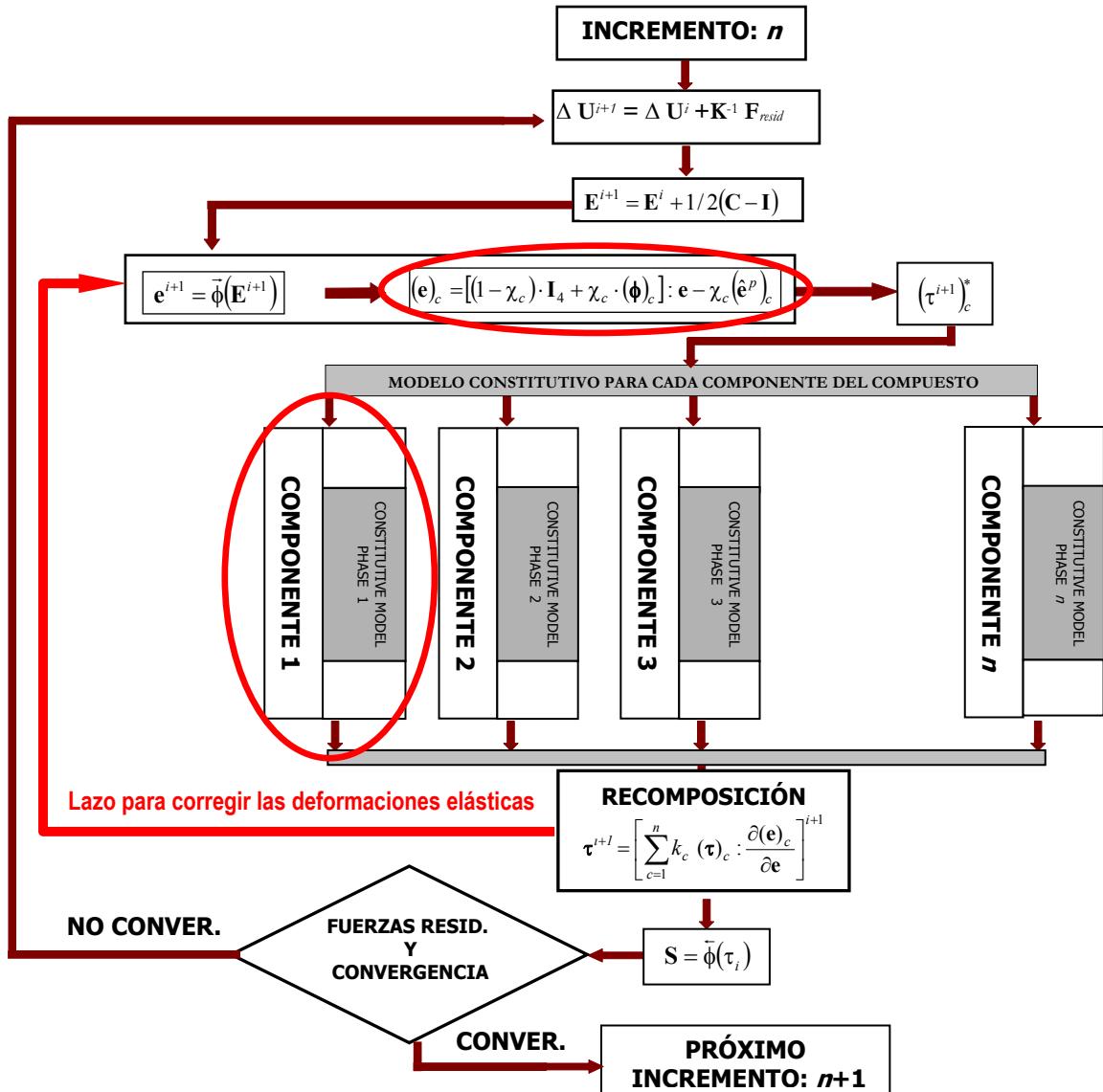


Figura 3.4 – Esquema de solución de un problema no lineal multifase. Algoritmo mixto para la teoría de mezclas generalizada en la configuración referencial y actualizada.

Siguiendo con la deducción, resulta el tensor constitutivo del compuesto en la configuración referencial,

$$\mathbf{C}^S = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = m^0 \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{E}^e, \theta, \alpha^m)}{\partial \mathbf{E} \otimes \partial \mathbf{E}} = \sum_{c=1}^n k_c [(1 - \chi_c) \cdot \mathbf{I}_4 + \chi_c \cdot (\Phi)_c]^T : \{(\mathbf{C}^S)_c : [(1 - \chi_c) \cdot \mathbf{I}_4 + \chi_c \cdot (\Phi)_c]\} \quad (3.52)$$

Este mismo tensor transportado a la configuración actualizada resulta,

$$\mathbf{C}^S = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \mathbf{e}} = m \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{e}^e, \theta, \alpha^m)}{\partial \mathbf{e} \otimes \partial \mathbf{e}} = \sum_{c=1}^n k_c [(1 - \chi_c) \cdot \mathbf{I}_4 + \chi_c \cdot (\Phi)_c]^T : \{(\mathbf{C}^S)_c : [(1 - \chi_c) \cdot \mathbf{I}_4 + \chi_c \cdot (\Phi)_c]\} \quad (3.53)$$

La resolución algorítmica de este problema comienza en la configuración referencial y luego a través de las operaciones de transporte tensorial, desde la configuración referencial a la actualizada (“push-forward”), se aborda la solución de la ecuación constitutiva para cada uno de las fases del material compuesto. Cada una de estas fases puede presentar distintos

tipos de comportamiento. Al igual que en la teoría de mezclas clásica, una vez determinado el estado tensional de cada uno de los componentes es necesario obtener la tensión del material compuesto a partir de ecuación (3.50) o (3.51), y a partir de ella obtener las fuerzas internas que se desarrollan en cada punto del material (ver Figura 3.4). Una vez determinadas las fuerzas internas es necesario verificar el equilibrio de estas con las fuerzas externas aplicadas.

3.7 Modificación de la teoría de mezclas para refuerzo de corta longitud

La formulación de la teoría de mezclas clásica está orientada a un material de matriz reforzada con fibras largas, en los que se cumple la condición cinemática de la formulación clásica o generalizada. Sin embargo, a medida que la relación de aspecto^{*} de la fibra disminuye, la condición de compatibilidad fibra-matriz deja de cumplirse. Esto se debe a que se hace progresivamente significativo el efecto de deslizamiento y la limitada transmisión de esfuerzos entre fibra y matriz en los extremos de la fibra. Esta situación crea estados de concentración de tensiones y deformaciones en la fibra y la matriz circundante a causa de la discontinuidad. La “eficacia” de las fibras en la rigidez del material compuesto disminuye en la medida en que lo hace la longitud de la misma.

La Figura 3.5 muestra la deformación de la matriz circundante a una fibra discontinua embebida en la misma y sometida a una carga de tracción paralela a la fibra.

En un material compuesto con refuerzo de fibras largas, se tiene el mismo estado de deformaciones para la matriz y las fibras. Por otro lado, la tensión a lo largo del refuerzo no varía salvo en la zona de los extremos, donde se verifica que la deformación de la misma es menor respecto a la de la matriz. En el caso de refuerzos de longitud corta embebidos en una matriz este fenómeno juega un papel fundamental en la determinación de las propiedades mecánicas del compuesto. Este problema ha sido tratado por Cox (1952)²⁵, utilizando el llamado “análisis de retardo en cortadura” y bajo la hipótesis de que se mantienen elástica tanto la fibra como la matriz.

Este fenómeno puede explicarse teniendo en cuenta la Figura 3.5. En la misma, en la sección *AA* la deformación del conjunto se debe sólo a la deformación de la matriz. En la sección *BB*, justo en el extremo de la fibra, evidencias experimentales muestran que la transferencia de esfuerzos de la matriz hacia la fibra es gradual, con esfuerzo nulo en la punta y con un aumento gradual de la tensión a lo largo de la fibra hasta el punto en el cual las deformaciones de matriz y fibra son iguales. De acuerdo con esto, la zona central de una fibra presenta el máximo valor de tensión axial. Se define como *longitud de transferencia* l_c a la longitud de refuerzo necesaria para garantizar la compatibilidad fibra-matriz y la transferencia de los esfuerzos desde la matriz hacia la fibra. Cualquier refuerzo cuya longitud sea inferior a esta magnitud, no participa plenamente en los mecanismos de transferencia de esfuerzo (Jayatilaka (1969)²⁶).

^{*} NOTA: Se define como relación de aspecto al cociente $l/2r$ donde l y r son la longitud y el radio de una fibra corta respectivamente.

²⁵ Cox, H. L. (1952). The elasticity and the strength of paper and other fibrous materials. Br. J. Appl. Phys., 3, 72 - 79.

²⁶ Jayatilaka, A. (1979). *Fracture of engineering brittle materials*. Applied Science Publishers.

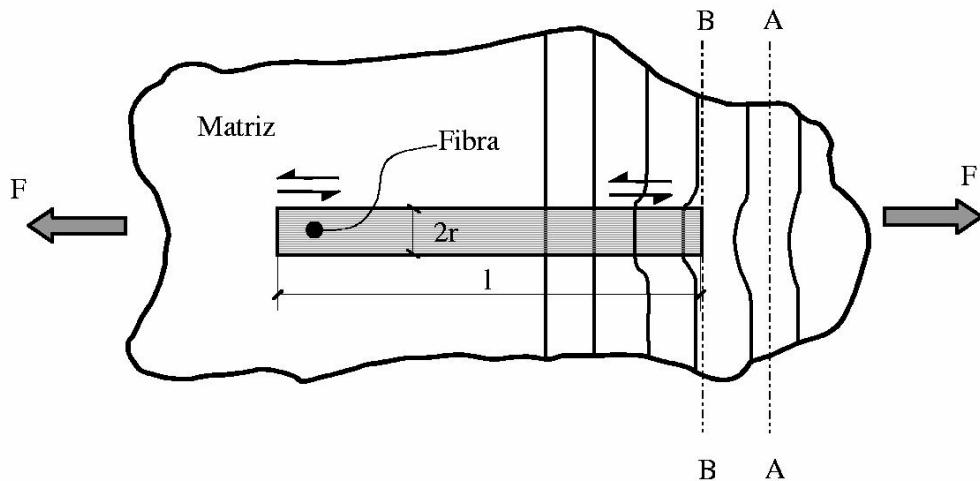


Figura 3.5 – Deformación alrededor de una fibra discontinua embebida en una matriz sometida a tracción.

En la Figura 3.6 se muestra la distribución de esfuerzos en una fibra de refuerzo. La tensión tangencial es máxima en los extremos de las fibras y resulta casi nulo en la zona central. En la misma Figura se observa que en los extremos de las fibras la tensión axial cae a cero, resultando un esfuerzo medio en la fibra de longitud l menor que en una fibra continua sometida a las mismas cargas externas. La “eficacia” del refuerzo disminuye en la medida en que lo hace la longitud de la fibra debido a que no toda la fibra puede trabajar a la máxima tensión. Por lo tanto, en los materiales compuestos reforzados con fibras cortas es necesario que la longitud l de la fibra sea superior a la longitud crítica de transferencia l_c con el objetivo de que las mismas sean aprovechadas a su máxima capacidad.

Debido a estos fenómenos locales, los materiales compuestos reforzados con fibras cortas no cumplen exactamente con la condición de compatibilidad expresada en la (3.36), debido a las diferentes deformaciones que se presentan entre la matriz y las fibras. Por ello, a los fines de representar el comportamiento constitutivo de estos materiales, es necesario el planteo de otra ecuación de cierre de deformaciones (Oller *et. alt.* (1995)¹¹), o mantener la clásica teoría de mezclas, manteniendo la hipótesis de igualdad de deformaciones en todos los componentes, y realizar una corrección en las propiedades de cada componente (Car *et al.* (1997)²⁷).

²⁷ Car, E., Oller, S., & Oñate, E. (1997). Un modelo constitutivo elasto-plástico acoplado con daño mecánico e higrométrico. Aplicación a pavimentos flexibles. U. de Brasilia (Ed.), XVIII CILAMCE Congresso Ibero Latino-Americano de Métodos Computacionais Em Engenharia (pp. 2100 - 2108). Brasilia.

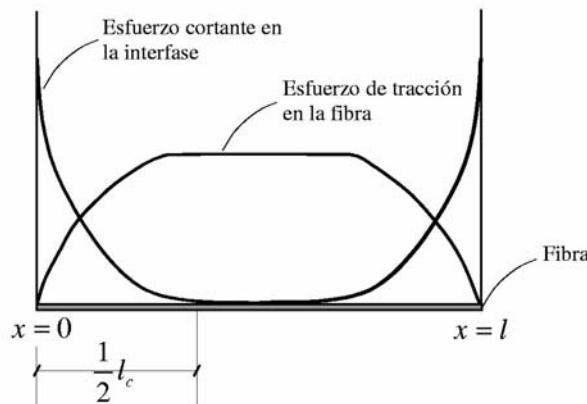


Figura 3.6 – Distribución de esfuerzos axiales en la fibra y cortantes en la interfaces fibra-matriz.

3.7.1 Distribución de tensión axial en la fibra

En los apartados anteriores se ha mencionado que la transferencia de esfuerzos se desarrolla desde la matriz hacia las fibras en la zona de interface en la que se generan tensiones tangenciales. A los fines de determinar una expresión analítica de la distribución de tensiones en una fibra es necesario considerar el equilibrio en la zona de transferencia de tensiones (ver Figura 3.7).

El equilibrio de la fibra en la dirección longitudinal x está dado por:

$$\sigma_f \pi r^2 + 2\tau \pi r dx = (\sigma_f + d\sigma_f) \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \sigma_f}{\partial x} = \frac{2\tau}{r} \quad (3.54)$$

O en términos de la carga de la fibra,

$$\frac{\partial P_f}{\partial x} = 2\tau \pi r \quad (3.55)$$

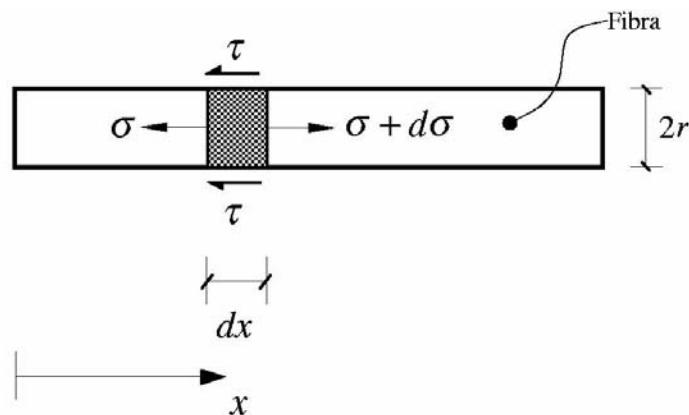


Figura 3.7 – Esfuerzos en los extremos de fibras.

donde σ_f es la tensión en la fibra en la dirección x , $d\sigma_f$ es el incremento de la tensión en la fibra en $x + dx$ y τ es la tensión tangencial en la interface fibra-matriz. La tensión tangencial τ se produce debido a las deformaciones diferenciadas entre fibra y matriz y por lo

tanto depende de la diferencia entre los campos de desplazamientos de fibra y matriz. El equilibrio entre matriz y fibra corta puede describirse mediante la siguiente ecuación diferencial sobre el eje longitudinal de la fibra resulta (Jayatilaka, (1979)²⁶).

$$\frac{\partial^2 P_f}{\partial x^2} = H \left[\frac{P_f}{C_f^\sigma A_f} - E_m \right] \quad (3.56)$$

donde P_f es la fuerza máxima de interacción entre el refuerzo y la matriz, H una constante que depende de la distribución topológica de las fibras, C_f^σ el módulo de Young del refuerzo, A_f la sección transversal media del refuerzo y E_m es la deformación longitudinal en la matriz. La solución de la ecuación diferencial (3.56) permite obtener la siguiente fuerza en la fibra,

$$P_f = C_1 \operatorname{senh}(\beta x) + C_2 \cosh(\beta x) + C_f^\sigma A_f E_m \quad (3.57)$$

siendo C_1 y C_2 las constantes que resultan de las condiciones de contorno $P_f = 0$ en $x=0$ y $x=l$; β es un coeficiente dado por la siguiente expresión²⁶

$$\beta = \sqrt{\frac{H}{C_f^\sigma A_f}} = \sqrt{\frac{G_c}{C_f^\sigma A_f} \frac{2\pi}{\ln\left(\frac{r'}{r}\right)}} \quad (3.58)$$

En la cual G_c es el módulo elástico transversal del compuesto y r' la distancia media entre las fibras de refuerzo (ver Figura 3.8).

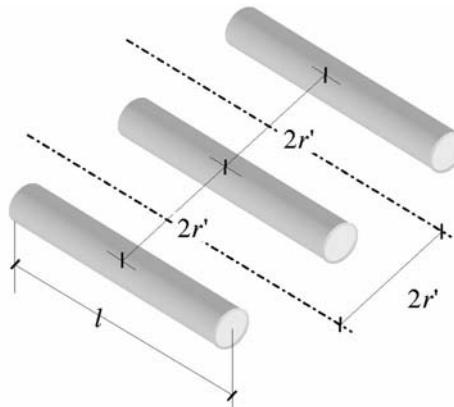


Figura 3.8 – Relación de aspecto que se considera en el refuerzo.

Una vez obtenidas las constantes de integración, la ecuación de la tensión resulta

$$\sigma_f(x) = C_f^\sigma E_m \left[1 - \frac{\cosh(\beta(\frac{l}{2}-x))}{\cosh(\beta \frac{l}{2})} \right] \quad \forall 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \quad (3.59)$$

Esta ecuación establece la distribución de tensiones axiales a lo largo de la fibra. Esta distribución se muestra esquemáticamente en la Figura 3.6. En la zona central del refuerzo no existe un valor de tensión constante, pero si el refuerzo es lo suficientemente largo se pue-

de admitir la hipótesis de que $\sigma_f \equiv C_f E_m$. El valor de tensión máximo se produce en $x=l/2$ y está dado por

$$(\sigma_f)_{\max} = \sigma_f(x = \frac{l}{2}) = C_f^\sigma E_m \left[1 - \frac{1}{\cosh(\beta \frac{l}{2})} \right] \quad (3.60)$$

3.7.2 Distribución de tensión tangencial en la interface

La distribución de tensión tangencial en la zona de interface se obtiene haciendo el equilibrio en la fibra entre tensiones axiales y adherencia con la matriz. Para ello, teniendo en cuenta la ecuación (3.54) y (3.59), resulta

$$\tau_f(x) = \frac{C_f E_r \beta}{2} \frac{\operatorname{senh}\left(\beta\left(\frac{l}{2} - x\right)\right)}{\cosh\left(\beta \frac{l}{2}\right)} \quad (3.61)$$

Esta última ecuación establece la función de distribución de tensiones tangenciales en la interface fibra-matriz. Esta distribución se muestra esquemáticamente en la Figura 3.6. El valor de la tensión cortante es nulo en la zona central de la fibra y coincidente con el máximo de la tensión axial. En esta zona no existen deformaciones diferenciadas entre fibra y matriz lo cual explica el valor nulo de las tensiones tangenciales. La máxima tensión tangencial se verifica en el extremo de la fibra y está dada por:

$$(\tau_f)_{\max} = \tau_f(x = \frac{l}{2}) = \frac{C_f^\sigma E_r \beta}{2} \tanh\left(\frac{\beta l}{2}\right) \quad (3.62)$$

Una forma de incorporar la contribución del refuerzo en fibras cortas a la teoría de mezclas es a través de la tensión media a lo largo de la fibra, esto es

$$\bar{\sigma}_f = \frac{1}{l} \int_0^l \sigma_f(x) dx = C_f^\sigma \left[1 - \frac{\tanh\left(\beta \frac{l}{2}\right)}{\left(\beta \frac{l}{2}\right)} \right] E_m = \tilde{C}_f^\sigma E_m \quad (3.63)$$

siendo \tilde{C}_f^σ el módulo de Young medio del refuerzo o módulo homogeneizado. La ecuación (3.63) muestra que el módulo de Young de un refuerzo de fibras es función de la longitud de las mismas y de otros parámetros geométricos. En el caso de fibras largas el módulo elástico promedio tiende al valor del módulo de Young del refuerzo, en tanto en este caso se ve fuertemente afectado por las cualidades para transferir las tensiones que tiene la interface matriz-refuerzo.

La definición de un módulo de Young promedio del refuerzo, de magnitud inferior al real, explica que la participación de este aporta unas características mecánicas al compuesto que no sólo dependen de las propiedades intrínsecas del mismo, sino también de las propiedades del conjunto matriz-refuerzo. En esta situación las propiedades de la interface entre los componentes son determinantes en la forma de participación de los mismos. Esto significa que las propiedades mecánicas de un punto del sólido no sólo dependen de si mismas, sino del conjunto matriz-refuerzo.

3.7.3 Modelo constitutivo para fibras cortas

La matriz de un material compuesto reforzado con fibras de corta longitud suele estar sometido a tensiones superiores que en el caso que la fibra sea larga. En general, las propiedades mecánicas del material compuesto con fibras cortas son inferiores que los compuestos con refuerzo continuo*.

La definición anterior para el módulo de Young, permite redefinir la cuota elástica de la función de energía libre en la configuración referencial o en la actualizada para la fase de refuerzo como:

$$\begin{aligned}\Psi(\mathbf{E}^e, \theta, \alpha^m) &= \Psi^e(\mathbf{E}^e, \theta) + \Psi^p(\alpha^m) = \frac{1}{2m^0} [\mathbf{E}^e : \tilde{\mathbf{C}}_f^S : \mathbf{E}^e] + \Psi^p(\alpha^m) \\ \psi(\mathbf{e}^e, \theta, \alpha^m) &= \psi^e(\mathbf{e}^e, \theta) + \psi^p(\alpha^m) = \frac{1}{2m} [\mathbf{e}^e : \tilde{\mathbf{c}}_f^\tau : \mathbf{e}^e] + \psi^p(\alpha^m)\end{aligned}\quad (3.64)$$

Este mismo concepto, basado en la homogeneización de la tensión a lo largo de la fibra (ecuación (3.63)), puede extenderse a "3-D" mediante una simplificación, resultando el siguiente tensor constitutivo aproximado para la fibra corta,

$$\tilde{\mathbf{C}}_f^S = \mathbf{C}_f^S \left[1 - \frac{\tanh(\beta \frac{l}{2})}{(\beta \frac{l}{2})} \right] \quad (3.65)$$

donde el tensor constitutivo del refuerzo en la configuraciones referencial \mathbf{C}_f^S es ortotrópo. Este tensor constitutivo transportado a la configuración actualizada queda afectado del cambio de longitud de la fibra, del cambio de sección transversal y del cambio en la separación entre las fibras que constituyen el refuerzo y se puede obtener como el "push forward" del tensor constitutivo en la configuración referencial (ecuación (3.65)), esto es:

$$\tilde{\mathbf{c}}_f^\tau = \vec{\phi}(\tilde{\mathbf{C}}_f^S) \quad (3.66)$$

De esta manera la formulación que se presenta permite tener en cuenta la pérdida de efectividad del refuerzo en la respuesta debido a su escasa longitud que impide una total transferencia de los esfuerzos desde la matriz.

A partir del segundo principio de la termodinámica, se obtiene la tensión en las configuraciones referencial o en la actualizada como,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{S} &= m^0 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}^e} = \underbrace{\left[1 - \frac{\tanh(\beta \frac{l}{2})}{(\beta \frac{l}{2})} \right]}_{\varsigma} \cdot \mathbf{C}_f^S : \mathbf{E}^e = \tilde{\mathbf{C}}_f^S : \mathbf{E}^e \\ \boldsymbol{\tau} &= m \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{e}^e} = \tilde{\mathbf{c}}_f^\tau : \mathbf{e}^e \end{aligned} \right\} \boldsymbol{\tau} = \vec{\phi}(\mathbf{S}) \quad (3.67)$$

En estas ecuaciones, que definen la tensión en las dos configuraciones, el factor ς representa la corrección debido a la presencia de un refuerzo de longitud corta en el material compuesto.

* NOTA: Se entiende por refuerzo continuo a aquel que presenta una longitud mayor a la necesaria para transmitir los esfuerzos desde la matriz hacia el refuerzo

3.8 Ecuación constitutiva del compuesto

El análisis de materiales compuestos reforzados con fibras cortas utilizando la teoría de mezclas clásica o generalizada resulta insuficiente, debido a que esta no puede tener en cuenta los fenómenos que tienen lugar en la zona de interface entre ambos materiales. Como ya se ha dicho previamente, cualquier definición cinemática para el comportamiento de los componentes sólo es válida para materiales con refuerzo continuo, por ejemplo matrices con fibras largas, despreciando los fenómenos que ocurren en los extremos de las fibras. En el caso de materiales compuestos reforzados con fibras cortas la ecuación de compatibilidad. Por lo tanto, resulta necesario modificar la teoría de mezclas clásica debido a que no se cumple la ecuación de compatibilidad, definiendo por ello una ecuación de cierre distinta (Oller *et al* (1995)¹¹) o realizando una corrección en las propiedades de cada componente manteniendo la ecuación de cierre de la teoría de mezclas clásica (Car *et al.* (1998)²⁸). Este último método conduce a una formulación más simple.

3.8.1 Energía libre para compuestos reforzados con fibras cortas

La energía libre de un material compuesto reforzado con fibras en la configuración referencial está dada por la sumatoria de las energías libres de cada una de las fases que forman la matriz del material ponderadas en función de su participación volumétrica, esto es:

$$m^0 \Psi(\mathbf{E}^e, \theta, \alpha^m) = \underbrace{\sum_{c_m=1}^{n_m} k_{c_m} m_{c_m}^0 \Psi_{c_m}((\mathbf{E})_{c_m}, (\mathbf{E}^p)_{c_m}, \theta, (\alpha^m)_{c_m})}_{\text{Componentes de la matriz}} + \underbrace{\sum_{c_r=1}^{n_r} k_{c_r} m_{c_r}^0 \zeta_{c_r} \Psi_{c_r}((\mathbf{E})_{r_m}, (\mathbf{E}^p)_{c_r}, \theta, (\alpha^m)_{c_r})}_{\text{Componentes del refuerzo}} \quad (3.68)$$

En la configuración actualizada la energía libre del compuesto resulta

$$m \psi(\mathbf{e}^e, \theta, \alpha^m) = \underbrace{\sum_{c_m=1}^{n_m} k_{c_m} m_{c_m} \psi_{c_m}((\mathbf{e})_{c_m}, (\mathbf{e}^p)_{c_m}, \theta, (\alpha^m)_{c_m})}_{\text{Componentes de la matriz}} + \underbrace{\sum_{c_r=1}^{n_r} k_{c_r} m_{c_r} \zeta_{c_r} \psi_{c_r}((\mathbf{e}^p)_{c_r}, (\mathbf{e}^p)_{c_r}, \theta, (\alpha^m)_{c_r})}_{\text{Componentes del refuerzo}} \quad (3.69)$$

donde Ψ_{c_m} y Ψ_{c_r} son las energías libres de los componentes de la matriz y al refuerzo en la configuración referencial, ψ_{c_m} y ψ_{c_r} son las energías libres de las componentes correspondientes a la matriz y al refuerzo en la configuración actualizada, k_{c_m} y k_{c_r} son los coeficientes de participación volumétrica de los componentes de matriz y el refuerzo, $(\mathbf{E})_{c_m,r} = [(1 - \chi_{c_m,r}) \cdot \mathbf{I}_4 + \chi_{c_m,r} \cdot (\Phi)_{c_m,r}] \cdot \mathbf{E} - \chi_{c_m,r} \cdot (\hat{\mathbf{E}}^p)_{c_m,r}$ es la deformación en la configuración referencial y $(\mathbf{e})_{c_m,r} = [(1 - \chi_{c_m,r}) \cdot \mathbf{I}_4 + \chi_{c_m,r} \cdot (\phi)_{c_m,r}] \cdot \mathbf{e} - \chi_{c_m,r} \cdot (\hat{\mathbf{e}}^p)_{c_m,r}$ la deformación en la configuración actualizada, la primera para la matriz y la segunda para la fase de refuer-

²⁸ Car, E., Oller, S., & Oñate, E. (1998). Un modelo constitutivo elasto plástico acoplado con daño mecánico e higrométrico. Aplicación a pavimentos flexibles. Rev. Int. de Ingeniería de Estructuras, 3(1), 19 - 37

zo. $(\mathbf{E}^p)_{c_m}$ y $(\mathbf{E}^p)_{c_r}$ son las deformaciones plásticas en la configuración referencial de las componentes de fibra y matriz $(\mathbf{e}^p)_{c_m}$ y $(\mathbf{e}^p)_{c_r}$ son las deformaciones plásticas en la configuración actualizada de los componentes de fibra y matriz, $(\hat{\mathbf{E}}^p)_{c_{m,r}}$ y $(\hat{\mathbf{e}}^p)_{c_{m,r}}$ son las deformaciones plásticas que se definen con fines operativos (no tienen sentido físico), ς_{c_r} representa la corrección en función de la longitud de la fase de refuerzo en el material compuesto, $\alpha_{c_m}^m$ y $\alpha_{c_r}^m$ son las variables internas plásticas de los componentes de matriz y refuerzo que definen el comportamiento físico de cada sustancia.

La eficacia del refuerzo de fibras cortas es menor que la del de fibras largas, por lo tanto se deduce que las propiedades mecánicas de los materiales compuestos reforzados con fibras cortas son menores. La expresión del tensor constitutivo del material compuesto dado en la ecuación (3.11) en pequeñas deformaciones se generaliza en la siguiente forma para el caso de refuerzos de cortas longitud con grandes deformaciones.

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_{ijkl}^S &= \frac{\partial S_{ij}}{\partial E_{kl}} = m^0 \frac{\partial^2 \Psi(E_i^e \cdot \theta, \alpha_i)}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = \\ &= \underbrace{\sum_{c_m=1}^{n_m} k_{c_m} (\hat{\mathbb{C}}_{ijkl}^S)_{c_m}}_{\text{Componentes de la matriz}} + \underbrace{\sum_{c_r=1}^{n_r} k_{c_r} \varsigma_{c_r} (\hat{\mathbb{C}}_{ijkl}^S)_{c_r}}_{\text{Componentes del refuerzo}}\end{aligned}\quad (3.70)$$

Y en la configuración actualizada se define el tensor constitutivo como,

$$\begin{aligned}c_{ijkl}^S &= \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial e_{kl}} = m \frac{\partial^2 \psi(e_i^e \cdot \theta, \alpha_i)}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}} = \\ &= \underbrace{\sum_{c_m=1}^{n_m} k_{c_m} (\hat{c}_{ijkl}^S)_{c_m}}_{\text{Componentes de la matriz}} + \underbrace{\sum_{c_r=1}^{n_r} k_{c_r} \varsigma_{c_r} (\hat{c}_{ijkl}^S)_{c_r}}_{\text{Componentes del refuerzo}}\end{aligned}\quad (3.71)$$

Si se trabaja con la “Teoría de Mezclas Generalizada” los tensores constitutivos para la matriz y el refuerzo se definen como

$$\begin{aligned}(\hat{\mathbb{C}}^S)_{c_{m,r}} &= [(1 - \chi_{c_{m,r}}) \cdot \mathbf{I}_4 + \chi_{c_{m,r}} \cdot (\Phi)_{c_{m,r}}]^T : \{(\mathbb{C}^S)_{c_{m,r}} : [(1 - \chi_{c_{m,r}}) \cdot \mathbf{I}_4 + \chi_{c_{m,r}} \cdot (\Phi)_{c_{m,r}}]\} \\ (\hat{\mathbf{c}}^S)_{c_{m,r}} &= [(1 - \chi_{c_{m,r}}) \cdot \mathbf{I}_4 + \chi_{c_{m,r}} \cdot (\Phi)_{c_{m,r}}]^T : \{(\mathbf{c}^S)_{c_{m,r}} : [(1 - \chi_{c_{m,r}}) \cdot \mathbf{I}_4 + \chi_{c_{m,r}} \cdot (\Phi)_{c_{m,r}}]\}\end{aligned}$$

Si se trabaja con la “Teoría de Mezclas Clásicas” los tensores constitutivos se definen simplemente como $(\hat{\mathbb{C}}^S)_{c_{m,r}} = (\mathbb{C}^S)_{c_{m,r}}$ y $(\hat{\mathbf{c}}^S)_{c_{m,r}} = (\mathbf{c}^S)_{c_{m,r}}$. En las definiciones anteriores los tensores constitutivos del material compuesto están representados en las configuraciones referencial y actualizada, n_m es el número de materiales componentes que constituyen la matriz del compuesto y n_r es el número de materiales componentes que constituyen la fase del refuerzo. En el caso de refuerzos continuos el factor ς_{c_r} tiende a la unidad y hace que la expresión para fibras cortas coincida con la de fibras largas.

La ecuación de la tensión en el material compuesto, en las configuraciones referencial y actualizada, quedan definidas como

$$\begin{aligned}
S_{ij} = m^0 \frac{\partial \Psi(E_{ij}^e, \theta, \alpha_i)}{\partial E_{ij}} &= \underbrace{\sum_{c_m=1}^{n_m} k_{c_m} (S_{kl})_{c_m} \frac{\partial (E_{kl})_{c_m}}{\partial E_{ij}}}_{\text{Componentes de la matriz}} + \underbrace{\sum_{c_r=1}^{n_r} k_{c_r} (S_{kl})_{c_r} \frac{\partial (E_{kl})_{c_r}}{\partial E_{ij}}}_{\text{Componentes del refuerzo}} = \\
&= \underbrace{\sum_{c_m=1}^{n_m} k_{c_m} (\hat{\mathbb{C}}_{ijkl}^S)_{c_m} (E_{kl}^e)_{c_m}}_{\text{Componentes de la matriz}} + \underbrace{\sum_{c_r=1}^{n_r} k_{c_r} \varsigma_{c_r} (\hat{\mathbb{C}}_{ijkl}^S)_{c_r} (E_{kl}^e)_{c_r}}_{\text{Componentes del refuerzo}}
\end{aligned} \tag{3.72}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{ij} = m \frac{\partial \Psi(e_{ij}^e, \theta, \alpha_i)}{\partial e_{ij}} &= \underbrace{\sum_{c_m=1}^{n_m} k_{c_m} (\tau_{kl})_{c_m} \frac{\partial (e_{kl})_{c_m}}{\partial e_{ij}}}_{\text{Componentes de la matriz}} + \underbrace{\sum_{c_r=1}^{n_r} k_{c_r} (\tau_{kl})_{c_r} \frac{\partial (e_{kl})_{c_r}}{\partial e_{ij}}}_{\text{Componentes del refuerzo}} = \\
&= \underbrace{\sum_{c_m=1}^{n_m} k_{c_m} (\hat{e}_{ijkl}^\tau)_{c_m} (e_{kl}^e)_{c_m}}_{\text{Componentes de la matriz}} + \underbrace{\sum_{c_r=1}^{n_r} k_{c_r} \varsigma_{c_r} (\hat{e}_{ijkl}^\tau)_{c_r} (e_{kl}^e)_{c_r}}_{\text{Componentes del refuerzo}}
\end{aligned} \tag{3.73}$$

En el caso que se utilice la “Teoría de Mezclas Clásica” para resolver compuestos con fibras cortas, la modificación de la rigidez y la resistencia del material puede interpretarse también como una modificación de la ecuación de cierre o ecuación de compatibilidad de deformaciones en la configuración referencial, esto es

$$\begin{aligned}
E_{ij} &= \underbrace{(E'_{ij})_{1_m}}_{\text{Deformaciones en los componentes de la matriz}} = \underbrace{(E'_{ij})_{2_m}}_{\dots} = \dots = \underbrace{(E'_{ij})_{n_m}}_{\dots} \equiv \underbrace{(E'_{ij})_{1_r}}_{\text{Deformaciones en los componentes de refuerzo}} = \underbrace{(E'_{ij})_{2_r}}_{\dots} = \dots = \underbrace{(E'_{ij})_{n_r}}_{\dots} \\
E_{ij} &= \underbrace{(E_{ij}^e + E_{ij}^p)_{1_m}}_{(E'_{ij})_{1_m}} = \dots = \underbrace{(E_{ij}^e + E_{ij}^p)_{n_m}}_{(E'_{ij})_{n_m}} \equiv \underbrace{(\vartheta_{1_r} E_{ij}^e + E_{ij}^p)_{1_r}}_{(E'_{ij})_{1_r}} = \dots = \underbrace{(\vartheta_{n_r} E_{ij}^e + E_{ij}^p)_{n_r}}_{(E'_{ij})_{n_r}}
\end{aligned} \tag{3.74}$$

De la anterior se obtiene que la deformación elástica de los componentes del refuerzo está dada por la siguiente expresión

$$(E_{ij}^e)_{n_r} = \frac{1}{\vartheta_{n_r}} (E_{ij} - (E_{ij}^p)_{n_r}) \Rightarrow (E_{ij}^e)_{n_r} = \varsigma_{n_r} (E_{ij} - (E_{ij}^p)_{n_r}) \tag{3.75}$$

Esta ecuación establece que las deformaciones en cada componente de refuerzo –fibras cortas o partículas– estén afectadas de un factor $\vartheta_{n_r} = 1/\varsigma_{n_r}$, función de la longitud del refuerzo y de la distribución topológica de las fibras dentro de la matriz del compuesto. Teniendo en cuenta la ecuación (3.44), la expresión de la tensión en cada uno de los componentes del refuerzo en la configuración referencial está dada por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} = m^0 \frac{\partial \Psi(\mathbf{E}^e, \theta, \alpha^m)}{\partial \mathbf{E}} &= \sum_{c=1}^n m_c^0 k_c \frac{\partial \Psi_c((\mathbf{E})_c, (\mathbf{E}^P)_c, \theta, (\alpha^m)_c)}{\partial (\mathbf{E})_c} : \frac{\partial (\mathbf{E})_c}{\partial \mathbf{E}} = \\
&= \sum_{c_m=1}^{n_m} k_{c_m} (\mathbf{S})_{c_m} : \frac{\partial (\mathbf{E})_c}{\partial \mathbf{E}} + \sum_{c_r=1}^{n_r} k_{c_r} (\mathbf{S})_{c_r} : \frac{\partial (\mathbf{E})_c}{\partial \mathbf{E}} = \\
&= \sum_{c_m=1}^{n_m} k_{c_m} (\hat{\mathbf{C}}^S)_{c_m} (\mathbf{E}^e)_{c_m} + \sum_{c_r=1}^{n_r} k_{c_r} \varsigma_{c_r} (\hat{\mathbf{C}}^S)_{c_r} (\mathbf{E}^e)_{c_r} \\
&= \sum_{c_m=1}^{n_m} k_{c_m} (\hat{\mathbf{C}}^S)_{c_m} \left(\mathbf{E} - (\mathbf{E}^P)_{c_m} \right) + \sum_{c_r=1}^{n_r} k_{c_r} \varsigma_{c_r} (\hat{\mathbf{C}}^S)_{c_r} \left(\mathbf{E} - (\mathbf{E}^P)_{c_r} \right)
\end{aligned} \tag{3.76}$$

El cambio de propiedades de cada componente en la configuración actualizada es posible interpretarlo, también, como una modificación en la ecuación de cierre:

$$\begin{aligned}
e_{ij} = \underbrace{\left(e'_{ij} \right)_{1_m}}_{\text{Deformaciones en los componentes de la matriz}} &= \underbrace{\left(e'_{ij} \right)_{2_m}}_{\text{Deformaciones en los componentes de la matriz}} = \dots = \underbrace{\left(e'_{ij} \right)_{n_m}}_{\text{Deformaciones en los componentes de la matriz}} \equiv \underbrace{\left(e'_{ij} \right)_{1_r}}_{\text{Deformaciones en los componentes de refuerzo}} = \underbrace{\left(e'_{ij} \right)_{2_r}}_{\text{Deformaciones en los componentes de refuerzo}} = \dots = \underbrace{\left(e'_{ij} \right)_{n_r}}_{\text{Deformaciones en los componentes de refuerzo}} \\
e_{ij} = \underbrace{\left(e_{ij}^e + e_{ij}^p \right)_{1_m}}_{\left(e'_{ij} \right)_{1_m}} &= \dots = \underbrace{\left(e_{ij}^e + e_{ij}^p \right)_{n_m}}_{\left(e'_{ij} \right)_{n_m}} \equiv \underbrace{\left(\vartheta_{1_r} e_{ij}^e + e_{ij}^p \right)_{1_r}}_{\left(e'_{ij} \right)_{1_r}} = \dots = \underbrace{\left(\vartheta_{n_r} e_{ij}^e + e_{ij}^p \right)_{n_r}}_{\left(e'_{ij} \right)_{n_r}}
\end{aligned} \tag{3.77}$$

De la anterior se obtiene que la deformación elástica de los componentes del refuerzo está dada por la siguiente expresión

$$\left(e_{ij}^e \right)_{n_r} = \frac{1}{\vartheta_{n_r}} \left(e_{ij} - (e_{ij}^p)_{n_r} \right) \Rightarrow \left(e_{ij}^e \right)_{n_r} = \varsigma_{n_r} \left(e_{ij} - (e_{ij}^p)_{n_r} \right) \tag{3.78}$$

Esta ecuación establece, al igual que su homóloga descrita en la configuración referencial, que las deformaciones en cada componente de refuerzo –fibras cortas o partículas– están afectada de un cierto factor $\vartheta_{n_r} = 1/\varsigma_{n_r}$ función de la longitud del refuerzo y de la distribución topológica de las fibras dentro de la matriz del compuesto. Teniendo en cuenta la ecuación (3.46), se puede observar que la expresión de la tensión en cada uno de los componentes del refuerzo en la configuración referencial está dada por la siguiente expresión,

$$\begin{aligned}
\tau = m \frac{\partial \Psi(\mathbf{e}^e, \theta, \alpha^m)}{\partial \mathbf{e}} &= \sum_{c=1}^n m_c k_c \frac{\partial \Psi_c(\mathbf{e}, (\mathbf{e}^P)_c, \theta, (\alpha^m)_c)}{\partial (\mathbf{e})_c} : \frac{\partial (\mathbf{e})_c}{\partial \mathbf{e}} = \\
&= \sum_{c_m=1}^{n_m} k_{c_m} (\boldsymbol{\tau})_{c_m} : \frac{\partial (\mathbf{e})_c}{\partial \mathbf{e}} + \sum_{c_r=1}^{n_r} k_{c_r} (\boldsymbol{\tau})_{c_r} : \frac{\partial (\mathbf{e})_c}{\partial \mathbf{e}} = \\
&= \sum_{c_m=1}^{n_m} k_{c_m} (\hat{\mathbf{C}}^\tau)_{c_m} (\mathbf{e}^e)_{c_m} + \sum_{c_r=1}^{n_r} k_{c_r} \varsigma_{c_r} (\hat{\mathbf{C}}^\tau)_{c_r} (\mathbf{e}^e)_{c_r} \\
&= \sum_{c_m=1}^{n_m} k_{c_m} (\hat{\mathbf{C}}^\tau)_{c_m} \left(\mathbf{e} - (\mathbf{e}^P)_{c_m} \right) + \sum_{c_r=1}^{n_r} k_{c_r} \varsigma_{c_r} (\hat{\mathbf{C}}^\tau)_{c_r} \left(\mathbf{e} - (\mathbf{e}^P)_{c_r} \right)
\end{aligned} \tag{3.79}$$

Teniendo en cuenta la condición de compatibilidad dada en las ecuaciones (3.74) y (3.77), y la expresión de la tensión en las configuraciones referencial y actualizada dadas por las ecuaciones (3.76) y (3.79), se observa que existe un factor de proporcionalidad entre la de-

formación de los componentes que constituyen la fase de refuerzo y la deformación total del conjunto. El producto de este factor de proporcionalidad por el tensor constitutivo del componente da lugar a una modificación del tensor constitutivo del componente $\zeta_{c_r} \hat{\epsilon}_{c_r}$, dando lugar a un nuevo tensor constitutivo para el componente de refuerzo que permite utilizar la condición de compatibilidad de la teoría de mezclas clásica en el cálculo de la tensión en el componte.

3.9 Propiedades mecánicas de las fibras en la Teoría de mezclas – Comportamiento lineal en pequeñas deformaciones

El objetivo de este apartado es establecer las propiedades mecánicas de la fase de refuerzo en dirección transversal a la dirección principal de las tensiones. La teoría de mezclas de sustancias básicas, en su forma desacoplada para pequeñas deformaciones ($\sigma = \tau = S$ y $\epsilon = e = E$), establece que el módulo elástico transversal de un material compuesto está dado por la suma ponderada de los módulos elásticos transversales de los componentes

$$\mathbb{C}_2 = k_m (\mathbb{C}_2)_m + k_f (\mathbb{C}_2)_f \quad (3.80)$$

Donde \mathbb{C}_2 , $(\mathbb{C}_2)_m$ y $(\mathbb{C}_2)_f$ son los módulos elásticos transversales del material compuesto, de la matriz y de la fibra respectivamente. Esta suposición del material en paralelo debe completarse con el módulo elástico transversal de un material en serie, donde las tensiones son iguales $[(\sigma_2)_f = (\mathbb{C}_2)_f : (\epsilon_2)_f] \equiv [(\sigma_2)_m = (\mathbb{C}_2)_m : (\epsilon_2)_m] \equiv [\sigma_2 = \mathbb{C}_2 : \epsilon_2]$, de donde resulta

$$\epsilon_2 = k_m (\epsilon_2)_m + k_f (\epsilon_2)_f \Rightarrow \mathbb{C}_2 = \frac{(\mathbb{C}_2)_m \cdot (\mathbb{C}_2)_f}{k_m (\mathbb{C}_2)_f + k_f (\mathbb{C}_2)_m} \quad (3.81)$$

Evidencias experimentales demuestran que para representar el comportamiento de un compuesto de matriz reforzada con fibras, éstas no pueden ser consideradas como un material que sólo posee rigidez longitudinal. Por lo tanto, el refuerzo en posición transversal a un esfuerzo colabora en la rigidez del conjunto. El módulo elástico transversal del refuerzo surge de considerar la igualdad de las ecuaciones (3.80) y (3.81) para el caso unidimensional,

$$(\mathbb{C}_2)_f \cong \frac{\frac{(\mathbb{C}_2)_m \cdot (\mathbb{C}_{2 \approx 1})_f}{k_m (\mathbb{C}_{2 \approx 1})_f + k_f (\mathbb{C}_2)_m} - k_m (\mathbb{C}_2)_m}{k_f} \quad (3.82)$$

Donde $(\mathbb{C}_{2 \approx 1})_f$ representa una primera aproximación del modulo de elasticidad transversal a través de su magnitud longitudinal $(\mathbb{C}_2)_f \approx (\mathbb{C}_1)_f$. Otra aproximación del módulo elástico transversal se puede obtener teniendo en cuenta una modificación de la ecuación anterior, que incorpora el efecto Poisson producido por la contracción lateral de la fibra

$$(\mathbb{C}_2)_f \cong \frac{\frac{(\mathbb{C}'_2)_m \cdot (\mathbb{C}_{2 \approx 1})_f}{k_m (\mathbb{C}_{2 \approx 1})_f + k_f (\mathbb{C}'_2)_m} - k_m (\mathbb{C}'_2)_m}{k_f} \quad (3.83)$$

Donde $(\mathbb{C}'_2)_m = (\mathbb{C}_2)_m / (1 - v^2)$. En forma análoga teniendo en cuenta la ecuación propuesta por Halpin y Tsai²⁹ el módulo elástico transversal de la fibra esta dado por:

$$(\mathbb{C}_2)_f \cong \frac{(\mathbb{C}_2)_m \frac{1 + \xi \eta k_f}{1 - \eta k_f} - k_m (\mathbb{C}_2)_m}{k_f} \quad (3.84)$$

Donde η es un coeficiente que resulta de una función del módulo elástico de la matriz, del módulo longitudinal del refuerzo y de un parámetro de carácter experimental ξ (Hull, (1987)³⁰, (Barbero, (1998)³¹):

$$\eta \cong \frac{\frac{(\mathbb{C}_1)_m}{(\mathbb{C}_2)_m} - 1}{\frac{(\mathbb{C}_1)_m}{(\mathbb{C}_2)_m} + \xi} \quad (3.85)$$

3.10 Ejemplo de comparación. “Micromodelo” vs. “Teoría de Mezclas” con anisotropía en grandes deformaciones.

Entre diversos ejemplos se ha elegido este porque muestra las capacidades de la “teoría de mezclas clásica con anisotropía y grandes deformaciones”, presentada en los apartados previos, en comparación con los resultados obtenidos con un *micromodelo* en el cual se individualiza cada uno de los materiales componentes del compuesto.

El ejemplo consiste en someter a una pieza de dimensiones unitarias constituida por un material compuesto a un estado de tracción en la que se ha discretizado la fase de refuerzo y la matriz y comparar los resultados obtenidos con este micromodelo con los resultados que se obtienen considerando el macromodelo propuesto en esta tesis. En la Figura 3.9 se observa la pieza de dimensiones unitarias en la que se han discretizado ambas fases del material compuesto y también se muestran las condiciones de contorno impuestas. La malla de elementos finitos está constituida por 5701 elementos finitos triangulares de 3 nodos y 2940 nudos en total.

Como una alternativa a la malla anteriormente descrita, en la simulación numérica mediante el modelo que se ha expuesto, se analiza la misma pieza de dimensiones unitarias modelada con un único elemento finito de cuadro nodos y 2×2 puntos de integración. En

²⁹ Halpin J. and Tsai S. W. (1969). *Effects of environmental factors on composite materials*. Air Force Materials Lab, No. 67-423.

³⁰ Hull, D. (1987). *Materiales compuestos*. Editorial Reverté, España.

³¹ Barbero, E. J. (1998). *Introduction to Composite Materials Design*. Taylor and Francis.

este ejemplo no se considerará el fenómeno de deslizamiento entre fibra y matriz (DFM) ya que se tratará más en un capítulo posterior.

Las propiedades mecánicas de los materiales que componen el material compuesto se muestran en la Tabla 3.1 y Tabla 3.2.

Módulo de Young	13,00 <i>Mpa</i>
Coeficiente de Poisson	0,325
Tensión de fluencia	43,323 <i>Mpa</i>
Ley de comportamiento posterior a la fluencia	Exponencial con ablandamiento
Energía de fractura	10 <i>N/m</i>
V_m	76%

Tabla 3.1 – Propiedades de la resina epoxi, macromodelo y micromodelo.

Módulo de Young	239,551 <i>Mpa</i>
Coeficiente de Poisson	0,0
Tensión de fluencia	3000 <i>Mpa</i>
Ley de comportamiento posterior a la fluencia	Lineal con endurecimiento
V_f	24%

Tabla 3.2 – Propiedades fibra de carbono macromodelo y micromodelo.

El micromodelo está constituido por dos materiales, fibra y matriz que se consideran isótropos y homogéneos y cuyas propiedades mecánicas coinciden con las propiedades mecánicas de los componentes del macromodelo. En la Figura 3.10 se muestra en forma esquemática la distribución de los materiales empleados en el micromodelo.

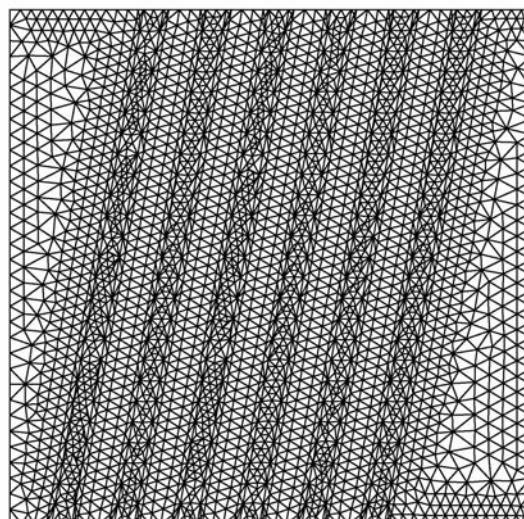


Figura 3.9 – Malla elementos finitos del micromodelo.

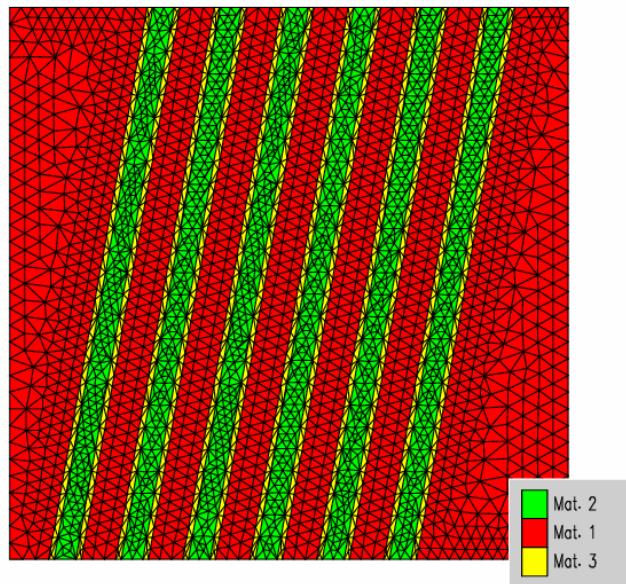


Figura 3.10 – Materiales del micromodelo.

El ensayo numérico consiste en someter a la pieza de dimensiones unitarias a desplazamientos impuestos en la parte superior de la misma generándose un estado de tracción. Este estado de tracción en la probeta genera una alineación del refuerzo con la dirección de la carga aplicada. En la Figura 3.11 se muestra la deformada en el estado final. En la misma se observa que las fibras se han alineado con la dirección del esfuerzo aplicado. Este fenómeno de alineación de la fase de refuerzo con la dirección del esfuerzo aplicado hace necesaria la introducción de la teoría de grandes deformaciones en el modelo constitutivo propuesto (ver apartado 3.5).

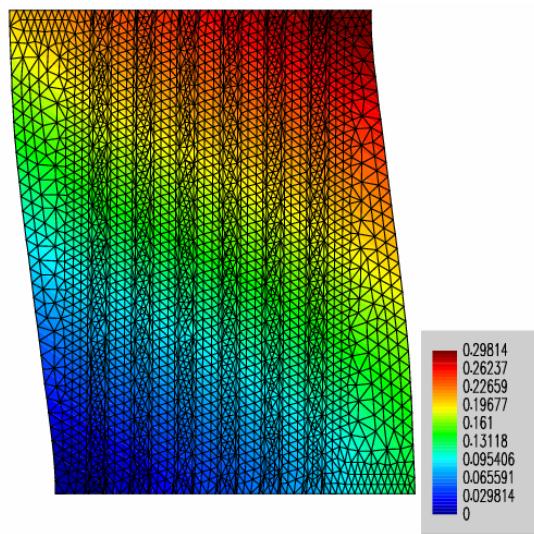


Figura 3.11 – Contornos de desplazamientos y deformada del micromodelo.

El micromodelo tiene la ventaja de poder realizar un análisis detallado de los procesos mecánicos que se desarrollan durante la aplicación de las cargas. En la Figura 3.11 se observa la tensión cortante que se genera en el material para distintos casos de carga. La Figura 3.12-1 muestra los estados tensionales en una etapa de carga en la que no se verifican tensiones superiores a los límites de proporcionalidad de los materiales que conforman el compuesto (ver la variable interna de plasticidad en la Figura 3.14). En la misma se ob-

servan que la zona de la matriz comprendida entre las fibras es la que presenta un estado tensional superior. A medida que aumentan los desplazamientos impuestos (Figura 3.12-2, Figura 3.12-3 y Figura 3.12-4) se observa una homogeneización del estado tensional en la matriz.

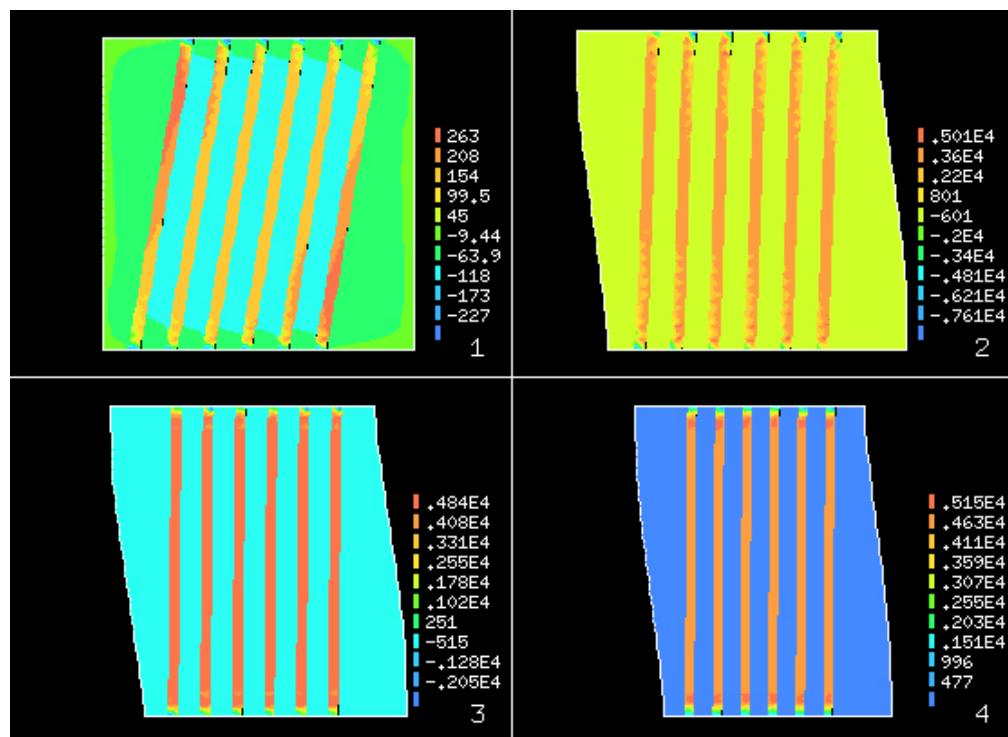


Figura 3.12 – Contornos de tensiones σ_{xy} para distintas etapas de carga.

En la Figura 3.13 se observan las tensiones en el micromodelo en la dirección del desplazamiento impuesto. La Figura 3.13-1 corresponde a un estado tensional en una etapa de carga en la que no se verifican tensiones superiores a los límites de proporcionalidad de los materiales que conforman el compuesto (ver Figura 3.14). En las Figura 3.13-2, Figura 3.13-3 y Figura 3.13-4 se observa el estado tensional en la dirección del desplazamiento impuesto a medida que los desplazamientos aumentan. En las mismas se observa que en los primeros pasos de carga la matriz tiene un estado tensional homogéneo en la dirección del esfuerzo aplicado. En la Figura Figura 3.13-2 se observa que el refuerzo aumenta considerablemente su estado tensional a medida que se alinea con la dirección del esfuerzo aplicado.

En la Figura 3.14 se observan los contornos de plasticidad a en cada uno de los componentes del compuesto. En la misma se observa que a medida que aumenta el desplazamiento impuesto se verifican deformaciones irreversibles en la matriz en la zona comprendida entre los refuerzos (ver Figura 3.14-2 y Figura 3.14-3). En la Figura 3.14-4 se observa que ya se ha superado el límite de proporcionalidad del refuerzo y por lo tanto se verifican también para esta fase deformaciones irreversibles.

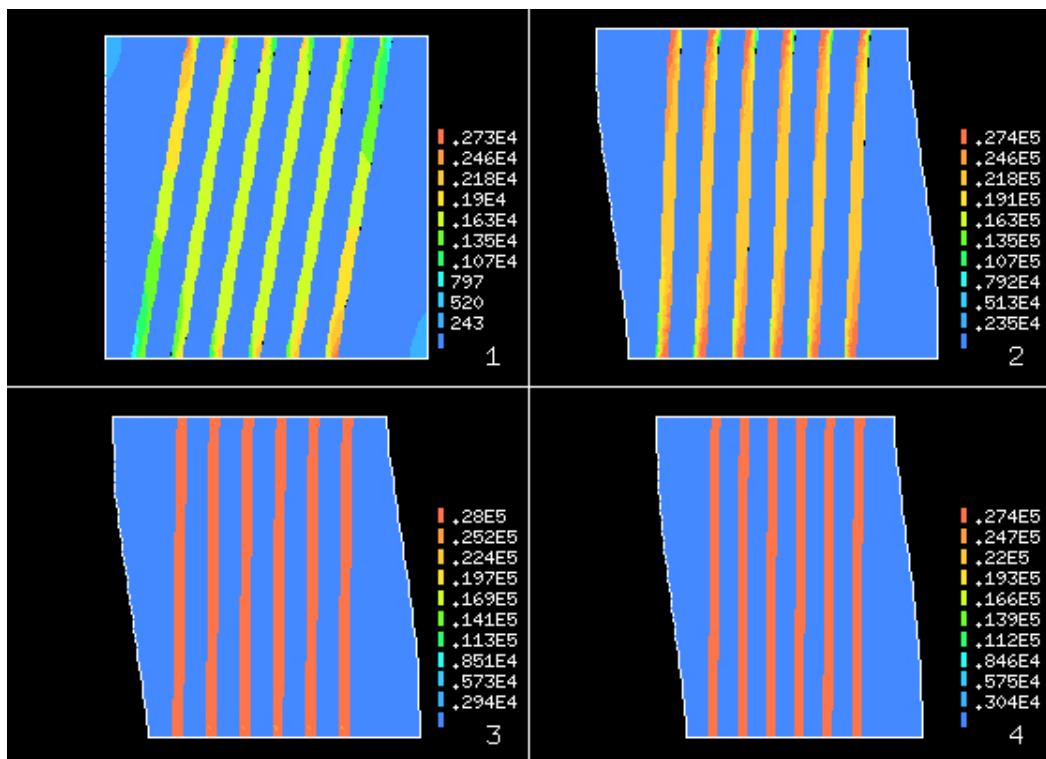


Figura 3.13 – Contornos de tensiones σ_{yy} para distintas etapas de carga.

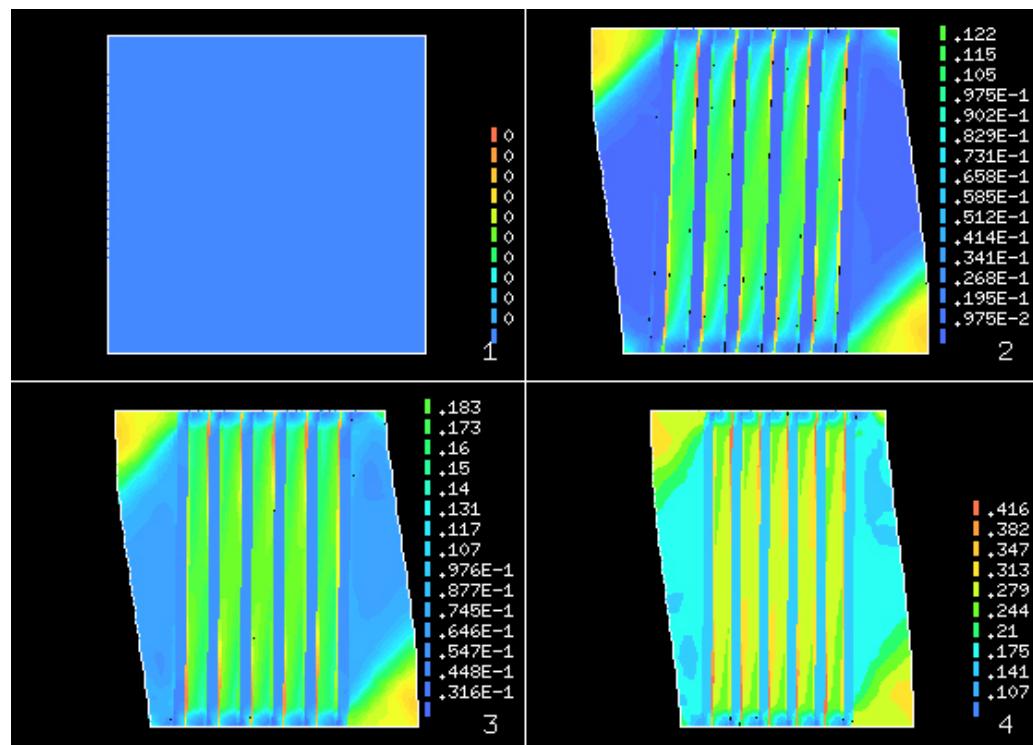


Figura 3.14 – Contornos de la variable interna de plasticidad en distintas etapas de carga.

En la Figura 3.15 se muestra la respuesta carga-desplazamiento del micromodelo y del macromodelo considerando distintos valores del módulo transversal de la fase de refuerzo. En la misma se observa que el valor del módulo elástico transversal de esta fase juega un papel fundamental en la respuesta del macromodelo. Para el caso en que el módulo cortante es nulo se observa que una vez que la matriz ha alcanzado su límite de proporcionalidad la respuesta del sistema disminuye hasta el momento en el que las fibras coinciden con la dirección del esfuerzo aplicado. A partir de este punto es la fase de refuerzo la que aporta rigidez al sistema. En la figura también se observa la respuesta considerando la hipótesis de pequeñas deformaciones. La respuesta del material, para este caso, una vez alcanzado el límite de proporcionalidad de la matriz, disminuye y no se observa que las fibras colaboran en la respuesta debido a que bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones no se verifica una actualización de la geometría con lo cual las fibras no pueden alinearse con la dirección del esfuerzo aplicado.

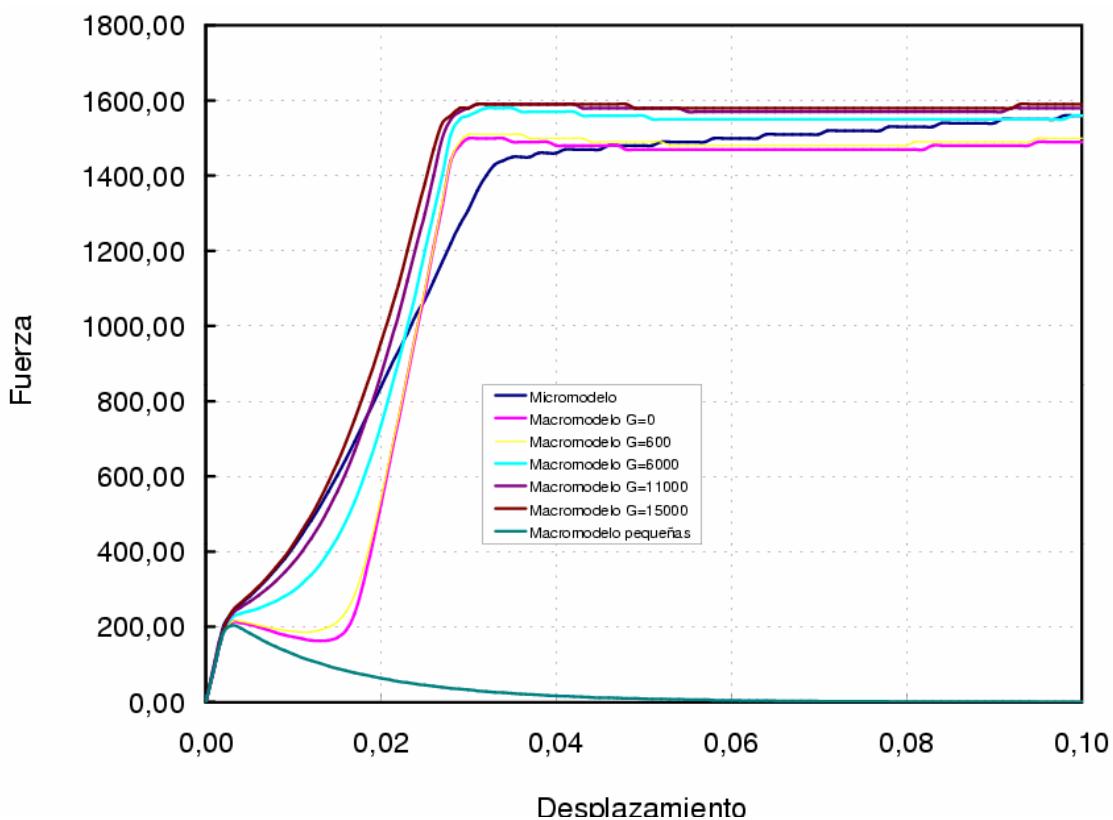


Figura 3.15 – Comparación micro-macromodelo. Curvas carga-desplazamiento.

3.11 Simulación del comportamiento de mezclas asfálticas.

3.11.1 Introducción

LA teoría de mezclas clásica, con los ajustes para refuerzos de corta longitud, presentado previamente, es bastante general y permite analizar diversos tipos de materiales compuestos. Entre ellos pueden citarse por ejemplo al hormigón armado, mezclas asfálticas y en general a todo material constituido por dos o más fases.

En este ejemplo se presenta la simulación numérica de un ensayo típico que se utiliza para caracterizar las mezclas asfálticas (Car et al., (1997)²⁷).

Para la simulación del comportamiento de una mezcla asfáltica se ha reproducido numéricamente el ensayo Marshall³². Este ensayo permite determinar la resistencia a la "deformación plástica de mezclas bituminosas". El procedimiento de ensayo en laboratorio puede utilizarse tanto para el proyecto de mezclas en laboratorio como para el posterior control en obra de la misma.

El ensayo Marshall consiste en determinar la resistencia de una probeta cilíndrica de 4" pulgadas de diámetro (101,6mm) y 2,5" pulgadas de altura (63,5mm), bajo una carga que actúa en forma diametral, a una temperatura aproximada de 60°C. El ensayo permite determinar dos valores:

- Estabilidad : carga necesaria para producir la falla de la probeta
- Deformación: disminución del diámetro expresado en [mm] que experimenta una probeta entre el comienzo de la carga y el instante de rotura.

El ensayo permite realizar curvas Cargas - Desplazamientos con las cuales es posible determinar los valores de estabilidad y deformación definidos anteriormente. Para mas detalles consultar la norma NLT-159/86.

3.11.2 Motivación y descripción del problema

La motivación del presente apartado, es mostrar en forma numérica el comportamiento de un material compuesto (mezcla bituminosa) sometido a la acción de cargas de servicio, utilizando el modelo constitutivo previamente desarrollado. Además se ha supuesto que la mezcla bituminosa sufre un daño exógeno al proceso mecánico, provocado por un potencial no-mecánico (problemas químicos, higrométricos, etc.). Esta mezcla bituminosa está constituida por una fase de refuerzo (áridos) y una matriz (betún). La evolución de la capacidad portante de la mezcla bituminosa es no-lineal, debido a que el agente exógeno que produce degradación en las características mecánicas de una o más fases del compuesto se acopla al problema mecánico.

En este estudio se han considerado tres mezclas bituminosas (Mezcla 1, Mezcla 2, Mezcla 3), según la curva granulométrica y el porcentaje de betún que se ha incorporado en la mezcla (ver Tabla 3.3, Figura 3.16 – y Figura 3.17). Las características granulométricas de

³² E. Yoder and M. Witczak, (1975). *Principles of Pavement Design* - John Wiley & Sons. USA.

los áridos de cada una de las mezclas es función de la posición que ocupa la mezcla en el perfil del firme.

Diámetro [mm]	% en peso que pasa		
	Mezcla 1	Mezcla 2	Mezcla 3
25	90	100	100
20	78	94	100
12,5	56	71	82
10	52	67	65
5	36	50	41
2,5	25	36	14
0,63	13	19	8
0,32	8	12	7
0,16	6	8	6
0,08	4	6	5
Ciego	0	0	0

Tabla 3.3 – Granulometría de los áridos de las distintas mezclas.

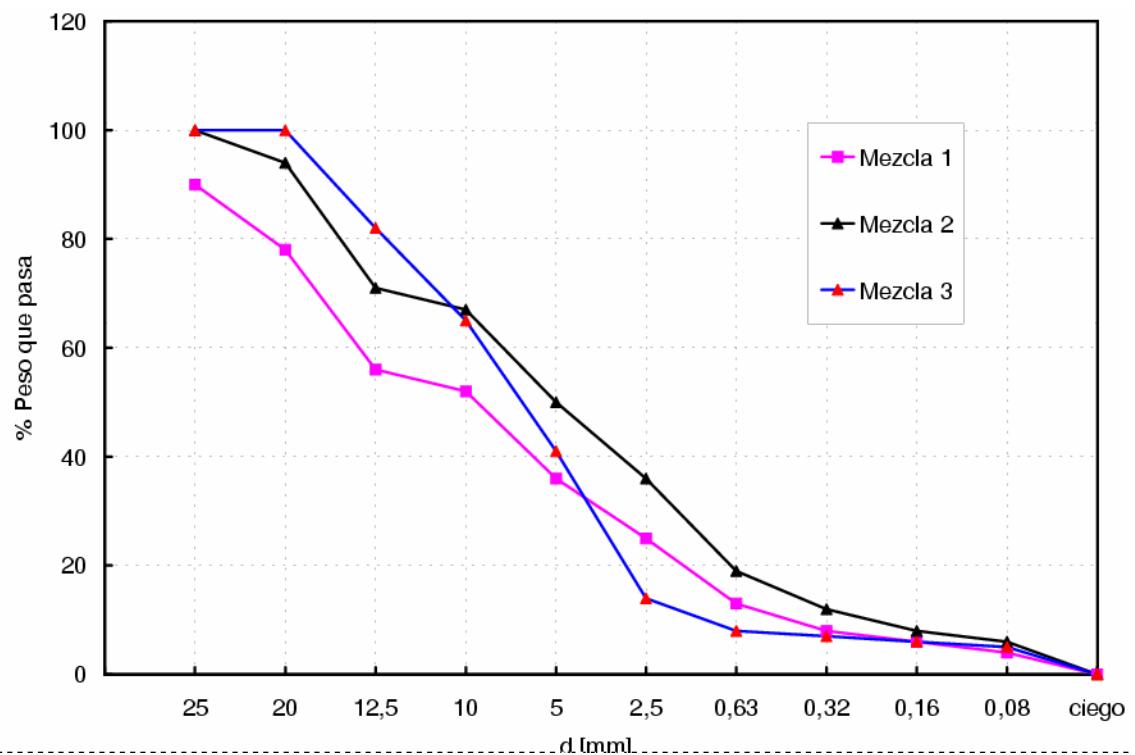


Figura 3.16 – Curva granulométrica de los áridos de las distintas mezclas.

Con el objetivo de simular numéricamente el comportamiento constitutivo del material la curva granulométrica de los áridos se ha simplificado y dividido en dos partes. En la **primera parte** están comprendidos los áridos cuyo tamaño está situada entre el tamiz 25 mm y 5 mm (grava y gravilla) y la **segunda parte** está compuesta de los áridos que pasan el

tamiz de diámetro 5 mm (arenas). En cada una de estas dos subdivisiones de la curva granulométrica se han considerado en porcentajes variables dos tipos de áridos, alterables frente a agentes externos no mecánicos (partículas blandas) y otros no alterables frente a un agente externo no mecánico. Además de los dos tipos básicos de áridos que integran cada mezcla, está el betún que participa en proporciones distintas en cada caso (ver participación en volumen en Figura 3.16 –).

A los fines de simular el comportamiento mecánico de la mezcla asfáltica con el modelo desarrollado se ha considerada que las distintas mezclas están constituidas por cinco fases:

- **Refuerzo en la zona alta de la curva granulométrica** (grava y gravilla) susceptible de presentar degradación en sus propiedades mecánicas debido a la existencia de un potencial externo no mecánico (partículas blandas).
- **Refuerzo en la zona alta de la curva granulométrica** (grava y gravilla) que no presenta degradación en sus propiedades mecánicas debido a la existencia de un potencial externo no mecánico (partículas duras).
- **Refuerzo en la zona alta de la curva granulométrica** (grava y gravilla) susceptible de presentar degradación en sus propiedades mecánicas debido a la existencia de un potencial externo no mecánico.
- **Refuerzo en la zona baja de la curva granulométrica** (arena) que no presenta degradación en sus propiedades mecánicas debido a la existencia de un potencial externo no mecánico.
- **Betún**

d [mm]	% en peso que pasa			% retenido acumulado			% retenido parcial		
	Mezcla 1	Mezcla 2	Mezcla 3	Mezcla 1	Mezcla 2	Mezcla 3	Mezcla 1	Mezcla 2	Mezcla 3
20	78	94	100	22	6	0	22	6	0
12,5	56	71	82	44	29	18	22	23	18
5	36	50	41	64	50	59	20	21	41
0,32	8	12	7	92	88	93	28	38	34
0,08	4	6	5	96	94	95	4	6	2
ciego	0	0	0	100	100	100	4	6	5
betún	3,7	4,4	4,6						

Tabla 3.4 – Granulometría simplificada de los áridos de las distintas mezclas.

3.11.3 Parametrización de los materiales. Granulometría simplificada y corrección de las propiedades por relación de aspecto

Se ha denominado Mezcla 1 a la curva granulométrica utilizada para la capa de base, Mezcla 2 a la utilizada en constituir la capa intermedia y Mezcla 3 la que incorpora la capa de rodadura. Estas mezclas bituminosas es posible considerarlas como un material compuesto reforzados con fibras cortas, es decir un refuerzo que debido a su escasa longitud no es posible realizar una transferencia de los esfuerzos de la matriz (betún) hacia el refuerzo (árido). Los áridos presentes en la mezcla bituminosa poseen dos tipologías claramente

identificables según su comportamiento. La primera tipología corresponde a partículas blandas susceptibles de ser afectadas por la humedad, perdiendo capacidad mecánica en forma de degradación de la rigidez, donde depende entre otros fenómenos de la evolución de, que es la variable de degradación por acción de la humedad. La segunda tipología de los áridos, partículas duras, son insensibles a la acción de la humedad.

Por razones de simplicidad en el cálculo, se sintetizan los diámetros que participan en cada curva granulométrica como se muestra en la Figura 3.16 – . De acuerdo a la forma, su separación, las propiedades mecánicas de los granos y su participación en el compuesto se deducen las propiedades corregidas de los áridos. Esta corrección sigue el criterio descrito en la referencia Car et al., (1997)²⁷. En la Tabla 3.4 se muestran las propiedades mecánicas y la corrección del módulo elástico del refuerzo teniendo en cuenta su longitud y distribución en el compuesto. Para módulo de Young del agregado en estado natural se adopta el valor $C_a = 300000 \text{ kp/cm}^2$ y corresponde a un material simple, homogéneo y continuo. En este caso el material participa en forma de grano, pierde parte de sus propiedades por condiciones de adherencia y transmisión de tensión entre matriz y árido, con lo cual se obtiene $C_a^{corr} = 1559,131 \text{ kp/cm}^2$, en tanto el módulo de Poisson se mantiene constante en $\nu = 0,15$. El módulo de Young adoptado para el betún es $C_b = 300000 \text{ kp/cm}^2$.

Corrección por fibra corta $C_b = 80,8529$									
L	r'	r	A	c_{mat}	ν_{mat}	g_{mat}	β	c_o	c_c
2	1,05	1,00	0,7854	80,375	0,4	28,705	0,12525	0,005197	1559,1311
1,25	0,65625	0,625	0,30679	80,375	0,4	28,705	0,20014	0,005197	1559,1311
0,5	0,2625	0,25	0,04908	80,375	0,4	28,705	0,50102	0,005197	1559,1311
0,032	0,0168	0,016	0,000201	80,375	0,4	28,705	7,82852	0,005197	1559,1311
0,008	0,0042	0,004	1,25666e-5	80,375	0,4	28,705	31,3140	0,005197	1559,1311
0,0001	0,0000525	0,00005	1,9635e-9	80,375	0,4	28,705	2505,12	0,005197	1559,1311

Tabla 3.5 –Parámetros mecánicos de los constituyentes y su corrección.

Las propiedades mecánicas del betún dependen fuertemente de la temperatura. En la simulación numérica se ha obtenido de una parametrización con el ensayo Marshall de la mezcla, teniendo en cuenta su participación volumétrica y la teoría de mezclas (Car et al., (1998)²⁸).

La tensión umbral de inicio del comportamiento inelástico, se obtiene también a partir de una parametrización con el ensayo Marshall. Por ejemplo, para la Mezcla 2, se acepta que el inicio del comportamiento no-lineal de la mezcla $\sigma_{\text{Marshall}}^Y = 20 \text{ kg/cm}^2$. Este umbral está muy condicionado por la plasticidad en el betún. Luego de un cierto desarrollo del ensayo, se observa un fuerte quiebre en la curva, instante en el que se inicia el comportamiento inelástico del árido. Esto ocurre cuando el betún ya exhibe una deformación excesiva, permitiendo el contacto de los áridos entre sí. Por esta razón, y apoyado en la condición de compatibilidad del compuesto, se puede obtener el umbral de plastificación del betún para el instante en que se inicia el comportamiento no-lineal de la mezcla.

El umbral de daño del árido se produce cuando el comportamiento plástico del betún es avanzado, luego del primer umbral de comportamiento inelástico de la mezcla.

3.11.4 Simulación Numérica

Para la simulación numérica del ensayo se ha discretizado una circunferencia de 101,6 mm. de diámetro y dos sectores de circunferencia constituidos en acero, que simulan las mordazas de la prensa utilizada en el ensayo. La malla de elementos finitos utilizada tiene 431 nodos y 776 elementos finitos triangulares lineales considerando un estado de tensiones planas y por lo tanto permitiendo el flujo del material en el sentido axial (ver Figura 3.17).

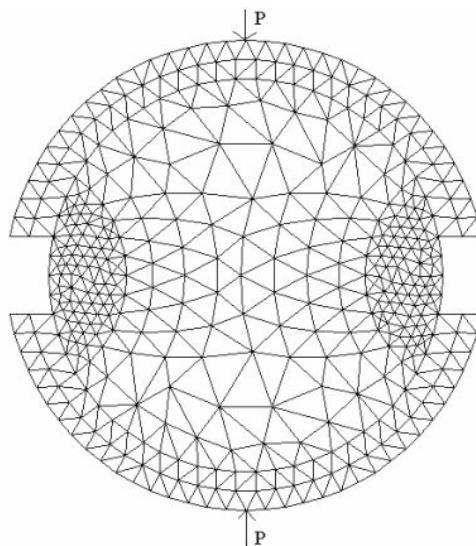


Figura 3.17 – Malla de elementos finitos del ensayo Marshall para mezclas asfálticas.

El casquete exterior del cilindro es de acero. Entre el acero y la mezcla bituminosa, se considera deslizamiento, por fricción, de la mezcla bituminosa gracias al control de la tensión tangencial entre ambos materiales.

Del ensayo se obtienen curvas Cargas - Desplazamientos con las cuales es posible determinar los valores de estabilidad y deformación definidos en la Norma NLT-159/86.

En la simulación numérica se ha utilizado la teoría de mezclas de sustancias básicas. La capa intermedia C-2 y la base C-1 del firme, se han modelado como materiales compuestos con tres componentes básicos cada uno de ellos:

Mezcla 1:

- **Material M-1.a:** corresponde al árido comprendido entre 20 y 5 mm. de la curva granulométrica C-1. Participa en un 58,62% y presenta un daño inicial en función de la humedad y es mecánicamente degradable.
- **Material M-1.b:** corresponde al árido comprendido entre 0,32 mm. y el tamiz ciego de la curva granulométrica C-1. Participa en un 32,97%, siendo degradable por problemas mecánicos, pero insensible a la influencia de la humedad.
- **Material M-1.c:** corresponde al betún. Este material participa en un 8,41% del volumen de la mezcla y presenta un comportamiento elasto-plástico.

Mezcla 2:

- **Material M-2.a:** corresponde al árido comprendido entre 20 y 5 mm. de la curva granulométrica C-2. Participa en un 45,02% y presenta un daño inicial en función de la humedad y es mecánicamente degradable.
- **Material M-2.b:** corresponde al árido comprendido entre 0,32 mm. y el tamiz ciego de la curva granulométrica C-2. Participa en un 45,02%, siendo degradable por problemas mecánicos, pero insensible a la influencia de la humedad.
- **Material M-2.c:** corresponde al betún. Este material participa en un 9,96% del volumen de la mezcla y presenta un comportamiento elasto-plástico.

En la Figura 3.18-1 se observa la malla de elementos finitos y los materiales empleados en la simulación numérica. En la Figura 3.18-2, Figura 3.18-3, y Figura 3.18-4 se muestran los contornos de evolución del daño en la mezcla M-2 para tres estados distintos del proceso de carga. Particularmente la Figura 3.18-2 muestra el daño mecánico en la mezcla M-2 partiendo de un daño higrométrico inicial nulo. La escala que se observa muestra el daño mecánico que alcanza todo este material. La Figura 3.18-4 muestra el daño mecánico de la mezcla M-2 considerando que la porción de agregado pétreo susceptible de daño no colabora en la capacidad soporte de la mezcla, es decir se encuentra con un daño inicial del 100%.

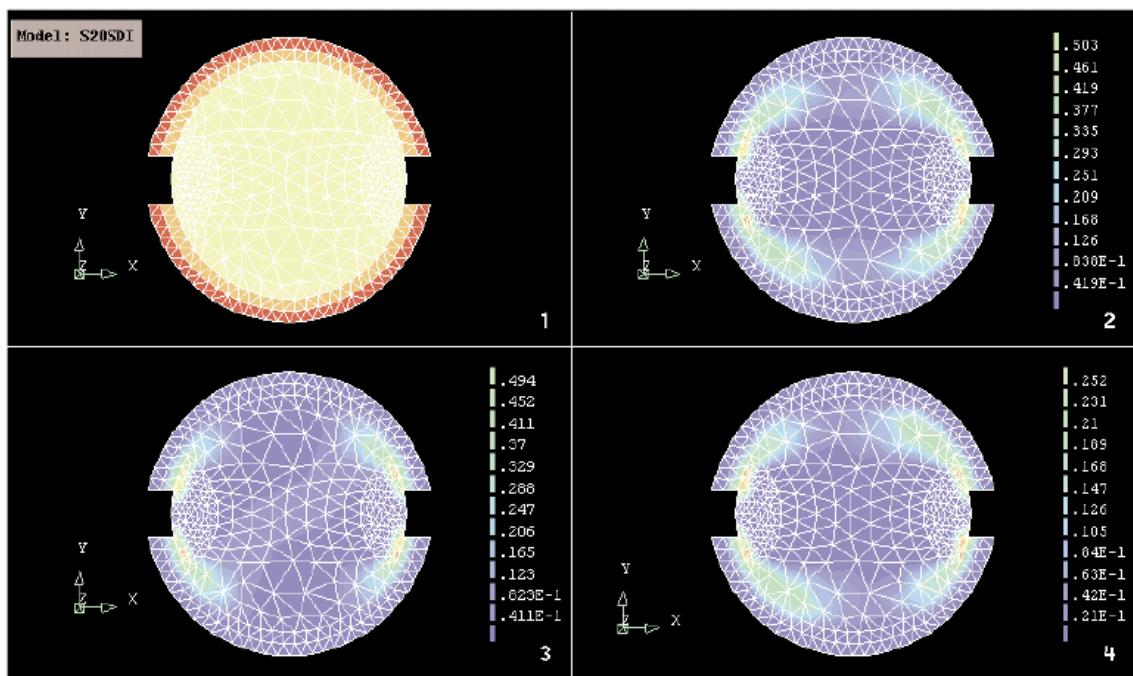


Figura 3.18 – Mapa de los materiales empleados - Variable interna de daño.

El problema se resuelve en tensión plana, permitiendo el flujo del material en el sentido axial. El casquete exterior del cilindro es de acero y el interior esta conformado por cada una de las tres mezclas. Entre el acero y la mezcla bituminosa, se considera deslizamiento, por fricción, gracias al control de la tensión tangencial entre ambos materiales. Los resultados obtenidos en las simulaciones numéricas se presentan en la Figura 3.19, Figura 3.20, Figura 3.21 y Figura 3.22. En todas ellas se observa una disminución del módulo de carga $K = p/\delta$ a medida que aumenta el daño inicial. Sin embargo, hasta valores del 40% de daño inicial en la mezcla 1 no se observa una gran pérdida de resistencia, situación que se manifiesta para desplazamientos superiores a 2mm aproximadamente.

Se observa, en las Figura 3.19 y Figura 3.20 para la mezcla M-2 y en la Figura 3.21 y Figura 3.22 para la mezcla M-1, una pérdida de rigidez y resistencia en función de la carga y del daño producido por efectos higrométricos. En ambos casos la capacidad soporte tiende asintóticamente a un valor cercano al 42% de la máxima para el caso del material virgen. Es necesario hacer notar, que la respuesta experimental presente un buen acuerdo con las respuestas "sin daño" mostradas en la Figura 3.19 y Figura 3.21.

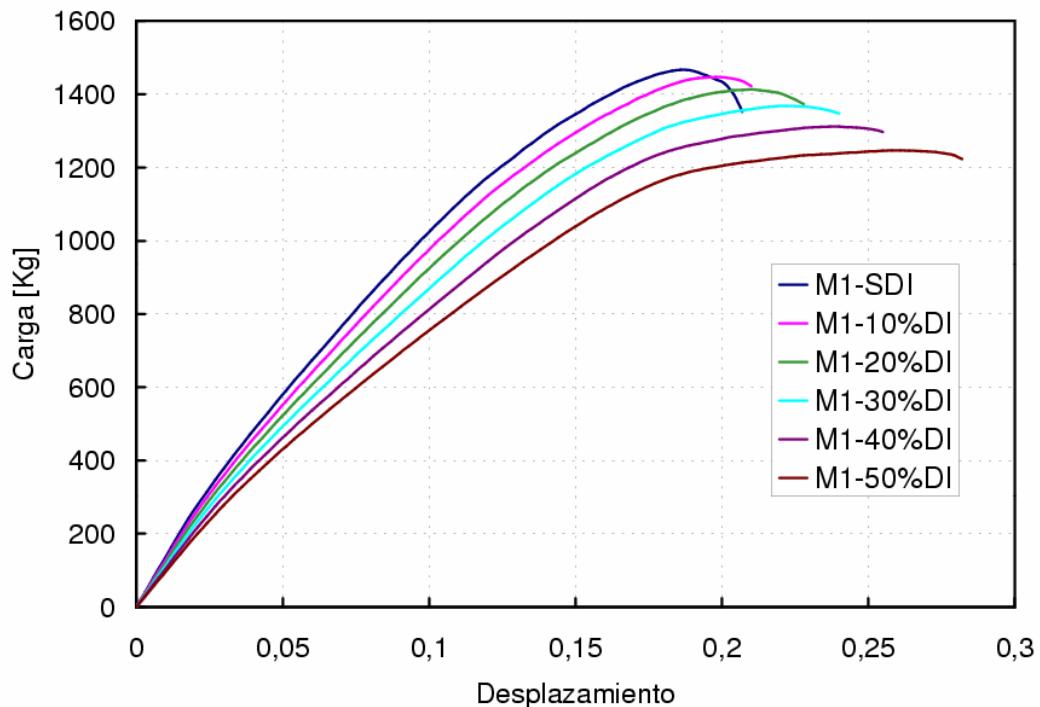


Figura 3.19 – Curvas de respuesta del ensayo Marshall para la **Mezcla-1** $0 \leq d \leq 0,5$.

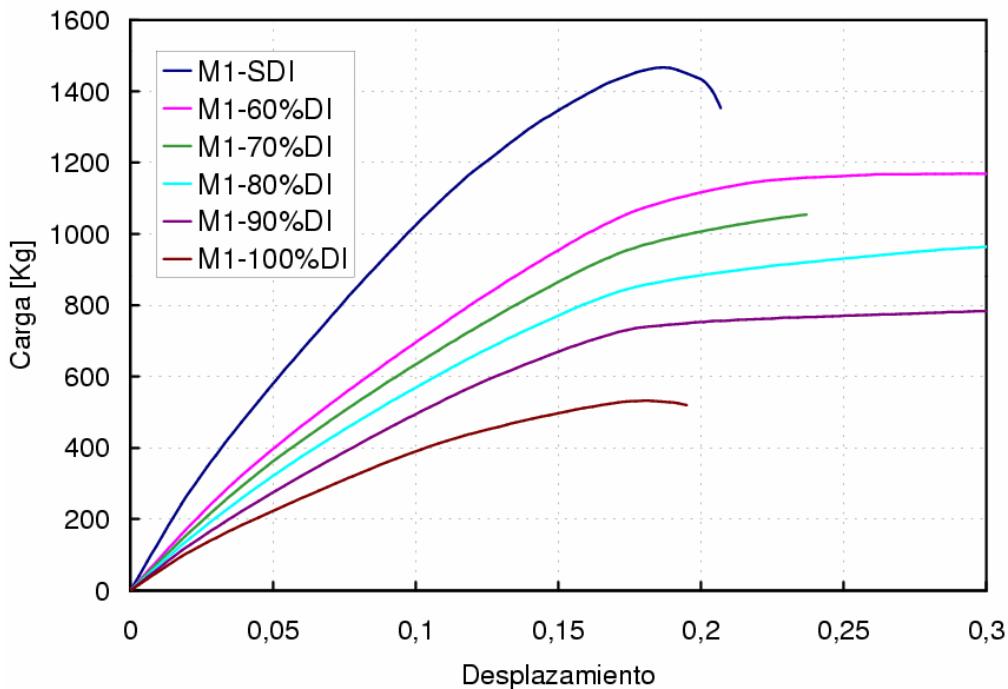


Figura 3.20 – Curvas de respuesta del ensayo Marshall para la **Mezcla-1** $0,5 \leq d \leq 1$.

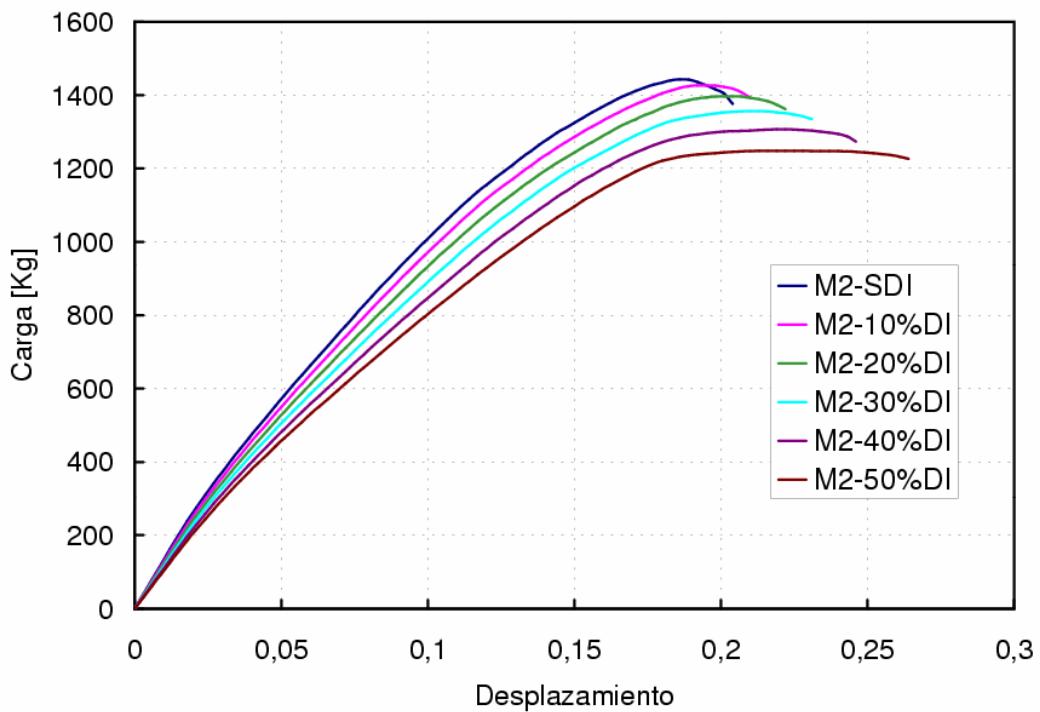


Figura 3.21 – Curvas de respuesta del ensayo Marshall para la **Mezcla-2** $0 \leq d \leq 0,5$.

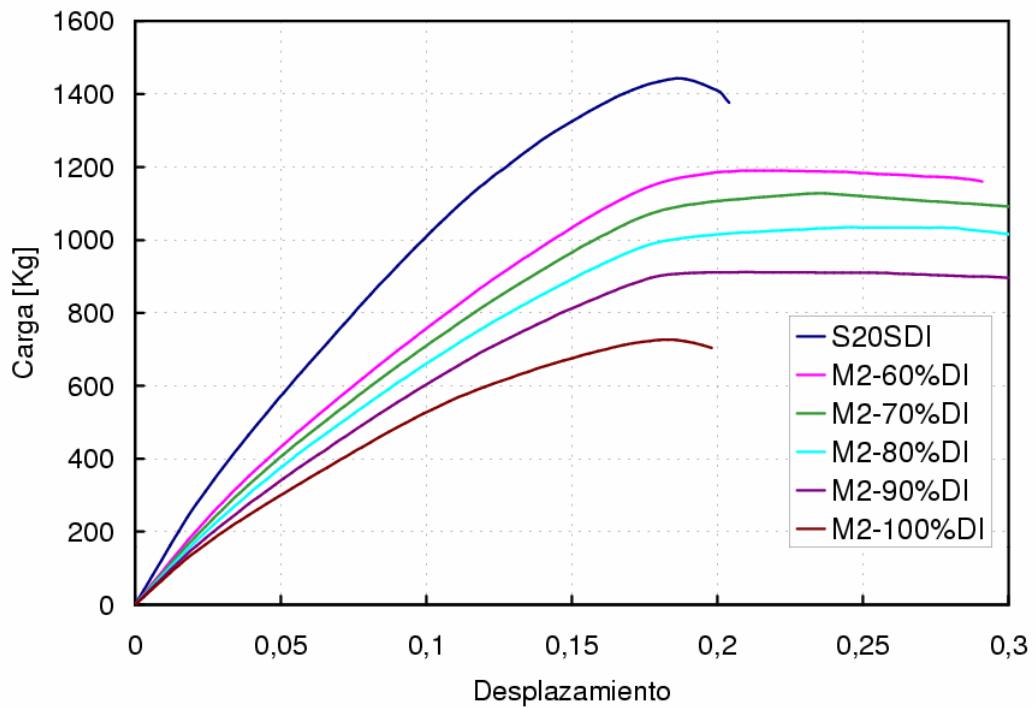


Figura 3.22 – Curvas de respuesta del ensayo Marshall para la **Mezcla-1** $0,5 \leq d \leq 1$.

4 DESLIZAMIENTO FIBRA-MATRIZ (DFM)

4.1 Introducción.

El objetivo de éste capítulo es introducir en la *teoría de mezclas* el fenómeno de movimiento relativo de cuerpo rígido que ocurre entre la fase de refuerzo y la de matriz cuando se excede la tensión de adherencia entre ambos componentes.

Entre las causas del comportamiento no-lineal de los materiales compuestos reforzados con fibras está el fenómeno de formación de grietas en la matriz, acompañada del deslizamiento o movimiento relativo entre fibra y matriz. Este fenómeno se conoce en la literatura en inglés como "*debonding*" y se caracteriza porque el agrietamiento de la matriz y el deslizamiento relativo entre fibra y matriz. Esta pérdida de adherencia se manifiesta como una pérdida de rigidez del material compuesto e induce a movimientos que pueden representarse en forma de deformaciones inelásticas, o no-recuperables, entre la fibra y la matriz. El fenómeno antes mencionado se designará en este trabajo con las siglas "DFM" (Deslizamiento Fibra-Matriz).

Al tratarse de un fenómeno de despegue, o movimiento relativo entre fibra y matriz, es necesario primero estudiar el mecanismo de transferencia del esfuerzo entre matriz y fibra. En las estructuras o piezas constituidas por materiales compuestos los esfuerzos se transfieren desde la matriz a la fibra debido a que las solicitudes son impuestas en la matriz del conjunto.

Los materiales compuestos están constituidos, en general, por una fase que presenta baja resistencia –matriz–, y una fase de refuerzo que excede la resistencia de la matriz.

En los materiales compuestos reforzados con fibras el agrietamiento en la matriz, o apertura de fisuras, está acompañada por el fenómeno de despegue de las fibras y por el posterior deslizamiento entre ambos (DFM). El proceso de apertura de fisuras en la matriz ocurre a niveles de tensiones que resultan significativamente menores que el nivel tensional necesario para producir la rotura de las fibras. La rotura de la matriz ocurre a valores bajos de tensión y está usualmente alineado con la dirección de las tensiones principales, produciendo una disminución en la rigidez e induciendo deformaciones inelásticas y ciclos de histéresis (Beyerley *et al.* (1992)¹), (Pryce and Smith, (1992))².

Durante los últimos años se han propuesto diversos modelos con la finalidad de modelizar la micro-mecánica del fenómeno "DFM" en los materiales compuestos de matriz reforzada (Hild and Burr, (1996)³), (Owen and Lynnes (1972)⁴), (Agarwal and Ban-

¹ Beyerley D. and Spearing S. M. and Zok F. W. and Evans A. G. (1992). Damage, degradation and failure in a unidirectional ceramic-matrix composite. J. Am. Ceram. Soc., vol. 75, pp. 2719-2725.

² Pryce A. W. and Smith P. A. (1992). Modelling of the stress/strain behavior of unidirectional ceramic matrix composite laminates. J. Mater. Sci., vol. 27, pp. 2695-2704.

reforzada (Hild and Burr, (1996)³), (Owen and Lynnes (1972)⁴), (Agarwal and Bansal(1979)⁵).

4.2 Distribución de tensiones a lo largo de la fibra de refuerzo

El análisis de la distribución de tensiones a lo largo de una fibra debe tener en cuenta los estados tensionales complejos que se desarrollan en los extremos de las fibras. A medida que la relación entre la longitud l y el diámetro d disminuye, los fenómenos que se producen en los extremos del refuerzo afectan en modo considerable la rigidez del conjunto.

La transferencia de tensiones entre matriz y fibras tiene lugar a través de la interfaz existente entre ambas fases. El mecanismo de transferencia de esfuerzos entre las fases se ve afectado por diversos factores tales como la química de la interface y la fibra, el tratamiento superficial de las fibras, la fracción de volumen de fibras y las condiciones de temperatura y humedad.

El mecanismo de transferencia de tensiones entre fibra y matriz se observa en la Figura 4.1a. En esta figura se considera una fibra de longitud l embebida en una matriz y orientada en la dirección de la carga. La tensión aplicada a la matriz se transfiere a la fibra a través de la interface. La matriz y la fibra experimentan diferentes deformaciones a tracción debido a la diferencia entre los módulos elásticos de la matriz y la fibra. En la Figura 4.1a se observa también que la deformación en los extremos de las fibras es menor que en la matriz. Como resultado de esta diferencia en las deformaciones entre ambas fases se inducen tensiones cortantes alrededor de la fibra en la dirección de su eje longitudinal y la fibra se encuentra sometida a un estado de tracción (Figura 4.1b., ver también en el capítulo “Teoría de Mezclas”). La resistencia de la interfaz fibra-matriz es relativamente baja.

La Figura 4.1b. muestra la distribución de las tensiones en una fibra paralela a la dirección de la carga. Esta distribución supone las siguientes hipótesis:

1. Se considera un comportamiento elástico de fibra y matriz
2. La interfaz es delgada y proporciona una buena transferencia de las tensiones entre los dos componentes.

De acuerdo con estas hipótesis la tensión axial resultante en el extremo de la fibra resulta nula y máxima en la zona central de la misma. Por el contrario las tensiones tangenciales resultan máximas en los extremos y decrecen hasta anularse en la zona central, en el caso de fibras suficientemente largas. Este análisis se ha corroborado a través de ensayos de fotoelasticidad y espectroscopía de láser Raman (Hull (1987)⁶).

³ Hild F. and Burr A. (1996). Matrix Cracking and Debonding of Ceramic-Matrix Composites. Int. J. Solids Structures Vol. 33 No. 8, pp. 1209-1220.

⁴ Owen D.R.J. and Lyness J.F. (1972). Investigation of bond failure in fibre-reinforced materials by the finite element method. Fibre Sci. Technol., vol. 5, pp. 129-141.

⁵ Agarwal B. D. and Bansal R. K. (1979). Effect of an interfacial layer on the properties of fibrouscomposites: a theoretical analysis. Fibre Sci. Technol. vol. 5, pp. 129-141.

⁶ Hull D. (1987). *Materiales compuestos*. Editorial Reverté, España.

En el caso de superarse la resistencia máxima a cortadura de la interfaz, o del material de la matriz circundante, se producirá la rotura de la interface y el consiguiente deslizamiento relativo entre fibra y matriz. El fallo a cortadura no implica necesariamente que la matriz sea incapaz de transmitir tensiones a la fibra debido a la existencia de fuerzas de fricción entre fibra e interface. La importancia de este fenómeno depende de las propiedades de las fibras, de la resina y del volumen total de fibras en el material compuesto.

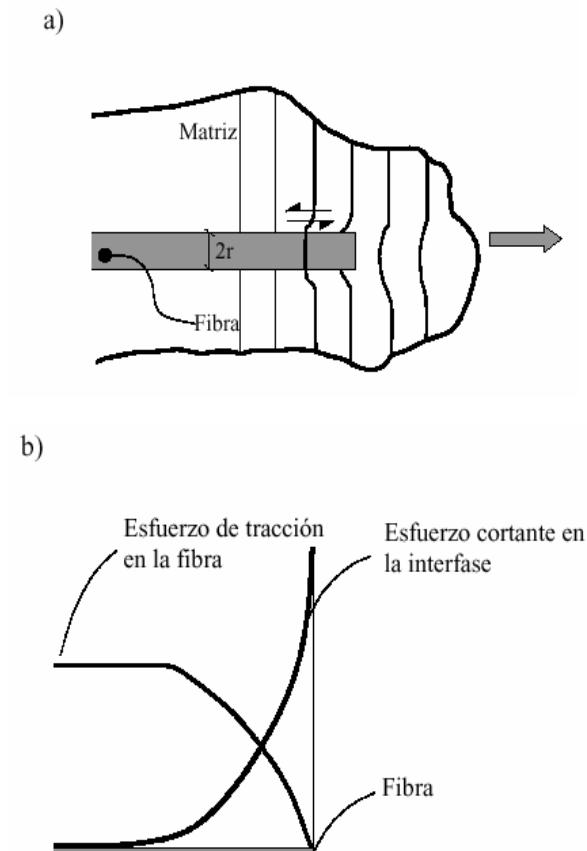


Figura 4.1 - a) Deformación en una fibra discontinua embebida en una matriz sometida a tracción. b) Distribución de tensiones de tracción y cortantes en una fibra.

4.3 Interacción entre grietas y fibras

Algunas de las interacciones importantes que ocurren durante los procesos de rotura pueden ser entendidas considerando los mecanismos que se desarrollan cuando una grieta aguda de la matriz entra en contacto con una fibra como se muestra en la Figura 4.2. En ésta figura se muestran los esfuerzos que se generan cuando una grieta aguda y frágil entra en contacto con una fibra. Una grieta sometida a un esfuerzo de tracción unidireccional normal al plano de la misma genera esfuerzos adicionales.

La concentración de esfuerzos alrededor de una grieta es función del radio de curvatura del extremo de la grieta ρ y a la longitud l de la misma y está dada por la expresión $(l/\rho)^{1/2}$. Para una grieta sometida a un esfuerzo de tracción unidireccional normal al plano de la misma se generan, debido a la presencia de la fisura, esfuerzos a tracción adicionales paralelos al plano de la misma. En la Figura 4.2 se muestra los esfuerzos en el extremo de una grieta elíptica. La tensión máxima de tracción σ_1 se produce en el extremo de la fisura y la tensión de tracción σ_2 paralelo a la grieta se produce justo delante del extremo de la misma. Existe también una tensión tangencial τ en el plano normal al plano de la grieta.

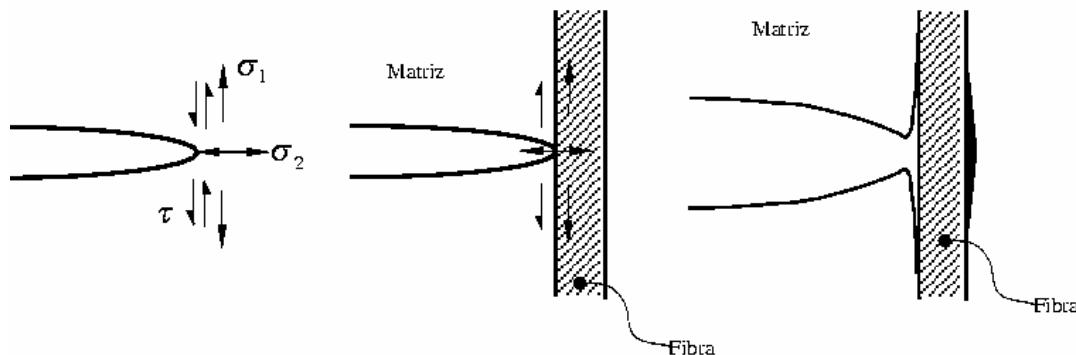


Figura 4.2 – a) Representación esquemática de tensiones en el extremo de una grieta. b) Extremo de grieta en la interface de la fibra. c) Rotura de interface.

La tensión σ_1 en el extremo de la grieta tiende a causar la rotura de la fibra, la tensión σ_2 conduce a una separación por tracción en la interface y la tensión τ causa la rotura a cortante de la matriz. En la mayoría de los materiales compuestos se verifica la rotura por cortante de la interface pero no se produce una descarga completa de la fibra debido a la presencia de fuerzas friccionales entre fibra y matriz.

El grado relativo de rotura de la interface y la magnitud de las fuerzas de fricción determinan el tipo de rotura. El tipo de rotura depende fundamentalmente de la resistencia del material compuesto en las direcciones paralela y perpendicular a la fibra así como de la resistencia a cortante. En la mayoría de los materiales compuestos la relación entre el esfuerzo último paralelo a la dirección del refuerzo y el esfuerzo último cortante es elevada y por lo tanto el agrietamiento por cortadura en la interfaz se produce antes que la rotura de las fibras y se observa una separación masiva entre fibra y matriz. Debido a que el proceso de fisuración de la matriz se produce a valores relativamente bajos comparados con la resistencia del refuerzo se asume que ambos mecanismos no están acoplados. Cuando se produce este mecanismo no se verifica una completa descarga debido a la existencia de fuerzas friccionales. En la Figura 4.3 se muestra la superficie de rotura en una resina epoxy con fibra de Kevlar 49 (Hull (1987)⁶). La superficie de rotura es muy fibrosa en apariencia con gran cantidad de arranque de fibra.

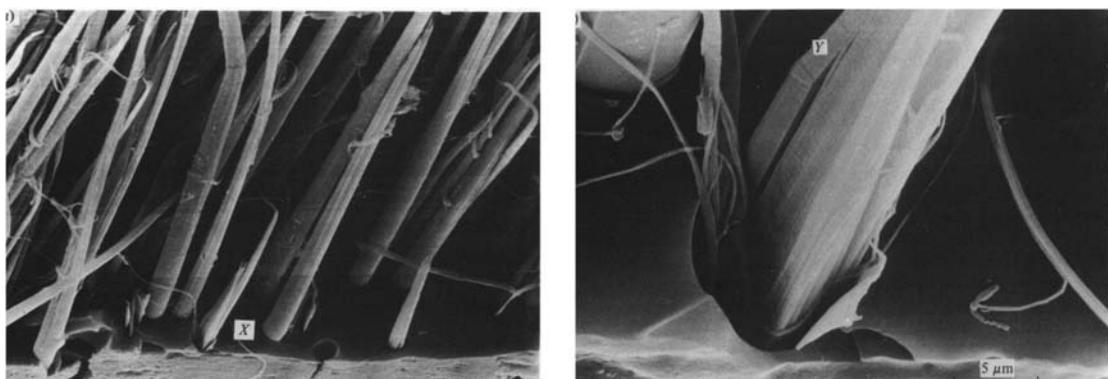


Figura 4.3 - a) Rotura fibrosa de un material compuesto. b) Detalle de rotura fibrosa.

4.4 Modelos constitutivos para materiales compuestos con "DFM"

La mayoría de las investigaciones realizadas para determinar el comportamiento efectivo de materiales compuestos reforzados se basan en la hipótesis de adherencia perfecta entre ambas fases. El fenómeno de separación entre las fases o "*debonding*" es común en este tipo de materiales y debe tenerse en cuenta en el análisis del comportamiento mecánico de este tipo de material. Debido a la ausencia de uniformidad que se observa en el campo de desplazamientos, la incorporación de este fenómeno en la *Teoría de Mezclas* se debe realizar en el modelo constitutivo.

Diversos autores han estudiado este fenómeno utilizando el método de los elementos finitos. La gran mayoría de estos estudios se basan en permitir la ausencia de contacto entre fibra y matriz y emplear un procedimiento numérico para estudiar el fenómeno (Owen and Lynnes(1972)⁴). Otros estudios se basan en introducir una capa entre los componentes con el objetivo de simular la zona de interface entre fibra y matriz (Agarwal and Bansal (1979)⁵). Lené y Leguillon proponen un modelo que permite un deslizamiento tangencial entre fibra y matriz y utilizan el método de homogeneización conjuntamente con el método de los elementos finitos para modelar el comportamiento del material compuesto.

El comportamiento de materiales compuestos sin considerar el fenómeno de despegue entre fibra y matriz ha sido investigado por Aboudi (1982 y 1984)^{7,8}, utilizando un desarrollo de Legendre en una celda representativa. Posteriormente Beneviste y Aboudi (1984)⁹ modificaron su modelo para tener en cuenta el fenómeno de despegue entre fibra y matriz. El fenómeno de "*debonding*" se simula imponiendo la condición de continuidad en los desplazamientos normales en la zona de interface fibra-matriz, permitiendo el deslizamiento tangencial en esta zona. El concepto de deslizamiento tangencial ha sido usado por Drumheller (1973)¹⁰ para simular el fenómeno de "*debonding*" en materiales

⁷ Aboudi J. (1982). A continuum theory for fiber-reinforced elastic viscoplastic composites. Int. J. Engng. Sci., vol. 20, pp. 605-621.

⁸ Aboudi J. (1984). Effective behaviour of inelastic fiber-reinforced composites. Int. J. Engng. Sci., vol. 22, pp. 439-449.

⁹ Benveniste Y. and Aboudi J. (1984)A continuum model for fiber reinforced materials with debonding. Int. J. Solids Struct. vol. 20, pp. 935.

por Drumheller (1973)¹⁰ para simular el fenómeno de "debonding" en materiales compuestos bilaminados periódicos. Drumheller estudia el efecto del "debonding" en la propagación de ondas en un medio laminado y está basado en el uso de las ecuaciones de la elasto-dinámica. Beneviste y Aboudi utilizan su modelo para estudiar la velocidad de propagación de ondas en materiales compuesto reforzados con fibras.

Otros autores proponen un modelo basado en la micromecánica del fenómeno (Cox (1952)¹¹), (Aveston et alt. (1971)¹²), (Hsueh (1993)¹³). Todos estos modelos utilizan una celda de longitud $2 \cdot l$ del tamaño de la separación entre fisuras y está constituida por materiales diferentes designados por 1 y 2 (ver Figura 4.4). Se supone la existencia de una fisura de tamaño $2 \cdot a$ en la zona central de la celda y una longitud de fricción $2 \cdot l_f$. Durante el fenómeno "DFM" y debido a la presencia de rozamiento entre fibra y matriz existe una diferencia de temperatura entre los materiales 1 y 2.

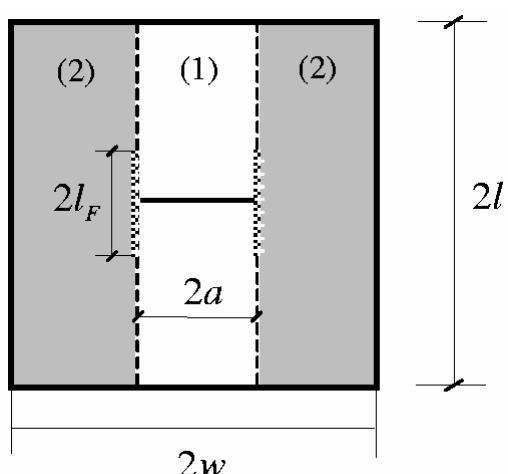


Figura 4.4 – Celda elemental de $(2l \times 2w)$ que contiene la fisura de tamaño $2a$.

Para caracterizar el estado del material compuesto se necesitan cuatro variables: la deformación total, la longitud de fricción $2 \cdot l_f$, a longitud de la celda $2 \cdot l$ y la apertura de la fisura en la matriz Δ (ver Figura 4.4). La deformación en la zona 2 es una función que depende de la interfaz. La densidad de energía libre del modelo se obtiene considerando la superposición de dos fenómenos. El primer paso consiste en obtener la densidad de energía cuando la parte 2 se mueve, respecto de la parte 1, una magnitud Δ a lo largo de la longitud l_f sin la acción de cargas externas. El segundo paso consiste en cargar el sistema fisurado impidiendo que se desarrolle los fenómenos de fricción. La presencia de la fisura en la matriz produce una reducción en la rigidez que se define a través de una variable interna D . Esta variable interna depende de la densidad de fisuras y de las pro-

¹⁰ Drumheller (1973). An effect of debonding on stress wave propagation in a composite material.

J. Appl. Mech., vol. 40, pp. 1146-1157.

¹¹ Cox H. L. (1952). The elasticity and the strength of paper and other fibrous materials. Br. J. Appl. Phys., vol. 3, pp. 72-79.

¹² Aveston J. and Cooper G. A. and Kelly A. (1971). Single and multiple fracture. Conference Proceedings of the National Physical Laboratory: Properties of Fiber Composites.

¹³ Hsueh C. H. (1993). Evaluation of interfacial properties of fiber-reinforced ceramic composites using a mechanical properties microprobe. J. Am. Ceram. Soc., vol. 76, pp. 3041-3050.

piedades elásticas de ambas fases. La energía libre total es la suma producida por ambos fenómenos y está dada por:

$$\psi = \frac{1}{2}(1-D)\mathbf{c}:(\bar{\boldsymbol{\epsilon}} - \boldsymbol{\epsilon}^i) + \frac{1}{2d}\mathbf{c}^*:(\boldsymbol{\epsilon}^i)^2 \quad (4.1)$$

donde $\boldsymbol{\epsilon}^i$ representa las deformaciones inelásticas debido al deslizamiento entre las dos fases.

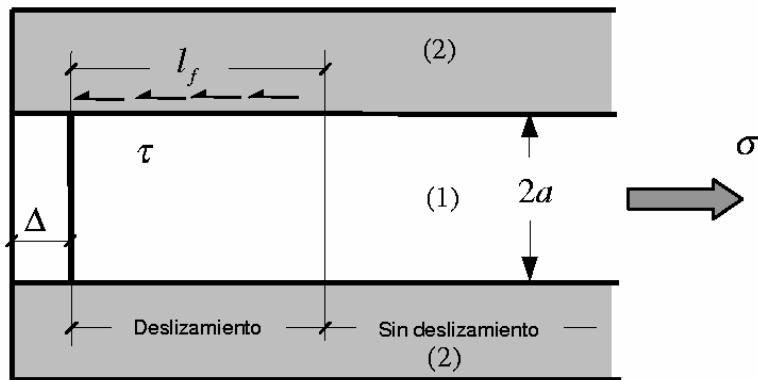


Figura 4.5 – Esfuerzos debido al movimiento de la fase (1) respecto de la fase (2).

La ley de evolución de las variables internas del problema ($D, d, \boldsymbol{\epsilon}^i$) se establece teniendo en cuenta el proceso de fragmentación en un modelo con tensiones cortantes constantes a lo largo de la zona de fricción (Curtin (1991)¹⁴). Hild et al. (1996)¹⁵ propone un método práctico para determinar la ley de evolución de las variables internas a través de resultados experimentales. Esta metodología tiene el inconveniente de que para cada tipo de material o para el mismo material con distintas participaciones volumétricas de matriz y refuerzo es necesario realizar una serie de ensayos que permitan identificar las leyes de evolución de las variables internas.

Posteriormente Hutchinson y Jensen (1990)¹⁶ presentan diversos modelos para fibras embebidas en una matriz frágil, restringiendo el análisis a materiales compuestos con tensiones de compresión actuando en la interface fibra matriz y considerando que durante el fenómeno de arranque después de la rotura de las fibras existe fricción. La interacción fibra matriz se modela a través de una celda cilíndrica considerando dos tipos de condiciones de borde: una modelando fibra-matriz aislada y otra considerando una matriz conteniendo un conjunto de fibras unidireccionales. Se considera que las fibras son isótropas transversalmente a lo largo de su eje longitudinal y que la matriz es isótropa.

¹⁴ Curtin W. A. (1991).Exact theory of fiber fragmentation in single-filament composite. J. Mater. Sci. vol. 26, pp. 5239-5253.

¹⁵ Hild F. and Burr A. (1996). Matrix Cracking and Debonding of Ceramic-Matrix Composites. Int. J. Solids Structures Vol. 33 No. 8, pp. 1209-1220.

¹⁶ Hutchinson J. W. and Jensen H. M. (1990). Models of fiber debonding and pullout in brittle composites with friction. Mechanics of Materials, vol. 9, pp. 139-163.

Posteriormente Hild, Burr y Leckie (1995)¹⁷ presentan un modelo micro mecánico, basado en la mecánica de medios continuos, que permite tener en cuenta los efectos de la rotura de la matriz y el deslizamiento relativo entre fibra y matriz. Este modelo utiliza cuatro variables de estado y la energía libre del sistema se calcula en función de estas variables.

4.5 Propuesta para el tratamiento del “DFM”

El objetivo del apartado es realizar modificaciones al modelo constitutivo presentado en los capítulos anteriores que permita tener en cuenta el fenómeno "DFM" en los materiales compuestos reforzados con fibras.

El análisis de los materiales compuestos en este trabajo se realiza utilizando la teoría de mezclas de sustancias básicas (ver Capítulo 3). A modo de recordatorio, conviene destacar que esta teoría se basa en la combinación e interacción de las sustancias básicas que conforman el compuesto. Se considera que en cada punto del material en análisis participan todas las sustancias componentes a la vez y cada una de ellas con su propia ley constitutiva y en la proporción de volumen asignada. Todos los componentes del material deben satisfacer la condición de compatibilidad cinemática, ya sea de deformaciones iguales (teoría de mezclas clásica) o mediante la distribución de deformaciones según la cinemática de comportamiento serie-paralelo formulada en la teoría de mezclas generalizada. Ambas hipótesis cinemáticas son sólo válidas para materiales compuestos con fibras largas, despreciando los fenómenos en los extremos de las fibras. En el caso de materiales compuestos reforzados con fibras cortas es necesario realizar una corrección en las propiedades de cada componente y mantener la condición cinemática de la teoría de mezclas clásica o bien la generalizada (ver Capítulo 3) (Car et alt. (1998)¹⁸).

La ecuación de compatibilidad tampoco es válida en el caso en que se produzca un deslizamiento relativo entre fibra y matriz. Este fenómeno se produce en el instante en que la tensión tangencial máxima admisible de la interface entre fibra y matriz es superada.

4.5.1 Modificación del modelo constitutivo –Tratamiento del fenómeno de deslizamiento entre fibra y matriz (DFM)

4.5.1.1 Introducción

Los materiales compuestos constituidos por una matriz y un refuerzo poseen un comportamiento no-lineal complejo, debido a que se produce un deslizamiento del refuerzo, motivado por la pérdida de adherencia entre matriz y refuerzo. Este movimiento relativo entre refuerzo y matriz, produce una pérdida de rigidez en el conjunto, que se refleja en una disminución de los parámetros mecánicos del compuesto, sin que todavía ocurra rotura en la fase de refuerzo (Hild et alt. (1994)¹⁹), (Hild (1994)²⁰).

¹⁷ Hild F., Burr A. and Leckie A. (1994). Fiber breakage and fiber pull out of fiber-reinforced ceramic-matrix composites. Eur. J. Mech. A/Solids, vol. 13, pp. 731-749, No. 6.

¹⁸ Car E. and Oller S. and Oñate E. (1998). Un modelo constitutivo elasto plástico acoplado con daño mecánico e higrométrico. Aplicación a pavimentos flexibles. Revista Internacional de Ingeniería de Estructuras, vol. 3(1), pp. 19-37.

¹⁹ Hild F., Burr A. and Leckie A. (1994). Fiber breakage and fiber pull out of fiber-reinforced ceramic-matrix composites. Eur. J. Mech. A/Solids, vol. 13, pp. 731-749, No. 6

La modificación de la teoría desarrollada en los capítulos anteriores, basada en la mecánica de medios continuos para tratar la anisotropía y la teoría de mezclas, consiste en introducir en la ecuación constitutiva un comportamiento inelástico irrecuperable que permite representar en forma aproximada el movimiento relativo de cuerpo rígido que se produce entre la fibra y matriz. La incorporación del "DFM" en la ecuación constitutiva aquí desarrollada, se realiza teniendo en cuenta que este fenómeno presenta dos características fundamentales: a) pérdida de rigidez global debido a la disminución de la colaboración de la fibra en la matriz y b) deslizamiento relativo irrecuperable entre fibra y matriz.

Los materiales compuestos sometidos a estados tensionales en los cuales se ha producido el fenómeno "DFM" no cumplen con la condición cinemática impuesta por la teoría de mezclas de sustancias básicas. Este fenómeno tiene como consecuencia directa la limitación de la matriz, para transferir esfuerzos a la fibra. Esto es, la fibra no es capaz de aumentar su estado tensional por causas atribuibles a la adherencia limitada que existe en la zona de interface fibra-matriz.

El modelo constitutivo se basa en la idea de que el proceso de transferencia de cargas de matriz a fibra varía en el momento en que la matriz sufre deformaciones plásticas. El movimiento relativo entre fibra y matriz puede representarse en mecánica de medios continuos a través de una deformación inelástica irrecuperable en la fibra. La determinación del inicio de este fenómeno se realiza mediante una condición umbral máxima de resistencia que compara la tensión efectiva en un punto con la resistencia de la fibra. Dada la forma en que participa la fibra dentro del compuesto y el mecanismo de transmisión de tensiones entre fibra y matriz, la determinación de su máxima resistencia o resistencia real y su capacidad de colaboración depende de su propia resistencia nominal $(f^\sigma)_{\text{fib}}^N$, o resistencia de la fibra en condiciones aisladas, de la resistencia nominal de la matriz $(f^\sigma)_{\text{mat}}^N$ y de la resistencia nominal de la interface fibra-matriz $(f^\tau)_{\text{fib-mat}}^N$, o capacidad de transferencia de tensiones desde la matriz a la fibra. Desde otro punto de vista, se puede decir que la fibra participa dentro del compuesto en función de su propia resistencia y de la capacidad de transferencia de esfuerzo de la interfaz fibra-matriz, por lo tanto su resistencia está influenciada por el medio que la contiene y podría decirse que su tratamiento constitutivo implica una formulación no-local. Se define entonces la resistencia de una fibra contenida en una matriz como:

$$(f^\sigma)_{\text{fib}} = \min \left\{ (f^\sigma)_{\text{fib}}^N, (f^\sigma)_{\text{mat}}^N, \left[\frac{(f^\tau)_{\text{fib-mat}}^N \cdot 2\pi r_f}{A_f} \right] \right\} \quad (4.2)$$

En la que r_f representa el radio de la fibra y A_f es el área de la sección transversal de la fibra. De la ecuación (4.2) se deducen los siguientes casos límites:

- Si la matriz es más resistente que la fibra y la adherencia fibra-matriz es perfecta, la capacidad de participación de la fibra queda limitada por su propia resistencia nominal $(f^\sigma)_{\text{fib}} = (f^\sigma)_{\text{fib}}^N$.
- Si se produce un fallo en la matriz por microfisuras, etc., en tanto la fibra se mantiene en régimen lineal, la resistencia de la fibra queda limitada por la resistencia de la matriz, pues se rompe el "mecanismo" de transferencia de tensión entre fibra y

²⁰ Hild F. (1994). On the average pull-out length of the fibre-reinforced composites. C.R. Acad. Sci. Paris. vol. 319 (Serie II), pp. 1123-1128.

matriz y no se podría transferir más tensión que la permitida por el medio que contiene la fibra $(f^\sigma)_{\text{fib}} \equiv (f^\sigma)_{\text{mat}}^N$.

- Si el fallo se produce en la interface fibra-matriz, la resistencia de la fibra queda

$$\text{limitada por la de la interface } (f^\sigma)_{\text{fib}} \equiv \frac{2 \cdot (f^\tau)_{\text{fib-mat}}^N 2\pi r_f}{A_f} = \frac{2 \cdot (f^\tau)_{\text{fib-mat}}^N}{r_f}.$$

En la mayoría de los materiales compuestos se verifica que el agrietamiento por cortadura en la interfaz se produce antes que la rotura de las fibras y se observa una separación masiva entre fibra y matriz y por lo tanto la resistencia de la fibra queda limitada por la capacidad de la interfaz de transmitir esfuerzos. La aparición de fenómenos plásticos en la matriz de un material compuesto sometido a un estado de cargas monótono creciente impide la transferencia de los esfuerzos desde la matriz hacia las fibras dando lugar a la aparición de deformaciones irrecuperables por deslizamiento de la fase de refuerzo respecto de la matriz. A partir de este momento la transferencia de cargas de fibras a matriz no es nula debido a la presencia de fenómenos de fricción entre ambas fases del material compuesto. Por lo tanto, las fibras aumentan su estado tensional según un módulo elástico diferente del inicial.

El modelo que se presenta en éste capítulo se basa en establecer el estado tensional en el que se encuentra la fibra en el momento de producirse la rotura en la matriz del compuesto. A partir de aquí las deformaciones irrecuperables debidas al deslizamiento entre ambas fases se tienen en cuenta con un modelo elasto-plástico con endurecimiento para la fase de refuerzo debido a la presencia de las fuerzas de rozamiento entre fibra y matriz. Por lo tanto, se trata de un modelo *no local material*, debido a que el estado de uno de los materiales (refuerzo) depende de otro (matriz).

4.5.1.2 Implementación

A los fines de tener en cuenta la interacción entre matriz y fibra, es necesario determinar el estado tensional de la fase de refuerzo en el momento en que se verifica el deslizamiento relativo entre fibra y matriz debido a la aparición de fenómenos plásticos en esta última. Este estado tensional es el máximo estado tensional que se transmite desde la matriz hacia la fibra bajo las condiciones de adherencia perfecta entre refuerzo y matriz. A partir de este momento los esfuerzos se transmiten por fenómenos friccionales. En la Figura 4.6 se muestra para el caso de un material compuesto formado por una matriz y fibra de refuerzos la interacción entre ambas fases que permite determinar la resistencia del refuerzo en función de los criterios enunciados anteriormente.

Con el objetivo de incluir el fenómeno de "*debonding*" en la formulación del modelo constitutivo para materiales compuestos se define la relación

$$r = \frac{\tau}{(f^\tau)_{\text{fib}}} = \frac{S}{(f^S)_{\text{fib}}} \quad (4.3)$$

donde $(f^\tau)_{\text{fib}}$ y $(f^S)_{\text{fib}}$ representan las resistencias del refuerzo en las configuraciones referencial y actualizada, respectivamente, y τ y S representan la tensión en la dirección longitudinal del refuerzo en las configuraciones referencial y actualizada en el momento en que se verifica el deslizamiento relativo entre fibra y matriz debido a la aparición de fenómenos plásticos en esta última.

A los fines de simular las deformaciones irrecuperables que se verifican como consecuencia del deslizamiento entre fibra y matriz es necesario redefinir el criterio de fluencia de la fase correspondiente al refuerzo y dado por la ecuación (4.1) en la configuración actualizada. El factor r permite establecer el instante del proceso mecánico de inicio del deslizamiento entre fibra y matriz, mediante la plastificación de la fibra. Este factor se considera constante a partir del momento de plastificación de la matriz.

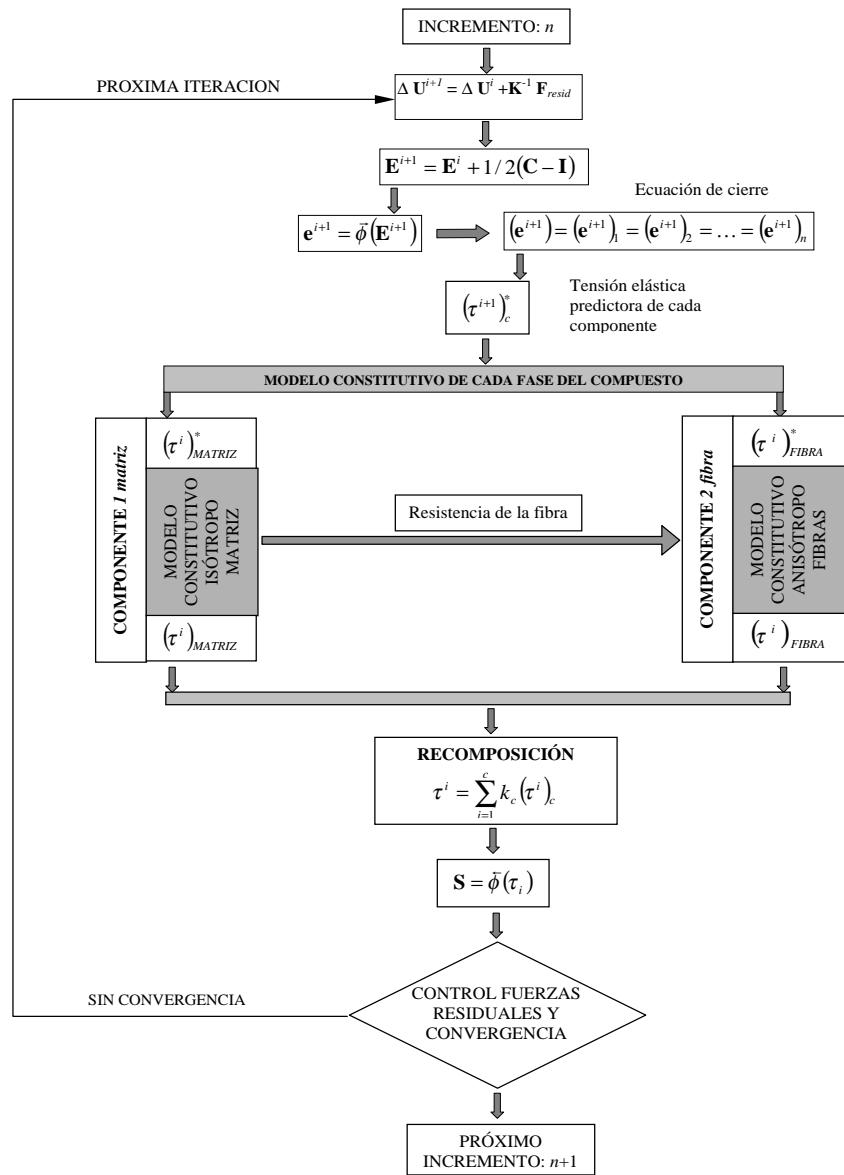


Figura 4.6 – Esquema de solución de problema no lineal bifase con "DFM".

Por lo expuesto anteriormente, para incluir el fenómeno "DFM" en el modelo constitutivo es necesario redefinir la función de evolución de la resistencia de las fibras, por lo tanto el criterio de fluencia en las configuraciones referencial y actualizada resulta:

$$\mathbb{F}^{\tau}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) = f^{\tau}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{g}) - r \cdot \mathcal{K}(\boldsymbol{\alpha}) = 0 \quad (4.4)$$

donde $\mathbb{F}^{\tau}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha})=0$ es una función homogénea en las tensiones, definida en la configuración actualizada, denominada función umbral de discontinuidad plástica (ver Capítulo 2), r es un factor que limita la resistencia de la fibra, debido al fenómeno de "DFM" y cuya expresión está dada por la ecuación (4.3). El producto ($r \mathcal{K}(\boldsymbol{\alpha})$) permite redefinir el umbral de tensiones en las configuraciones referencial y actualizada del refuerzo a partir del instante en el que se producen fenómenos plásticos en la matriz del material compuesto. La modificación en la condición de fluencia hace necesario redefinir nuevamente el modelo constitutivo elasto-plástico de la fase de refuerzo en las configuraciones referencial y actualizada.

4.6 Expresión del modelo constitutivo elasto-plástico del refuerzo

4.6.1 Condición de fluencia

El fenómeno "DFM" se introduce en la condición umbral límite de la plasticidad mediante una modificación en la función de fluencia de la fase de refuerzo. Esto permite redefinir la resistencia del refuerzo a partir del instante en el que se producen fenómenos plásticos en la matriz del material compuesto (ver 4.5.1).

El factor que limita la resistencia de la fibra r , afecta al límite de proporcionalidad del material. Este parámetro no se introduce directamente en la condición de fluencia con el objetivo de alterar lo menos posible la estructura matemática de la teoría de la plasticidad. La condición de fluencia Así, la condición de fluencia expresada en la ecuación (4.4) se escribe ahora como

$$\mathbb{F}^{\tau}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{r} f^{\tau}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{g}) - \mathcal{K}(\boldsymbol{\alpha}) = 0 \quad (4.5)$$

La ecuación anterior representa el nuevo criterio de fluencia –o umbral de discontinuidad de comportamiento– que permite tener en cuenta el fenómeno de deslizamiento entre fibra y matriz a partir de establecer el momento a partir del cual la matriz no es capaz de transferir carga a la fibra y simular los desplazamientos relativos irrecuperables entre fibra y matriz a través de la plasticidad.

4.6.2 Regla de flujo plástico

La regla de flujo estable la ley de evolución de las deformaciones plásticas y se define en la configuración actualizada a partir de la derivada objetiva de Lee (Malvern (1969)²¹)

²¹ Malvern L.E. (1969). Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. Prentice-Hall.

$$L_v(\mathbf{e}^p) = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \tau} \quad (4.6)$$

donde $g = g(\tau, \mathbf{g})$ es la función de potencial plástico y λ es un escalar no negativo conocido como parámetro de consistencia plástica. Para el caso de plasticidad asociada la ley de evolución de las deformaciones plásticas queda expresada como

$$L_v(\mathbf{e}^p) = \dot{\lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \tau} \quad (4.7)$$

La teoría de la plasticidad exige también el cumplimiento de las condiciones de carga-descarga o condiciones de Kuhn-Tucker (Crisfield (1991)²²)

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad , \quad \mathbb{F}^\tau(\tau, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) \leq 0 \quad , \quad \dot{\lambda} \cdot \mathbb{F}^\tau(\tau, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) \leq 0 \quad (4.8)$$

Además, debe cumplirse la condición de persistencia o condición de consistencia plástica, expresada por la variación temporal de la función de fluencia:

$$\dot{\mathbb{F}}^\tau(\tau, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{r} \frac{\partial f^\tau(\tau, \mathbf{g})}{\partial \tau} \dot{\tau} - \frac{\partial \mathcal{K}(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \dot{\boldsymbol{\alpha}} = 0 \quad (4.9)$$

4.7 Formulación Lagrangeana "Total" y "Actualizada"

La implementación de toda la modelización constitutiva presentada en este capítulo completa la formulación mecánica detallada en los capítulos 2 y 3, y ha sido desarrollada para ser incorporada dentro del método de los elementos finitos. No obstante esto, para mejorar la eficiencia y simplificar la implementación, debe tenerse un especial cuidado al elegir la estrategia a seguir y el espacio cinemático donde se establecerá la formulación. En la mecánica de medios continuos los problemas se pueden formular utilizando como referencia las coordenadas materiales \mathbf{X} o las coordenadas espaciales \mathbf{x} , dando lugar a las descripciones cinemáticas *material* o *espacial*. La descripción material –*Configuración Referencial*– se caracteriza porque las propiedades de todas las partículas del cuerpo se refieren siempre a su posición de origen y su descripción cinemática recibe el nombre de *Lagrangeana Total*. La descripción espacial –*Configuración Actualizada*– se caracteriza porque las propiedades de todas las partículas del cuerpo se siguen desde su posición de origen hasta su posición actual y su descripción cinemática recibe el nombre de *Lagrangeana Actualizada*.

Dado un sólido en el espacio y un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales, el equilibrio en el tiempo ($t + \Delta t$) se expresa mediante el principio de los *trabajos virtuales*, que establece la igualdad de los trabajos virtuales internos y externos.

En la configuración actualizada el principio de los trabajos virtuales está dado por la siguiente expresión

²² Crisfield M.A. (1991). Non-linear finite element analysis of solids and structures. John Wiley & Sons Ltd.

$$\underbrace{\int_{V^{t+\Delta t}} \tau^{t+\Delta t} : \delta e^{t+\Delta t} dV^{t+\Delta t}}_{\mathbf{f}^{\text{int}}} = \underbrace{\int_{V^{t+\Delta t}} \rho \mathbf{b}^{t+\Delta t} \cdot \delta u^{t+\Delta t} dV^{t+\Delta t}}_{\mathbf{f}^{\text{exr}}} + \underbrace{\oint_{S^{t+\Delta t}} \mathbf{t}^{t+\Delta t} \cdot \delta u^{t+\Delta t} dS^{t+\Delta t}}_{(4.10)}$$

Donde $\tau^{t+\Delta t}$ es el tensor de tensiones de Kirchhoff, $\delta e^{t+\Delta t}$ es el tensor de deformaciones virtuales de Almansi compatible con el desplazamiento virtual $\delta u^{t+\Delta t}$, $\mathbf{b}^{t+\Delta t}$ representa las fuerzas por unidad de masa y volumen y $\mathbf{t}^{t+\Delta t}$ representa las fuerzas de superficie por unidad de superficie, ambas en la configuración actualizada, y $V^{t+\Delta t}$ es el volumen del sólido en la configuración actualizada, en el instante de tiempo $t + \Delta t$ y $S^{t+\Delta t}$ la superficie de aplicación de la carga superficial en la misma configuración.

En la configuración referencial, la formulación se realiza en el instante de referencia, es decir cuando $t = 0$. En esta configuración se formula el principio de los trabajos virtuales mediante la siguiente expresión

$$\underbrace{\int_{V^0} \mathbf{S}^{t+\Delta t} : \delta E^{t+\Delta t} dV}_{\mathbf{F}^{\text{int}}} = \underbrace{\int_{V^0} \rho_0 \mathbf{b}_0^{t+\Delta t} \cdot \delta u^{t+\Delta t} dV}_{\mathbf{F}^{\text{exr}}} + \underbrace{\oint_{S^0} \mathbf{t}_0^{t+\Delta t} \cdot \delta u^{t+\Delta t} dS}_{(4.11)}$$

Donde $\mathbf{S}^{t+\Delta t}$ es el segundo tensor de tensiones de Piola Kirchhoff, $\delta E^{t+\Delta t}$ es el tensor de deformaciones virtuales de Green-Lagrange compatible con el desplazamiento virtual $\delta u^{t+\Delta t}$, $\mathbf{b}_0^{t+\Delta t}$ representa las fuerzas por unidad de masa y $\mathbf{t}_0^{t+\Delta t}$ representa las fuerzas de superficie por unidad de superficie, ambas en la configuración referencial, y V^0 es el volumen del sólido en la configuración de referencia y S^0 la superficie de aplicación de la carga superficial en la misma configuración.

Tanto la formulación escrita en la configuración referencial –lagrangeana total– como la que resulta de establecer el equilibrio en la configuración actualizada –lagrangeana actualizada– incluyen una formulación cinemáticas de grandes desplazamientos, deformaciones y rotaciones. Las formulaciones lagrangeana total y actualizada que resultan de las ecuaciones (4.10) y (4.11) dan resultados equivalentes. La única diferencia radica en la forma en que se debe escribir el modelo constitutivo en cada una de ella, pues puede no ser siempre posible encontrar una solución igualmente simple para ambas formulaciones. Dicho de otra manera, ambas formulaciones conducen a idénticos resultados si se utilizan en forma apropiada (Bathe (1982)²³).

Disponiendo de los tensores de tensiones y constitutivo en la configuración referencial, los correspondientes tensores en la configuración actualizada se obtienen mediante las operaciones de transporte tensorial hacia adelante "*push-forward*". El transporte de vuelta hacia atrás, a la configuración referencial, se realiza mediante la operación "*pull-back*".

La implementación de las operaciones de transporte tensorial entre las configuraciones referencial y actualizada, "*push-forward*" y "*pull-back*", en un código de elementos finitos que contemple grandes deformaciones, permite tratar el problema con cualquiera de las dos formulaciones: lagrangeana total o actualizada, obteniéndose en ambos casos idénticos resultados. La elección de una u otra formulación depende fundamentalmente de la configuración en la cual se conoce la expresión del tensor constitutivo, pues si bien este tensor puede transportarse de una a otra configuración con las operaciones "*push-forward*" y "*pull-back*", estos transportes tienen un alto coste computacional y en problemas no-

²³ Bathe K. J. (1982). Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Prentice-Hall, Inc.

lineales, estas operaciones deben realizarse en cada iteración del proceso de linealización hasta conseguir el equilibrio.

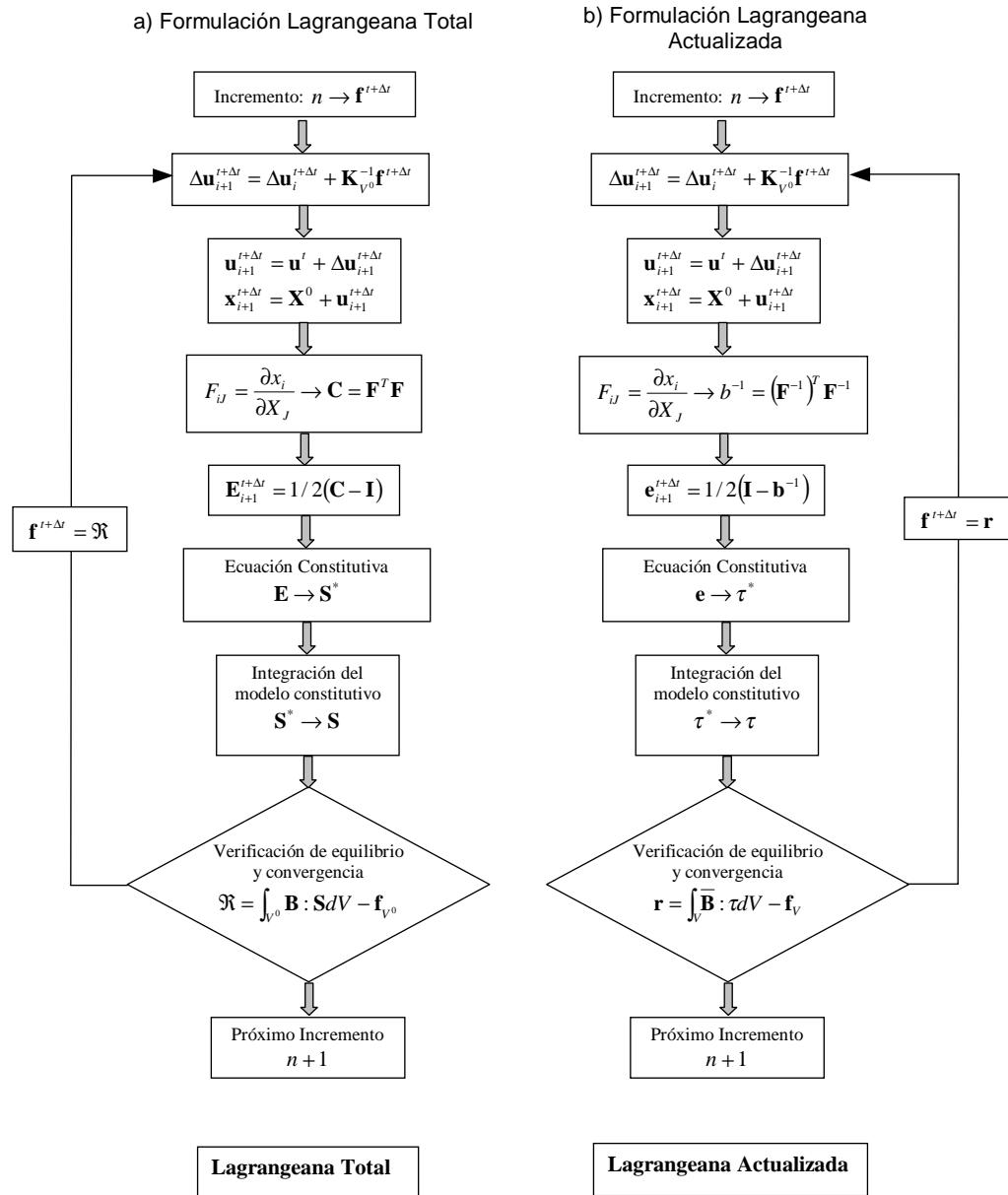


Figura 4.7 – Resolución de un problema no lineal mediante las formulaciones lagrangeanas a) total y b) actualizada.

En la Figura 4.7 se observa un esquema comparado de los pasos a seguir para la implementación de una formulación lagrangeana total y una actualizada en un código de elementos finitos.

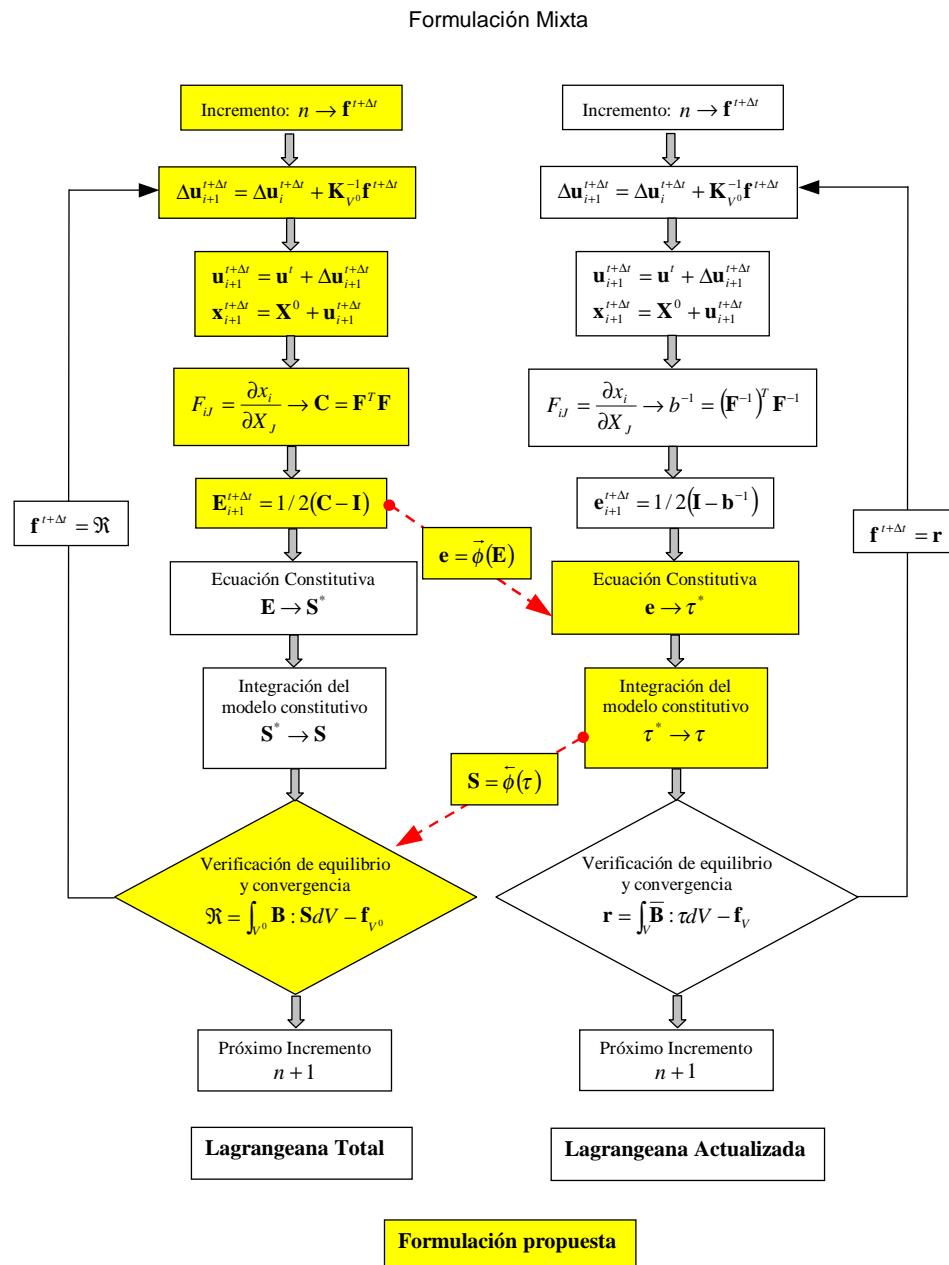


Figura 4.8 – Resolución de un problema no lineal mediante una formulación mixta.

En la Figura 4.8 se presenta el algoritmo utilizado en el modelo constitutivo para materiales compuestos que se ha propuesto en los capítulos previos. Este algoritmo tiene la particularidad de combinar la formulación lagrangeana total con la actualizada. Se caracteriza por realizar solo la integración de la ecuación constitutiva en la configuración actualizada, mientras que el resto de operaciones se llevan a cabo en la configuración referencial. La elección de esta formulación se debe a varias razones, entre ellas es posible mencionar que la verificación del equilibrio se realiza en la configuración referencial ya que en la misma el volumen se mantiene constante y tampoco es necesario realizar un seguimiento de las cargas. La integración de la ecuación constitutiva se lleva a cabo en la configuración actualizada ya que en esta configuración es donde se conoce con mayor certeza la ecuación constitutiva del material y también la tensión de fluencia del material o umbral de discontinuidad. El paso del tensor de deformaciones de la formulación lagrangeana total a la actualizada se realiza a través de la operación "push-forward" y el retorno a la formulación total del tensor de tensiones que se obtiene de la integración del modelo constitutivo se realiza a través de la operación de "pull-back".

4.8 Implementación de la teoría de mezclas y anisotropía en el contexto del "MEF"

La implementación en el contexto del MEF de la teoría anisótropa y la teoría de mezclas previamente desarrollada, implica la adopción de un algoritmo de transformación de los tensores de tensiones, deformaciones y constitutivo desde la configuración referencial a la actualizada. No obstante esto, desde el punto de vista práctico, no todos los tensores resultan factibles de ser transportados. Un proceso que es altamente costoso de realizar es el transporte de los *tensores de cambio de espacio* – $\alpha^r = \bar{\phi}(\mathbf{A}^S)$ y $\alpha^e = \bar{\phi}(\mathbf{A}^E)$ – para describir la anisotropía del cada punto del material (ver Capítulo 2). Estos tensores, de cuarto orden, es preferible utilizarlo en la configuración referencial – \mathbf{A}^S y \mathbf{A}^E – y luego transportar los tensores de tensión y deformación que resultan de la transformación de espacio anisótropo a isótropo – $\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{A}^S : \mathbf{S} \Rightarrow \bar{\tau} = \bar{\phi}(\bar{\mathbf{S}})$ y $\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{A}^E : \mathbf{E} \Rightarrow \bar{\epsilon} = \bar{\phi}(\bar{\mathbf{E}})$ –. Ambos tensores son función del gradiente de las deformaciones, que expresa el movimiento del sistema referencial, y del tensor de transformaciones de espacios de tensiones y deformaciones en la configuración referencial (ver Capítulo 2). El transporte de los tensores de transformación de espacios conduce a tensores en los que no resulta posible su representación como matriz y por lo tanto con este algoritmo será necesario realizar todas las operaciones a nivel tensorial, lo que implica un elevado costo computacional.

El algoritmo propuesto tiene la desventaja de que para realizar la transformación de cualquier variable del espacio anisótropo real al ficticio o viceversa es necesario primero transportar estas magnitudes a la configuración referencial.

En el cuadro 1 se observa que las operaciones de transporte entre los *espacios isótropo ficticio y anisótropo real* se realizan con el objetivo de integrar la ecuación constitutiva (Lubliner (1990)²⁴).

Para la implementación de la teoría de mezclas en el contexto del MEF es necesario tener en cuenta que el cálculo de la tensión predictora y la integración de la ecuación constitutiva debe realizarse para cada fase que constituye el material compuesto. Es necesario

²⁴ Lubliner J. (1990). *Plasticity Theory*. Macmillan Publishing, U.S.A.

destacar que para el caso de un material compuesto cuyos componentes son materiales que presentan fenómenos no reversibles (plasticidad, daño, etc.) es necesaria la existencia de variables internas que controlan los procesos irreversibles para cada una de las fases del material compuesto. La existencia de estas variables internas para cada una de las fases del compuesto supone un elevado costo computacional desde el punto de vista de memoria requerida para almacenar estas variables que tienen en cuenta la historia de carga del componente. En el cuadro 1 (continuación) se muestra el cálculo de la tensión predictora y la integración de la ecuación constitutiva. Estas operaciones se deben realizar para cada una de las fases que constituyen el material compuesto.

Cuadro 1. Implementación numérica.

- Definición del tensor constitutivo en el espacio real anisótropo, elección del tensor constitutivo isótropo ficticio y del tensor de rotación para cada fase del material compuesto.

$$(\bar{\mathbb{C}}^S)_{c_m,r} ; (\mathbb{C}_{\text{loc}}^S)_{c_m,r} ; (\mathbb{R})_{c_m,r}$$

- Cálculo del tensor constitutivo anisótropo en el sistema de coordenadas globales para cada fase del material compuesto. Modelo hiperelástico lineal referencial

$$(\mathbb{C}^S)_{c_m,r} = (\mathbb{R})_{c_m,r} : (\mathbb{C}_{\text{loc}}^S)_{c_m,r} : (\mathbb{R})_{c_m,r}$$

- Definición del tensor de mapeo de espacio para cada fase del material compuesto.

$$(\mathbb{A}^E)_{c_m,r} = (\bar{\mathbb{C}}^S)_{c_m,r}^{-1} : (\mathbb{A}^S)_{c_m,r} : (\mathbb{C}^S)_{c_m,r}$$

- Cálculo del tensor constitutivo anisótropos e isótropo de cada fase para ser considerado en la teoría de mezclas generalizada (ver capítulo 3)

$$(\hat{\mathbb{C}}^S)_{c_m,r} = [(1 - \chi_{c_m,r}) \cdot \mathbf{I}_4 + \chi_{c_m,r} \cdot (\Phi)_{c_m,r}]^T : (\mathbb{C}^S)_{c_m,r} : [(1 - \chi_{c_m,r}) \cdot \mathbf{I}_4 + \chi_{c_m,r} \cdot (\Phi)_{c_m,r}]$$

$$(\hat{\bar{\mathbb{C}}}^S)_{c_m,r} = [(1 - \chi_{c_m,r}) \cdot \mathbf{I}_4 + \chi_{c_m,r} \cdot (\Phi)_{c_m,r}]^T : (\bar{\mathbb{C}}^S)_{c_m,r} : [(1 - \chi_{c_m,r}) \cdot \mathbf{I}_4 + \chi_{c_m,r} \cdot (\Phi)_{c_m,r}]$$

- Cálculo de los tensores constitutivos anisótropos e isótropo del compuesto según la teoría de mezclas generalizada para refuerzos largos y cortos (ver capítulo 3)

$$\mathbb{C}^S = \underbrace{\sum_{c_m=1}^{n_m} k_{c_m} \frac{m^0}{m_{c_m}} (\hat{\mathbb{C}}^S)_{c_m}}_{\text{Componentes de la matriz}} + \underbrace{\sum_{c_r=1}^{n_r} k_{c_r} \varsigma_{c_r} \frac{m^0}{m_{c_r}} (\hat{\mathbb{C}}^S)_{c_r}}_{\text{Componentes del refuerzo}}$$

$$\bar{\mathbb{C}}^S = \underbrace{\sum_{c_m=1}^{n_m} k_{c_m} \frac{m^0}{m_{c_m}} (\hat{\bar{\mathbb{C}}}^S)_{c_m}}_{\text{Componentes de la matriz}} + \underbrace{\sum_{c_r=1}^{n_r} k_{c_r} \varsigma_{c_r} \frac{m^0}{m_{c_r}} (\hat{\bar{\mathbb{C}}}^S)_{c_r}}_{\text{Componentes del refuerzo}}$$

❖ **BUCLE SOBRE EL INCREMENTO DE CARGAS:** $n = 1, \text{ Max Núm. Incremento}$

$$\text{Para } n = 1, i = 1 \Rightarrow \mathbb{C}^T = \mathbb{C}^S$$

• **BUCLE SOBRE LAS ITERACIONES DE EQUILIBRIO:** $i = 1, \text{ Max Núm. Iteraciones}$

- (1) Cálculo de la matriz de rigidez global

$$[\mathbb{K}^e]_n^i = \int_{V^e} (\nabla^S \mathbf{N}) : \mathbb{C}^T : (\nabla^S \mathbf{N}) dV \Rightarrow (\mathbb{K})_n^i = \mathbf{A}_{e=1}^{\text{Nelem}} [\mathbb{K}^e]_n^i$$

- Cálculo de la deformación en la configuración referencial.

$$(\Delta \mathbf{U})_n^i = \left[(\mathbb{K})_n^{i-1} \right]^{-1} \cdot \underbrace{\left(\mathbf{F}^{\text{mas}} + \mathbf{F}^{\text{int}} - \mathbf{F}^{\text{ext}} \right)_n^{i-1}}_{\Delta \mathbf{F}}$$

$$(\mathbf{U})_n^i = (\mathbf{U})_n^{i-1} + (\Delta \mathbf{U})_n^i$$

$$(\mathbf{E})_n^i = \frac{1}{2} (\mathbb{F}^T : \mathbb{F} - \mathbf{I})_n^i$$

➤ **BUCLE SOBRE CADA FASE DEL COMPUESTO:** $j = 1, \dots, \text{Max Núm. Componentes}$

- Cálculo de la tensión predictora. Modelo hiperelástico referencial.

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}_{c_{m,r}})_n^i &= [(1 - \chi_{c_{m,r}}) \cdot \mathbf{I}_4 + \chi_{c_{m,r}} \cdot (\boldsymbol{\Phi})_{c_{m,r}}] : (\mathbf{E})_n^i \\ (\mathbf{S}_{c_{m,r}}^*)_n^i &= (\hat{\mathbf{C}}_{c_{m,r}}^S) : [(\mathbf{E}_{c_{m,r}})_n^i - (\mathbf{E}_{c_{m,r}}^p)_n^{i-1}] \end{aligned}$$

- Transformación desde el espacio real al espacio isótropo ficticio.

$$(\bar{\mathbf{S}}_{c_{m,r}}^*)_n^i = \mathbb{A}^S : (\mathbf{S}_{c_{m,r}}^*)_n^i$$

- Transporte de la tensión predictora a la configuración actualizada.

$$(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{c_{m,r}}^*)_n^i = \bar{\phi} \left[(\bar{\mathbf{S}}_{c_{m,r}}^*)_n^i \right]$$

- Integración de la ecuación constitutiva.
- Transporte de la tensión, la deformación plástica y el tensor constitutivo tangente, a la configuración referencial.

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{S}}_{c_{m,r}})_n^i &= \bar{\phi} \left[(\bar{\boldsymbol{\tau}}_{c_{m,r}})_n^i \right] \\ (\bar{\mathbf{E}}_{c_{m,r}}^p)_n^i &= \bar{\phi} \left[(\bar{\mathbf{e}}_{c_{m,r}}^p)_n^i \right] \\ (\bar{\mathbf{C}}_{c_{m,r}}^T)_n^i &= \bar{\phi} \left[(\bar{\mathbf{c}}_{c_{m,r}}^T)_n^i \right] \end{aligned}$$

- Transformación de la tensión, la deformación plástica y el tensor constitutivo tangente, desde el espacio isótropo ficticio al espacio real.

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}_{c_{m,r}})_n^i &= [\mathbb{A}^S]^{-1} : (\bar{\mathbf{S}}_{c_{m,r}})_n^i \\ (\mathbf{E}_{c_{m,r}}^p)_n^i &= [\mathbb{A}^E]^{-1} : (\bar{\mathbf{E}}_{c_{m,r}}^p)_n^i \\ (\mathbf{C}_{c_{m,r}}^T)_n^i &= [\mathbb{A}^S]^{-1} : (\bar{\mathbf{C}}_{c_{m,r}}^T)_n^i : [\mathbb{A}^E] \end{aligned}$$

➤ **FIN DEL BUCLE SOBRE CADA FASE DEL COMPUESTO**

- Cálculo de la tensión y el tensor constitutivo del material compuesto.

$$(\mathbf{S})_n^i = \sum_{c=1}^n k_{c_{m,r}} \frac{m}{m_{c_{m,r}}} \left[(1 - \chi_{c_{m,r}}) \cdot \mathbf{I}_4 + \chi_{c_{m,r}} \cdot (\boldsymbol{\phi})_{c_{m,r}} \right]^T : (\mathbf{S}_{c_{m,r}})_n^i$$

$$(\mathbf{C}^T)_n^i = \sum_{c=1}^n k_{c_{m,r}} \frac{m}{m_{c_{m,r}}} \left[(1 - \chi_{c_{m,r}}) \cdot \mathbf{I}_4 + \chi_{c_{m,r}} \cdot (\boldsymbol{\phi})_{c_{m,r}} \right]^T : \left\{ (\mathbf{C}_{c_{m,r}}^T)_n^i : \left[(1 - \chi_{c_{m,r}}) \cdot \mathbf{I}_4 + \chi_{c_{m,r}} \cdot (\boldsymbol{\phi})_{c_{m,r}} \right] \right\}$$

- Cálculo de la fuerza residual en la configuración referencial.

$$\Delta \mathbf{F} = (\mathbf{F}^{\text{mas}} + \mathbf{F}^{\text{int}} - \mathbf{F}^{\text{ext}})^i_n$$

Si $\|\Delta \mathbf{F}\| > 0 \Rightarrow i = i + 1$ Regresa a (1)

Caso contrario "solución convergida" $\Rightarrow n = n + 1$ Nuevo incr. de Carga

- FIN DEL BUCLE SOBRE LAS ITERACIONES DE EQUILIBRIO
- ❖ FIN DEL BUCLE SOBRE EL INCREMENTO DE CARGAS

FIN

4.9 Fenómeno "DFM": Micromodelo y Teoría de mezclas con anisotropía.

En este apartado se presenta un ejemplo de aplicación de la formulación que combina la teoría de mezclas, el modelo anisótropo en régimen de grandes deformaciones y la teoría que permite tener en cuenta el fenómeno “DFM” (Deslizamiento Fibra-Matriz) descrito en este trabajo. El ejemplo consiste en comparar la simulación numérica de una probeta de material compuesto (hormigón armado) con una entalla central sometida a un estado de tracción en la que se han discretizado las fases de refuerzo y matriz (micromodelo), con una probeta similar en la que solo existe un material compuesto constituido por una fase de refuerzo y la matriz (macromodelo).

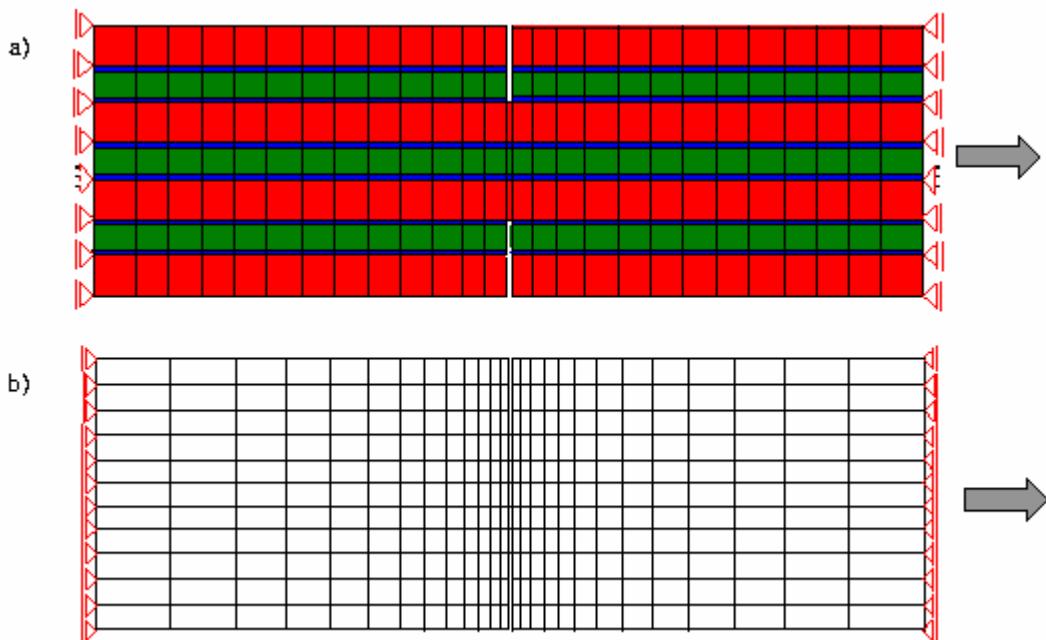


Figura 4.9 – Malla de elementos finitos: a) micromodelo. b) macromodelo.

Las simulaciones numéricas se han realizado empleando una malla de elementos finitos rectangulares de 4 nodos con un total de 343 elementos, 392 nodos y 766 grados de libertad para el caso del micromodelo y 291 elementos, 336 nodos y 644 grados de libertad para el caso del macromodelo. En la Figura 4.9 se observan las mallas y las condiciones de borde empleadas para cada caso.

	Material 1 Matriz de Hormigón	Material 2 Refuerzo de Acero	Material 3 Junta Mat-Refu
Tipo de Comportamiento	Mohr Coulomb Elasto-Plástico-Isótropo	Elástico-Isótropo	Daño de Kachanov
Mód. Young [kp/cm^2]	3.5×10^5	2.1×10^6	3.5×10^5
Coef. Poisson	0.2	0.0	0.0
Fricción interna	30°	-	30°
Resist. Compr. [kp/cm^2]	200	2000	20
Resist. Tracci. [kp/cm^2]	20	2000	20
Gf , Ge . [kp/cm]	0.25, 26.0		2.0, 2.0
Ley de comportamiento	Recto con posterior a la fluencia	ablandamiento	Exponencial con ablandamiento

Tabla 4.1 - Propiedades mecánicas de los materiales del micromodelo.

El micromodelo se considera que está formado por tres materiales, matriz, zona de interface fibra-matriz y refuerzo. El macromodelo está constituido por un material compuesto constituido por dos fases: fibra de refuerzo y matriz. La Tabla 4.1 muestra las propiedades mecánicas de los materiales empleados en el micromodelo. Las propiedades mecánicas de las fases que constituyen el material compuesto del macromodelo son idénticas a las de la matriz y refuerzo correspondientes al micromodelo.

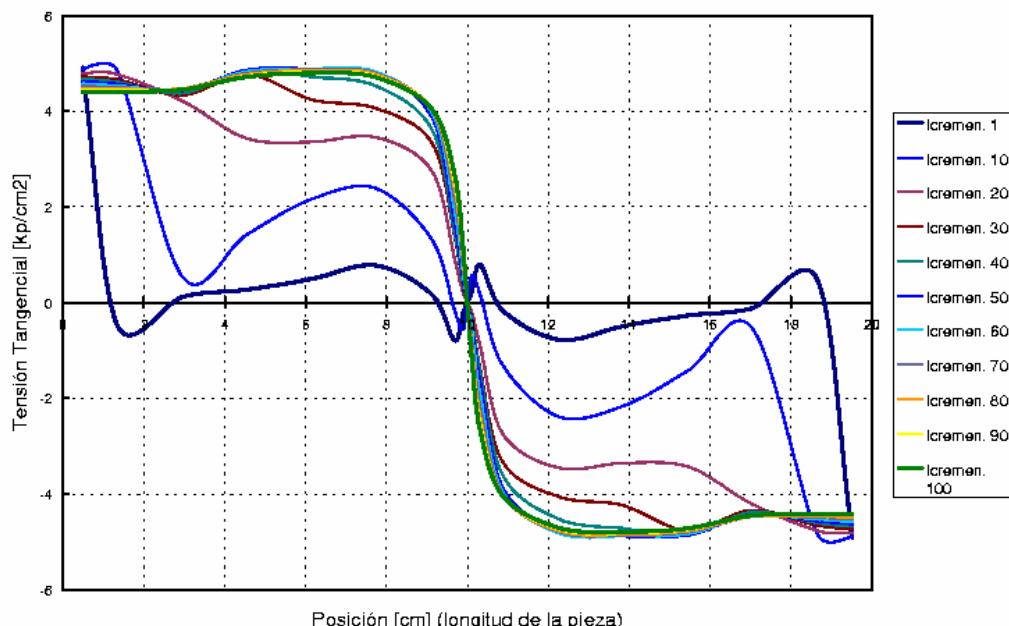


Figura 4.10 – Tensiones cortantes en la interface fibra-matriz. Incrementos 1-100.

El objetivo del ejemplo es mostrar el fenómeno de transferencia de carga de la matriz hacia la fase de refuerzo. Esto se consigue a través de la comparación de la curva "carga-desplazamiento" obtenida primeramente mediante el micromodelo y luego con el macromodelo constituido por el material compuesto y en el cual no se individualizan físicamente sus componentes (Teoría de mezclas). En la Figura 4.10 y Figura 4.11 se muestra la evolución de la tensión cortante en la zona de interface fibra-matriz para distintos incrementos de carga. En el primer incremento de carga, en el cual no se verifican procesos irreversibles, se observa que la distribución de cortante a lo largo del refuerzo es similar a la curva teórica que se muestra en la Figura 4.1. En la zona central se observa un cambio en el signo de los esfuerzos debido fundamentalmente a la presencia de la entalla. La Figura 4.12 y la Figura 4.13 muestran la evolución de la tensión longitudinal en la fase de refuerzo para distintos incrementos de carga. En la misma se observa, para el primer incremento de cargas, que en las zonas de los extremos del refuerzo se verifican las máximas tensiones cortantes mientras que las tensiones longitudinales crecen desde un valor nulo en el extremo hacia un valor constante a lo largo del refuerzo. En la zona central se observa, también, una variación de la tensión longitudinal debido a la presencia de la entalla. En estas figuras se observa, también, que un aumento en los esfuerzos aplicados produce fenómenos irreversibles en la zona de interface "matriz-refuerzo" en los extremos del refuerzo. Este proceso produce una disminución de la capacidad de transferencia de esfuerzos desde la matriz hacia las fibras. Este fenómeno también provoca una modificación en el estado tensional del refuerzo y se observa que la curva de distribución de tensiones a lo largo del refuerzo deja de ser constante. En la Figura Figura 4.14 se muestran las zonas de la interface en las que se ha superado el límite de proporcionalidad del material para distintas etapas de carga. En la misma se observa que el fenómeno de deslizamiento relativo entre la matriz y el refuerzo comienza en la zona de los extremos de la fibra y progresiva hacia el centro de la pieza.

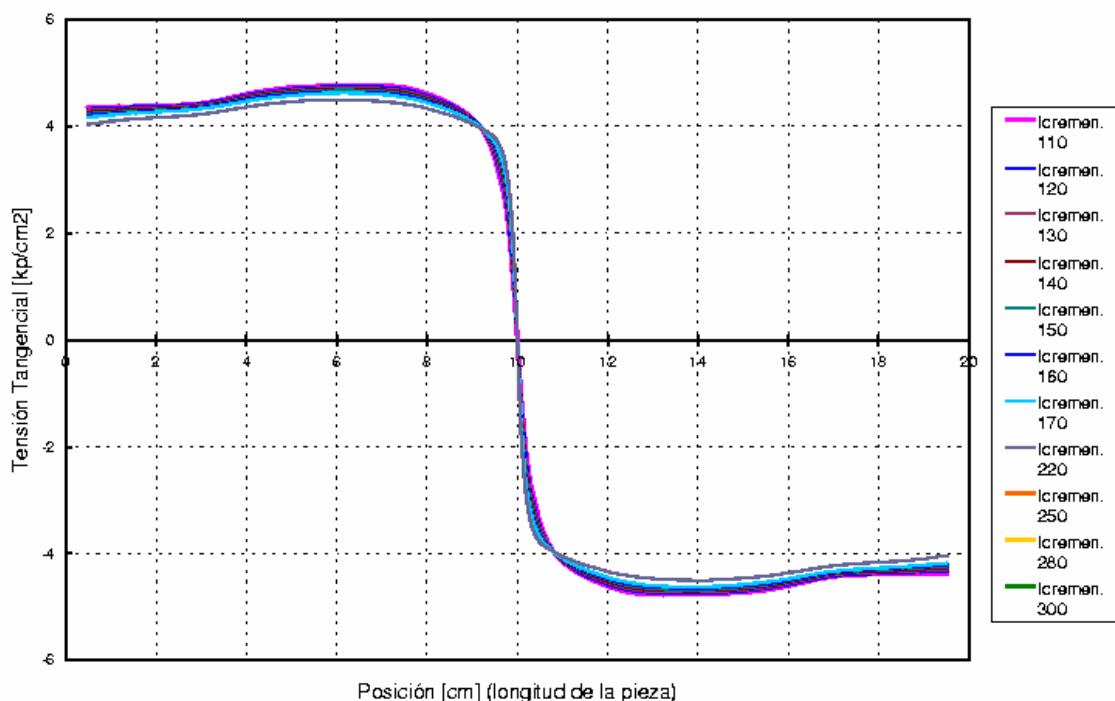


Figura 4.11 – Tensiones cortantes en la interface fibra-matriz. Incrementos 110-300.

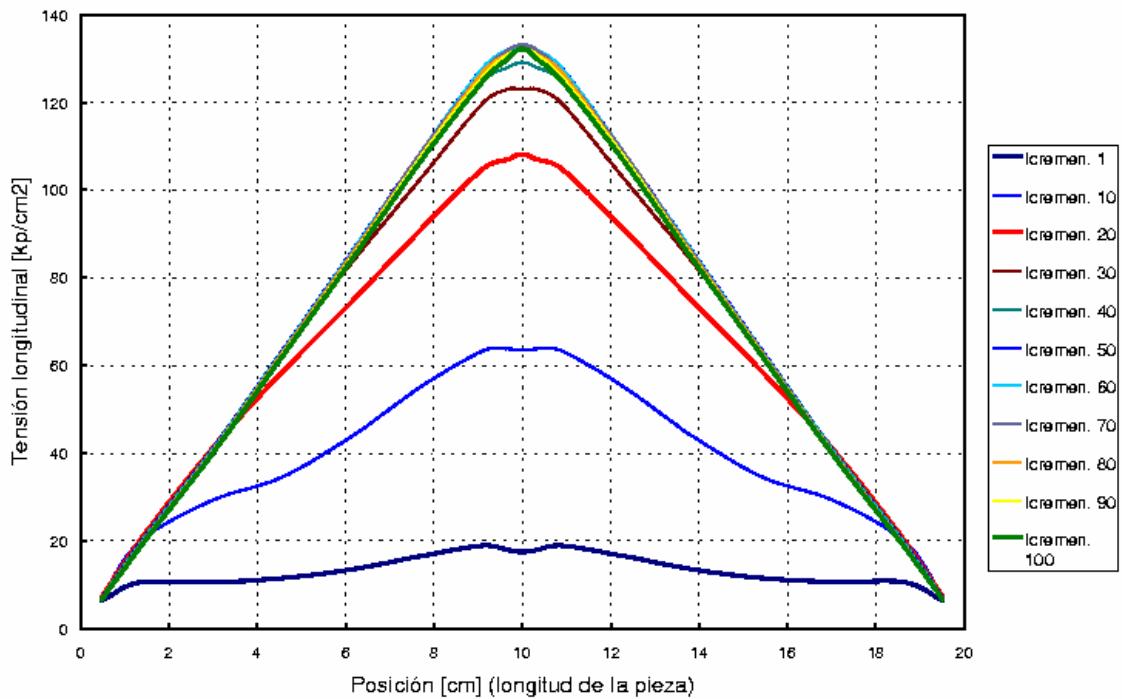


Figura 4.12 – Tensiones longitudinales en el refuerzo. Incrementos 1-100.

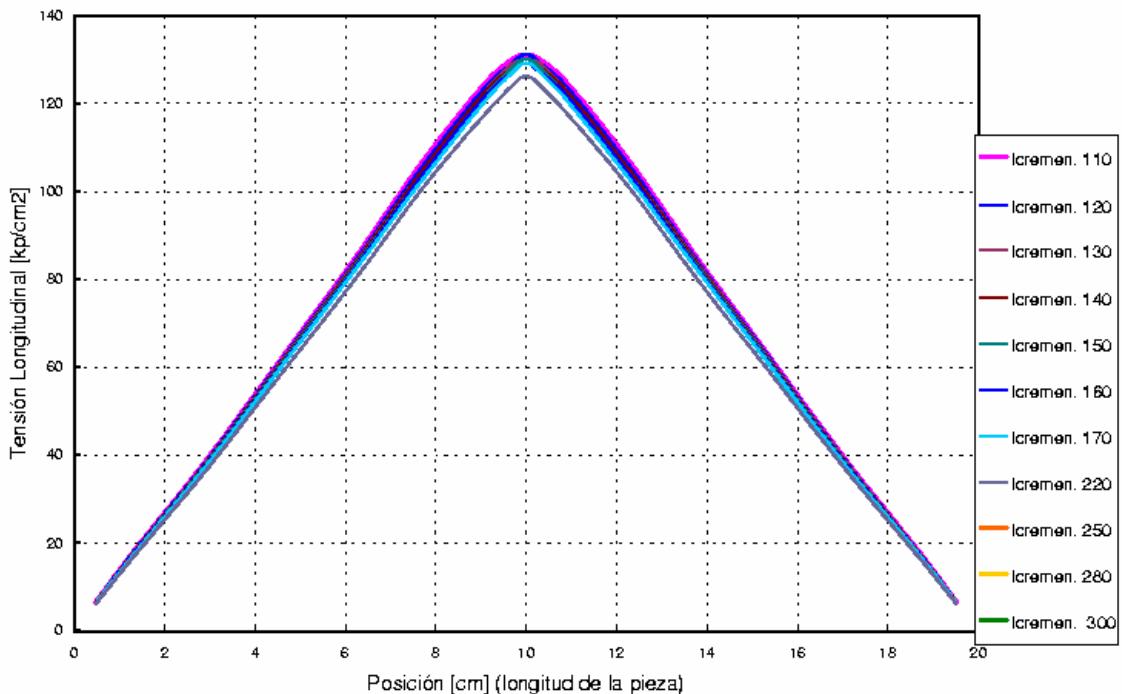


Figura 4.13 – Tensiones longitudinales en el refuerzo. Incrementos 110-300.

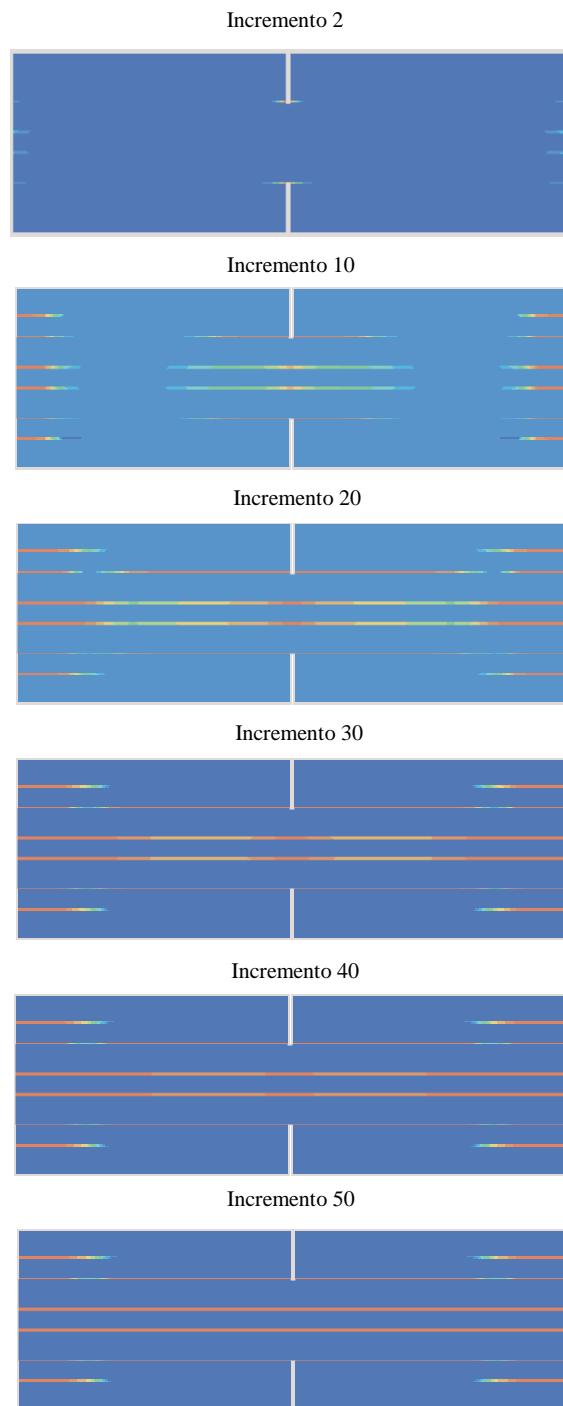


Figura 4.14 – Deformaciones plásticas interface fibra matriz para distintos incrementos de carga.

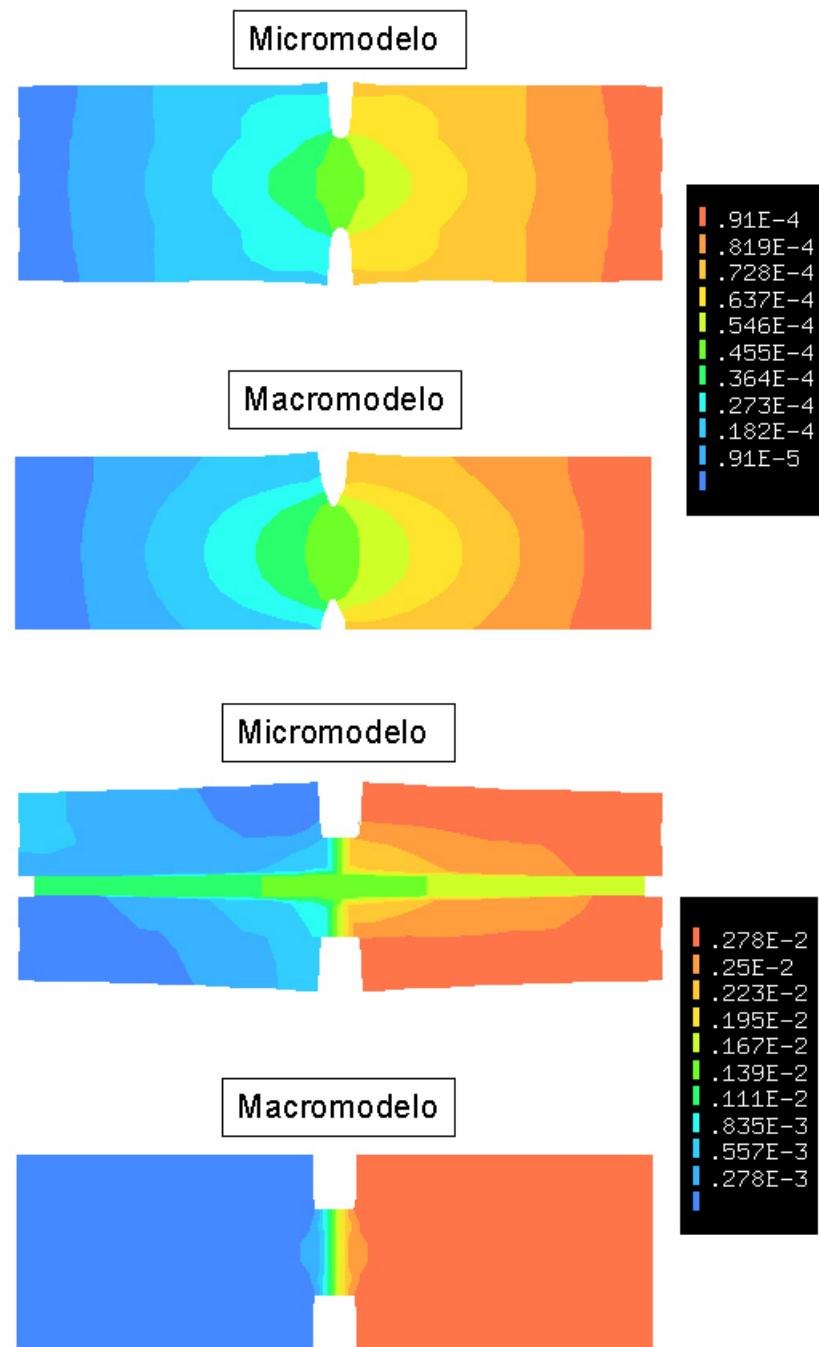


Figura 4.15 – Contornos de desplazamientos del macro y micromodelo en el primer y último paso de cargas convergido.

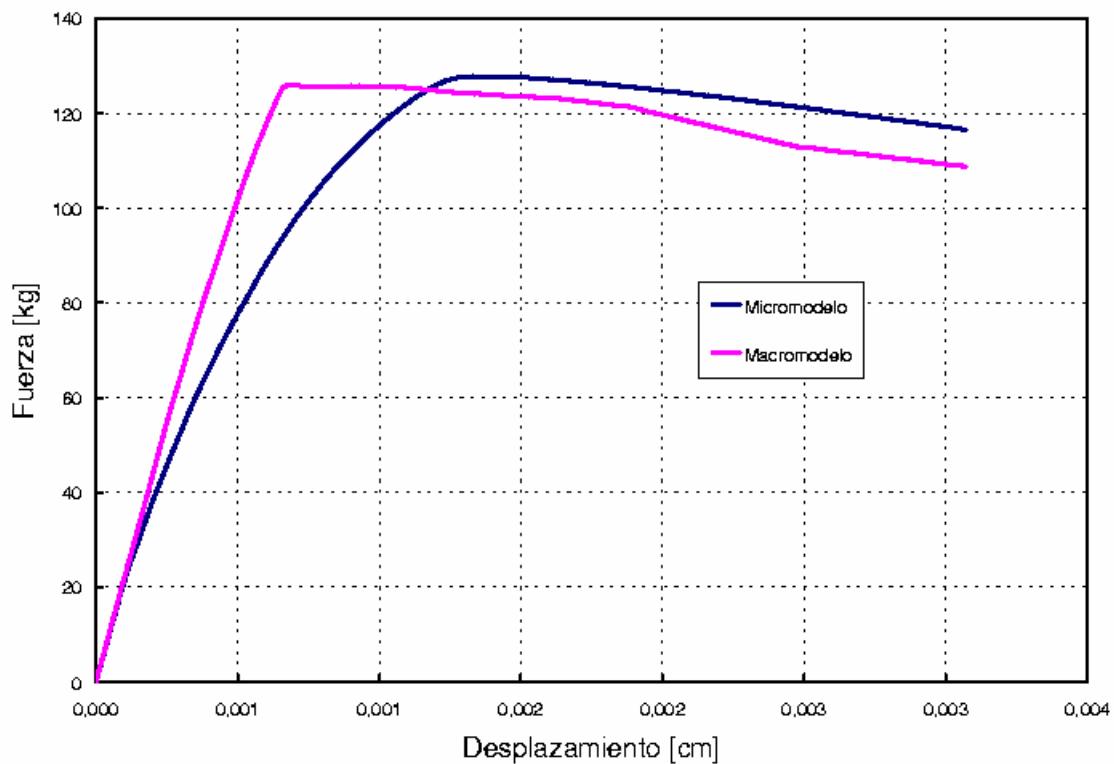


Figura 4.16 – Curva Fuerza - Desplazamiento macro y micromodelo. {dfm5.eps}

La Figura Figura 4.15 muestra los contornos de desplazamientos en el primer y último incremento de carga convergido para el micro y macromodelo. En el último incremento de cargas se observa que los desplazamientos se concentran en la zona central de la probeta y a lo largo del refuerzo central. En los extremos de la pieza se puede apreciar el "deslizamiento" entre fibra y refuerzo.

La Figura 4.16 muestra las respuestas en fuerzas totales para micro y macro modelo. Se observa que los resultados del micromodelo presentan un acuerdo satisfactorio con los del macromodelo. Es necesario destacar que el micromodelo no tiene la capacidad de simular los movimientos relativos entre las distintas fases pero tiene la ventaja de permitir simular refuerzos cuya discretización aumentaría considerablemente el costo computacional del análisis debido a sus reducidas dimensiones, por ej. Fibras de Carbono.

5 TEORÍA DE HOMOGENIZACIÓN

5.1 Introducción y estado del conocimiento.

La representación del comportamiento de los materiales homogéneos se consigue a través de leyes o ecuaciones matemáticas formuladas a escala macroscópica, dentro del contexto de la *mecánica de medios continuos*. Así, la mayoría de formulaciones extrapolan dicho concepto y entienden el comportamiento de los materiales compuestos desde un punto de vista macroscópico, aunque ello conlleva a ignorar lo que sucede al nivel de los materiales componentes. Sin embargo, desde hace algunas décadas se han desarrollado formulaciones que buscan obtener el comportamiento global del compuesto mediante los campos de tensiones y deformaciones que se producen al nivel de los materiales componentes. De aquí surgen nuevas formas de representar el comportamiento de los materiales heterogéneos dentro del contexto “multi-escala”, en donde se utiliza un *volumen elemental representativo* para modelizar al compuesto. Entre éstas formas de representación puede citarse el modelo de ensamble de esferas (Hashin (1962)¹, (1983)²), en los que se llena un dominio mediante esferas de diferente talla, respetando la relación volumétrica entre las fases. Otros trabajos proponen un método que se denomina “self-consistent method” (Hill (1965)³, Budiansky (1965)⁴, Hashin (1970)⁵, Christensen (1979)⁶), en donde se representa las heterogeneidades de un medio como una inclusión (elipsoidal o cilíndrica) dentro de una matriz infinita de propiedades elásticas desconocidas. Por otra parte, se encuentran también modelos micro mecánicos basado en el “método de Mori-Tanaka” (Mori-Tanaka (1973)⁷), estos consideran fibras o fracturas de forma elipsoidales, cilíndricas o planas embebidas en una matriz isótropa, transversalmente isótropa u ortótropa. En general, estos métodos siguen una formulación basada en las “autodeformaciones” (“eigenstrain”)*, en cuyo caso se considera un sólido elástico lineal, homogéneo e infinito, y

¹ Hashin Z. (1962). The elastic moduli of heterogeneous materials. *J. Appl. Mech.*, Vol. 29, pp. 143-150.

² Hashin Z. (1983). Analysis of composite materials: a survey. *J. Appl. Mech.*, Vol. 50, pp. 481-505.

³ Hill R. (1965). A Self-consistent mechanics of composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 13, pp. 213-222.

⁴ Budiansky B. (1965). On the elastic moduli of heterogeneous materials. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 13, pp. 223-227.

⁵ Hashin Z. (1970). *Mechanics of composite materials. Theory of composite materials*. Pergamon. Oxford.

⁶ Christensen R. M. (1979). *Mechanics of composites materials*. Wiley. New York.

⁷ Mori T. and Tanaka K. (1973). Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall.* Vol. 21, pp. 571-574.

* Se admite que la *deformación total* esté formada por una parte elástica y otra inelástica prescrita, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^*$.

se admite además la inclusión de una *autodeformación*. Esta idea es originalmente propuesta por Eshelby (1958)⁸.

Por otra parte, según Sánchez-Palencia (1987)⁹, en el estudio de los medios heterogéneos puede adoptarse dos puntos de vista diferentes:

Uno de ellos de carácter *global* o *macroscópico*, en cuyo caso las dimensiones de las heterogeneidades del medio son muy pequeñas y por lo tanto son ignoradas. En consecuencia, se considera que el compuesto es un material homogéneo, representado en la *escala global* mediante las coordenadas x_i , tal como se representa en la Figura 5.1.

El otro punto de vista que se adopta es *local* o *microscópico*, en donde se analiza la estructura interna del compuesto. Para ello se utiliza una *escala local* y_i en la cual se representa una parte del dominio, denominada *volumen elemental representativo*. Dicho dominio está formado por los pequeños componentes o fases. Naturalmente, se supone que las dimensiones de estas fases son suficientemente grandes como para satisfacer las hipótesis de la mecánica del continuo, es decir, mucho más grande que la distancia intermolecular.

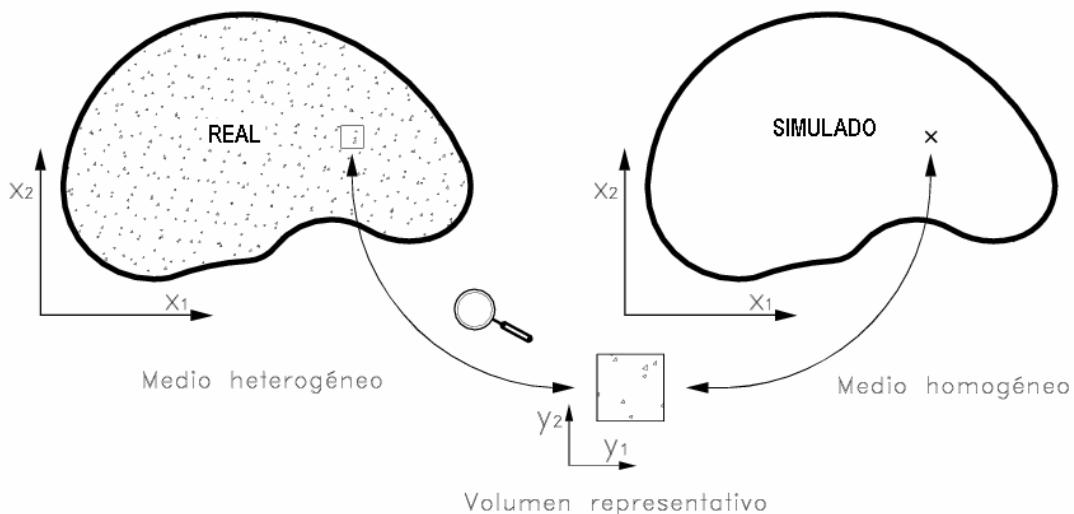


Figura 5.1 – Teoría de homogeneización, representación de dos escalas.

Se considera además la hipótesis que el medio heterogéneo es *estadísticamente homogéneo*, aunque la experiencia obtenida sugiere que conseguir un dominio estadísticamente homogéneo no es tarea fácil, sin embargo se parte de la idea que es posible determinar un volumen elemental representativo de este medio (Suquet (1987)¹⁰). Bajo estos conceptos generales, se encuentran diferentes formulaciones, tales como: el *método de promedios*, la *teoría de la expansión asintótica*, etc. A continuación se comenta muy brevemente algunos

⁸ Eshelby J. D. (1958). The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proc. R. Soc. London.* Vol. 241, pp. 376-396.

⁹ Sanchez-Palencia E. (1987). *Boundary Layers and Edge Effects in Composites. Homogenization Techniques for Composite Media.* Ed. E. Sanchez-Palencia and A. Zaoui. Spring-Verlag, Berlin.

¹⁰ Suquet P. M. (1987). *Elements of homogenization for inelastic solid mechanics. Homogenization Techniques for Composite Media.* Ed. E. Sanchez-Palencia and A. Zaoui. Spring-Verlag, Berlin.

de estos desarrollos relevantes y se recomienda para mayor información recurrir a las fuentes originales o a la referencia Zalamea (2001)¹¹.

5.1.1 Métodos de Promedios.

El *método de promedios*, también denominado *método heurístico*, fue el punto de partida del trabajo de investigación realizado por Suquet (1982)¹², en donde se proponen varias aportaciones a la teoría de homogeneización. Este autor define la teoría de homogeneización como: “el procedimiento que consiste en sustituir un material fuertemente heterogéneo por un material homogéneo el cual se desea equivalente al precedente dentro del rango usual de cargas”. Se denomina material *fuertemente heterogéneo* o material compuesto, a aquel dentro del cual una muestra de tamaño manipulable contiene un gran número de heterogeneidades (granos, cristales, fibras, agujeros, fisuras, etc.) embebidos dentro de una matriz de propiedades diferentes (la matriz y las heterogeneidades son los componentes del compuesto).

Con el propósito de obtener una ley de comportamiento macroscópico de algunos materiales compuestos, Hill (1967)¹³ y Mandel (1972)¹⁴ proponen que los parámetros característicos del material resulten del *promedio* de las magnitudes microscópicas que definen el estado del sistema. Es decir, sea V el volumen de un dominio representativo del medio heterogéneo, entonces, las variables macroscópicas de tensiones o deformaciones se obtienen a través del promedio de sus respectivos valores microscópicos dentro de dicho dominio, esto es:

$$\boldsymbol{\sigma}^x = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_V \quad , \quad \text{ó} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^x = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_V \quad (5.1)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}^x$ y $\boldsymbol{\varepsilon}^x$ representan los tensores de tensiones y deformaciones a nivel macroscópico y $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^y$ y $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^y$ son los campos correspondientes de tensiones y deformaciones a nivel microscópico. El paso de estos campos microscópicos a sus respectivos macroscópicos se justifica a través del *operador promedio* ($\langle \cdot \rangle$), el cual se encuentra definido de la siguiente forma,

$$\mathbf{f}^x(x) = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{f}^y(x, y) dV := \langle \mathbf{f}^y(x, y) \rangle_V \quad (5.2)$$

siendo x las coordenadas de un punto de la escala macroscópica, V el volumen representativo del dominio y \mathbf{f} una función de estado de dicho dominio que depende de la escala macroscópicas x_i y microscópica y_i .

Considerando como variables de estado los tensores de tensiones y deformaciones, se tiene

$$\boldsymbol{\sigma}^x(x) = \langle \boldsymbol{\sigma}^y(x, y) \rangle_V \quad \text{o} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^x(x) = \langle \boldsymbol{\varepsilon}^y(x, y) \rangle_V \quad (5.3)$$

¹¹ Zalamea F. (2001). Tratamiento numérico de materiales compuestos mediante la teoría de homogeneización- Ph.D. thesis, Universidad Politécnica de Cataluña (UPC), Barcelona- España.

¹² Suquet P. M. (1982). *Plasticité et Homogénéisation*. Université Pierre et Marie Curie. Paris.

¹³ Hill R. (1967). The Essential Structure of Constitutive Laws for Metal Composites and Polycrystals. *J. Mech. Phys. Solid.* Vol. 15, pp. 79-95.

¹⁴ Mandel J. (1972). *Plasticité classique et viscoplasticité*. Springer-Verlag, Nr. 97, series CISM Lecture Notes.

En este caso, el problema dentro de la escala microscópica exhibe dos diferencias notables con respecto al clásico problema de valores de contorno,

1. Las cargas consisten en promedios de campos y no de desplazamientos o fuerzas de masa o superficie.
2. No existen, o no están claras, las condiciones de contorno en el dominio representativo.

En cualquier caso, el problema elástico de los materiales compuestos se aborda de la siguiente manera: se busca obtener de forma aproximada el *tensor constitutivo homogeneizado elástico* \mathbb{C}^x (o su inverso $\mathbb{D}^x = (\mathbb{C}^x)^{-1}$). Con lo cual, es posible desacoplar el problema y establecer una la ley de comportamiento del medio heterogéneo elástico, como una función cuyas variables dependen únicamente de la escala macroscópica x_i . Suquet generaliza éste método de promedios y lo aplica a medios periódicos.

Se encuentran distintos procedimientos que pueden considerarse sub-grupos del método de los promedios, entre ellos:

1. *Método de los promedios formulado en deformaciones.* Puede encontrarse trabajos relacionados con este procedimiento en referencias debidas a Hill (1967)¹³, Mandel (1972)¹⁴ y Suquet (1987, 1982)^{10,12}.
2. *Método de los promedios formulado en tensiones.* Puede encontrarse trabajos relacionados con este procedimiento en referencias debidas a Mandel (1972)¹⁴ y Suquet (1987, 1982)^{10,12}.

5.1.2 Teoría de expansión asintótica.

Esta formulación matemática realizada a través de los *desarrollos asintóticos* descompone el problema de los medios heterogéneos en escalas de diferente orden de magnitud. De esta forma, se obtiene en cada una de las escalas las ecuaciones que gobiernan el comportamiento tenso-deformacional del material bajo un riguroso sustento matemático. Esta teoría fue propuesta y desarrollada por Sánchez-Palencia (1974, 1980)^{15,16}, Bensoussan (1978)¹⁷, Duvaut (1976)¹⁸, Lene (1981)¹⁹, entre otros. El lector interesado en profundizar acerca de los conceptos matemáticos de los métodos asintóticos puede consultar las siguientes referencias Sánchez-Huber (1992)²⁰, Cole (1980)²¹.

Como se mencionó al inicio del capítulo, en los problemas con materiales compuestos puede adoptarse dos puntos de vista diferentes. Si se elige un punto de vista microscópico, es posible apreciar en el material los pequeños componentes y, por consiguiente, los

¹⁵ Sanchez-Palencia E. (1974). Comportement local et macroscopique d'un type de milieux physiques hétérogènes. *Int. J. Eng. Sc.*, Vol. 12, pp. 331-351.

¹⁶ Sanchez-Palencia E. (1980). *Non-homogeneous media and vibration theory. Lecture Notes in Physics* Vol. 127. Springer-Verlag, Berlin.

¹⁷ Bensoussan A. and Lions J. L. and Papanicolaou G. (1978). *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. North-Holland, Amsterdam.

¹⁸ Duvaut G. (1976). *Analyse Fonctionnelle et Mécanique des Milieux Continus. Th. Appl. Mech.* Ed. W. Koiter. pp. 119-132, Nord Holland.

¹⁹ Lene G. and Duvaut G. (1981). *Résultats d'isotropie pour des milieux homogénés*. *Comptes Rendus*, Vol. 293, pp. 477-480, Acad. Sci. Paris, Series II.

²⁰ Sanchez-Hubert J. and Sanchez-Palencia E. (1992). *Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation*. Masson.

²¹ Cole J. D. and Kevorkian (1980). *Perturbation Methods in Applied Mathematics*. Springer. New York.

respectivos campos de las variables de estado. Estos campos microscópicos presentan fluctuaciones u oscilaciones, cuya longitud de onda está relacionada con la dimensión de los componentes. Si por el contrario se adopta un punto de vista macroscópico, en éste no se perciben las heterogeneidades del medio, ni las rápidas oscilaciones de los campos de las variables. Esta diferencia de magnitud, entre la longitud de onda del campo microscópico y el macroscópico, induce a dividir el espacio de referencia en dos espacios de diferente orden de magnitud. En consecuencia, se utiliza un espacio global o macroscópico, al cual se denomina con la variable x_i y un espacio local o microscópico y_i , en el cual se representa la *estructura interna del compuesto* o *microestructura*. Las escalas de estos dos espacios están relacionadas mediante la relación de escales ε , que representa la diferencia de magnitud entre las longitudes de onda de las dos escalas,

$$y = \frac{x}{\varepsilon} \quad (5.4)$$

De esta forma es posible obtener un operador diferencial en dos escalas aplicado sobre una función $f^\varepsilon = f(x_i, y_i)$ cuyos argumentos dependen de ambas escalas.

$$\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_i} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial y_i} + \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_i} \quad (5.5)$$

Y el campo de desplazamientos puede escribirse dentro del contexto de la multiescala como,

$$\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon \mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 \mathbf{u}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \quad (5.6)$$

donde $\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x})$ es el campo de deformaciones del medio heterogéneo, el cual se descompone en la suma de funciones diferentes ($\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1, \dots$) que coexisten bajo diferentes ordenes de magnitud ($\varepsilon^{-1}, \varepsilon^0, \varepsilon^1, \dots$). En general, se admite que estas funciones cambian lentamente en cada una de las escalas.

Si el compuesto es un medio periódico, este principio se lo conoce como *hipótesis de periodicidad local* (Bensoussan et al. (1978)¹⁷), (Sánchez-Palencia (1987)⁹), (Levi (1987)²²). Es decir, considérese que se tiene un medio dividido en *celdas unidad* de dominio Y , tal como presenta la Figura 5.2, considérese además que se han identificado dos puntos $P1$ y $P2$ en celdas vecinas que son homólogas por periodicidad. El principio expresa que el valor de la función f^ε , que representa el campo de una variable de estado del problema, en estos puntos resulta aproximadamente igual, puesto que dichos puntos con respecto a la escala local son equivalentes y en relación a la escala global dichos puntos se encuentran en posiciones muy cercanas. Por el contrario, el valor de la función es en general distinto para un punto cualquiera $P3$ homólogo por periodicidad pero alejado de $P1$, ya que la distancia es grande con respecto a la escala x_i . Así también, el valor de la función será distinto para un punto $P4$ que se encuentra dentro de la misma celda pero alejado del punto inicial $P1$, puesto que en este caso la distancia entre dichos puntos es grande con respecto a la escala y_i .

Para obtener las ecuaciones de gobierno en cada una de las dos escalas, la mayor parte de trabajos utilizan los tres primeros términos de la descomposición del campo de des-

²² Sanchez-Palencia E. (1987). *Fluids in Porous Media and Suspensions. Homogenization Techniques for Composite Media*. Ed. E. Sanchez-Palencia and A. Zaoui. Spring-Verlag, Berlin.

plazamientos (ecuación (5.6)) y, además, descomponen el campo de tensiones. Sin embargo, por sencillez y para una mejor explicación del método, es posible obtener las mismas expresiones utilizando únicamente los dos primeros términos del campo de desplazamientos (Lene (1986)¹⁹).

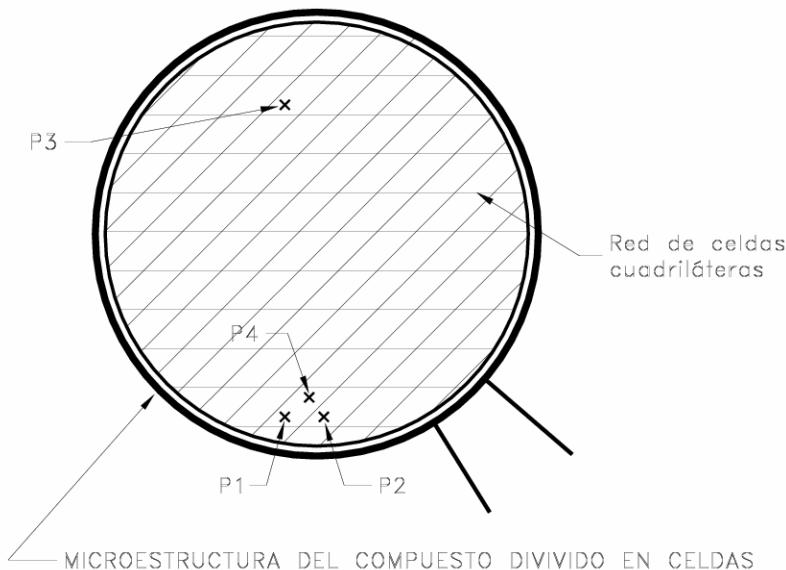


Figura 5.2 – Medio continuo dividido en celdas unidad.

5.1.3 Extensión del “Método de los Promedios” y del “Método de Expansión Asintótica” al problema no lineal.

Toda la introducción realizada previamente en relación con los métodos de los Promedios y de Expansión asintótica se centra en el estudio del comportamiento de un compuesto en régimen elástico lineal. La extensión de estas formulaciones al campo inelástico no-lineal no resulta trivial y es un tema que todavía está abierto.

Entre los primeros desarrollos realizados dentro de la teoría de homogeneización en campo no lineal se encuentran los trabajos de Suquet (1982, 1987)^{10,12}. En este caso, el grado de complejidad es muy elevado, es por ello que Suquet realiza su estudio teniendo en cuenta el comportamiento de los materiales componentes; es decir: compuestos cuyos componentes son visco-elásticos, elasto-plásticos, etc. Uno de los principales resultados de esta investigación es que *las variables macroscópicas del problema dependen de las variables microscópicas*. El lector interesado en el detalle del desarrollo matemático de estas ideas originales puede consultar la referencia Suquet (1987)¹⁰ y también puede obtener una idea general sobre el estado del conocimiento relacionado con este tema en la referencia Zalamella (2000)¹¹.

5.1.4 Otros temas relacionados con la homogeneización.

Los parámetros elásticos homogeneizados del material compuesto se obtienen a través de un volumen elemental representativo o celda unidad. Una vez conocidos los parámetros homogenizados el problema elástico puede ser solucionado de forma desacoplada como si se tratara de un material simple. A continuación se menciona algunos de los trabajos representativos donde se aborda el problema elástico en cada una de las escalas.

Además, se comenta sobre el uso de los métodos adaptativos y estimadores de error para asegurar la fiabilidad de tales resultados. Por otra parte, se citan trabajos donde se cuestiona la teoría de homogeneización. Finalmente, se ha dirigido la atención hacia la solución de algunos problemas relacionados con la homogeneización en el comportamiento no lineal del compuesto. En este caso se menciona el problema de la imposición de las condiciones de contorno en la celda unidad, puesto que la descomposición de los campos en una parte uniforme y otra periódica puede no ser lo adecuado en problemas no lineales. Por último, se comenta también algunas propuestas que utilizan técnicas no convencionales para abordar el problema no lineal mediante el método de los elementos finitos en múltiples escalas.

5.1.4.1 Condiciones de contorno y su implementación

Uno de los problemas básicos de la teoría de homogeneización y que hasta el momento no existe acuerdo entre los investigadores es acerca de la forma de imponer las condiciones de contorno en la celda unitaria. Como se conoce, en mecánica de sólidos el problema estándar de valores de contorno obtiene los campos de tensiones σ y desplazamientos u dentro de un dominio Ω , generado por unas determinadas solicitudes). Para lo cual, se requiere conocer las condiciones de borde del dominio, es decir, los valores prescritos del vector de tensiones $\bar{\sigma}(n)$ o desplazamientos \bar{u} en el contorno del dominio $\partial\Omega$. Las condiciones de contorno que pueden existir en estas celdas son:

- Condiciones de Dirichlet, que establece que parte o todo el contorno está sometido a desplazamientos impuestos $\partial\Omega_u$
- Condiciones de Neumann, que establece que parte del contorno o su totalidad están bajo fuerzas impuestas $\partial\Omega_t$.
- Condición mixta en la que existe una combinación de las dos condiciones anteriores $\partial\Omega_u \cup \partial\Omega_t$.

Naturalmente, las condiciones de contorno al nivel de la microestructura intentan reproducir las interacciones que se generan en el interior de la estructura interna del compuesto.

La teoría de promedios plantea la hipótesis que las tensiones y deformaciones macroscópicas corresponden al promedio de los respectivos campos microscópicos. Para forzar el cumplimiento de al menos uno de los dos campos se utiliza la condición de Dirichlet imponiendo un campo de deformación uniforme (Hill (1967)¹³), o la condición de Neumann imponiendo un campo de tensión uniforme (Madel (1972)¹⁴). El error introducido por dichas condiciones de contorno es despreciable cuando las dimensiones de las heterogeneidades son muy pequeñas con respecto al volumen elemental representativo. Sin embargo, para la solución numérica de un volumen que contiene muchas heterogeneidades se requiere un esfuerzo computacional grande. Esto condujo a que trabajos posteriores consideren los materiales con una estructura periódica, en donde un volumen elemental relativamente simple contiene la información completa acerca de la microestructura del compuesto. Así, las propuestas de la teoría de homogeneización con media periódica, basados tanto en la teoría de promedios (Suquet (1982)¹²), como en los desarrollos asintóticos (Sánchez-Palencia (1980)¹⁶), (Duvaut (1976)¹⁸), (Bensoussan(1978)¹⁷), (Lene (1981)¹⁹), reproducen las condiciones de periodicidad a través de las funciones periódicas. Pero estos métodos, al descomponer los campos de las variables microscópicas en una parte uniforme y otra periódica utilizan la superposición de efectos, condición que los restringe

a problemas lineales. Es por ello, que algunos trabajos recientes exploran diferentes posibilidades para imponer las condiciones de contorno en el problema no lineal.

Swan (1994)²³ propone una técnica del control de deformaciones $\boldsymbol{\epsilon}^x$, para la homogeneización de compuestos inelásticos periódicos, la cual se basa en la descomposición aditiva del campo de desplazamientos $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}_p$, de una contribución lineal que es impuesta $\bar{\mathbf{u}}$, más una contribución periódica que se desconoce \mathbf{u}_p . En capítulo, que no es más que una presentación sintética de estos conceptos, se indica que las celdas unidad presentan lados opuestos que tienen la misma forma. La solución se obtiene de forma incremental a través de una técnica de *predicción-corrección*, en la que el predictor es la parte lineal del campo de desplazamientos y en adelante se aplican correctores periódicos, hasta conseguir el equilibrio del dominio. Se utiliza también una técnica de control de tensiones σ^x , cuyo grado de complejidad es elevado, puesto que además de buscar el equilibrio en el dominio, se requiere adicionar restricciones en deformaciones y desplazamientos. Este problema suele solucionarse mediante una implementación basada en la formulación mixta de elementos finitos a través del método de penalización. El lector interesado en los principios de las formulaciones mixtas puede referirse a las referencias Zienkiewicz (1984)²⁴, SIMO (1998)²⁵ y Hughes (1987)²⁶.

Como una forma alternativa para imponer las condiciones de contorno, Anthoine (1995)²⁷ propone una interesante forma basada en la teoría de promedios. En el caso particular de la mampostería, idealizada en dos dimensiones, la subdivide en celdas homogéneas, cuadriláteras y hexagonales, cuyos lados están relacionados por una base de vectores denominados, en la tesis de F. Zalamea (2000)¹¹, *vectores de periodicidad*. Para solucionar el problema de imposición de las condiciones de contorno sobre la celda se utiliza los *multiplicadores de Lagrange*.

En una publicación posterior Anthoine (1996)²⁸ analiza nuevamente una mampostería, pero en este trabajo los materiales componentes (ladrillo y mortero) tienen comportamiento no lineal. El ablandamiento o “softening” de los materiales generan dificultades de convergencia que son solucionadas a través de técnicas numéricas de “arc-length”.

En artículo presentado por Michel (1999) propone otro método de control de deformaciones y control de tensiones para la determinación del comportamiento del compuesto. La formulación se basa en la descomposición del campo de desplazamientos en una parte uniforme y otra periódica $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}_p$. Su aplicación se restringe a materiales elásticos y materiales rígidos-plásticos (elásticos perfectamente plásticos). En esta formulación se propone el concepto de *grado de libertad macroscópico*. Esto es, se introduce en cada uno de los elementos de la celda unidad discretizada un nodo adicional llamado *nodo macroscópico*, cuya función es agregar grados de libertad adicionales en los puntos donde se imponen o introducen las restricciones macroscópicas $\boldsymbol{\epsilon}^x$ y σ^x .

²³ Swan C. (1994). Techniques for Stress- and Strain-Controlled Homogenization of Inelastic Periodic Composites. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 117, pp. 249-267.

²⁴ Zienkiewicz O. C. and Taylor R. L. (1994). *El método de los Elementos Finitos: formulación básica y problemas lineales*, Vol 1. CIMNE, McGraw-Hill. Barcelona.

²⁵ Simo J. C. and Hughes T. J. R. (1998). *Computational Inelasticity*. Springer-Verlag. New York.

²⁶ Hughes T. (1987). *The Finite Element Method*. Prentice-Hall.

²⁷ Anthoine A. (1995). Derivation of the in-Plane Characteristics of Masonry Through Homogenization Theory. *Int. J. Solids Structures*, Vol. 32, No. 2, pp. 137-163.

²⁸ Anthoine A. and Pegan P. (1996). Numerical analysis and modelling of the damage and softening of brick masonry. *Numerical Analysis and Modelling of Composite Materials*. Blackie academic and professional pp. 152-184.

5.1.4.2 Solución en dos escalas del problema elástico.

En esta sección se hace referencia al trabajo presentado por Guedes (1990)²⁹, en el que se considera el compuesto como un material periódico y se utiliza la teoría de homogeneización a través de los desarrollos asintóticos. De aquí resulta la determinación de los coeficientes elásticos homogeneizados del tensor constitutivo homogeneizado para el material compuesto.

La solución del problema elástico en los materiales compuestos se realiza de forma similar a la presentada en las referencias (Lene (1986)³⁰, Devries (1989)³¹), esto es:

- Se realiza el pre-procesamiento del compuesto. Esto consiste en obtener a través de la celda unidad los coeficientes homogeneizados.
- Se soluciona el problema macroscópico suponiendo que el material es homogéneo, cuyo comportamiento fue establecido en el paso anterior.
- Se realiza el post-proceso. Esto se refiere a la obtención posterior de los campos de tensiones y deformaciones a nivel microscópico, en los puntos de interés de la macro estructura.

Finalmente se introduce un método adaptativo para mejorar la precisión de los coeficientes homogeneizados. Este método consiste en realizar una discretización más fina en aquellas partes de la celda unidad donde se determina los mayores errores de aproximación asociados a la solución numérica (mediante el método de elementos finitos). Estas zonas son determinadas a través del estimador del error desarrollado.

5.1.4.3 Cuestionamientos a la teoría de homogeneización y utilización de Métodos adaptativos y “multi-grid”.

Como se conoce, los métodos adaptativos son una estrategia para mejorar la calidad de la solución obtenida a través del método de los elementos finitos. Estos métodos se encuentran bajo diferentes denominaciones, de acuerdo a la forma de conseguir la mejora. Entre estas se tiene:

- Técnicas que utilizan un refinamiento de la malla conocidos como “*h-methods*”,
- Técnicas que incrementan el orden polinomial de las funciones de aproximación “*p-methods*”,
- Técnicas que utilizan relocalización de los nodos “*r-methods*”,
- Técnicas que resultan de la combinación de las anteriores, por ejemplo: “*hp-methods*”.
- Por otra parte, los métodos “*multi-grid*” constituyen una técnica que busca aproximar la solución del problema o acelerar su convergencia mediante la solución iterativa de la estructura discretizada en diferentes niveles. Es decir,

²⁹ Guedes J. M. and Kikuchi N. (1990). Preprocessing and Postprocessing for Materials Based on the Homogenization Method with Adaptive Finite Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol. 83, pp. 143-198.

³⁰ Lene F. (1986). Damage Constitutive Relations for Composite Materials. *Engineering Fracture Mechanic* Vol. 25, pp. 713-728.

³¹ Devries F. and Dumontet H. and Duvaut G. and Lene F. (1989). Homogenization and Damage for Composite Structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. Vol. 27, pp. 285-298.

transmitiendo la solución desde una malla más gruesa a una más fina y viceversa.

En esta sección se hace mención a los trabajos presentados por Fish y coautores (1993-a)³², (1993-b)³³, (1994-a)³⁴, (1994-b)³⁵, (1995-a)³⁶, (1995-b)³⁷, que cuestionan la teoría de homogeneización, pero, además, han realizado varias contribuciones en el refinamiento de la solución del problema elástico de medios heterogéneos en varias escalas a través de los métodos ya indicados. Por ejemplo, en la referencia (Fish (1993-a)³²) se lee: “Los desarrollos asintóticos presentan una rigurosa deducción matemática en los medios heterogéneos cuando se cumple con las siguientes suposiciones:

- La micro estructura es periódica, es decir el compuesto se forma de la repetición espacial de una estructura muy pequeña o celda unidad.
- Los términos de la descomposición del desplazamiento $\mathbf{u}^k(x,y)$ son periódicos dentro de y con el mismo período de la microestructura.

Sin embargo, si el material es localmente no periódico o materiales periódicos pero cuya solución es no periódica en y por la presencia de efectos locales (contorno de la macro estructura, despegue entre componentes, etc.), entonces los desarrollos asintóticos dan una aproximación pobre de los campos locales”. En un artículo (Fish (1994-a))³⁴ se expresa: “Desafortunadamente, en las áreas de alta concentración de tensiones, tanto en el nivel macromecánico –“macro-crack”– o a nivel mesomecánico –lados libres, despegue de componentes–, la suposición que la solución macroscópica o microscópica es uniforme dentro del dominio del volumen elemental representativo no es válida”.

Finalmente, en otra referencia (Fish (1895-a))³⁶ se dice: “Es bien conocido que en el límite de $\varepsilon \rightarrow 0$ la solución del problema del medio heterogéneo se aproxima al problema de valores de contorno con coeficientes homogeneizados. Desafortunadamente, en muchas situaciones prácticas cuando el valor de $\varepsilon \rightarrow \infty$ y la solución del problema homogeneizado tiene un alto gradiente, la solución obtenida puede distar bastante de la solución del problema inicial. Las principales fuentes de error se localizan en las porciones del dominio del problema donde la solución tiene altos gradientes. Irónicamente, estas son precisamente las regiones de mayor interés desde el punto de vista práctico”. Por otra parte, la visión de estos investigadores, puede resumirse en la siguiente opinión (Fish (1995-b))³⁷ “La teoría matemática de la homogeneización sirve para capturar la frecuencia baja que presenta el medio heterogéneo, mientras que en los lugares con altos gradientes la respuesta es oscilatoria, es por ello que se introduce un término perturbador, la solución se determina aplicando técnicas de relajación hasta conseguir convergencia”.

³² Fish J. and Wagiman A. (1993-a). Multiscale finite element method for a locally nonperiodic heterogeneous medium. *Computational Mechanics*. Vol. 12, pp. 164-180.

³³ Fish J. and Markolefas F. (1993-b). Adaptive s-method for linear elastostatics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol. 104, pp. 363-396.

³⁴ Fish J., Nayak P. and Holmes M. H. (1994-a). Microscale reduction error indicators and estimators for a periodic heterogeneous medium. *Computation Mechanics*. Vol. 14, 323-338.

³⁵ Fish J. ,Markolefas S., R. Guttal and P. Nayak (1994-b). On adaptive multilevel superposition of finite element meshes for linear elastostatics. *Applied Numerical Mathematics*. Vol. 14, pp. 135-164.

³⁶ Fish J. and Belsky V. (1995-a). Multi-grid method for periodic heterogeneous media, Par 1: Convergence studies for one-dimensional case. *Comput. Methods Appl. Mech Engrg.* Vol. 126, pp. 1-16.

³⁷ Fish J. and Belsky V. (1995-b). Multi-grid method for periodic heterogeneous media, Par 2: Multiscale modeling and quality control in multidimensional case. *Comput. Methods Appl. Mech Engrg.* Vol. 126, pp. 17-38.

Estas ideas tomadas de las publicaciones aclaran la forma de abordar el problema. En el artículo titulado “Multiscale finite element method for a locally nonperiodic heterogeneous medium” (Fish 1993-a)³², proponen descomponer el dominio global en una parte periódica, en la cual se utiliza la solución de la teoría de homogeneización. En el resto del dominio, donde se suponen que dominan los efectos locales, se considera como una porción no periódica (por ejemplo: en el contorno). En esta porción del problema se sobrepone una malla fina, cuyas condiciones de contorno es el desplazamiento obtenido en la solución del problema global. En este caso, el desplazamientos corresponde al campo macroscópico \mathbf{u}^0 enriquecido por una contribución de la microestructura a través del segundo término de la descomposición asintótica \mathbf{u}^1 , la solución se obtiene de forma acoplada (ver detalles en la referencia). Sin embargo, no está claro que esta división, ni la introducción de esta perturbación lleve a mejores resultados.

Un trabajo más elaborado (Fish (1993-b))³³ propone un método adaptativo “*s-method*” para problemas elásticos, el cual se basa en la superposición de una malla fina donde un estimador de error indica que se requiere. Se opera de la siguiente forma:

- Se propone un estimador de error, el cual se aplica nodo por nodo.
- Se identifica las regiones críticas de acuerdo a los contornos de la densidad de error estimado.
- Se sobrepone una malla fina en dichos lugares donde se han determinado errores inaceptables.
- Se obtiene la solución del refinamiento adaptativo.
- Se valora la calidad de la solución a través de una norma global y local.

Luego (Fish (1994-a))³⁴, desarrollan un indicador y estimador de la reducción del error en la microescala (“Microscale reduction error indicator and estimators”), el cual se basa en la estimación de los términos de alto orden que se desprecian en la clásica formulación en doble escala de la teoría de la expansión asintótica.

Otro artículo en esta misma dirección recoge los trabajos anteriores (Fish (1994-b))³⁵. En este artículo se generaliza el “*s-method*” sobreponiendo mallas en varios niveles. Para ello se presenta dos versiones, una para mallas estructuradas y otra para no estructuradas. La versión con mallas estructuradas se soluciona con un “solver” iterativo para sistemas simétricos positivos definidos, se analiza dos procedimientos: el uso de precondicionador de gradiente conjugado y un algoritmo “*multi-grid*” jerárquico. Se discute el proceso adaptativo basado en un estimador de error y una estrategia de refinamiento. También se propone una estrategia para simular la formación de discontinuidades y su propagación a través de un método adaptativo jerárquico que utiliza campos discontinuos.

Por otra parte, un cambio de estrategia se encuentra en la publicación (Fish (1995-a))³⁶ y (Fish (1995-b))³⁷ que titula “Multi-grid method for periodic heterogeneous media” (parte 1 y 2). En este trabajo, se abandona la hipótesis de uniformidad de los campos de las variables en la escala macroscópica. Se propone unos operadores de transformación para pasar la información de la malla gruesa a la fina y viceversa (“intergrid transfer operators”), para lo cual se utilizan los términos de los desarrollos asintóticos. La solución se realiza de forma iterativa en las dos escalas, una en la macroscópica y otra al nivel de los componentes. Nuevamente se utiliza el indicador y estimador de reducción del error en la microescala.

Cabe agregar que, la descalificación de la solución periódica no se realiza de forma rigurosa. Por otra parte, puesto que la respuesta depende de la solución obtenida con el Método de los Elementos Finitos, es obvio que el uso de los métodos adaptativos (en cada una de las escalas) mejora el resultado. Sin embargo, no está claro que la introducción de dichas perturbaciones y la correspondiente relajación sea lo adecuado, más bien da la impresión que en este caso la solución depende tanto del valor de la perturbación como del nivel o escala en donde se lo introduce. Además, la utilización de todas estas técnicas de refinamiento eleva considerablemente la complejidad del problema elástico de materiales compuestos.

Finalmente, se ha presentado una propuesta diferente para materiales heterogéneos, pero que sigue una línea de investigación en esta dirección. Esta se denomina *Homogenized Dirichlet Projection Method* (HPDM). En este caso se obtiene los efectos de la microestructura bajo diferentes escalas sobre la respuesta a nivel macroscópico del medio heterogéneo. Al igual que en el caso anterior, se introduce un estimador de error y se refina sucesivamente en los varios niveles o escalas mediante un método jerárquico. Ver los detalles en la siguientes referencias (Zohdi (1996)³⁸, Moes (1998)³⁹, Oden (1999)⁴⁰.

5.1.4.4 Homogeneización mediante el *Método de Elementos Finitos Voronoi*.

Este método es una innovadora propuesta para problemas no lineales, el cual representa un material heterogéneo a través de *elementos finitos Voronoi* (Ghosh (1995)⁴¹, Ghosh (1996)⁴²). Este método fue concebido para reproducir el comportamiento de materiales con distribución aleatoria de las heterogeneidades. Para ello, representa un volumen de un medio con dispersión arbitraria de heterogeneidades mediante una partición del dominio en polígonos convexos de varios lados denominados *elementos Voronoi*. Para representar las heterogeneidades, cada uno de estos elementos contiene una segunda fase o inclusión dentro del dominio, tal como se presenta en la Figura 5.3

En este caso, cada uno de estos elementos Voronoi pueden ser considerados como una celda base, de tal forma que varios de estos elementos dentro del dominio representativo caracterizan un volumen de un medio con dispersión aleatoria de sus heterogeneidades. Con el propósito de facilitar su utilización los autores han desarrollado generadores de malla que crean estos polígonos basados en su forma, talla y localización de heterogeneidades (Ghosh (1991)⁴³, Ghosh (1993)⁴⁴).

³⁸ Zohdi T. I., Oden J. T. and Rodin G. J. (1996). Hierarchical modeling of heterogeneous bodies. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* Vol. 138, pp. 273-298.

³⁹ Moes N., Oden J. T. and Zohdi T. I. (1998). Investigation of the interaction between the numerical and the modeling errors in the Homogenized Dirichlet Projection Method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* Vol. 159, pp. 79-101.

⁴⁰ Oden J. T., Vemaganti K. and Moes N. (1999). Hierarchical modeling of heterogeneous solids. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* Vol. 172, pp. 3-25.

⁴¹ Ghosh S., Lee K. and Moorthy S. (1995). Multiple Scale Analysis of Heterogeneous Elastic Structures Using Homogenization Theory and Voronoi Cell Finite Element Method. *Solids Structures*. Volume 32, No. 1, pp. 27-62.

⁴² Ghosh S., Lee K. and Moorthy S. (1996). Two Scale Analysis of Heterogeneous Elastic-plastic Materials with Asymptotic Homogenization and Voronoi Cell Finite Element Model. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* Volume 132, pp. 63-116.

⁴³ Ghosh S. and Mukhopadhyay s. N. (1991). A two-dimensional automatic mesh generator for finite element analysis of randomly dispersed composites. *Computers Struct.* Vol. 41, pp. 245-256.

⁴⁴ Ghosh S. and Mukhopadhyay s. N. (1993). A materials based finite element analysis of heterogeneous media involving Dirichlet tessellations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* Vol. 104, pp. 211-247.

Esta formulación busca reducir el costo computacional que se genera al determinar los campos microestructurales dentro del compuesto, ya que en los materiales aleatorios la determinación exacta de los campos microscópicos no es tan relevante como la determinación de los campos a nivel macroscópicos.

En este procedimiento, cada elemento Voronoi representa un elemento finito, cuya formulación se realiza a través de un *método híbrido en tensiones* introducido por Pian (1964)⁴⁵. Posteriormente, para representar al compuesto se incorpora una heterogeneidad dentro de la matriz del elemento Voronoi (Ghosh (1993)⁴⁷), cuyo efecto se introduce mediante la restricción de continuidad del vector de tracciones en el interfase matriz-inclusión. En la interfase, el campo de tensiones y deformaciones puede ser discontinuo, mientras que el campo de desplazamientos se considera continuo. Las discontinuidades en el campo de tensiones se consiguen mediante la posibilidad de que se produzcan saltos dentro de los coeficientes en la interpolación polinómica de las tensiones. De tal manera que, el funcional de *energía complementaria* del elemento cumple la restricción de continuidad del vector de tracción en la interfase matriz-inclusión impuesta a través de multiplicadores de Lagrange.

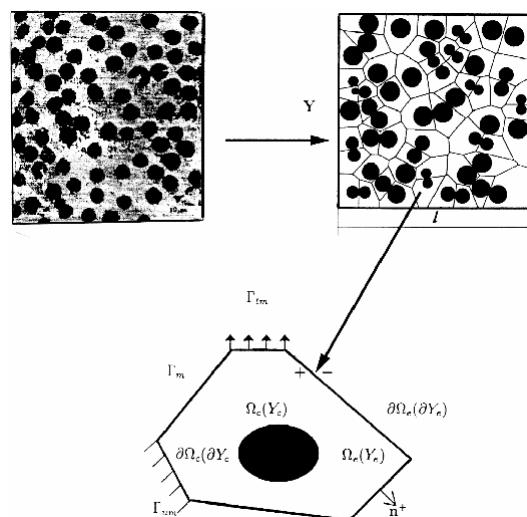


Figura 5.3 – Idealización del medio heterogéneo mediante una partición del volumen representativo con elementos Voronoi.

Posteriormente, se propone abordar el problema elástico en materiales compuestos mediante un método de dos escalas (Ghosh (1995)⁴¹). El método presentado obtiene las ecuaciones que gobiernan en cada una de las escalas mediante la teoría de los desarrollos asintóticos y el análisis del volumen representativo se realiza mediante el método de los elementos finitos Voronoi.

⁴⁵ Pian T. (1964). Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distribution. *AIAA J.* Vol. 2. pp. 1333-1336.

⁴⁹ Lee K., Moorthy S. and Ghosh S. (1999). Multiple scale computational model for damage in composite materials. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* Vol. 172, pp. 175-201.

En el artículo (Ghosh 1996)⁴²) se extiende este método a problemas no lineales. Además se presentan interesantes ejemplos que compara el método propuesto con la teoría de homogenización mediante los desarrollos asintóticos, con resultados obtenidos a partir de ensayos de laboratorio y con ecuaciones constitutivas determinadas para ciertos compuestos. Los resultados obtenidos son bastante buenos y a un costo computacional menor con respecto a los métodos que utilizan la celda unidad. En una publicación posterior (Lee 1999)⁴⁹) se introduce un criterio de fractura dentro del elemento y un método adaptativo en la escala macroscópica.

Este innovador método resulta sumamente eficaz para el estudio de compuestos con distribución aleatoria y además puede representar una celda unidad de un medio periódico, incluso en algunos casos con un solo elemento finito Voronoi, esto le confiere una gran ventaja por la rapidez del resultado. Pero, por las suposiciones que se realizan en su formulación, la precisión de los campos microscópicos, otorgado por un único elemento finito Voronoi, es menor que el obtenido mediante una celda unidad (con varios elementos finitos), aunque el valor promedio global de estos campos sea muy aproximado. Por otra parte, por su formulación se puede encontrar dificultades al intentar extender esta metodología a problemas (de medios periódicos) que presenten: despegue de componentes, formas complicadas de heterogeneidades, compuestos con más de dos fases, etc.

5.2 Teoría de homogeneización basada en la “Periodicidad Local”.

5.2.1 Introducción.

Varios *métodos multi-escala* han sido desarrollados para resolver el problema que presentan los materiales compuestos. Algunos de estos métodos han sido presentados en los apartados anteriores y están incluidos dentro del contexto de la *teoría de homogeneización*, en la cual el material compuesto se divide en dos diferentes escalas. De esta manera, el material compuesto es aceptado como un material homogéneo a *escala macroscópia* (x_i) y su comportamiento puede estudiarse a partir de una unidad de volumen –volumen elemental–, representado por la segunda escala o *escala microscópica* (y_i). Cuando la estructura interna del material es periódica, el volumen unitario representativo de esta periodicidad recibe el nombre de *célula o celda unidad*. La utilización de la técnica en dos escalas es equivalente a determinar las propiedades del material compuesto cuando las dimensiones de la celda unidad tienden a cero.

Entre los métodos más relevantes, se ha mencionado la teoría de homogeneización propuesta por Sanchez-Palencia (1980)¹⁶, Bensoussan (1978)¹⁷ and Duvaut (1976)¹⁸, entre otros, la cual está formulada en término de la teoría de expansión asintótica. Debido a estos desarrollos, el tratamiento de los problemas de materiales compuestos en dos escalas descansa en bases teóricas rigurosas. Por otro lado, y como ya se mencionó en el apartado anterior, Suquet (1982)¹², (1987)¹⁰, utiliza el *método de los promedios* y ha conseguido su extensión al caso no-lineal, mediante variables macroscópicas acopladas con las microscópicas. El hecho de acoplar las variables microscópicas con las macroscópicas presenta una dificultad añadida al problema del tratamiento a dos escalas, puesto que esto significa que existe un número infinito de variables a resolver. Con el propósito de obtener

una ley constitutiva simple para el material compuesto, se han propuesto ciertas simplificaciones que sólo son aplicables a problemas de estructuras simples. Tampoco hay que olvidar que Ghosh (1996)⁴² ha incursionado en el sentido de las estructuras no lineales, encontrando como solución la aplicación de los elementos finitos de Voronoi y una expansión asintótica como vínculo entre las dos escalas.

En este trabajo que se presenta, fruto de la tesis de F. Zalamea (2000)¹¹, se propone una nueva alternativa para la *teoría de homogeneización* para medios periódicos. La formulación desarrollada utiliza la *Mecánica de Medios Continuos* estándar y concuerda con las ideas principales presentadas en el “estado del arte” resumido en el apartado anterior. Es decir, se admite que los valores efectivos a nivel macroscópico de tensiones y deformaciones están asociados al promedio de los campos correspondientes microscópicos y la descomposición del problema en dos escalas, como lo presenta la teoría de la expansión asintótica. Pero, se buscan nuevos mecanismos o conceptos que pudieran haber pasado inadvertidos. El análisis parte de las consecuencias que se derivan de la periodicidad del medio y su división en celdas unidad. En dicho análisis se proporciona una serie de conceptos que, junto a la *hipótesis de periodicidad local* (Sánchez-Palencia (1987)⁹), permiten deducir de forma rigurosa algunas de las variables macroscópicas a partir de los campos de las variables microscópicas. Además, se obtienen las ecuaciones que gobiernan al problema en cada una de las dos escalas, sin tener que recurrir a los desarrollos asintóticos. A continuación se plantea el problema de valores de contorno a nivel de la microestructura a través de las restricciones de contorno adecuadas para la celda unidad, tanto en el rango lineal como no lineal. Su solución se determina mediante el *Método de los Elementos Finitos*, en donde las restricciones de contorno son impuestas mediante los multiplicadores de Lagrange (Anthoine (1997)⁵⁰).

El problema global del material compuesto se plantea dentro del contexto de doble escala. Para la solución del problema no lineal se admite que no es posible desacoplar las variables de estado microestructurales (Suquet (1982)¹², Suquet (1987)¹⁰), es por ello que se propone obtener el comportamiento del material compuesto de forma numérica a través del *Método de los Elementos Finitos*. Esto es, solucionar el problema por el camino natural, el cual indica que las variables macro estructurales dependen de un infinito número de variables internas. Esta forma de abordar el problema contradice la opinión de algunos investigadores sobre el tema, que afirman que no es posible obtener la solución exacta (o numérica) de los campos microestructurales por el enorme esfuerzo computacional que se requiere (Fish (1997)⁵¹). No obstante esta opinión, y dados los avances que se tiene actualmente en computación, la resolución del problema por esta vía es la que se ha propuesto y resultó en este trabajo sentando así un camino a recorrer y que con seguridad será mejorado.

La formulación presentada se justifica plenamente porque están involucrados aspectos geométricos de la microestructura. Además, no se requiere hacer ninguna suposición sobre la naturaleza de los materiales componentes, ni dudosas simplificaciones del problema. El resultado es un método general, que no requiere el desarrollo explícito de una ecuación constitutiva, puesto que es el ordenador, a través de un algoritmo, quien determina el comportamiento del material a partir de la información de la microestructura. La

⁵⁰ Anthoine A. and PEGON P. (1996). *Numerical Analysis and Modelling of Composite Materials. Chapter: Numerical analysis and modelling of the damage and softening of brick masonry*. Blackie academic and professional. pp. 152-184.

⁵¹ Fish J., Shek K., Pandheeradi M. and Shephard M. S. (1997). Computational Plasticity for Composite Structures Based on Mathematical Homogenization: Theory and Practice. *Computer methods in applied mechanics and engineering*. Vol. 148, pp. 53-73.

obtención de los campos a nivel microestructural conduce a elevar el costo computacional, tanto en procesamiento de cálculo como en manejo de información. Sin embargo, la complejidad del problema así lo justifica. En este trabajo se presenta una formulación rigurosa y coherente que, gracias a las capacidades actuales de los ordenadores, es capaz de solucionar problemas de materiales compuestos mediante la determinación de los campos de las variables a nivel microscópico. De esta forma, se aborda también los fenómenos micro mecánicos que en estos materiales acontecen.

5.2.2 Conceptos sobre la estructura periódica.

La distribución periódica de los componentes del material compuesto muestra ciertas simetrías que permite dividir el material compuesto en celdas estructurales unitarias. Esta división virtual se realiza mediante polígonos cuyos lados quedan en contacto. Así, una sección plana del material compuesto representado en el espacio bidimensional puede ser dividido en celdas de 4 lados (dos pares de lados periódicos) denominada celdas periódicas, o en celdas de 6 lados (tres pares de lados periódicos) llamadas celdas periódicas hexagonales. Los puntos en que las coordenadas del material X_i tienen la misma posición relativa en la vecindad de una celda, son denominados puntos periódicos (ver Figura 5.4). Cada punto periódico en el dominio de una celda se indica con P . La posición relativa entre dos puntos determina la base del vector D que aquí recibirá el nombre de vector periódico (también conocido como vector de base de una celda) y estos sitúan las dimensiones y direcciones del dominio de una celda.

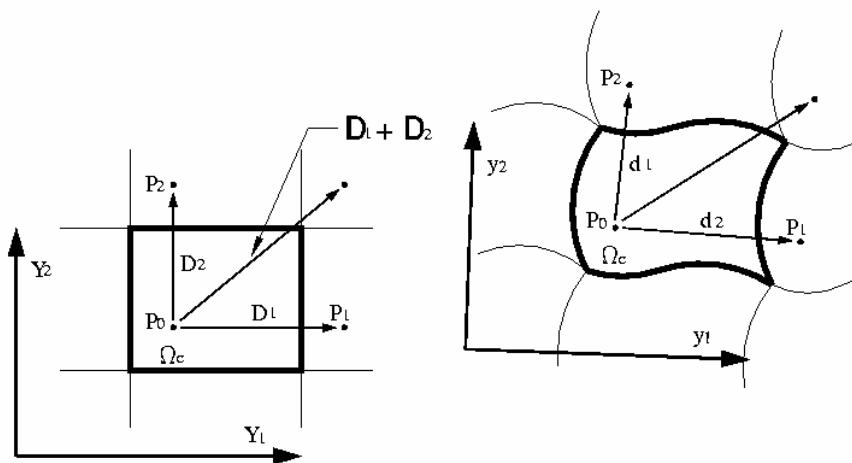


Figura 5.4 – Vectores de periodicidad en la configuración referencial D y vector de periodicidad d en la configuración actualizada del dominio de la celda Ω_c .

5.2.3 Conceptos sobre la estructura periódica.

En materiales heterogéneos, magnitudes como la tensión o la deformación sólo se entienden dependiendo de la escala. En este sentido, desde un punto de vista macroscópico, el material compuesto puede ser considerado como un material homogéneo, en cuyo caso cada punto del sólido tiene su magnitud de la tensión o deformación homogeneizada. El traspaso de información desde las variables microscópicas a macroscópicas se realiza uti-

lizando la hipótesis de periodicidad introducida por Sánchez-Palencia (1987)²². Esta hipótesis resulta como consecuencia de la minimización de la ecuación que establece que la energía acumulada por las variables microscópicas dentro de una celda es igual a la acumulada por las fuerzas en el contorno de la celda, pero puede ser muy diferente de la que se desarrolla en celdas distantes.

5.2.4 Periodicidad local de las variables.

En un medio continuo, el concepto de deformación y tensión se concibe para un punto; es decir, no está ligado a las dimensiones de un dominio. También se admite que dichas variables configuran campos continuos que varían suavemente en su vecindad. Dentro del mismo contexto, si se considera el material compuesto únicamente a nivel macroscópico es posible suponer que los campos de deformaciones y tensiones globales cumplen con estos requisitos. Sin embargo, a nivel de componentes se presentan cambios bruscos de estas variables a consecuencia de sus distintas propiedades. De tal forma que a nivel microestructural dichos campos presentan un gran número de irregularidades o fluctuaciones que dificultan extremadamente su manejo. Esto conduce a la búsqueda de nuevos mecanismos para el manejo de las variables del problema.

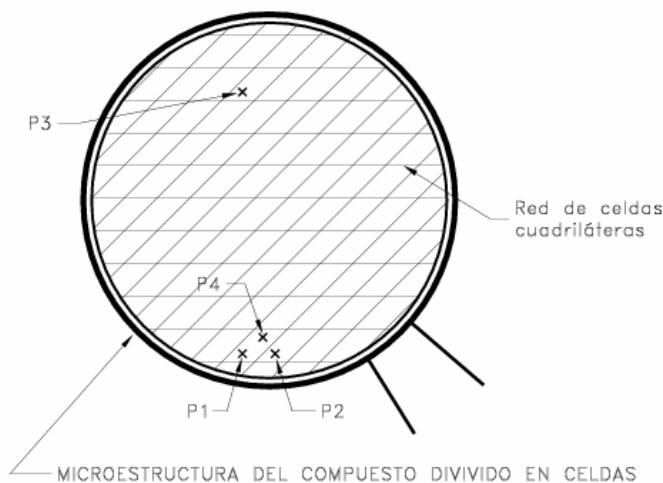


Figura 5.5 – Los puntos P1, P2, y P3 se consideran homólogos por periodicidad.

La alternativa que se propone en el presente trabajo está relacionada con la hipótesis de *periodicidad local* (Sánchez-Palencia (1987)²², Levi (1987)⁵²) (formulada en los desarrollos asintóticos). Este principio asegura que dentro de un medio periódico los campos de las variables de estado presentan periodicidad local. Basado en la minimización de la energía se asegura que en los medios periódicos los campos de las variables de estado como: desplazamientos y fuerzas, o deformaciones y tensiones, tienden a ser periódicos como lo es su geometría en el espacio (en pequeñas deformaciones). Es decir, el valor de las variables en dos puntos periódicos P_1 y P_2 cercanos es prácticamente el mismo. Por el contrario, si se identifica un tercero punto P_3 homólogo por periodicidad a P_1 y P_2 , pero alejado de los anteriores, entonces el valor del campo puede ser distinto. De la misma manera, también será diferente para cualquiera punto P_4 que incluso se encuentre

⁵² Levi T., Sanchez-Palencia E. and Zaoui A. (1987). *Homogenization Techniques for Composite Media. Chapter: Fluids in Porous Media and Suspensions*. Springer-Verlag.

bién será diferente para cualquier punto P_4 que incluso se encuentre en la misma celda que P_1 pero alejado con respecto a la escala microscópica.

La periodicidad de una variable surge de forma natural al considerar el problema de esta clase de medios. Supóngase que un cuerpo Ω está formado por un material compuesto periódico y que éste es dividido en células Y muy pequeñas (Figura 5.5). Supóngase también que el cuerpo sufre un desplazamiento o deformación por fuerzas que actúan en su contorno. A nivel de la microescala, considérese una célula cualquiera que no se encuentre justamente en el contorno. Obviamente, dicha célula sufre una transformación a consecuencia de las fuerzas que se generan en su contorno, al igual que sucede con las células vecinas. El principio de minimización de energía asegura que cada uno de estos dominios encuentra su equilibrio interno con el mínimo consumo de energía. Puesto que por definición estos dominios son iguales (tanto en forma como en propiedades) y están distribuidos regularmente uno a continuación del otro, el campo de fuerzas y desplazamientos que se genera en estos dominios es el mismo (también es posible justificar este resultado por el principio de *Saint-Venant* en elasticidad (Oleinik (1992)⁵³). En otras palabras, si se toma como referencia el contorno de la célula, las caras periódicas de las células vecinas, aunque cambien de forma, se mantienen “paralelas” (ver Figura 5.6), lo cual asegura la compatibilidad de desplazamientos, de lo contrario se produciría un solapamiento del material o se formarían oquedades.

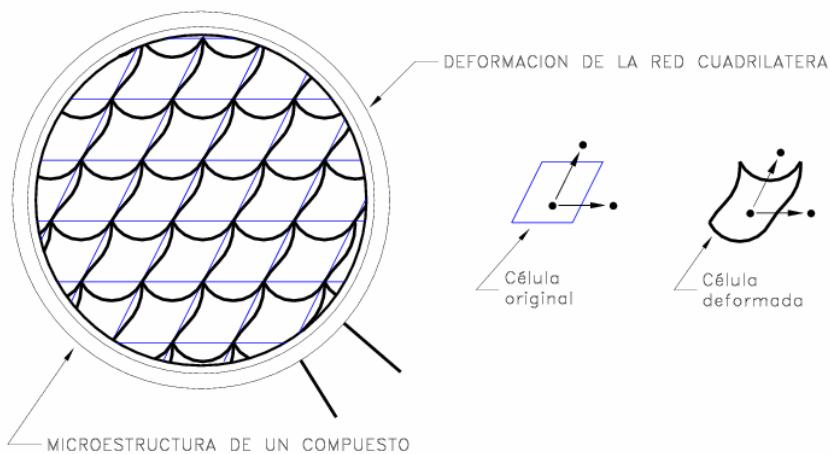


Figura 5.6 – Deformación de una red cuadrilátera, bajo un campo de desplazamiento periódico, sin que se produzca un cambio en los vectores de periodicidad.

Cabe observar que este peculiar campo de desplazamientos tiene la característica de mantener la periodicidad local del medio. Algo similar ocurre con las fuerzas que se generan en el contorno de la célula, dado que las fuerzas que actúan en la cara de una célula, por el principio de acción y reacción, se transmiten con la misma magnitud y en dirección opuesta a la célula vecina. De aquí que en estas celdas se producen fuerzas de la misma magnitud y dirección opuesta en sus caras periódicas. Este principio se ha denominado en la literatura sobre homogeneización como un campo de fuerzas antiperiódico en la formulación para medios periódicos).

⁵³ Oleinik O. A., Shamaev A. S. and Yosifian G. A. (1992). *Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization*. Elsevier Science Publishers B. V. Vol. 26, Series:Studies in mathematics and its applications.

5.2.4.1 Efecto del campo de desplazamientos periódico

Como se mencionó en el apartado anterior, en los medios periódicos se producen campos de desplazamientos que mantienen la periodicidad local del medio. Un análisis de estos campos revela que estos desplazamientos generan simultáneamente dos consecuencias:

1. La primera es un desplazamiento diferencial de las partículas dentro de la célula, que provoca la deformación de las caras (ondulaciones). Si este desplazamiento no altera los vectores de periodicidad, dicho desplazamiento se puede entender como una perturbación, puesto que sólo se manifiesta a nivel microestructural. Por ejemplo: en la Figura 5.6 se presenta un dominio dividido en células a través de una red formada por cuadriláteros; al dominio se le impone un campo de desplazamientos periódicos, con la particularidad que no afecta la relación distancia de las caras de las células, pero si a su forma. Obsérvese que, pese a la perturbación que sufren los dominios de las células, la dimensión global de la *red cuadrilátera* no cambia. Nótese además que la distancia entre vértices (y en general puntos periódicos) no se altera).
2. La segunda consecuencia de un campo de desplazamientos periódico es la modificación de la base de los vectores periódicos. Por ejemplo, considérese que la celda se deforma, pero en este caso se afecta la distancia entre caras periódicas, (ver Figura 5.7).

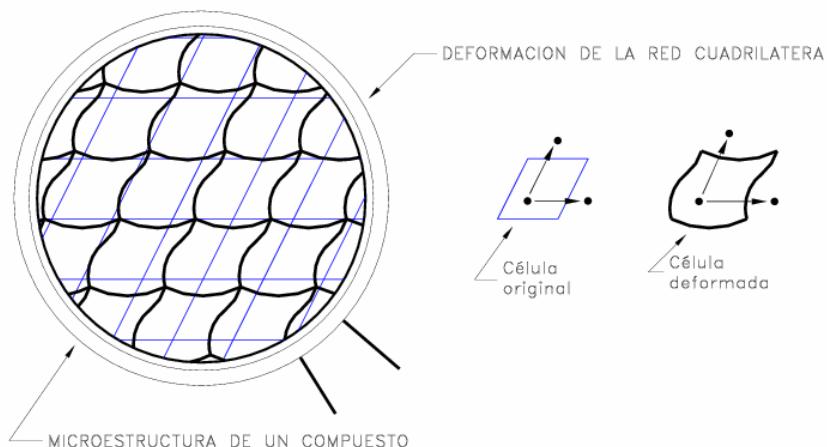


Figura 5.7 – Deformación de la red bajo un campo de desplazamientos periódico que modifica la base de vectores de periodicidad de la célula.

En este caso, puesto que las células vecinas sufren la misma transformación (condición periódica), ésta altera la dimensión global de la *red* y el efecto se amplifica desde el nivel microscópico al macroscópico. Cada uno de estos dos efectos, que se producen simultáneamente, tiene su importancia:

1. El primero, puede considerarse como un desplazamiento diferencial de las partículas, es necesario para que la celdas alcancen su equilibrio interno.
2. El segundo, que altera los vectores de periodicidad, está relacionado con la deformación del medio.

En las células hexagonales, puede generarse perturbaciones tanto a partir de cambios de forma en las caras, como también con desplazamientos de tres de sus vértices periódicos, sin crear un efecto que se manifieste a nivel global, tal como lo presenta la Figura 5.8.

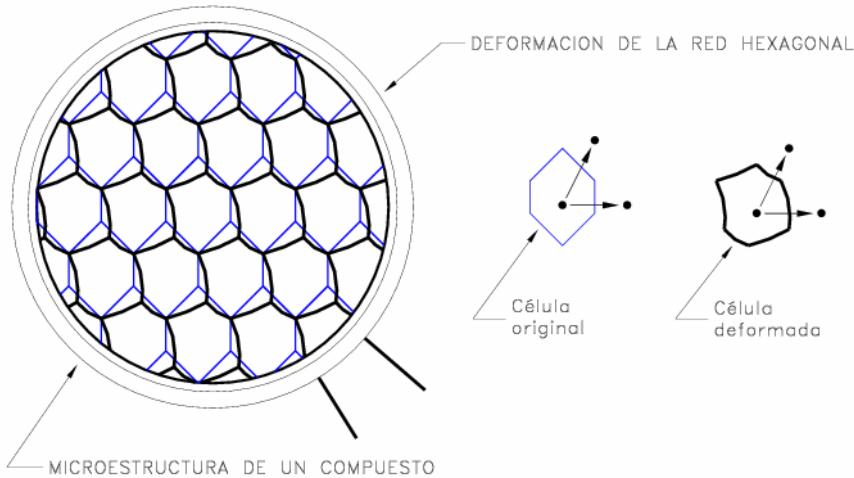


Figura 5.8 - Campo de desplazamiento periódico, que presenta un desplazamiento relativo de tres de los vértices periódicos.

Esto sucede porque los vectores de periodicidad dentro de una célula están definidos por tres vértices periódicos de la célula. Entonces, se puede trasladar con igual desplazamiento los otros tres vértices sin alterar los vectores de periodicidad y puesto que la célula es muy pequeña, esta perturbación del dominio no se aprecia a nivel macroscópico. Sin embargo, si se disminuye o aumenta la distancia relativa entre los vértices periódicos, se requiere necesariamente que los otros vértices sufran la misma transformación para que el medio mantenga la periodicidad local y el efecto se amplifica desde la escala microscópica a la macroscópica.

Se remarca, la deformación en la escala macroscópica está relacionada con la transformación que sufren los vectores de periodicidad o lo que es lo mismo, con el desplazamiento relativo entre puntos periódicos. Dicha relación se obtiene en el siguiente apartado.

5.2.5 Homogeneización del tensor de deformaciones.

Se considera que Ω_c representa el dominio de una celda de un material compuesto (representada en el espacio referencial Y_i –ver Figura 5.4), y que el dominio de esta celda está caracterizado por el vector de periodicidad $\mathbf{D} = \mathbf{Y}_p - \mathbf{Y}_{p0}$. La hipótesis de periodicidad local asegura que las celdas del material compuesto sometido a desplazamientos, mantienen la relación de periodicidad con sus vecinas a pesar de las deformaciones sufridas –la celda deformada junto a sus vecinas sufren las mismas transformaciones–. Consecuentemente, el nuevo vector de periodicidad \mathbf{d} puede escribirse como,

$$\mathbf{d} = \mathbf{y}_p - \mathbf{y}_{p0} = \mathbf{D} + (\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_{p0}) \quad (5.7)$$

Donde $\mathbf{u}_P - \mathbf{u}_{P0}$ es la diferencia de desplazamiento entre puntos periódicos. La transformación de espacio de la celda está asociada al cambio del vector de periodicidad. La derivada parcial de este vector respecto de su coordenada de referencia resulta,

$$\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{D}} = \frac{\partial (\mathbf{y}_p - \mathbf{y}_{p0})}{\partial (\mathbf{Y}_p - \mathbf{Y}_{p0})} \quad (5.8)$$

A nivel macroscópico puede considerarse que los vectores de periodicidad son infinitesimalmente pequeños ($|\mathbf{D}| \rightarrow 0$). Consecuentemente a escala macroscópica estos tienden al siguiente límite,

$$\lim_{D \rightarrow 0} \left[\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{D}} \right] = \lim_{D \rightarrow 0} \left[\frac{\partial (\mathbf{y}_p - \mathbf{y}_{p0})}{\partial (\mathbf{Y}_p - \mathbf{Y}_{p0})} \right] = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{F} \quad (5.9)$$

Entonces, el vector de periodicidad en la configuración actualizada puede escribirse como,

$$\mathbf{d} = \mathbf{F} \mathbf{D} \quad (5.10)$$

Donde \mathbf{F} es el *tensor gradiente de deformación homogeneizado*. Este simple cambio de escala permite obtener el *tensor de deformaciones macroscópicas homogeneizado*, siguiendo las bases dictadas por la mecánica de medios continuos. El cuadrado de la longitud de este nuevo vector de periodicidad se representa como,

$$|\mathbf{d}|^2 = \mathbf{D}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{D} \quad (5.11)$$

La diferencia entre los cuadrados de la longitud entre los vectores de periodicidad situados en configuración actualizada y referencial, respectivamente, permite obtener la siguiente relación que conduce a determinar la *deformación homogeneizada o macroscópica*.

$$\begin{aligned} |\mathbf{d}|^2 - |\mathbf{D}|^2 &= [\mathbf{D}^T \mathbf{F}^T] [\mathbf{F} \mathbf{D}] \mathbf{D}^T \mathbf{D} \\ |\mathbf{d}|^2 - |\mathbf{D}|^2 &= 2 \mathbf{D}^T \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{D} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Así, el *tensor de deformaciones de Green Lagrange homogeneizado* resulta,

$$\tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} [\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial \mathbf{D}} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{D}} - \mathbf{I} \right] \quad (5.13)$$

Este tensor $\tilde{\mathbf{E}}$ siesta asociado al cambio de los vectores de periodicidad y también coincide con la clásica definición dada por la *teoría de los promedios* (Suquet (1982)¹¹),

$$\tilde{\mathbf{E}} = \langle \mathbf{E}(y) \rangle_{\Omega_c} = \frac{1}{V_c} \int_{V_c} \mathbf{E}(y) dV_c \quad (5.14)$$

Donde $\langle \mathbf{E}(y) \rangle_{\Omega_c}$ representa el campo de deformaciones microscópico, Ω_c es el dominio de la celda y V_c es el volumen contenido en Ω_c .

5.2.6 La tensión homogeneizada y la ecuación de equilibrio.

La ecuación de equilibrio de *Cauchy* en la escala microscópica puede escribirse en la forma clásica, como,

$$\int_{S_c} \sigma_{ij} n_j dS = \int_{V_c} \rho a_i dV - \int_{V_c} \rho b_i dV \quad (5.15)$$

Siendo el dominio de la celda muy pequeño si es visto desde la escala macroscópica ($V_c \rightarrow 0$). En consecuencia, la magnitud de las fuerzas de volumen y de inercia son también pequeñas y tienden a cero. Esta ecuación asegura el equilibrio dentro del dominio de la celda de la siguiente forma,

$$\lim_{V_c \rightarrow 0} \left(\int_{S_c} \sigma_{ij} n_j dS \right) = \lim_{V_c \rightarrow 0} \left(\int_{V_c} (\rho a_i - \rho b_i) dV \right) = 0 \quad (5.16)$$

Donde S_c representa la superficie del contorno de la celda, σ_{ij} es el campo de tensiones microscópica, y n_j es el vector unitario normal saliente de la superficie dS_c . Obsérvese que la orientación de dos elementos de superficie situados en puntos periódicos (Figura 5.9) tiene vectores unitarios normales (n_1 y n_2) en dirección opuesta. El principio de acción y reacción asegura que las fuerzas en la superficie $f = t(n) dS_c$ en estos dos elementos superficiales, son iguales y de sentido contrario. Esto se conoce en la literatura de homogeneización con el nombre de fuerzas de campo antiperiódicas en los lados de una celda (Lene (1986)³⁰).

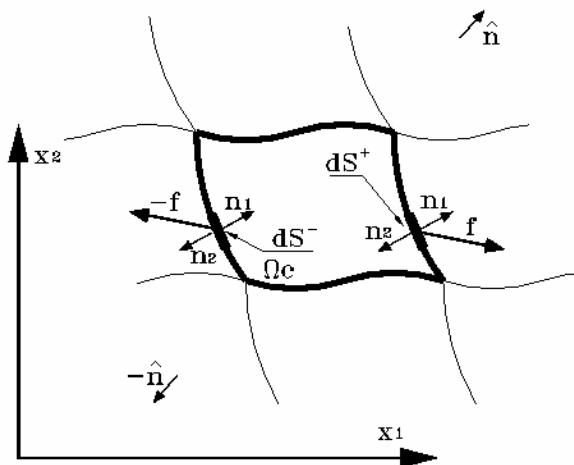


Figura 5.9 – Las fuerzas que actúan en los contornos periódicos de una celda resultan iguales y de sentido contrario.

El tensor de tensiones a escala macroscópica, o *tensor de tensiones homogeneizado* $\tilde{\sigma}_{ij}$ se define a partir del promedio de las fuerzas actuantes sobre los lados de la celda,

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\int_{S_c} y_k \sigma_{ij} n_j dS}{\int_{S_c} y_k n_j dS} \quad (5.17)$$

Teniendo en cuenta la ecuación de equilibrio de Cauchy o *balance de momentos* –sin la influencia de las fuerzas de volumen– a nivel microscópico $\sigma_{ij,j} = 0$, y utilizando el teorema de la divergencia, puede escribirse esta misma tensión como,

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\int_{V_c} y_{k,j} \sigma_{ij} dV}{\int_{V_c} y_{k,j} dV} = \frac{\int_{V_c} \delta_{k,j} \sigma_{ij} dV}{\int_{V_c} y_{k,j} dV} = \frac{1}{V_c} \int_{V_c} \sigma_{ij} dV \quad (5.18)$$

Las *fuerzas de superficie* $\tilde{t}_i(\hat{n})$ se definen como el promedio de las fuerzas en los lados de la celda S_c determinada por la dirección del vector unitario a nivel macroscópico \hat{n} ,

$$\tilde{t}_i(\hat{n}) = \left[\frac{\int_{S_c} y_k \sigma_{ij} n_j dS}{\int_{S_c} y_k n_j dS} \right] \hat{n}_k = \left[\frac{1}{V_c} \int_{V_c} \sigma_{ij} dV \right] \hat{n}_k \quad (5.19)$$

Dado que el término derecho de esta ecuación es una función lineal de la dirección del vector \hat{n} ($\tilde{t}_i(\hat{n}) = \tilde{\sigma}_{ik} \hat{n}_k$), y puesto que el tensor $\tilde{\sigma}$ cumple a nivel macroscópico los mismos requerimientos que el tensor de tensiones σ correspondiente a un material homogéneo, se denominará al tensor $\tilde{\sigma}$, en lo sucesivo, *tensor de tensiones homogeneizado*. Utilizando éste concepto, si se considera todo el dominio del material compuesto Ω (el cual está formado por un número muy alto de celdas), resulta la siguiente ecuación de equilibrio estático,

$$\int_S \left[\frac{1}{V_c} \int_{V_c} \sigma_{ij} dV \right] \hat{n}_j dS + \int_V \left[\frac{1}{V_c} \int_{V_c} \rho b_i dV \right] dV = 0 \quad (5.20)$$

Como se observa –a diferencia de la ecuación de equilibrio en la micro escala– las fuerzas por unidad de volumen han sido tenidas en cuenta, puesto que su magnitud es importante al nivel de la macro escala. La magnitud de estas fuerzas resulta también del promedio de las fuerzas de volumen dentro de la celda, es decir,

$$\tilde{b}_i = \frac{1}{V_c} \int_{V_c} \rho b_i dV = \text{constant}; \quad (5.21)$$

Sustituyendo la ecuación (5.17) y (5.20) en la ecuación (5.19) y transformando la integral de superficie mediante el teorema de la divergencia, resulta la ecuación de equilibrio de Cauchy en su forma débil, correspondiente a todo el sólido compuesto (macro escala),

$$\int_{V_c} \tilde{\sigma}_{ij,j} dV + \int_{V_c} \tilde{b}_i dV = 0 \quad (5.22)$$

Esta ecuación es válida para cualquier volumen arbitrario V de la macro escala y por lo tanto es también válida en el caso que el este volumen sea muy pequeño, considerando que su límite inferior será el dominio de una celda unitaria ($\Omega \rightarrow \Omega_c; \Omega_c \rightarrow 0$). En este límite inferior, adquiere la forma débil (diferencial),

$$\tilde{\sigma}_{ij,j} + \tilde{b}_i = 0 \quad (5.23)$$

Siendo ésta la ecuación de equilibrio estática local homogeneizada.

5.2.7 Fundamentos del problema elástico en la Micro-Macro escalas.

Se considera un cuerpo que ocupa el dominio Ω constituido por un material compuesto con una fina estructura periódica. el contorno del dominio Ω se representa por $\partial\Omega$, en el cual $\partial\Omega_u$ es la parte del contorno donde se imponen los desplazamientos y por lo tanto son conocidos (condiciones de Dirichlet) y $\partial\Omega_t$ es la parte del contorno donde se imponen fuerzas de superficie conocidas (condiciones de Newman). La estructura del material además tiene la característica de poderse subdividir en celdas unitarias muy pequeñas. Los subdominios de estas celdas se representarán como Ω_c , tal que, su repetición ordenada conforman el material compuesto Ω . Además, se supone la existencia de dos escalas de diferente orden de magnitud, tal que una partícula cuya posición x_i en la macro escala Ω (nivel macroscópico), pueda identificarse con la posición y_i de una celda en la microescala (nivel microscópico). Por lo tanto, a “nivel macroscópico”, el problema de los materiales compuestos se vuelve un problema de “valores de contorno” de un sólido homogéneo en el cual existe un campo de desplazamientos y tensiones ($\mathbf{u}(x)$, $\tilde{\sigma}(x)$), que satisfacen las siguientes ecuaciones,

$$\text{Escala Macroscópica: } \begin{cases} \frac{\partial \tilde{\sigma}(x)}{\partial x} + \tilde{\mathbf{b}} = 0 & \text{ecuación de equilibrio en } \Omega \\ \tilde{\sigma}(x) = \frac{1}{V_c} \int_{V_c} \sigma(x, y) dV_c & \text{ecuación constitutiva en } \Omega \\ \mathbf{u}(x) = \bar{\mathbf{u}}(x) & \text{desplazamientos en } \partial\Omega_u \\ \tilde{\sigma}(x) : \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}(x) & \text{fuerzas en } \partial\Omega_t \end{cases} \quad (5.24)$$

Por otro lado, a “nivel microscópico”, las condiciones de contorno de la celda deben ser capaces de reproducir las “condiciones microestructurales del material”. Los vectores de periodicidad obtenidos a nivel microscópico son entonces formulados en total concordancia con las hipótesis de periodicidad local.

$$\mathbf{d} - \mathbf{D} = \mathbf{u}_p - \mathbf{u}_{p0} \quad (5.25)$$

Donde \mathbf{u}_p y \mathbf{u}_{p0} representan los desplazamientos de dos puntos periódicos, \mathbf{D} representa el vector de periodicidad local definido entre dichos puntos en la “configuración microscópica referencial” X_i y \mathbf{d} es el nuevo vector de periodicidad que resulta del campo de deformaciones. Considerando pequeñas deformaciones, puede demostrarse que el

desplazamiento relativo entre puntos periódicos de los bordes de la celda es equivalente a, (F. Zalamea *et al.* (1999^a)⁵⁴),

$$\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_{p0} \cong \mathbf{E} \mathbf{D} \quad (5.26)$$

Este desplazamiento relativo entre puntos periódicos del contorno de una celda representa lo que en lo sucesivo se denominará *campo periódico de desplazamientos*. Además, las fuerzas desarrolladas en los bordes de una celda tienen el mismo módulo y dirección, pero sentidos opuestos. Luego, el problema a “escala microscópica” y_i , se reduce a resolver el siguiente problema de *valores de contorno* en el dominio Ω_c de la celda,

$$\text{Escala Microscópica: } \begin{cases} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(y)}{\partial y} = 0 & \text{Ecuación de equilibrio en } \Omega_c \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}(y) = \mathbb{C}^s(y) : \dot{\mathbf{E}}(y) & \text{Ecuación constitutiva en } \Omega_c \\ \mathbf{u}_p - \mathbf{u}_{p0} = \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{D} & \text{Desplazamientos periódicos en } \partial\Omega_c \\ \mathbf{t}_p = -\mathbf{t}_{p0} & \text{Fuerzas periódicas en } \partial\Omega_c \end{cases} \quad (5.27)$$

Estas ecuaciones representan el equilibrio estático a nivel microestructural, despreciando las fuerzas de volumen y se deben aplicar en cada punto de la celda durante la evolución del proceso mecánico al que está sometido el sólido compuesto. La solución de este problema de valores de contorno conduce al equilibrio de las fuerzas a nivel microscópico.

El comportamiento constitutivo de los componentes del material está representado por la segunda ecuación de las (5.27), en la cual \mathbb{C}^s es el tensor constitutivo local. En este sentido, la ecuación constitutiva del material componente puede representar cualquier tipo de comportamiento mecánico (elástico, plástico, viscoso, etc.). En la misma ecuación (5.27) puede verse también la condición de desplazamientos y fuerzas periódicas impuesta en el contorno de la celda $\partial\Omega_c$, las que al mismo tiempo están relacionadas con el tensor de deformaciones homogeneizado $\tilde{\mathbf{E}}$, a nivel macroscópico. Consecuentemente, los dos problemas –microscópico y macroscópico– están acoplado, por lo tanto, la solución en la macro escala se obtiene siguiendo el clásico procedimiento de equilibrio para un sólido homogéneo* (ver Zienkiewicz and Taylor (1994)²⁴), requiriendo satisfacer las condiciones de valores de contorno en cada punto del dominio Ω . Esta tarea involucra un altísimo número de problemas a resolver a nivel microscópico, no obstante, siendo conscientes de esta dificultad y pensando en los avances actuales de las técnicas numéricas y la computación, puede abordarse la solución de las ecuaciones de equilibrio elásticas a nivel microscópico en forma discreta utilizando el método de los elementos finitos (Zienkiewicz and R. Taylor (1994)²⁴),

$$\mathbf{f}^{\text{int}}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{f}^{\text{ext}} = \mathbf{f} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{f} \quad (5.28)$$

⁵⁴ Zalamea F., Miquel Canet J., and Oller S., 1999a. Teoría de homogeneización para el análisis de materiales compuestos con estructura interna periódica. *Proceedings IV Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*, Ed. R. Abascal, J. Domínguez, G. Bugeda. SEMNI CD-ROM.

* Nótese en este caso, que la solución del problema en la microescala sustituye a la ecuación constitutiva clásica que se utiliza en los materiales homogéneos.

Donde \mathbf{K} la matriz de rigidez ensamblada a nivel de una celda, \mathbf{U} es el vector de desplazamiento nodal, y \mathbf{f} es el vector de fuerzas en el contorno de la celda. Existen diversos caminos para resolver esta ecuación de equilibrio sometida a las condiciones de contorno periódicas, pero en esta propuesta se utiliza el Método de los Multiplicadores de Lagrange (λ). Sin embargo, éste método presenta algunas desventajas, tales como el aumento del número de ecuaciones y también del ancho de banda de la matriz de rigidez de la celda, que crean dificultades a nivel computacional. Esta desventaja puede solucionarse considerando las condiciones de contorno impuestas por Anthoine (1995)²⁷, quien divide los multiplicadores de Lagrange en dos grupos, λ_1 y λ_2 . El primero de ellos contiene las fuerzas de contorno en los nodos restringidos (λ_1) y el segundo contiene las correspondientes magnitudes periódicas (λ_2). La estacionalidad del funcional aumentado con los multiplicadores de Lagrange,

$$\begin{aligned}\Pi = & \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{f} + \lambda_1^T \cdot (\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{U} - \mathbf{U}_r) + \\ & + \lambda_2^T \cdot (\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{U} - \mathbf{U}_r) + \frac{1}{2} (\lambda_1 - \lambda_2)^T \cdot (\lambda_1 - \lambda_2)\end{aligned}\quad (5.29)$$

Conduce al siguiente bien condicionado sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{k}_p^T & \mathbf{k}_p^T \\ \mathbf{k}_p & \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{k}_p & -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{U}_r \\ \mathbf{U}_r \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

Donde \mathbf{K} la matriz de rigidez de la celda, y \mathbf{k}_p es la matriz de los grados de libertad del contorno de la celda. Esta matriz tiene un código -1 en la componente cuyo grado de libertad está restringido. El código +1 representa la posición del actual grado de libertad, y el código 0 ocupa el resto de las posiciones de la matriz. \mathbf{I} es la matriz identidad, \mathbf{U} es el vector de desplazamientos nodales, λ_1 y λ_2 son los multiplicadores de Lagrange que representan las fuerzas en los contornos de la celda, \mathbf{f} es el vector de fuerzas nodales en el contorno y \mathbf{U}_r es el desplazamiento nodal relativo entre los nodos del contorno.

5.2.8 Fundamentos del problema inelástico en la Micro-Macro escalas.

El comportamiento de los materiales compuestos está caracterizado por un amplio rango que pasa del campo lineal al no lineal. El comportamiento no lineal se presenta cuando en un punto del sólido –a nivel microestructural– hay al menos uno de los componentes del material compuesto que alcanza su límite de elasticidad, desarrollando un comportamiento inelástico (plástico, de daño, visco plástico, de fractura, etc.). Esta situación de que al menos un punto de uno de los componentes entre en régimen no lineal, hace que el sólido completo manifieste un comportamiento no lineal. Los primeros trabajos sobre comportamiento no lineal dentro de la teoría de homogeneización fueron presentados por Suquet (Suquet (1982)¹², (1987)¹⁰). Este autor concluye que “el comportamiento de un material compuesto depende de un infinito número de variables internas”, representando una gran dificultad por el enorme coste computacional que esto implica. En trabajos posteriores el autor intenta introducir ciertas simplificaciones teniendo en cuenta el conocimiento y naturaleza de cada material compuesto (ver también Lene (1986)³⁰, Devries *et alt.* (1989)³¹). En cada caso las propuestas realizadas dentro del campo

no lineal son aproximadas y sólo aplicables a algunos compuestos particulares y no generalizables.

Entre otra de las propuestas interesantes que aborda este problema está la que fuera realizada por Fish (Fish et al. (1997)⁵¹, Fish & Shek (1999)⁵⁵), quien utiliza la teoría de expansión asintótica para obtener las ecuaciones de gobierno en cada una de las dos escalas. En este caso, el comportamiento del compuesto resulta de resolver una celda unidad por cada uno de los puntos de integración de la macro escala. Sin embargo, para reducir el coste computacional no se resuelven todas las celdas siguiendo el procedimiento de comportamiento no lineal. Para ello se seleccionan las celdas a resolver dentro del campo no lineal a través de un algoritmo de búsqueda de puntos de integración a nivel de la macro escala, teniendo en cuenta el nivel de tensión/deformación de cada uno de ellos y sólo se resuelven aquellas celdas asociadas a estos puntos. Además, y para ahorrar espacio, sólo se almacena en la base de datos el promedio de las variables internas por cada una de las celdas que han incursionado en el comportamiento no lineal.

Otra propuesta basada también en la teoría de expansión asintótica, es la desarrollada por Ghosh (Ghosh et al. (1996)⁴², Lee et al. (1999)⁴⁹), en la que el comportamiento del compuesto se obtiene utilizando elementos finitos de Voronoi, que permite representar una celda completa con sólo uno de ellos. Estos elementos proveen resultados muy Buenos a nivel de la micro y macro escalas; sin embargo, no pueden describir en su interior los detalles de la microestructura.

En la formulación que aquí se presenta se muestra una alternativa a las formulaciones de Fish y Ghosh, previamente mencionadas. Las bases conceptuales se han presentado en diferentes publicaciones (Zalamea et al. (1998)⁵⁶, Zalamea et al. (1999^a)⁵⁴, Zalamea et al. (1999^b)⁵⁷, Zalamea et al. (2000)⁵⁸, Zalamea (2001)¹¹). Esta se basa en una formulación directa de las ecuaciones de gobierno en cada una de las dos escalas, no siendo necesario la utilización de la teoría de expansión asintótica. Otra característica se basa en que el análisis de cada una de las escalas se realice mediante el método de los elementos finitos, imponiendo las condiciones de contorno en la micro escala mediante el método de los “Multiplicadores de Lagrange” (ecuaciones (5.29) y (5.30)). También, durante la etapa de linealización de las ecuaciones de equilibrio no lineal, a nivel de la macro escala, se resuelve una celda por cada uno de los puntos de integración y para disminuir en parte el alto coste computacional se utiliza una estrategia de paralelización a través del sistema “PVM” (Parallel Virtual Machine⁵⁹). Así, se resuelve un proceso en paralelo por cada una de las celdas más uno por la estructura completa a nivel de la macro escala. Este último proceso es el que controla toda la distribución de información en cada uno de los subprocesos abiertos para cada celda unidad. Las variables internas son almacenadas en cada

⁵⁵ Fish J. and Shek K. (1999). Finite deformation for composite structures: Computational models and adaptive strategies. *Comput Methods Appl. Mech. Engrg.* Vol. 172, pp. 145-174.

⁵⁶ Zalamea F., Miquel Canet J. and Oller S. (1998). Treatment of Composite Materials based on the Homogenization Method. *Proceedings of the Fourth World Congress on Computational Mechanics*. CIMNE.

⁵⁷ Zalamea F., Miquel J., Oller S., (1999b). Un Método en doble escala para la simulación de materiales compuestos. *III Congreso Nacional de Materiales Compuestos. “MATCOMP 99”*. Ed. A. Corz, J. M. Pintado. Materiales Compuestos 99 - AEMAC, pp 381-393 - Málaga. España. 1999.

⁵⁸ Zalamea F., Miquel J., Oller S. (2000). A double scale method for simulating of periodic composite materials. *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, ECOMAS 2000 - COMPLAS VI. Ed. E. Oñate, R. Owen. CD-ROM - CIMNE Barcelona.

⁵⁹ Geist Al, Beguelin A., Dongarra J., Jiang W., Manchek R. and Sunderam V. (1994). *Paralle Virtual Machine - A Users' Guide and Tutorial for Networked Parallel Computing*. Ed. Jasnusz Kowalik. Massachusetts Institute Technology.

punto de integración de la micro escala para aquellas celdas que entran dentro del comportamiento no lineal.

La solución del problema no lineal, mediante el camino de la linealización por Newton-Raphson, mantiene válida durante dicha linealización las definiciones de tensión y deformación realizadas en el apartado anterior, como así también las ecuaciones de gobierno formuladas en la micro y macro escala. Sin embargo, la definición del modelo constitutivo en la microescala deja de ser elástico lineal para tomar una forma no lineal (ej.: año, plasticidad, visco-elasticidad, visco-plasticidad, fractura, etc.). En forma indicativa se muestra a continuación los contenidos básicos de una ecuación constitutiva no lineal que debe sustituir la segunda ecuación de la (5.27),

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Energía libre para un simple componente del material,} \\ \Psi = \Psi(\mathbf{E}, \alpha) \\ \text{Variable libre del problema : tensor de deformación,} \\ \boldsymbol{\epsilon} = \nabla^S \mathbf{u} \\ \text{Variables internas,} \\ \boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_k\}, \text{ con } k = 1, \dots, n \\ \text{Variable dependiente : tensor de tensión,} \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\Psi, \dot{\mathbf{E}}, \alpha) \end{array} \right. \quad (5.31)$$

La ecuación constitutiva para todo el compuesto, en el tiempo actual $t+\Delta t$, se expresa en la forma incremental, cuya expresión coincide estrictamente con la ecuación (5.18),

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{t+\Delta t} = \frac{1}{V_c} \int_V \boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t} dV = \frac{1}{V_c} \int_V (\boldsymbol{\sigma}^t + \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{t+\Delta t} \Delta t) dV = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^t + \{\tilde{\mathbf{C}}^T\}^{t+\Delta t} : \dot{\tilde{\mathbf{E}}}^{t+\Delta t} \Delta t \quad (5.32)$$

donde $\{\tilde{\mathbf{C}}^T\}^{t+\Delta t}$ representa el tensor constitutivo tangente homogeneizado en el tiempo $(t+\Delta t)$, a partir del cual se obtiene el cambio de tensión $\dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}^{t+\Delta t} = \{\tilde{\mathbf{C}}^T\}^{t+\Delta t} : \dot{\tilde{\mathbf{E}}}^{t+\Delta t}$, en un paso incremental durante la linealización de la ecuación de equilibrio interno del sólido compuesto. Una vez se obtiene el tensor de tensiones homogeneizado $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{t+\Delta t}$ en cada punto del sólido compuesto, se sigue el camino tradicional para la solución de equilibrio del sólido, como si este fuese un material homogéneo.

La ecuación de equilibrio no lineal para un sólido discretizado por elementos finitos, se escribe exigiendo la eliminación de las fuerzas desequilibradas (residuales), que resultan de la diferencia entre fuerzas internas f_k^{int} y fuerzas externas f_k^{ext} ,

$$0 = \mathbf{A} \left[\int_{\Omega^e} f_k^{\text{int}} - f_k^{\text{ext}} \right] = \Delta f_k \Big|_{\Omega} \quad (5.33)$$

En este caso \mathbf{A}_{Ω^e} representa el operador de “ensamblaje” de fuerzas elementales en un elemento finito, que permite obtener el estado de fuerzas en toda la estructura (Zienkiewicz y Taylor (1994)²⁴). Estas fuerzas desbalanceadas se eliminan mediante el proceso de linealización que se establece en la iteración $(i+1)$ del tiempo $t+\Delta t$, en la cercanía del estado de equilibrio entre las fuerzas internas y externas. Para este propósito es necesario forzar este estado de equilibrio en el instante actual $(i+1)$ y expresar esta condición a partir de una expansión en series de Taylor, truncadas en la primera variación,

$$0 = \underset{\Omega^e}{\mathbf{A}}^{i+1} [\Delta f_k]_{\Omega^e}^{t+\Delta t} \cong \underset{\Omega^e}{\mathbf{A}}^i [\Delta f_k]_{\Omega^e}^{t+\Delta t} + \underset{\Omega^e}{\mathbf{A}}^i \left[\frac{\partial (\Delta f_k)}{\partial U_r} \right]_{\Omega^e}^{t+\Delta t} \cdot \underset{\Omega^e}{\mathbf{A}}^{i+1} [\Delta U_r]_{\Omega^e}^{t+\Delta t}$$

$$0 = \underset{\Omega^e}{\mathbf{A}}^i [\Delta f_k]_{\Omega^e}^{t+\Delta t} + \underset{\Omega^e}{\mathbf{A}}^i \left[\frac{\partial (f_k^{\text{int}})}{\partial U_r} \right]_{\Omega^e}^{t+\Delta t} \cdot \underset{\Omega^e}{\mathbf{A}}^{i+1} [\Delta U_r]_{\Omega^e}^{t+\Delta t} \quad (5.34)$$

Sustituyendo en esta ecuación la fuerza desequilibrada, o fuerza residual, por la expresión $\Delta f_k|_{\Omega} = \underset{\Omega^e}{\mathbf{A}} [f_k^{\text{int}} - f_k^{\text{ext}}]_{\Omega^e} = \underset{\Omega^e}{\mathbf{A}} \left[\int_{V^e} \tilde{\sigma}_{ij} \nabla_i^S N_{jk} dV - f_k^{\text{ext}} \right]_{\Omega^e}$, en la cual las fuerzas internas están expresadas en función de la tensión homogeneizada $\tilde{\sigma}_{ij}$, y teniendo en cuenta la aproximación del campo de desplazamientos en cada elemento finito mediante la siguiente forma polinómica basada en las funciones de forma o soporte local, $u_i(x, y, z) = N_{ij}(x, y, z) \cdot U_j$, (Zienkiewicz y Taylor (1994)²⁴), resulta,

$$0 \cong \underset{\Omega^e}{\mathbf{A}}^i \left[\int_{V^e} \tilde{\sigma}_{ij} \nabla_i^S N_{jk} dV - f_k^{\text{ext}} \right]_{\Omega^e}^{t+\Delta t} + \underset{\Omega^e}{\mathbf{A}}^i \left[\frac{\partial}{\partial U_r} \left(\int_{V^e} \tilde{\sigma}_{ij} \nabla_i^S N_{jk} dV \right) \right]_{\Omega^e}^{t+\Delta t} \cdot \underset{\Omega^e}{\mathbf{A}}^{i+1} [\Delta U_r]_{\Omega^e}^{t+\Delta t}$$

$$0 \cong \underset{\Omega^e}{\mathbf{A}}^i \left[\int_{V^e} \tilde{\sigma}_{ij} \nabla_i^S N_{jk} dV - f_k^{\text{ext}} \right]_{\Omega^e}^{t+\Delta t} + \underset{\Omega^e}{\mathbf{A}}^i \left[\int_{V^e} \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial \tilde{E}_{st}} \frac{\partial \tilde{E}_{st}}{\partial U_r} \nabla_i^S N_{jk} dV \right]_{\Omega^e}^{t+\Delta t} \cdot \underset{\Omega^e}{\mathbf{A}}^{i+1} [\Delta U_r]_{\Omega^e}^{t+\Delta t} \quad (5.35)$$

Deduciendo el campo continuo de tensiones y deformaciones a partir del campo de desplazamientos y sustituyendo en la ecuación anterior, resulta la siguiente expresión,

$$0 \cong \underset{\Omega^e}{\mathbf{A}}^i \left[\int_{V^e} \tilde{\sigma}_{ij} \nabla_i^S N_{jk} dV - f_k^{\text{ext}} \right]_{\Omega^e}^{t+\Delta t} + \underset{\Omega^e}{\mathbf{A}}^i \left[\int_{V^e} \tilde{\mathbf{C}}_{ijst}^T \frac{\partial (\nabla_s^S N_{tr} U_r)}{\partial U_r} \nabla_i^S N_{jk} dV \right]_{\Omega^e}^{t+\Delta t} \cdot \underset{\Omega^e}{\mathbf{A}}^{i+1} [\Delta U_r]_{\Omega^e}^{t+\Delta t}$$

$$0 \cong \underset{\Omega^e}{\mathbf{A}}^i \left[\int_{V^e} \tilde{\sigma}_{ij} \nabla_i^S N_{jk} dV - f_k^{\text{ext}} \right]_{\Omega^e}^{t+\Delta t} + \underset{\Omega^e}{\mathbf{A}}^i \underbrace{\left[\int_{V^e} (\nabla_s^S N_{tr}) \tilde{\mathbf{C}}_{ijst}^T (\nabla_i^S N_{jk}) dV \right]_{\Omega^e}^{t+\Delta t}}_{[\mathbf{K}_{kr}^T]_{\Omega^e}} \cdot \underset{\Omega^e}{\mathbf{A}}^{i+1} [\Delta U_r]_{\Omega^e}^{t+\Delta t} \quad (5.36)$$

$$0 \cong {}^i [\Delta f_k]_{\Omega}^{t+\Delta t} + {}^i [\mathbf{K}_{kr}^T]_{\Omega}^{t+\Delta t} \cdot {}^{i+1} [\Delta U_r]_{\Omega}^{t+\Delta t}$$

Resultando así la ecuación linealizada del equilibrio, donde $[\mathbf{K}_{kr}^T]_{\Omega^e}$ representa la matriz de rigidez tangente para el dominio elemental, $[\mathbf{K}_{kr}^T]_{\Omega}$ representa la matriz de rigidez tangente para el sólido completo y $\tilde{\mathbf{C}}^T$ representa el tensor constitutivo tangente, en cada punto del sólido compuesto, correspondiente a la ley constitutiva homogeneizada. Las fuerzas residuales $\Delta f_k|_{\Omega}$ se eliminan siguiendo un procedimiento de resolución por Newton-Raphson hasta que este residuo tienda a cero, situación conocida como convergencia a la solución del sistema de ecuaciones de equilibrio no lineal (5.36).

Así, usando la técnica de elementos finitos, se soluciona en este trabajo el problema de comportamiento no lineal de un sólido compuesto mediante el método de homogeneiza-

ción. El resultado es un procedimiento que podría calificarse de “general”, en el que la ecuación constitutiva macroscópica (macro escala), depende exclusivamente del comportamiento microscópico del material (micro escala).

5.2.9 Determinación del tensor constitutivo elástico para el material compuesto.

La ecuación constitutiva elástica homogeneizada para el material compuesto, en la que se supone que no hay movimientos relativos entre componentes, puede escribirse como,

$$\tilde{\sigma}(x) = \tilde{\mathbf{C}}(x) : \tilde{\mathbf{E}}(x) \quad (5.37)$$

Partiendo de la deformación homogeneizada $\tilde{\mathbf{E}}$ se obtiene la tensión suponiendo elástico el comportamiento del material a través del tensor constitutivo homogeneizado $\tilde{\mathbf{C}}(x)$. Este es un tensor de cuarto orden que tiene 81 componentes. Suquet, supone que el tensor constitutivo elástico homogeneizado tiene la forma clásica simétrica, siempre que los componentes tengan una distribución periódica.

$$\tilde{\mathbf{C}}_{ijkl} = \tilde{\mathbf{C}}_{jilk} = \tilde{\mathbf{C}}_{klji} \quad (5.38)$$

Estas propiedades del material reduce la complejidad de la solución del problema. Particularmente, para un material ortotropo es sólo necesarios obtener las nueve componentes independientes del tensor constitutivo elástico. Por otro lado, el tensor de tensiones homogeneizado elástico $\tilde{\sigma}$ resulta a partir de la deformación homogeneizada $\tilde{\mathbf{E}}$ utilizando el tensor constitutivo $\tilde{\mathbf{C}}(x)$, que debe ser definido a partir de la información proporcionada por la mico escala (a nivel de la celdas periódicas).

Un método a utilizar para obtener las componentes del tensor constitutivo elástico homogeneizado se basa en el procedimiento de perturbación –activación de pequeños desplazamientos– en los contornos de la celda, en el sentido de ir activando las diferentes constantes elásticas del compuesto y observando el resultado que se obtiene.

Una vez se obtiene el tensor de tensiones $\tilde{\sigma}$ y deformaciones $\tilde{\mathbf{E}}$ homogeneizados, es posible calcular las constantes elásticas del tensor constitutivo $\tilde{\mathbf{C}}(x)$ aplicando el procedimiento de perturbación arriba mencionado, a través de la siguiente expresión,

$$\tilde{\mathbf{C}}(x) = \tilde{\sigma}(x) : [\tilde{\mathbf{E}}(x)]^{-1} \quad (5.39)$$

Obviamente, esta expresión da infinitas soluciones, puesto que $\tilde{\mathbf{C}}(x)$ es un tensor de cuarto orden, mientras $\tilde{\sigma}(x)$ y $\tilde{\mathbf{E}}(x)$ son tensores de segundo orden. Sin embargo, si el problema es tratado en direcciones principales y se activan perturbaciones en cada una de estas direcciones, de una por vez, puede construirse el tensor constitutivo componente a componente y de esta forma el problema tiene solución única.

Por ejemplo, la parte simétrica del tensor constitutivo elástico puede escribirse para problemas bi-dimensionales en tensión o deformación plana, con la siguiente forma matricial,

$$\tilde{\mathbf{C}}(x) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbb{C}}_{xxxx} & \tilde{\mathbb{C}}_{xxyy} & 0 \\ \tilde{\mathbb{C}}_{xxyy} & \tilde{\mathbb{C}}_{yyyy} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\mathbb{C}}_{xyxy} \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

Aplicando el siguiente campo de perturbaciones, uno a uno,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_1(x) &= \left\{ \tilde{E}_{xx}, 0, 0 \right\} \\ \tilde{\mathbf{E}}_2(x) &= \left\{ 0, \tilde{E}_{yy}, 0 \right\} \\ \tilde{\mathbf{E}}_3(x) &= \left\{ 0, 0, 2\tilde{E}_{xy} \right\} \end{aligned} \quad (5.41)$$

Para cada uno de estos supuestos campos de deformación se obtienen las tensiones $\tilde{\sigma}(\tilde{\mathbf{E}}_1(x))$, $\tilde{\sigma}(\tilde{\mathbf{E}}_2(x))$, $\tilde{\sigma}(\tilde{\mathbf{E}}_3(x))$. Luego, los coeficientes del tensor constitutivo se obtienen como lo expresa la siguiente ecuación,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{C}}_{xxxx} &= \tilde{\sigma}_{xx}(\tilde{\mathbf{E}}_1(x))/\tilde{E}_{xx} \\ \tilde{\mathbb{C}}_{xxyy} &= \tilde{\sigma}_{xx}(\tilde{\mathbf{E}}_2(x))/\tilde{E}_{yy} \\ \tilde{\mathbb{C}}_{yyyy} &= \tilde{\sigma}_{yy}(\tilde{\mathbf{E}}_2(x))/\tilde{E}_{yy} \\ \tilde{\mathbb{C}}_{yyxx} &= \tilde{\sigma}_{yy}(\tilde{\mathbf{E}}_1(x))/\tilde{E}_{xx} \\ \tilde{\mathbb{C}}_{xyxy} &= \tilde{\sigma}_{xy}(\tilde{\mathbf{E}}_3(x))/2\tilde{E}_{xy} \end{aligned} \quad (5.42)$$

La demostración analítica de estas simetrías no es una tarea trivial. Utilizando funciones periódicas se puede deducir que la siguiente hipótesis de simetría queda satisfecha,

$$\tilde{\mathbb{C}}_{yyxx} = \tilde{\mathbb{C}}_{xxyy} \quad (5.43)$$

Consecuentemente, esta técnica es independiente de la forma y tipo de deformación que se aplica a la celda. Así, si se aplica otro campo de deformación distinto al que se ha supuesto anteriormente y manteniendo a la celda en el rango elástico, resulta un tensor homogeneizado que coincide con el que se ha obtenido previamente.

5.2.10 Determinación del tensor constitutivo inelástico cuasi-tangente para el material compuesto – Determinación analítica.

En la solución de un problema constitutivo no lineal mediante la técnica de linealización de Newton-Raphson, es conveniente tener definido un *tensor constitutivo algorítmico tangente* para mejorar la velocidad de convergencia hacia la solución del problema y alcanzarla en el menor número de iteración posible. No obstante, la obtención del *tensor constitutivo algorítmico tangente* es simple y más aun si se trata de un material compuesto, cuya respuesta depende de la participación a la vez del comportamiento de varios materiales simples que responden a distintos modelos constitutivos. Por otro lado, la solución de un sistema de ecuaciones no lineales por un método iterativo-incremental, como el método de Newton-Raphson modificado, sólo necesita como imprescindible un *tensor constitutivo elástico* $\tilde{\mathbf{C}}(x)$, aunque esto implique un alto coste computacional. No obstante, un camino alternativo a estas dos extremos –*tensor algorítmico tangente* o *tensor elástico*– consiste en obtener un tensor algorítmico “cuasi-tangente”, cuya velocidad de convergencia se encuentra cercana a la obtenida con el tensor tangente. Este tensor aproximado

permite obtener una rigidez estructural “cuasi-tangente” \mathbf{K}^T para toda la estructura a partir de la información obtenida en iteraciones previas. La obtención del tensor “cuasi-tangente” puede llevarse a cabo por distintos caminos (ver: Dennis and More (1977)⁶⁰, Crisfield (1980)⁶¹), y aquí se presenta otra forma posible de obtenerlo. Se supone que luego de la homogeneización, la ley constitutiva del material compuesto en cada punto puede llegar a escribirse en la siguiente forma,

$$\dot{\tilde{\sigma}}(x) = \tilde{\mathbf{C}}^T(x) : \dot{\tilde{\mathbf{E}}}(x) \quad (5.44)$$

Esta ley puede escribirse también en la siguiente forma,

$$\dot{\tilde{\sigma}} = (\tilde{\mathbf{C}} + \dot{\tilde{\mathbf{C}}}) : \dot{\tilde{\mathbf{E}}} \quad (5.45)$$

Siendo $\tilde{\mathbf{C}}$ el tensor constitutivo elástico del material compuesto y $\dot{\tilde{\mathbf{C}}}$ el cambio temporal que sufre este tensor constitutivo elástico para igualarse al tensor constitutivo tangente $\tilde{\mathbf{C}}^T$. La variación temporal del tensor constitutivo elástico puede obtenerse a partir de la ecuación (5.45), esto es,

$$\dot{\tilde{\sigma}} - \tilde{\mathbf{C}} : \dot{\tilde{\mathbf{E}}} = \dot{\tilde{\mathbf{C}}} : \dot{\tilde{\mathbf{E}}} \Rightarrow \dot{\tilde{\mathbf{C}}} = (\dot{\tilde{\sigma}} - \tilde{\mathbf{C}} : \dot{\tilde{\mathbf{E}}}) : \dot{\tilde{\mathbf{E}}}^{-1} \quad (5.46)$$

Al igual que la ecuación (5.39), ésta ecuación tiene infinitas soluciones, lo que requeriría una solución por perturbación como la comentada en el apartado anterior. No obstante, aquí sólo se quiere obtener un tensor constitutivo tangente aproximado y para este fin es suficiente imponer algunas restricciones al cambio temporal del tensor constitutivo $\dot{\tilde{\mathbf{C}}}$, que permita disminuir el grado de indeterminación y así obtener una solución única. Para ello se supone que el tensor $\dot{\tilde{\mathbf{C}}}$ mantiene las mismas simetrías que el tensor elástico $\tilde{\mathbf{C}}$ y también se supone que varios términos son nulos. En tal caso la solución puede ser fácilmente obtenida.

5.2.11 Acoplamiento Micro-Macro estructural.

Para la solución del problema de materiales compuestos por el método de homogeneización aquí presentado, se propone un acoplamiento micro-macro estructural basado en la aplicación del método de los elementos finitos en dos escalas (ver Ghosh *et al.* (1996)⁴² y Fish *et al.* (1997)⁵¹). En ambas escalas se resuelve un problema por elementos finitos, tal que en la macro escala se resuelve un problema estructural en tanto que en la micro escala se resuelve un problema constitutivo. Así cada punto de integración numérica de la macro-estructura discretizada en elementos finitos representa un problema de valores de contorno a nivel microestructural. Esto significa que la ley constitutiva del comportamiento del material compuesto no es analítica, sino que está expresada numéricamente a través del problema por elementos finitos que se resuelve en la micro escala. Las variables de estado y las variables internas que se obtienen en el material compuesto resultan de la homogeneización de las mismas en la micro escala.

⁶⁰ Dennis J. E., and More J. J. (1977). *Quasi-Newton methods, motivation and theory*. SIAM. Review

⁶¹ Crisfield M. (1980). *Numerical Methods for Nonlinear Problem*. Pineridge Press.

Según este esquema, se resuelve la macro estructura junto a una gran cantidad de celdas representativas de la micro estructura, tantas como número de puntos de integración numérica –puntos de Gauss– tenga la macro estructura. La solución final a nivel macro estructural se obtiene una vez que todas las celdas están resueltas.

La muestra un diagrama de flujo esquemático de la resolución del problema en las dos escalas. La solución de este problema por elementos finitos es muy costosa y para disminuir el tiempo de cálculo se ha utilizado un algoritmo de parallelización (PVM⁵⁹), que permite resolver en forma acoplada la macro escala y luego todas las celdas de la micro escala a la vez. Estos procesos a nivel microestructural se sincronizan y entre ellos intercambian información según sean requeridas.

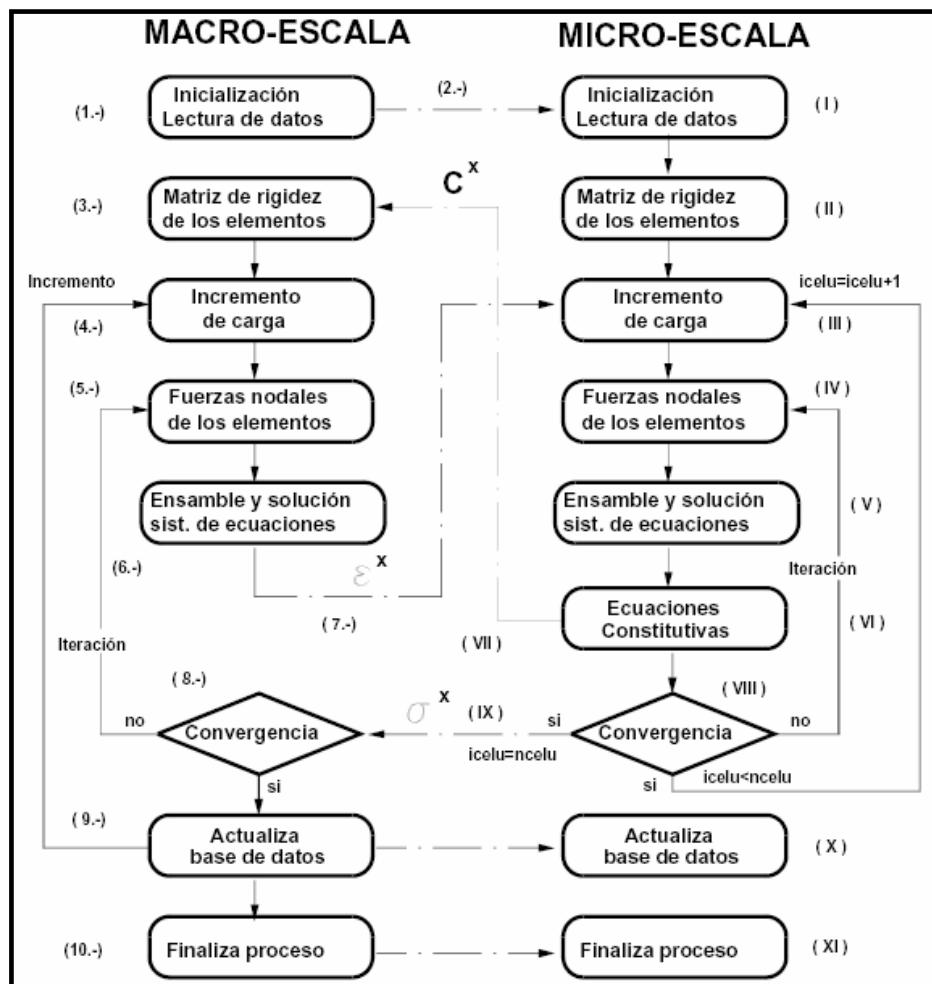


Figura 5.10 – Algoritmo para la resolución de estructuras de materiales compuestos por el método de homogeneización a dos escalas mediante elementos finitos.

A continuación se presenta en forma esquemática la secuencia de actividades que se muestra en el algoritmo de la Figura 5.10,

1. Comienza el proceso. El programa a nivel de la macro escala (*Programa Global*), realiza tareas de inicialización, lee la información acerca de la macro estructura que contiene además la dirección del archivo de la microestructura.

2. Se procede al cálculo del tensor constitutivo elástico homogeneizado $\tilde{\mathbf{C}}(x)$ a través del programa de la micro escala (*Programa Local* o subprograma), en el que se realizan las siguientes actividades:
 - I. Arranca el *Programa Local*, este inicializa las base de datos, cuya capacidad es de tantas células como puntos de integración tiene la macro estructura. Luego lee la información de la microestructura.
 - II. Determina la matriz de rigidez de los elementos finitos de la célula \mathbf{K} .
 - III. Se aplica el incremento de carga. Se procede a la solución secuencial de las células (“icelu”), imponiendo una deformación macroscópica preestablecida. Para ello se procede de la siguiente manera,
 - IV. Se determina las fuerzas nodales.
 - V. Se ensambla y soluciona el sistema de ecuaciones de la microestructura, bajo condiciones periódicas.
 - VI. Se verifica las tensiones a través de la ecuación constitutiva. En este caso, se considera que los componentes tienen comportamiento elástico (no cambian las tensiones). A continuación, se obtiene el tensor de tensiones homogeneizado. Entonces, si se han recorrido todas las células se retorna al paso III.
 - VII. Se determinan las constantes del tensor constitutivo elástico homogeneizado $\tilde{\mathbf{C}}$. Esta información se envía al *Programa Global*.
3. Se obtiene la matriz de rigidez de cada elemento finito $[\mathbf{K}_{kr}^T]_{\Omega^e}$ de la estructura macroscópica.
4. Se aplica un nuevo incremento de carga.
5. Se calcula las fuerzas nodales en cada elemento.
6. Se genera y resuelve el sistema de ecuaciones de la macro estructura.
7. Mediante la ecuación constitutiva del compuesto homogeneizado se verifica que las tensiones en cada punto del macro dominio sea admisible. Dicha función la realiza el *Programa Local*, por consiguiente se envía la información de la deformación macroscópica de cada punto de integración. Entonces:
 - I. El *Programa Local* soluciona secuencialmente cada una de las células, para lo cual extrae de las base de datos la información a nivel microscópico y aplica como incremento de carga el correspondiente incremento de deformación.
 - II. Se determina las fuerzas nodales.
 - III. Se ensambla y soluciona el sistema de ecuaciones de la microestructura bajo condiciones periódicas. Mediante las respectivas ecuaciones constitutivas de los componentes se verifica que las tensiones microscópicas sean admisibles, y en caso de no serlo deben ser corregidas siguiendo un modelo constitutivo preestablecido. Luego se obtiene la tensión y el tensor constitutivo tangente homogeneizado.

- IV. Se verifica la condición de equilibrio de la celda, es decir para una iteración cualquiera se verifica $\Delta f_k|_{\Omega} = \mathbf{A} \left[f_k^{\text{int}} - f_k^{\text{ext}} \right]_{\Omega^e}$. Cuando se alcanza la convergencia a la solución correcta $\|\Delta f_k|_{\Omega}\| \rightarrow 0$.
- V. Cuando se han solucionado todas las células, se transmite la información de las tensiones y tensor constitutivo homogeneizado al *Programa Global*.
8. El *Programa Global* adopta las magnitudes recibidas –tensión, tensor constitutivo y variables internas– como si proviniesen de un modelo constitutivo. Si no se alcanza el equilibrio se retorna al paso 5 y se continua con la técnica iterativa de Newton Raphson.
 9. Una vez se alcanza la convergencia en el *Programa Global*, se sigue con los sucesivos incrementos de carga y se regresa al paso 4 y se continua hasta concluir con el último incremento de cargas del proceso.

Como se puede ver en la , el código de elementos finitos en dos escalas esta formado por el acoplamiento de la solución del problema dentro de cada uno de los dos niveles. El esquema que está a la izquierda representa el código del MEF que soluciona el problema a nivel macroscópico y el esquema que está la derecha corresponde al código del MEF que soluciona el problema a nivel microscópico. Se hace notar que el código de la macro escala no dispone del bloque que representa las ecuaciones constitutivas, pues es el código de la microescala quien hace las funciones de ecuación constitutiva homogeneizada del material compuesto.

5.2.12 Influencia de los efectos locales.

En esta sección se muestra la influencia que tiene en la teoría de homogeneización el tratamiento de los efectos locales, tales como cargas puntuales y condiciones de contorno particulares, etc.. El problema fundamental surge de la rigurosidad con que se exige en la teoría de homogeneización el cumplimiento de las siguientes suposiciones ideales,

1. El material compuesto tiene una distribución periódica de sus materiales componentes, que permite la división ideal en dominios iguales Y , denominados células.
2. Cada célula contiene la estructura interior del material compuesto y es muy pequeña en comparación con la estructura global del material compuesto ($Y \ll \Omega$).

Estas dos suposiciones están contenidas dentro de la hipótesis de periodicidad local y requieren que el campo de tensión y deformación en el dominio de la célula sea también el mismo para las células vecinas. Este concepto permite dividir el problema en dos escalas en las cuales las variables microscópicas tienen fuertes fluctuaciones, mientras las variables macroscópicas cambian muy suavemente. Por consiguiente, esta hipótesis de periodicidad local constituye el fundamento de la mayoría de los métodos de homogeneización. Pueden verse ejemplos de estos hechos en la teoría de los promedios, en la teoría de expansión asintótica y evidentemente también en la formulación que se propone en este trabajo y que resulta de la tesis doctoral de Zalamea (Zalamea (2001)¹¹). Hay formulaciones que no aceptan la hipótesis de periodicidad local cuando ocurren fuertes gradientes de las variables macroscópicas o en la presencia de efectos locales –condiciones de contorno–, fracturas, etc. (Fish and Wagiman (1993)³², Fish and Markolefas (1993)³³, Fish et alt. (1994)³⁵). Estas otras propuestas intentan obtener la solución del problema elástico

macro estructural mediante la teoría de homogeneización, introduciendo términos de perturbación en el campo de desplazamientos cuando hay fuertes gradientes producidos por efectos locales. En otros trabajos, se utiliza el solapamiento de mallas de elementos finitos con alta densidad (técnica de *multi-grid*), en el dominio donde las variables tienen fuerte gradiente de variación y en estos sitios del dominio la formulación periódica introduce también términos de perturbación. Estas técnicas normalmente se utilizan en elementos finitos que combinan con algoritmos de minimización de error. Es necesario añadir que esta formulación aumenta la complejidad del problema sin que esté garantizado que se llegue a un resultado mejor que con técnicas estándar.

Los fuertes gradientes en los campos de desplazamientos que ocurren en un cierto punto estructural involucran una perturbación de los mismos en las células vecinas, situación que al parecer contradice la hipótesis de periodicidad que se han supuesto. No obstante, debe entenderse que esta hipótesis sólo representa una idealización de la variación del campo de desplazamientos, pues supone que las variables macroscópicas sólo pueden sufrir cambios muy suaves o nulos. Esta situación no admitiría un fuerte gradiente en la tensión (o en la deformación) entre dos puntos de la macro estructura –puntos *A* y *B*– (ver Figura 5.11) ($\tilde{\sigma}_A(x)$ y $\tilde{\sigma}_B(x)$).

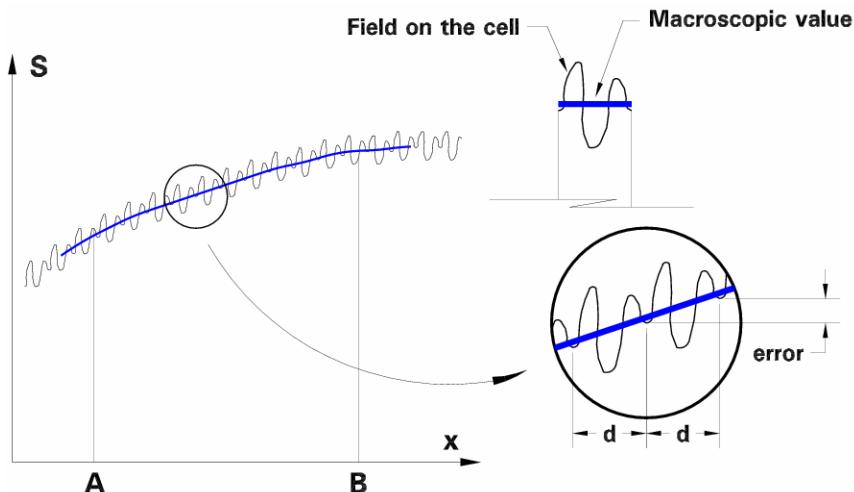


Figura 5.11 – Representación simplificada de una función cuasi periódica.

Por otro lado, la teoría de homogeneización idealiza el problema, puesto que considera que las dimensiones de la célula tienden a cero desde el punto de vista de la escala global. Por consiguiente, se puede suponer que entre los puntos *A* y *B* hay una gran cantidad de células, tal que el cambio de tensión entre la célula *A* y una célula vecina sea tan pequeño como se quiera y así sucesivamente muy pequeña hasta que se llegue al punto que *B*. El problema real difiere del ideal dependiendo del número finito de células que haya entre los puntos *A* y *B*, según se muestra en la Figura 5.11. Por ejemplo, en el lado derecho de la misma figura se muestra un detalle de la variación del campo de desplazamiento, en el que se indica que éste varía muy poco entre célula y célula. Esta variación puede entenderse como el error cometido a lo largo de un “*periodo*” *d* que a su vez representa longitud de la célula.

Si se admite que la dimensión de la celda disminuye y que la amplitud –variación– del campo de la función no cambia, entonces es fácil ver que el error disminuye proporcionalmente con la disminución de la dimensión *d* y en el límite tiende a representarse

como un campo periódico sobre un dominio muy pequeño ($d \rightarrow 0$). Con lo cual nuevamente se llega a la hipótesis de periodicidad local.

En el caso de reproducir exactamente el campo de tensiones en la microestructura se podría introducir una corrección que tomaría en cuenta la variación de los campos por la dimensión finita de la célula, la cual se agregaría al campo periódico, de tal manera que se reflejaría el cambio o variación dentro de la propia célula. Esta corrección no altera el valor global de las variables dentro de la célula, únicamente las ajusta para que la variación de una célula a la siguiente sea de forma continua. Se hace notar que este efecto de escala surge porque no se cumple completamente con las suposiciones de la teoría de la homogeneización. Naturalmente, en el caso que la célula es relativamente muy pequeña dicho efecto no es apreciable y por lo tanto, no se toma en cuenta.

Por otra parte, se ha cuestionado también el uso de la hipótesis de periodicidad en aquellas zonas que se encuentran cerca de los contornos de la macro estructura. Este tema lo abordó Sánchez-Palencia (Sánchez-Palencia (1987)⁶²) en base de los desarrollos asintóticos. Para analizar el efecto de borde este autor introduce un término adicional \mathbf{u}^{lc} del orden de las deformaciones microscópicas, de tal forma que el campo de desplazamientos se expresa como $\mathbf{u}^e = \mathbf{u}^0 + \epsilon \mathbf{u}^1 + \epsilon \mathbf{u}^{lc}$. Luego del análisis se indica que a nivel macroscópico el efecto de este término adicional $\epsilon \mathbf{u}^{lc}$ no es apreciable, puesto que su gradiente se desvanece muy rápidamente, de hecho experimentos numéricos presentan que el efecto de este término es considerable únicamente en la celda que se encuentra en el borde (esto es, se amortigua prácticamente en un período) (Dumontet (1986)⁶²).

En conclusión, si se admite que las dimensiones de la célula son muy pequeñas respecto de la macro estructura, el error cometido en la hipótesis de aproximación periódica en el contorno del dominio macroscópico es despreciable a nivel global.

5.3 Ejemplos de comprobación de la “Teoría de Homogeneización de Periodicidad Local”.

5.3.1 Comportamiento transversal de una matriz reforzada con fibras largas – Prueba de tracción simple.

En este apartado se utiliza un ejemplo presentado por Jansson (1992)⁶³ –resuelto mediante la teoría de expansión asintótica– con la finalidad de validar la formulación de la “teoría de homogeneización de periodicidad local” que se ha presentado en este capítulo. El material compuesto está construido por una matriz de aluminio reforzada con fibras perpendiculares al plano de la figura. En este caso, se estudia el comportamiento del material sometido a una carga uniaxial en la dirección transversal a las fibras. El problema puede reducirse de tres a dos dimensiones y así estudiarlo en forma plana.

Dos tipos diferentes de células se presentan (para ver otros tipos de celdas, consultar Zalamea (2001)¹¹). La primera célula estudiada es cuadrilátera con cuatro lados periódicos

⁶² Dumontet H. (1986). *Local Effects in the Analysis of Structures. Chapter: Boundary layers stresses in elastic composites*. Elsevier.

⁶³ Jansson S. (1992). Homogenized nonlinear constitutive properties and local stress concentrations for composites with periodic internal structure. *Int. J. Solids Structures*, Vol. 29, No. 17, pp. 2181-2200.

(ver Figura 5.12), en tanto la segunda célula es hexagonal con seis lados periódicos (ver Figura 5.13).

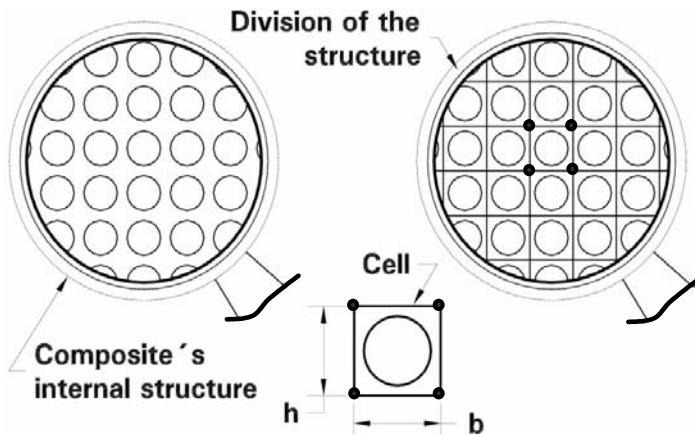


Figura 5.12 – Estructura interna del material compuesto, representada mediante celdas cuadriláteras.

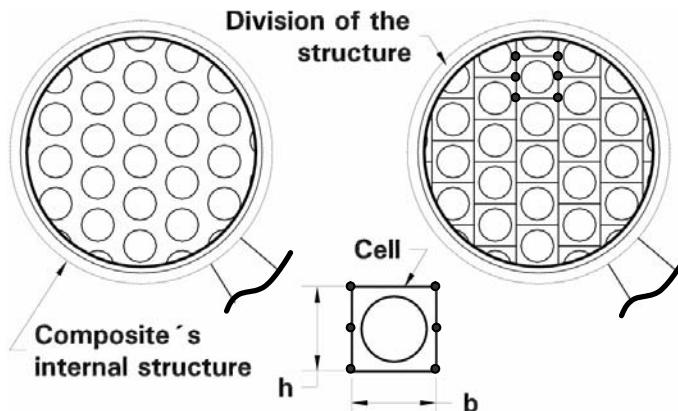


Figura 5.13 – Estructura interna del material compuesto, representada mediante celdas hexagonales.

El material compuesto está constituido de una matriz de aluminio dúctil, reforzada con fibras largas de alúmina. La adherencia entre fibra y matriz es muy fuerte, con lo que se considera perfecta. El volumen de matriz y fibras en proporciones del total son respectivamente del 55% y 45%. El diámetro de la fibra es de 10.0 μmm . Las dimensiones de la célula se detallan en la Tabla 5.1.

Material Compuesto	Tipo de Celda (No. de Lados)	Fibras %	Diám. fibras [μmm]	b [μmm]	h [μmm]
Cuadrilátera	Cuadrilátera	55	10.0	11.9499	11.9499
Hexagonal	Hexagonal	55	10.0	11.1206	12.8410

Tabla 5.1 – Dimensiones de la celda.

Se supone que las fibras tienen un comportamiento elástico e isótropo, mientras que la matriz de aluminio es representada por un material isótropo elasto plástico, cuyo umbral de discontinuidad elástica coincide con el criterio de von Mises. También se admite que la matriz tiene endurecimiento cinemático lineal, junto a un endurecimiento isótropo exponencial, del tipo $\tilde{K}(\alpha) = \sigma^0 + H\alpha + (\sigma^{\text{inf}} - \sigma^0)(1 - \exp(-\delta\alpha))$, en el cual el parámetro de endurecimiento vale $H=1000$ MPa, y la diferencia entre la tensión inicial (σ^0) y la de saturación –a tiempo infinito– (σ^{inf}) es 30MPa con una velocidad de saturación de $\delta=300$. Las propiedades elásticas de los componentes del material se presentan en la Tabla 5.2.

Material Compuesto	Módulo de Young E_{mod} [Mpa]	Relac. de Poisson ν	Tensión de fluencia σ^0 [Mpa]
Matriz (Al_2O_3)	68900.0	55	94.0
Fibra	344500.0	55	—

Tabla 5.2 – Propiedades elásticas de los materiales componentes.

Un problema a resolver en este ejemplo es el bloqueo numérico producido por la “cuasi incompresibilidad” generada por la matriz metálica del material compuesto. Jansson ha utilizado elementos iso-paramétricos de nueve nodos con integración selectiva para evitar este problema numérico. En la solución que aquí se presenta se ha evitado el bloqueo numérico mediante el método “B-bar”, el cual está basado en un elemento finito de cuatro nodos con una formulación mixta en tres campos –desplazamientos, tensión y deformación–.

Se realiza un ensayo simple de tracción imponiendo las deformaciones macroscópicas \tilde{E}_{xx} en la célula mientras la probeta es liberada transversalmente tal de obtener unas tensiones macroscópicas $\tilde{\sigma}_{yy}$ nulas. Esto no supone que en la dirección transversal las tensiones en cada componente también sean nulas. Además, como el ordenamiento cuadrangular de las células presenta un alto grado de anisotropía, cuando dichas células son giradas un ángulo de 45° , se obtiene también una respuesta distinta (el comportamiento de este material ha sido obtenido por Ghosh *et al.* (1996)⁴²). En la Figura 5.14 se muestran las curvas de tensión-deformación para la matriz, la fibra, tanto para un ordenamiento cuadrangular a 0° y girado 45° , como también para la celda hexagonal. El resultado obtenido en estos caso coincide bastante bien con el que se obtiene en la referencia previamente citada (para mayor detalle se recomienda ver los ejemplos completos en Zalamea (2001)¹¹).

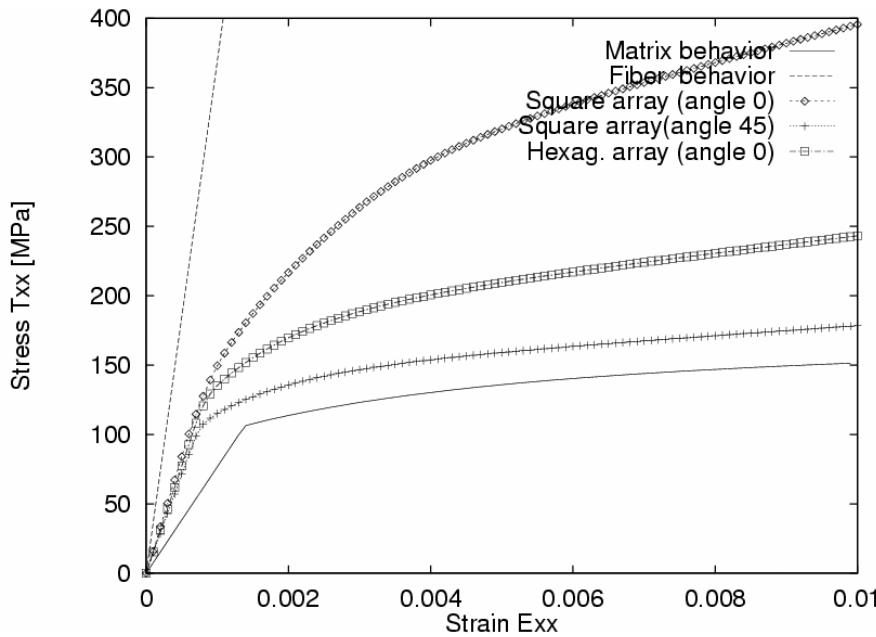


Figura 5.14 – Curvas de tensión-deformación en deformación plana, para: fibra, matriz. Para celdas cuadradas a 0° y 45° y para celdas hexagonales.

5.3.2 Cilindro grueso sometido a presión interna.

Este ejemplo consiste en un tubo cilíndrico de material compuesto, cuyas características mecánicas se pueden ver en la Tabla 5.3. Está sometido a una presión interna que se incrementa desde 0 a un máximo de 100 MPa. Y los detalles sobre el ensayo original puen consultarse en la referencia Ghosh *et al.* (1996)⁴². La simetría del cilindro permite estudiar un cuarto de la sección transversal del tubo, cuyo dominio se subdivide en 60 elementos cuadriláteros con aproximación lineal en sus lados y cuyas dimensiones y condiciones de contorno puede verse en la Figura 5.15. Este problema se resuelve en este apartado en dos escalas mediante la técnica de “homogeneización periódica local” comentada en apartados previos, mientras que Ghosh lo soluciona utilizando una teoría de expansión asintótica mediante una representación en dos escalas, tal que para la micro estructura utiliza elementos finitos especiales de Voronoi.

Material Compuesto	Tipo de Célula (No. de lados)	Fibras %	Diám. Fibras [μm]	b [μm]	H [μm]
Cuadrilátera	Cuadrilátera	40	10.0	14.0125	14.0125
Hexagonal	Hexagonal	40	10.0	13.0401	15.0574

Tabla 5.3 – Dimensiones de la celda.

Se han estudiado dos piezas cilíndricas construidas con materiales compuestos distintos:

- El primero de ellos se resuelve mediante una célula cuadrangular, como muestra la Figura 5.12.
- El segundo tubo se estudia con una célula hexagonal como muestra la Figura 5.13. En ambos casos el material compuesto se constituye de 40% de fibras y 60% de matriz.

Las propiedades mecánicas de los materiales componentes de este compuesto son idénticas a las utilizadas en el ejemplo previo y las dimensiones de las células se muestran en la Tabla 5.3

En el caso que aquí se plantea se resuelve el problema en dos escalas, lo que significa que por cada iteración es necesario resolver la macro estructura más 240 células (60 elementos con 4 cuatro puntos de integración cada uno).

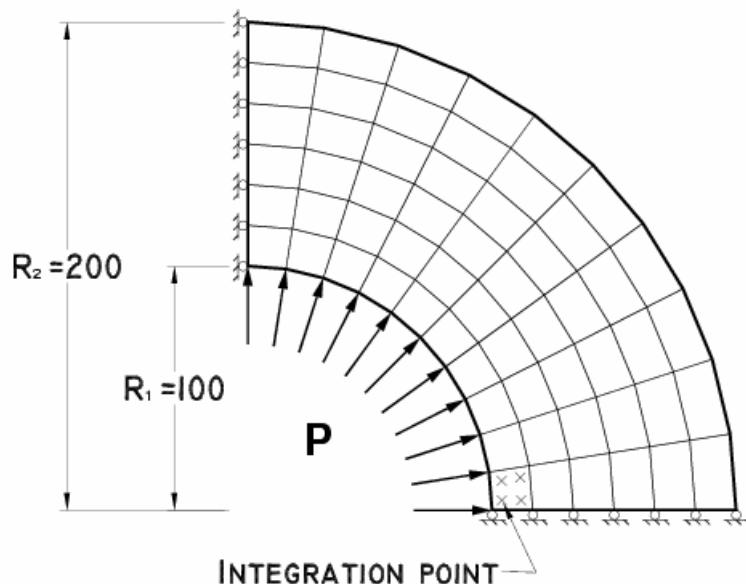


Figura 5.15 – Representación esquemática de un tubo cilíndrico sometido a presión interna (estructura macroscópica).

El resultado obtenido con el primer compuesto puede verse en la Figura 5.16, que muestra cuatro gráficos de la macro estructura y en la Figura 5.17 en la que se muestran cuatro gráficos de la micro estructura correspondiente al primer punto de integración, indicado en la Figura 5.15. En cada uno de estos dos grupos de figuras (macro estructura y micro estructura), puede verse el **gráfico 1** que representa la subdivisión de la estructura en elementos finitos y el desplazamiento de la malla a una presión de 100 MPa. En el **gráfico 2**, el campo de tensiones se representa en función de la tensión de von Mises cuando la presión aplicada es de 10 MPa. En este caso, todo el dominio está sometido a un comportamiento elástico. Observe que la distribución de las tensiones en el tubo es equivalente a la que ocurre en un material isótropo, puesto que el campo de tensiones es prácticamente uniforme y tiene dirección circunferencial. El **gráfico 3** presenta las tensiones de von Mises cuando la presión aplicada alcanza los 50 MPa, a este nivel de presión interior se inicia el proceso de comportamiento no lineal en algunos puntos del tubo. Finalmente, en el **gráfico 4** se muestran las tensiones de von Mises cuando la pre-

sión llega a los 100 MPa. En este caso, parte del material compuesto está en el rango de comportamiento no lineal y la influencia de la anisotropía del material se hace notar fuertemente, produciendo concentración de tensiones en partes del dominio. Estos resultados coinciden bastante bien con lo que se informan en la referencia de Ghosh *et al.*, (1996), cuando la presión alcanza los 100 MPa (ver Figura 5.16 y Figura 5.17). Hay que tener en cuenta que esta coincidencia se consigue a pesar de que ambas formulaciones compuestas son muy diferentes, puesto que Ghosh utiliza los elementos finitos de Voronoi. Los resultados obtenidos con la celda hexagonal son bastantes similares a aquellos obtenidos con las celdas cuadradas. Esto implica que el material compuesto con células hexagonales detecta la anisotropía en rango no lineal.

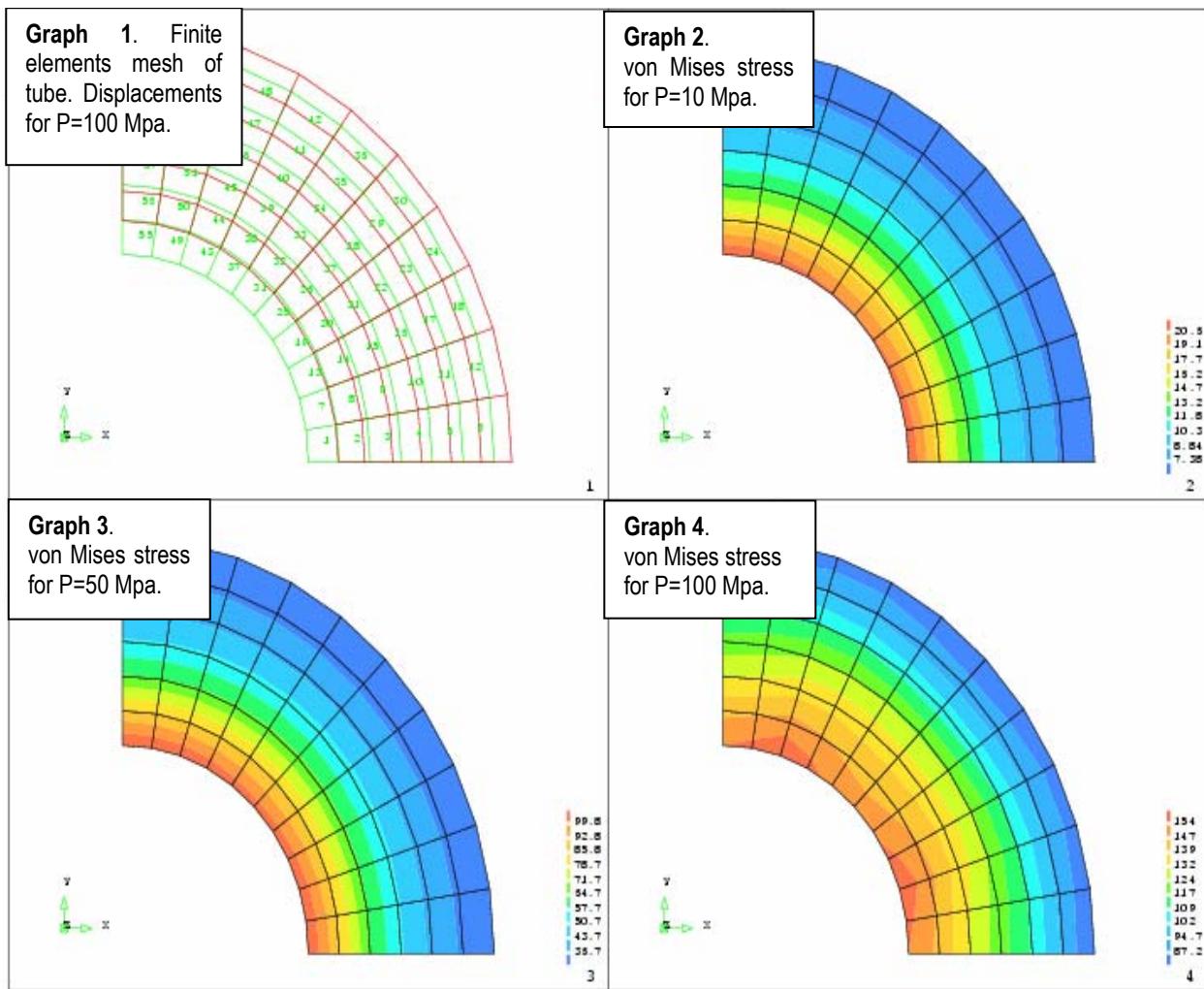


Figura 5.16 – Tensiones de von Mises en el material compuesto –macro escala– para tres niveles diferentes de tensión.

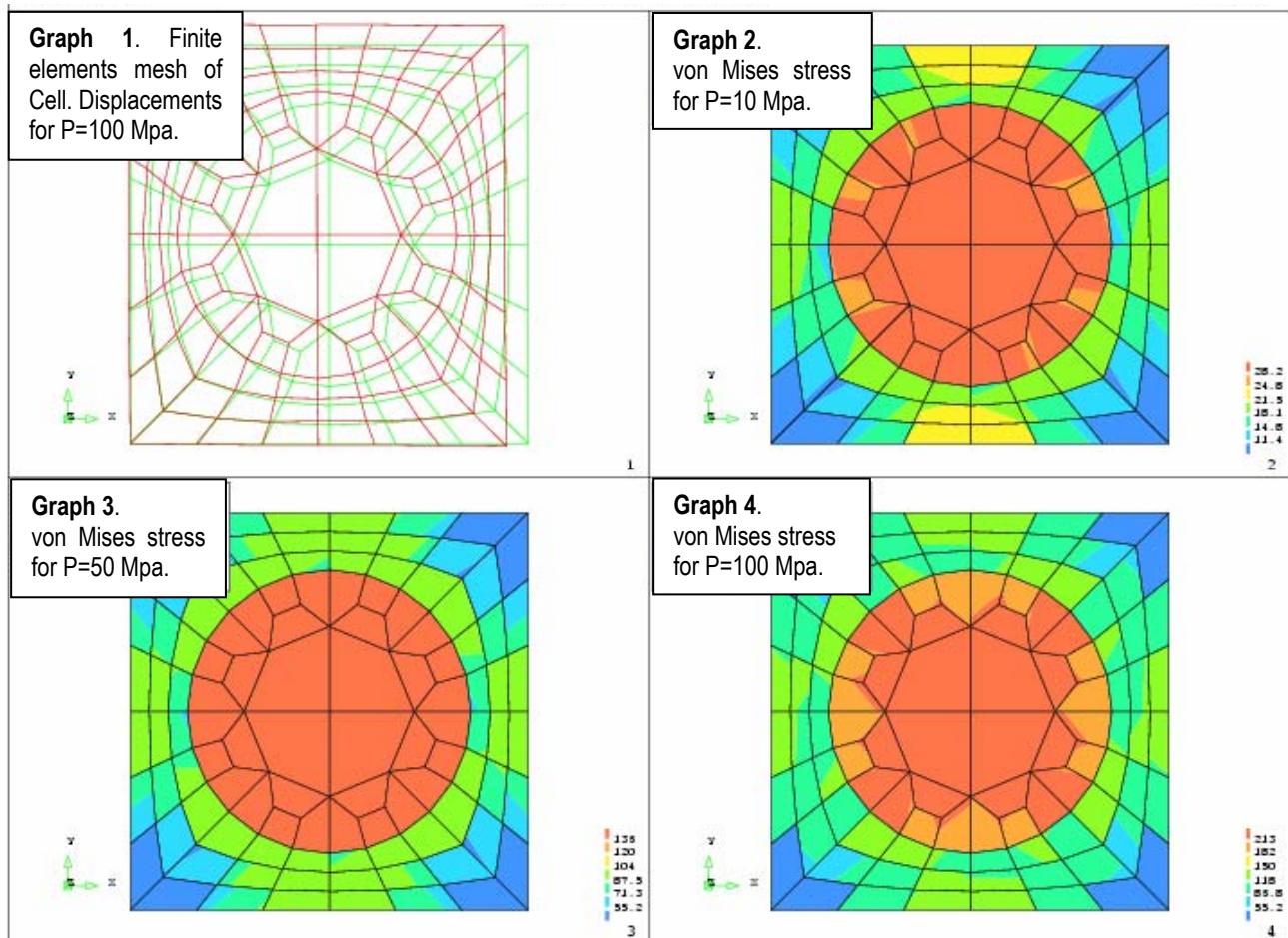


Figura 5.17 – Tensiones de von Mises en la microestructura correspondiente al primer punto de integración del material compuesto (ver Figura 5.15) para tres niveles diferentes de tensión.

5.3.3 Mampostería homogeneizada, tratada como un material compuesto.

En este ejemplo se muestra una mampostería tradicional construida en ladrillos, que es estudiada como un material compuesto. En realidad, la mampostería está más cerca de ser una estructura compuesta por distintas sub-estructuras –ladrillos y juntas de mortero–, que un material compuesto por distintas sustancias básicas. Esta característica hace muy compleja su simulación mediante modelos constitutivos, porque básicamente se trata de llevar características estructurales a nivel de formulación constitutiva. Molins (1996)⁶⁴ ha estudiado algunos de los más importantes aspectos que caracterizan a este tipo de mate-

⁶⁴ Molins Borrell, C. (1986). *Structural analysis of historical constructions*. Capítulo de: *Characterization of the mechanical Behaviour of masonry*, pp. 86-122. Eds. P. Roca, J.L. González, A. Marí and E. Oñate. CIMNE, Barcelona.

rial y cuyo comportamiento hace muy difícil su simulación numérico-mecánica. El ejemplo que se presenta aquí, consiste en un muro de mampostería sometido a un ensayo de carga cortante en laboratorio (Lourenço (1996)⁶⁵ y Zijl *et al.* (1997)⁶⁶), y para el cual se han contrastado la respuesta con resultados numéricos. Las propiedades de los materiales componentes – ladrillo y mortero de cemento– se detallan en la Tabla 5.4. Se admite como hipótesis la adherencia perfecta entre mortero y ladrillo, situación que simplifica la Modelización constitutiva de este material compuesto.

Material Componente	Módulo de Young $E_0 [N/mm^2]$	Relac. de Poisson $[v]$	Resistencia a tracción $f_t [N/mm^2]$	Resistencia a Compresión $f_c [N/mm^2]$
Ladrillo	20000	0.15	5.0	15.0
Mortero de Cemento	2000	0.20	1.5	15.0

Tabla 5.4 – Propiedades elásticas de los materiales componentes.

La Figura 5.18 muestra la distribución de las fracturas en dos muros de mampostería de ladrillo luego de ser sometidos a cargas que producen cortantes. Cada muro tiene 990mm de base por 1000mm de altura, y ambos tienen una ventana en su centro. La dimensión de los ladrillos es de 210×52×100mm. Estos ladrillos son adheridos entre si mediante un mortero de cemento de 10mm de espesor. El ensayo de laboratorio consiste en fijar la base del muro y aplicar una carga vertical distribuida en su parte superior de 0.3 N/mm. Una vez está aplicada esta carga, se aplica otra horizontal en la parte superior en forma de desplazamiento controlado impuesto.

La simulación numérica del comportamiento de cada uno de los componentes de este material compuesto, se han realizado mediante modelos constitutivos isótropos de daño escalar (Oliver *et al.* (1990)⁶⁷).

El modelo constitutivo de daño isótropo ha sido utilizado primeramente con ablandamiento exponencial para ambos componentes del material compuesto, y luego con un aumento en la magnitud de la energía de fractura en sus componentes, para así representar el efecto de fricción entre el ladrillo y mortero, situación que se manifiesta luego de superar el umbral de discontinuidad –efecto de fractura interfacial–. Este artificio numérico mecánico, introduce un umbral artificial por fricción.

La célula que caracteriza la micro estructura del material compuesto consiste en un simple ladrillo con dos capas de mortero en sus contornos y cuyo espesor es de 5mm.

⁶⁵ Lourenço, P. (1996). *Computational Strategies for Masonry Structures*. Delft University Press.

⁶⁶ Zijl, G.P.A.G. van, Lourenço, P.B. and Rots, J. G. (1997). Non-Associated Plasticity Formulation for Masonry Interface Behaviour. *Int. J. Comp. Plasticity*. pp. 1586-1593.

⁶⁷ Oliver J., Cervera M., Oller S., and Lubliner J. (1990). Isotropic Damage Models and Smeared Crack Analysis of Concrete. *Second International Conference on Analysis and Design of Concrete Structures*. pp. 945-958.

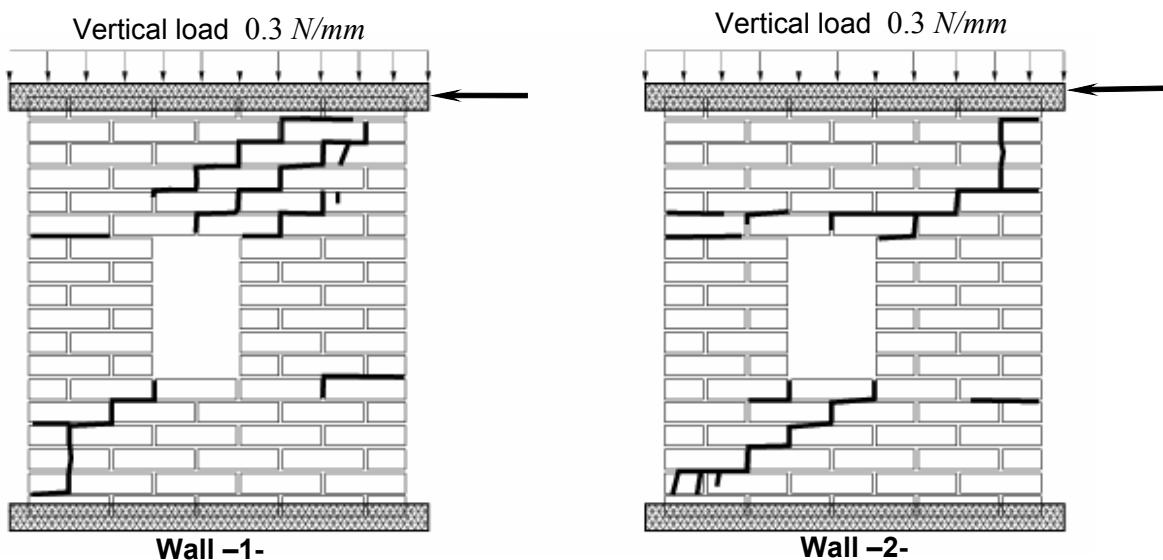


Figura 5.18 –Dos muros de mampostería fracturados bajo carga de cortante.

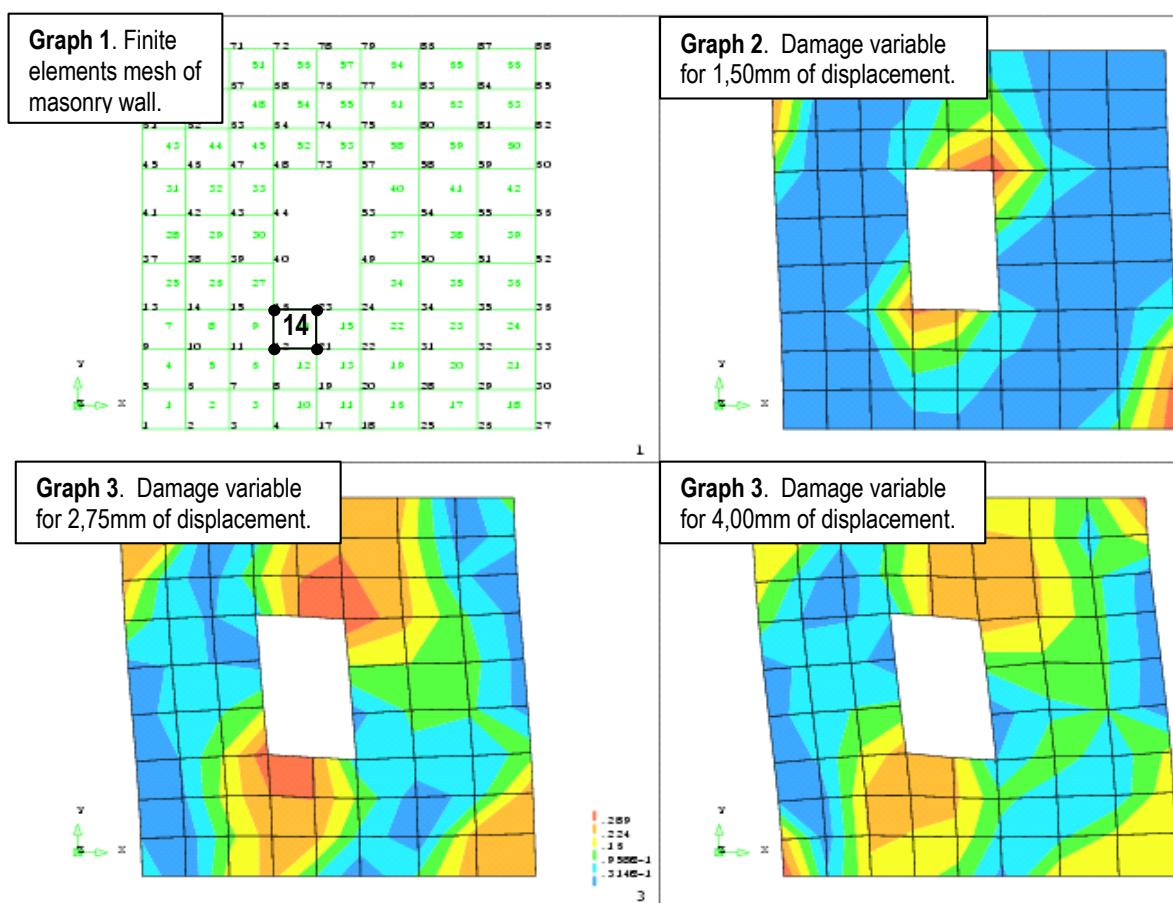
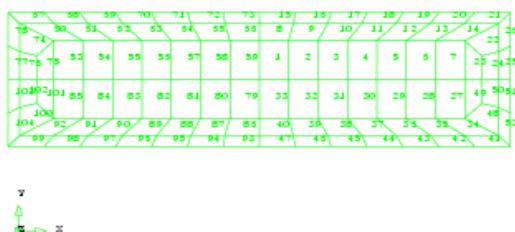


Figura 5.19 – Deformación de la pared para tres niveles diferentes de incrementos de carga

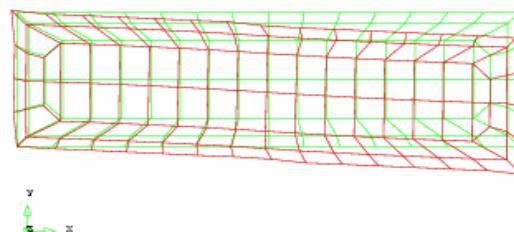
La pared se subdivide en 66 elementos cuadriláteros con cuatro puntos de integración numérica de Gauss. De esta forma, la solución de la macro estructura para cada incremento de carga se obtiene en paralelo a través de las 264 células utilizadas.

La teoría de homogeneización da información en relación de los resultados en cada una de las dos escalas. Por esta razón, se ilustrará la degradación sufrida en el muro de mampostería como el promedio del daño ocurrido en cada una de las células. El **gráfico 1** de la Figura 5.19 presenta la discretización de la pared en 66 elementos finitos cuadriláteros. En los otros gráficos de esta misma figura (2, 3 y 4), se observa el promedio de la variable de daño que se ha desarrollado en toda la célula correspondiente a la microestructura.. Observe que la variable de daño ha sido representada sobre la pared deformada, consecuencia del desplazamiento aplicado en cada instante. El **gráfico 2** de la Figura 5.19 representa el nivel de daño en el muro cuando el desplazamiento horizontal alcanza 1.50 mm en la parte superior del muro. Como puede verse, el daño se inicia en las dos esquinas de la ventana, opuestas diagonalmente. Esta situación ocurre porque es aquí donde ocurren las primeras tensiones que exceden por cortante, mientras el daño por tracción se inicia en la esquina inferior derecha en la esquina superior izquierda de la pared. El **gráfico 3** de la misma figura, representa el nivel de daño cuando el desplazamiento horizontal en la parte superior de la pared alcanza los 2.75 mm. En el **gráfico 4**, también de la misma figura, el desplazamiento impuesto es de 4.0 mm. Observe que también aparece el daño por aplastamiento en la esquina inferior izquierda y en la derecha superior de la pared. En este ejemplo, la tensión de fractura ocurre en el mortero porque es el componente más débil, mientras que el aplastamiento por compresión ocurre materiales los dos componentes del material (ladrillo y mortero).

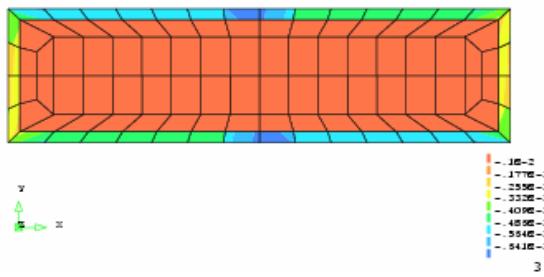
Graph 1. Finite elements mesh of Cell.



Graph 2. Cell deformed mesh for 1,5mm of displacement in the upper part of wall (see Fig. 12).



Graph 3. Shear strain for 1,5mm of displacement in the upper part of wall (see Fig. 12).



Graph 4. Shear stress for 1,5mm of displacement in the upper part of wall (see Fig. 12).

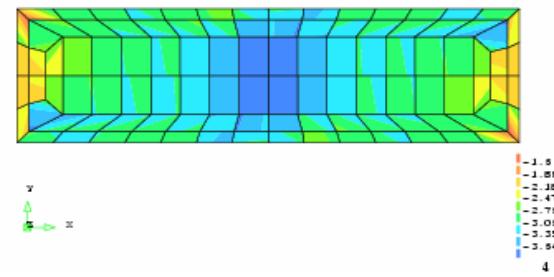


Figura 5.20 – Representación de una celda de la pared, correspondiente al 3er punto de integración del elemento finito Nro. 14 (ver Figura 5.19), para un desplazamiento de 1.5 mm en la parte superior del muro. 1) Discretización por elementos finitos, 2) Malla deformada, 3) Deformaciones tangenciales, y 4) Tensiones tangenciales.

Gracias a la teoría de homogeneización, la solución del problema en las dos escalas ofrece también una gran cantidad de información acerca del comportamiento mecánico a nivel de la micro escala.

Como se ha comentado previamente, el comportamiento del material compuesto discretizado se obtiene a partir de la solución macro mecánica por cada uno de los puntos de integración, que a la vez representa la célula a nivel del micro dominio. Consecuentemente, el campo de las variables microscópicas se obtiene en cada uno de estos puntos. Por ejemplo, la Figura 5.20 presenta cuatro gráficos que muestra la celda correspondiente al 3er punto de integración del elemento finito 14de la macro estructura (ver Figura 5.19), cuando se aplica un desplazamiento de 1.5 mm. El **gráfico 1** de la Figura 5.20 muestra el dominio de la célula, subdividida en 104 elementos finitos cuadriláteros de cuatro nodos. El **Gráfico 2** de la misma figura muestra la malla deformada. El **gráfico 3** indica el campo de las deformaciones tangenciales en el dominio de la célula, lo que a la vez muestra el nivel de concentración de deformaciones en la capa de mortero, y el **gráfico 4** presenta el campo de tensiones tangenciales en la célula básica.

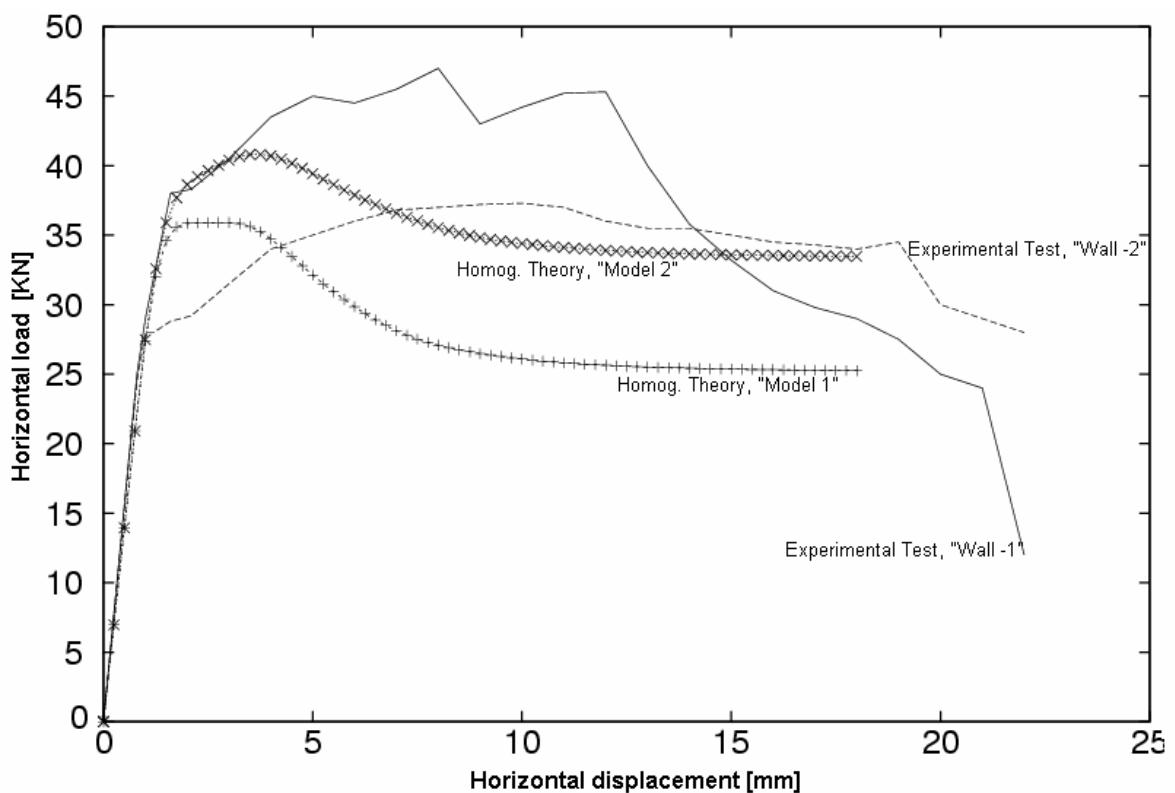


Figura 5.21 – Comparación de resultados con otros numéricos y experimentales

La Figura 5.21 muestra las curvas de comportamiento del muro carga-desplazamiento, sometido a los niveles de desplazamiento horizontal mencionado previamente. El modelo numérico de daño con ablandamiento exponencial coincide con el Segundo modelo y con los resultados experimentales, pero en el rango no-lineal la resistencia se deteriora rápidamente debido al fallo del mortero. En el segundo modelo numérico la solución ajusta mejor la solución real en el rango no lineal. En este caso, la energía de fractura en el mortero ha sido incrementada hasta ajustar el efecto de fricción interfacial entre mortero y ladrillo.

6 MAMPOSTERÍA – COMPUESTO HOMOGENEIZADO

6.1 Introducción y antecedentes.

Este capítulo resume una singular forma de homogeneizar la micro escala de un material compuesto, en este caso particular el de una mampostería (ver. López et alt. (1999)¹, Oller et alt. (2002)²). Se trata por separado de la forma clásica, porque el procedimiento es distinto al que se ha visto en el capítulo anterior, aunque podría, luego de distintas manipulaciones, clasificarse como un “método de homogeneización de promedios”

La mampostería es uno de los materiales de construcción con mayor abanico de usos, ya sea en el pasado como en el presente, así es como hoy en día también se puede encontrar en la construcción de edificaciones modernas. Los materiales utilizados a lo largo de la historia como elementos componentes de la mampostería han sido muchos y muy variados: desde la simple roca unida con mortero de cal (sillería), pasando por los enormes bloques de mármol usados en la construcción de los grandes monumentos del apogeo de la arquitectura del Renacimiento, hasta llegar a elementos cerámicos refractarios como los que se utilizan para la construcción de hornos, centrales nucleares e incluso como aislante térmico de naves espaciales.

Los métodos de evaluación más utilizados resultan de fuertes simplificaciones sobre el comportamiento de este “material-estructural” y muchos están recogidos en las diferentes normativas que rigen en cada país. Estas normativas frecuentemente están obtenidas sobre la base de estudios empíricos que intentan simplificar los mecanismos de comportamiento de la obra de fábrica y que traen como consecuencia un sobre dimensionado de la estructura. Otra de las consecuencias del uso de este tipo de reglas de cálculo es la formación de mecanismos y fisuras no previstas por la simplificación de los procedimientos de evaluación estructural.

Los métodos de cálculo avanzado, modelos constitutivos de la mecánica del medio continuo, deben ser el pilar sobre el que desarrollar elementos más objetivos de análisis estructural de la mampostería. Los elementos finitos son una herramienta potente en la que apoyar el cálculo de la obra de fábrica pero, debido a que ésta tiene un tamaño pequeño respec-

¹ López J., Oller S., Oñate E., Lubliner J. (1999). A Homogeneous Constitutive Model for Masonry. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*. Vol. 46, No.10, pp. 1651-1671.

² Oller S., Lubliner J., López J. (2002). *La mampostería - Tratamiento como compuesto homogeneizado*. Capítulo del libro: *Análisis y cálculo de estructuras de materiales compuestos*, – pp. 379, 410 - Ed. S. Oller. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería. Barcelona.

to a las dimensiones globales de la estructura, se hacen inviables desde el punto de vista computacional.

La necesidad de encontrar un método que equilibre sencillez, objetividad y rapidez de cálculo es lo que motiva el desarrollo de formulaciones con tratamiento al nivel de macro-modelo de la mampostería. La inquietud por conseguir este equilibrio promueve las bases que permitirán el desarrollo del “modelo constitutivo homogeneizado” que se presenta en este trabajo.

6.2 Propiedades de la mampostería

Entre las posibles formas de ver la mampostería es bajo la óptica de los materiales compuestos. Claramente es una “estructura mixta”, más que un “material compuesto”, pero el límite entre una y otra lo establece sólo la escala de los componentes y por lo tanto, en este caso, puede decirse que la mampostería cumple con ambas calificaciones. Hay esfuerzos por realizar su tratamiento desde la clásica teoría de homogeneización (Anthoine (1997)³) y también desde otras formas de teoría de homogeneización, como la que se presenta en este capítulo y que tiene sus orígenes en el trabajo de López et al. (1998)⁴. A continuación se describe el comportamiento de la mampostería orientado a justificar la formulación que se presentará más adelante y que puede decirse que es “un modelo de homogenización simplificado”.

El comportamiento uniaxial del material compuesto se describe a continuación con respecto a los ejes del material en la dirección paralela y normal a la orientación de las juntas.

6.2.1 Comportamiento de la mampostería en compresión uniaxial

La resistencia a compresión de la mampostería en la dirección normal a la junta ha sido tradicionalmente vista como una propiedad relevante del material, al menos hasta la reciente introducción de los métodos numéricos para las estructuras de mampostería. Un ensayo frecuentemente usado para obtener esta resistencia a compresión uniaxial es el ensayo de prisma con elementos apilados (ver Figura 6.1). Pero es aún algo incierto el uso de los parámetros de resistencia obtenidos con ensayos de este tipo. El ensayo más comúnmente aceptado para la determinación de la resistencia a compresión uniaxial de la mampostería en dirección normal a las juntas de mortero (ver Figura 6.1). Este tipo de ensayo es relativamente largo y costoso de ejecutar, especialmente si se compara con el ensayo estándar mediante probetas cilíndricas de hormigón. La compresión uniaxial de la mampostería conduce a un estado triaxial de compresión en el mortero y a una compresión-tracción en el ladrillo. A través de este ensayo se observa que inicialmente aparecen fisuras verticales en los ladrillos a lo largo de la línea media de las piezas, y que generalmente coincide con la continuación de las juntas verticales de mortero. A medida que crece la deformación van apareciendo fisuras adicionales, normalmente verticales en pequeñas zonas de la pieza, que llevan al fallo por deslizamiento de las fisuras en la pieza.

³ Anthoine, A. (1997). Homogenization of periodic masonry: plane stress, generalized plane strain or 3D modelling. *Numerical Methods in Engineering*, Vol. 13, 319-326.

⁴ López J., Oller S., Oñate E. (1998). *Cálculo del comportamiento de la mampostería mediante elementos finitos*. Monografía Nro. 46 CIMNE.

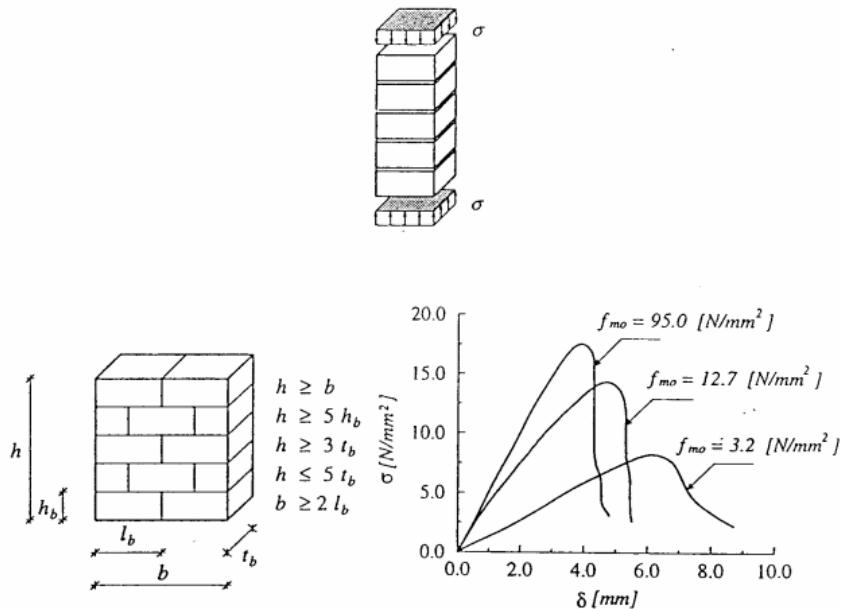


Figura 6.1 – Comportamiento uniaxial de la mampostería bajo carga normal al plano de las juntas horizontales

El comportamiento de la mampostería bajo compresión uniaxial en dirección paralela a las juntas de mortero recibe menos atención. Sin embargo, la mampostería es un material –estructura– anisótropo y la resistencia a compresión bajo cargas paralelas a las juntas de mortero puede tener un efecto decisivo a la hora de la determinación de la carga de pandeo en los muros. La relación entre la resistencia a compresión uniaxial paralela a las juntas y normal a éstas tienen valores que oscilan entre 0.2 y 0.8. Estas relaciones han sido obtenidas para bloques perforados, bloques de mortero y bloques de hormigón ligero. En el caso de ladrillos macizos, la relación antes mencionada puede tomarse como 1.0.

6.2.2 Comportamiento de la mampostería a tracción uniaxial

Para cargas a tracción en sentido perpendicular a las juntas de mortero, el colapso es causado por una pérdida de resistencia a tracción en la interfase mortero-ladrillo. En una aproximación no rigurosa, la resistencia a tracción de la mampostería se puede relacionar directamente con la resistencia a tracción de la unión entre la junta y el ladrillo.

En mamposterías construidas con ladrillos de baja resistencia y uniones entre juntas de gran resistencia a tracción, por ejemplo, mortero de alta resistencia y ladrillo con numerosas perforaciones, el fallo ocurre como resultado de la superación por parte de las tensiones de la resistencia a tracción del ladrillo. Como aproximación a la resistencia a tracción de la mampostería se toma la resistencia a tracción del ladrillo.

A partir de ensayos realizados se han observado dos diferentes mecanismos de rotura en paneles ensayados a tracción paralelos a la junta. El primero de éstos falla por desarrollo de fisuración en las juntas verticales y horizontales y en forma de “zigzag”. El segundo se presenta como una fisura perpendicular a la fuerza de tracción y que aparece siguiendo las juntas verticales de mortero y atravesando los ladrillos.

En el primero de los mecanismos de rotura, la respuesta de la mampostería viene gobernada por la energía de fractura de las juntas verticales, mientras que en las juntas horizontales es el mecanismo de cortante el que gobierna la fisuración (ver Figura 6.2). En el segundo de los mecanismos, dado que toda la fisuración es vertical e involucra tanto a las juntas como al ladrillo, es la energía de fractura G_f de cada material la que participa en la fisuración total de la estructura.

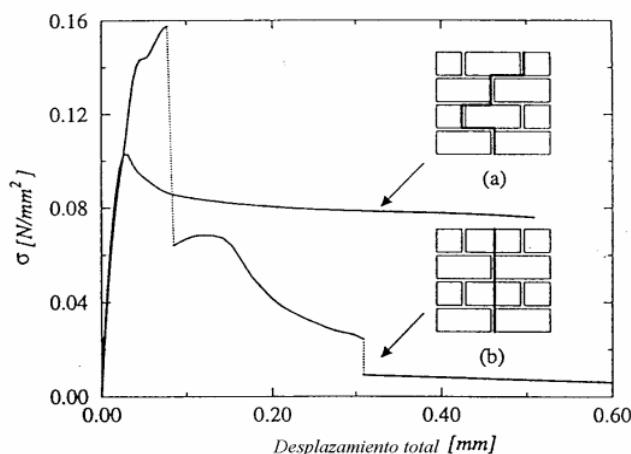


Figura 6.2 – Curvas experimentales tensión-desplazamiento para tracción en dirección paralela a las juntas horizontales de mortero: (a) el fallo ocurre por fisuración escalonada paralela a las juntas; (b) el fallo ocurre verticalmente a lo largo de juntas y ladrillo.

6.2.3 Comportamiento biaxial

El comportamiento biaxial de la mampostería bajo estados biaxiales de tensión, puede no ser completamente descrito por una ley constitutiva bajo condiciones de carga uniaxiales. La influencia del estado biaxial de tensiones es importante con el fin de conocer el comportamiento resistente, el cual no puede ser descrito solamente en términos de tensiones principales ya que la mampostería es un material anisótropo. Por lo tanto, la envolvente de tensiones biaxiales de mampostería puede ser descrita en términos de la orientación de los ejes respecto al material y de las tensiones principales, siendo θ el ángulo que forman las tensiones principales y los ejes del material. La más completa información recogida sobre la proporcionalidad de la carga biaxial de la mampostería es la que se puede observar en la Figura 6.3, obtenida por Page (1973)⁵, (1981)⁶, en base a los ensayos realizados sobre un muro que se presentará al final de éste capítulo a modo de ejemplo.

⁵ Page, A. W. (1973). *Structural brickwork-A literature review*. Engineering Bulletin No.CE4, Departament of Civil Engineering, Universidad de Newcastle, Australia.

⁶ Page, A. W. (1981). The Biaxial Compressive Strength of Brick Masonry. *Proc. Instn. Civ. Engrs*, 71, (2), 893-906.

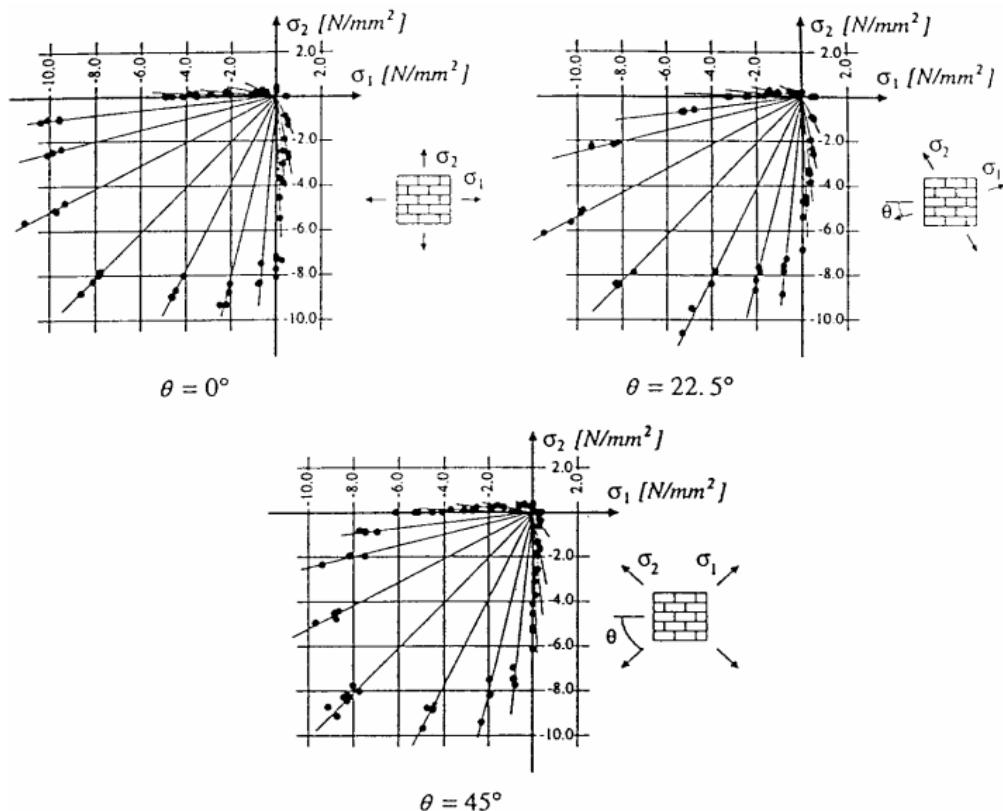


Figura 6.3 – Ensayo biaxial realizado sobre un muro de mampostería.

Uno de los resultados importantes obtenidos por Page (1973)⁵, (1978)⁷, (1981)⁶, fue la determinación de los diferentes mecanismos de ruptura o fisuración en función de la orientación de la carga respecto a los ejes definidos para el material (ver Figura 6.4).

Para tracción uniaxial el fallo ocurre por fisuración y deslizamiento de unos bloques sobre otros en la línea formada por el acoplamiento de dichas fisuras. La influencia de la tracción lateral en la resistencia a tracción global no es conocida debido a que no hay ensayos experimentales conocidos. La compresión lateral hace decrecer la resistencia a tracción, lo cual puede ser explicado debido al daño inducido en el material compuesto por formación de microfisuras en las juntas y en los ladrillos. En el caso de cargas combinadas tracción-compresión el fallo ocurre tanto por fisuración y deslizamiento en las juntas como por un mecanismo combinado que involucra tanto a ladrillos como a juntas. Parecidos tipos de fallo aparecen en el caso de compresión uniaxial, pero en el caso de compresión biaxial se observan tránsitos suaves hacia otros mecanismos de ruptura. El mecanismo de fallo típico en compresión biaxial ocurre por fisuración de los paneles en la zona media de la estructura y siguiendo una dirección paralela al plano de carga. El incremento de la resistencia a compresión bajo estados de compresión biaxial puede explicarse por el desarrollo de una fricción en las juntas, así como una fricción interna en el mortero.

⁷ Page, A. W. (1978). Finite element model for masonry. *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 104, No. ST8, Proc. Paper 13957, 1267-1285.

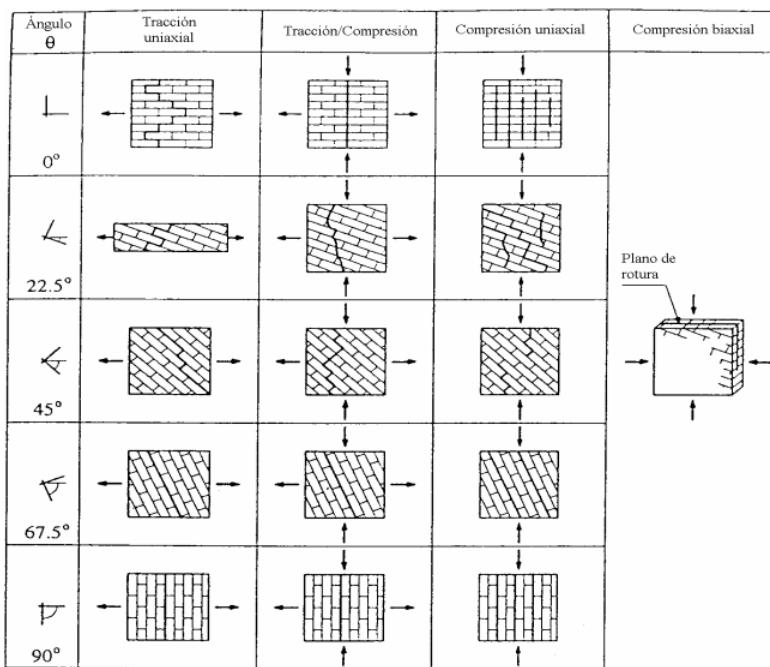


Figura 6.4 – Mecanismos de fisuración en la mampostería.

6.2.4 Comportamiento de la mampostería Post-Pico. Ablandamiento o “softening”.

El ablandamiento es un decremento gradual de las propiedades resistentes del material en un punto del sólido sometido a un crecimiento monótono de las deformaciones impuestas (Oller (2001)⁸). Éste es un rasgo característico de los materiales cuasi frágiles tales como ladrillos de arcilla cocida, morteros, materiales cerámicos, rocas u hormigón, los cuales fallan debido a un proceso de progresivo deterioramiento interno por desarrollo de microfisuras en las interfaces de los materiales componentes. El mortero contiene microfisuras debidas a retracción durante el curado y de la presencia de aditivos. En el caso de los ladrillos fabricados de arcilla, éstos contienen defectos y microfisuras debido a retracciones en el proceso de cocción de las piezas. Las tensiones iniciales y las fisuras, así también como las variaciones en las rigideces internas y resistencias, provocan el progresivo crecimiento de fisuras cuando el material está sometido a deformaciones progresivas. Inicialmente las microfisuras son estables, lo que significa que sólo crecerán cuando la carga se incremente. La interconexión entre fisuras y el excesivo desarrollo de alguna de ellas, conduce a la formación de “macrofisuras”. Éstas son inestables, situación que indica que la carga debe decrecer con el fin de evitar un crecimiento incontrolado de éstas. En los ensayos de deformación controlada, el crecimiento de la macrofisura degenera en un ablandamiento y localización de deformaciones (fisuras) en pequeñas zonas, mientras que en el resto de la estructura se desarrolla un proceso de descarga (Oller (1991)⁹, (2001)⁸).

⁸ Oller, S. (2001). *Fractura mecánica – Un enfoque global*. CIMNE-Editiones UPC.

⁹ Oller, S. (1991). *Modelización Numérica de Materiales Frictionales*. Monografía No. 3, Ed. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería. Barcelona.

En vista de la fenomenología descrita, se puede establecer para la simulación numérica del comportamiento constitutivo de un punto de la mampostería, las siguientes reglas básicas:

1. **En el mecanismo de tracción y cortante**, el proceso de ablandamiento puede tratarse como una pérdida de cohesión utilizando un modelo elasto-plástico limitado por la superficie de discontinuidad de Mohr-Coulomb.
2. **En los casos de compresión**, el fenómeno de ablandamiento es altamente dependiente de las condiciones de contorno en la estructura de mampostería, así como de las medidas de sus materiales componentes.

En la Figura 5 puede verse el diagrama característico tensión-desplazamiento para materiales quasi frágiles en el caso de corte puro. A través del análisis de las gráficas $\sigma - \delta$, puede obtenerse la energía de fractura G_f y de aplastamiento G_c , cuya adecuada combinación da la correspondiente disipación por cortante G''_f (ver Oller (1991)⁹) y de ellas resulta el adecuado comportamiento post-pico del material.

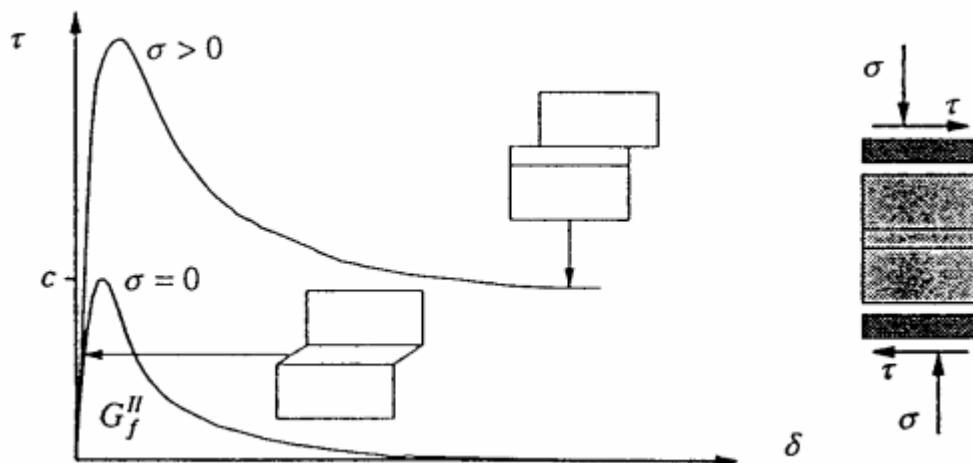


Figura 6.5 – Comportamiento de la mampostería bajo estados de corte puro.

6.3 Distintos métodos para el cálculo de la mampostería.

En este apartado se hace una rápida mención de las familias de métodos basados en elementos finitos, que se utilizan para el cálculo del comportamiento mecánico de la mampostería. También existe una forma de calcular la mampostería mediante modelos aproximados de barras, donde el ladrillo se representa mediante una barra mientras que las juntas de mortero están representadas por soportes elásticos en el extremo de barra. Este último tipo de análisis no es normalmente utilizado ya que se aleja de la filosofía de los modelos constitutivos generados a partir de la mecánica de sólidos.

La mampostería es un material que presenta direccionalidad –anisotropía– en sus propiedades debido a que las juntas del mortero actúan como planos de debilidad en el material. En general, la aproximación hacia una modelización numérica puede ser enfocada con “*micromodelos*”, los cuales discretizan de forma detallada la geometría, separando ladrillos y juntas. Por otra parte, existe la posibilidad de hacer un tratamiento con “*macromodelos*” en los cuales se trata a la mampostería como un material compuesto. Dependiendo del nivel de detalle deseado es posible utilizar las siguientes formas de modelización (ver Figura 6.6):

1. **Micromodelización detallada.** Los ladrillos y morteros son representados por elementos finitos de comportamiento continuo, mientras que el comportamiento de la interfase mortero-ladrillo es representada por elementos finitos discontinuos.
2. **Micromodelización simplificada.** En este caso los materiales están representados por elementos de comportamiento continuo, en tanto el comportamiento de las juntas de mortero y la interfase ladrillo-mortero están separadas por discontinuidades.
3. **Macromodelización.** Los ladrillos, mortero e interfase ladrillo-mortero están representados por un mismo elemento finito. Dentro de este tipo de discretización podemos englobar la técnica de homogeneización que se trata en este capítulo.

En *la primera aproximación*, el módulo de Young, el coeficiente de Poisson y, opcionalmente, las propiedades inelásticas de ambos materiales se han de tener en cuenta para cualquier tipo de modelo que se utilice. La interface junta-ladrillo representa una superficie de fisuración potencial con una rigidez ficticia inicial para representar el contacto y evitar la penetración de un material en otro. Esto produce la acción combinada de ladrillo, mortero e interfase. En *la segunda aproximación*, cada junta contiene el mortero y dos interfasas mortero-ladrillo y se unen en una interfase que recoge estos tres elementos con el fin de simplificar el problema sin cambiar la geometría. La mampostería es, por ello, considerada como un conjunto de bloques elásticos separados por superficies potenciales de fractura (juntas). La precisión se pierde en el momento que el efecto Poisson del mortero no es tenido en cuenta. La *tercera aproximación* no hace distinción geométrica entre ladrillos y juntas, ya que trata la mampostería como un continuo homogéneo y anisótropo. Ninguna de estas estrategias de modelización puede ser “siempre” preferible por encima de otras, ya que el campo de aplicación es diferente para los micromodelos que para los macromodelos.

Los *miromodelos* son probablemente la mejor herramienta para entender el comportamiento de la mampostería. El provecho de su utilización como aproximación se basa en la posibilidad de consideración de diferentes mecanismos de fallo (fisuración, deslizamiento). Tienen su campo de aplicación en el estudio del comportamiento local de detalles estructurales de mampostería como estudio del comportamiento real de la interfase (discontinuidades en la estructura). Este tipo de discontinuidades generalmente son determinantes en el comportamiento global de las estructuras de mampostería. Este tipo de modelización aplica una notable discretización en elementos, lo que comporta un coste computacional muy alto respecto a la escala para la que se utiliza.

Los *macromodelos* son aplicables cuando la estructura está compuesta por muros con dimensiones lo suficientemente grandes que hacen que las tensiones a través y a lo largo de los elementos sean esencialmente uniformes y de los cuales sólo se requiere el conocimiento del comportamiento de conjunto. Ejemplos de este tipo de aproximación se encuentran en las formulaciones basadas en la teoría de mezclas y en la teoría de homogeneización. Evidentemente, la macro-modelización es mucho más práctica debido al reducido tiempo y memoria requerida –desde el punto de vista de la computación– así como una mayor faci-

lidad en la generación de malla. Este tipo de modelización tiene mayor valor cuando el compromiso entre precisión y eficiencia es necesario.

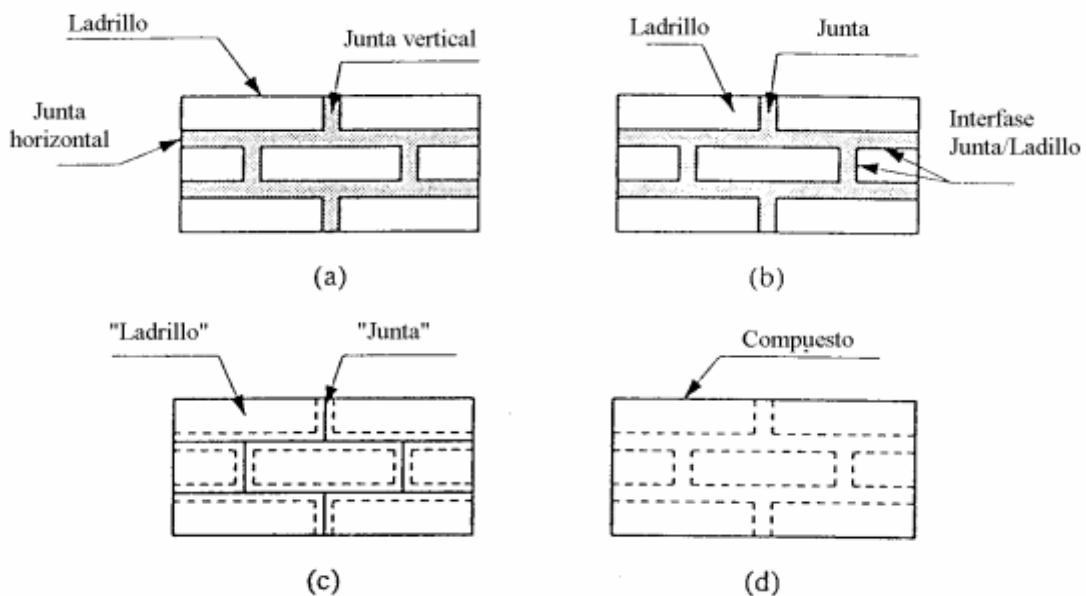


Figura 6.6 – Diferentes estrategias de modelización de la mampostería: (a) Mampostería simple; (b) Micromodelo; (c) Micromodelo simplificado; (d) Macromodelo.

Tanto los “*micromodelos*” como los “*macromodelos*” de estructuras de mampostería exigen una descripción de los materiales a través de experimentación. Sin embargo, las propiedades de la mampostería están influenciadas por un gran número de factores como las propiedades intrínsecas del ladrillo y el mortero, la calidad de la mano de obra, el grado de curado, desarrollo, edad etc.

6.4 Modelo constitutivo basado en un caso particular del concepto de homogeneización.

En este apartado se presenta un modelo constitutivo no lineal, basado en una técnica de “promedios”, para tratar el comportamiento de la mampostería, basado en una formulación particular de la teoría de homogeneización. El objetivo es presentar un material homogeneizado contenga intrínsecamente las diferentes propiedades de la mampostería tanto geométricas como mecánicas a partir de la definición básica de los materiales componentes (ladrillo y mortero). El modelo homogeneizado que de aquí resulta permite reducir considerablemente la discretización de la malla de elementos finitos, puesto que no es necesario la discretización detallada (ladrillo-junta) clásica que se haría utilizando un micromodelo, obteniéndose así un ahorro de coste de cálculo.

6.4.1 Modelo constitutivo.

El modelo se basa en describir el comportamiento promedio de una “*celda básica*” representativa en delante de un punto de la mampostería (Figura 7), a partir de un análisis detallado de las formas o modos de comportamiento de dicha “*celda*” bajo diferentes estados de carga. En la Figura 7 se indica la notación empleada para identificar las dimensiones con las que queda caracterizado el elemento.

Entre las hipótesis básicas que se imponen para sustentar la formulación hay que destacar dos principalmente:

1. La geometría de un muro de mampostería permite utilizar la hipótesis de tensión plana, siempre que la carga esté en el plano de la estructura.
2. Dada la disposición de los ladrillos y de las juntas de mortero se acepta el comportamiento ortotropo del conjunto.

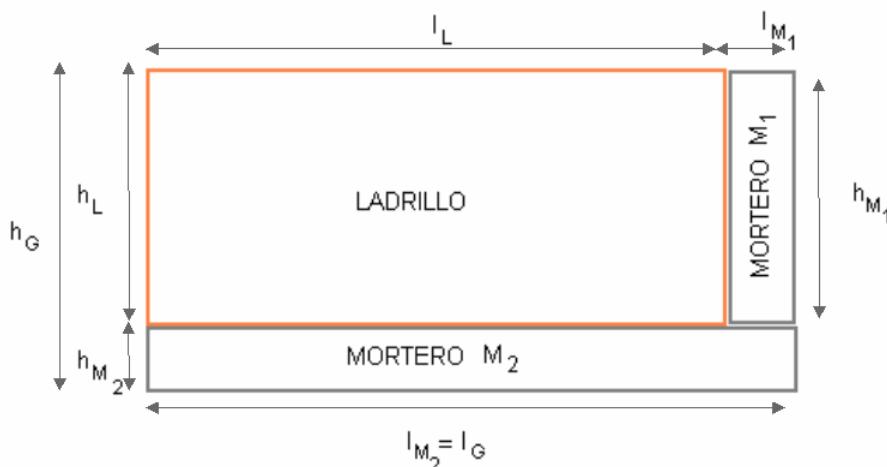
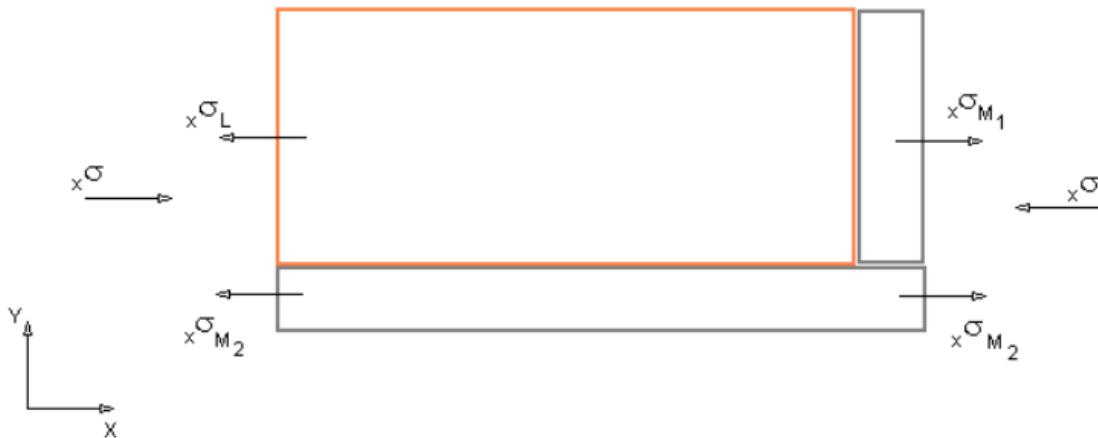


Figura 6.7 – Notación empleada en las dimensiones de los elementos componentes de la “*celda*” básica.

A continuación se formula las ecuaciones que gobiernan cada uno de los modos de deformación de una “*celda*” básica de mampostería. En lo sucesivo es necesario tener en cuenta que el índice “*L*” representa el Ladrillo, el “*M1*” el mortero vertical, “*M2*” el mortero horizontal y “*G*” las medidas globales del conjunto –homogeneizado– o celda básica.

6.4.1.1 Ecuaciones del “*Modo 1*”.

Se establece como “*Modo 1*” de comportamiento para la celda, el correspondiente al estado de tracción-compresión según el eje “*x*” de la Figura 6.8.

Figura 6.8 – Representación del *Modo 1* de comportamiento de la celda.

- **Condición de equilibrio en “*Modo P*”.**

Considerando un espesor uniforme $t = cte.$ para toda la celda, se formulan las siguientes ecuaciones de equilibrio,

$$\begin{aligned} {}_x\sigma \cdot h_G &= {}_x\sigma_L \cdot h_L + {}_x\sigma_{M_2} \cdot h_{M_2} = {}_x\sigma_{M_1} \cdot h_{M_1} + {}_x\sigma_{M_2} \cdot h_{M_2} \\ h_{M_1} &= h_L \Rightarrow {}_x\sigma_L \equiv {}_x\sigma_{M_1} \\ \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} {}_x\sigma = {}_x\sigma_L \cdot \frac{h_L}{h_G} + {}_x\sigma_{M_1} \cdot \frac{h_{M_1}}{h_G} \\ {}_x\sigma = {}_x\sigma_{M_1} \cdot \frac{h_{M_1}}{h_G} + {}_x\sigma_{M_2} \cdot \frac{h_{M_2}}{h_G} \end{array} \right. \end{aligned} \quad (6.1)$$

donde ${}_i\sigma_j$ representa el estado tensional homogéneo en la dirección “ i ” del material componente “ j ” y h_i representa la altura del material componente “ i ”.

- **Condición de compatibilidad en “*Modo P*”.**

Observando la Figura 6.8 se formulan las siguientes ecuaciones de compatibilidad,

$$\left\{ \begin{array}{l} {}_x\dot{\epsilon}_G \cdot l_G = {}_x\dot{\epsilon}_{M_2} \cdot l_{M_2} \\ {}_x\dot{\epsilon}_G \cdot l_G = {}_x\dot{\epsilon}_L \cdot l_L + {}_x\dot{\epsilon}_{M_1} \cdot l_{M_1} \end{array} \right. \quad (6.2)$$

donde ${}_i\epsilon_j$ representa la deformación homogénea en la dirección “ i ” del material componente “ j ”; l_i representa la longitud del material componente “ i ”.

- **Ecuación constitutiva en “*Modo P*”.**

Para cada material componente de la “celda” básica puede escribirse la siguiente ley constitutiva

$$\begin{aligned}
 {}_x\dot{\sigma}_i &= {}_xE_i(\omega_i) \cdot ({}_x\dot{\varepsilon}_i - {}_x\dot{\varepsilon}_i^p) \\
 {}_x\dot{\varepsilon}_i &= \frac{{}_x\dot{\sigma}_i}{{}_xE_i(\omega_i)} + {}_x\dot{\varepsilon}_i^p
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

En ésta última ecuación puede observarse que el módulo de Young depende del parámetro de daño ω_i , debido a que el módulo de elasticidad se degrada en el momento que se deja la rama elástica.

- Determinación de las tensiones en cada componente.**

Sustituyendo la ecuación (6.1) en la (6.3) se obtiene la deformación total del mortero M_2 . Esto es,

$$\begin{aligned}
 {}_x\sigma_{M_2} &= {}_x\sigma \cdot \frac{h_G}{h_{M_2}} - {}_x\sigma_L \cdot \frac{h_L}{h_{M_2}} \Rightarrow {}_x\dot{\sigma}_{M_2} = {}_x\dot{\sigma} \cdot \frac{h_G}{h_{M_2}} - {}_x\dot{\sigma}_L \cdot \frac{h_L}{h_{M_2}} \\
 {}_x\dot{\varepsilon}_{M_2} &= \left[\frac{{}_x\dot{\sigma}}{{}_xE_{M_2}} \cdot \frac{h_G}{h_{M_2}} - \frac{{}_x\dot{\sigma}_L}{{}_xE_{M_2}} \cdot \frac{h_L}{h_{M_2}} \right] + {}_x\dot{\varepsilon}_{M_2}^p
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Y sustituyendo ésta última y la ecuación (6.3) en la expresión (6.2), resulta la deformación global expresada en dos formas distintas,

$$\begin{aligned}
 {}_x\dot{\varepsilon}_G \cdot l_G &= \frac{{}_x\dot{\sigma}}{{}_xE_{M_2}} \cdot \frac{h_G}{h_{M_2}} \cdot l_{M_2} - \frac{{}_x\dot{\sigma}_L}{{}_xE_{M_2}} \cdot \frac{h_L}{h_{M_2}} \cdot l_{M_2} + {}_x\dot{\varepsilon}_{M_2}^p \cdot l_{M_2} \\
 {}_x\dot{\varepsilon}_G \cdot l_G &= \underbrace{\frac{{}_x\dot{\sigma}_L}{{}_xE_L} \cdot l_L + {}_x\dot{\varepsilon}_L^p \cdot l_L}_{{}_x\dot{\varepsilon}_L \cdot l_L} + \underbrace{\frac{{}_x\dot{\sigma}_L}{{}_xE_{M_1}} \cdot l_{M_1} + {}_x\dot{\varepsilon}_{M_1}^p \cdot l_{M_1}}_{{}_x\dot{\varepsilon}_{M_1} \cdot l_{M_1}}
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Igualando estas dos últimas, se obtiene la variación temporal de la tensión en el ladrillo

$$\frac{{}_x\dot{\sigma}}{{}_xE_{M_2}} \cdot \frac{h_G}{h_{M_2}} \cdot l_{M_2} + {}_x\dot{\varepsilon}_{M_2}^p \cdot l_{M_2} - {}_x\dot{\varepsilon}_L^p \cdot l_L - {}_x\dot{\varepsilon}_{M_1}^p \cdot l_{M_1} = \frac{{}_x\dot{\sigma}_L}{{}_xE_L} \cdot l_L + \frac{{}_x\dot{\sigma}_L}{{}_xE_{M_1}} \cdot l_{M_1} + \frac{{}_x\dot{\sigma}}{{}_xE_{M_2}} \cdot \frac{h_L}{h_{M_2}} \cdot l_{M_2}$$

$$\begin{aligned}
 {}_x\dot{\sigma}_L &= \frac{{}_xE_L \cdot {}_xE_{M_1} \cdot {}_xE_{M_2} \cdot h_{M_2}}{{}_xE_{M_1} \cdot {}_xE_{M_2} \cdot h_{M_2} \cdot l_L + {}_xE_L \cdot {}_xE_{M_2} \cdot h_{M_2} \cdot l_{M_2} + {}_xE_L \cdot {}_xE_{M_1} \cdot h_{M_2} \cdot l_{M_1}} \\
 &\cdot \left[\frac{{}_x\dot{\sigma}}{{}_xE_{M_2}} \cdot \frac{h_G}{h_{M_2}} \cdot l_{M_2} + {}_x\dot{\varepsilon}_{M_2}^p \cdot l_{M_2} - {}_x\dot{\varepsilon}_L^p \cdot l_L - {}_x\dot{\varepsilon}_{M_1}^p \cdot l_{M_1} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}_x\dot{\sigma}_L &= {}_x\dot{\sigma} \cdot \underbrace{\left({}_xA_L \cdot \frac{l_{M_2}}{{}_xE_{M_2}} \cdot \frac{h_G}{h_{M_2}} \right)}_{{}^x\!B_L} + \underbrace{{}_xA_L \cdot \left({}_x\dot{\varepsilon}_{M_2}^p \cdot l_{M_2} - {}_x\dot{\varepsilon}_L^p \cdot l_L - {}_x\dot{\varepsilon}_{M_1}^p \cdot l_{M_1} \right)}_{{}^x\!C_L} \\
 &\boxed{{}_x\dot{\sigma}_L = {}_x\dot{\sigma} \cdot {}^x\!B_L + {}^x\!C_L \equiv {}_x\dot{\sigma}_{M_1}}
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

A partir de las ecuaciones (6.4) y (6.6) se obtiene la variación temporal de la tensión en el mortero M_2 ,

$$\begin{aligned}
 {}_x\dot{\sigma}_{M_2} &= {}_x\dot{\sigma} \cdot \frac{h_G}{h_{M_2}} - {}_x\dot{\sigma}_L \cdot \frac{h_L}{h_{M_2}} = {}_x\dot{\sigma} \cdot \frac{h_G}{h_{M_2}} - {}_x\dot{\sigma}_L \cdot {}^xB_L \cdot \frac{h_L}{h_{M_2}} - {}^x\dot{C}_L \cdot \frac{h_L}{h_{M_2}} \\
 {}_x\dot{\sigma}_{M_2} &= {}_x\dot{\sigma} \cdot \underbrace{\left(\frac{h_G - {}^xB_L \cdot h_L}{h_{M_2}} \right)}_{{}^xB_{M_2}} - \underbrace{{}^x\dot{C}_L \cdot \frac{h_L}{h_{M_2}}}_{{}^x\dot{C}_{M_2}} \\
 \boxed{{}^x\dot{\sigma}_{M_2} = {}_x\dot{\sigma} \cdot {}^xB_{M_2} + {}^x\dot{C}_{M_2}}
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

- **Ley constitutiva global para el “Modo 1”.**

A partir de la segunda ecuación de la expresión (6.5) se obtiene la deformación global para la mampostería en “Modo 1”

$$\begin{aligned}
 {}_x\dot{\epsilon}_G &= \frac{{}^x\dot{\sigma}_L}{{}_xE_L} \cdot \frac{l_L}{l_G} + {}_x\dot{\epsilon}_L^p \cdot \frac{l_L}{l_G} + \frac{{}^x\dot{\sigma}_L}{{}_xE_{M_1}} \cdot \frac{l_{M_1}}{l_G} + {}_x\dot{\epsilon}_{M_1}^p \cdot \frac{l_{M_1}}{l_G} \\
 {}_x\dot{\epsilon}_G &= {}_x\dot{\sigma}_L \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{{}_xE_L} \cdot \frac{l_L}{l_G} + \frac{1}{{}_xE_{M_1}} \cdot \frac{l_{M_1}}{l_G} \right)}_{{}^xD} + \underbrace{{}^x\dot{\epsilon}_L^p \cdot \frac{l_L}{l_G} + {}_x\dot{\epsilon}_{M_1}^p \cdot \frac{l_{M_1}}{l_G}}_{{}^x\dot{E}}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo ${}_x\dot{\sigma}_L$ por su expresión (Ecuación (6.6)), resulta la expresión de la deformación plástica y el módulo de elasticidad correspondiente al “Modo 1” de deformación de la mampostería, en función de las componentes geométricas y mecánicas de la “celda”:

$$\begin{aligned}
 {}_x\dot{\epsilon}_G &= \left({}_x\dot{\sigma} \cdot {}^xB_L + {}^x\dot{C}_L \right) \cdot {}^xD + {}^x\dot{E} \\
 {}_x\dot{\epsilon}_G &= \left({}_x\dot{\sigma} \cdot {}^xB_L \cdot {}^xD \right) + \left({}^x\dot{C}_L \cdot {}^xD + {}^x\dot{E} \right)
 \end{aligned}$$

Denominando $\frac{1}{{}_xE_G} = {}^xB_L \cdot {}^xD$ y ${}_x\dot{\epsilon}_G^p = {}^x\dot{C}_L \cdot {}^xD + {}^x\dot{E}$

Resulta:

$$\boxed{{}_x\dot{\epsilon}_G = \underbrace{\frac{{}^x\dot{\sigma}}{{}_xE_G}}_{{}^x\dot{\epsilon}_G^e} + {}_x\dot{\epsilon}_G^p} \tag{6.8}$$

6.4.1.2 Ecuaciones del “Modo 2”.

Se establece como “Modo 2” de comportamiento de la celda, el correspondiente al estado de tracción-compresión según el eje “y” de la Figura 9.

Siguiendo un procedimiento idéntico al realizado para la obtención de las ecuaciones del “Modo 1” y manteniendo las mismas hipótesis básicas, resultan las ecuaciones en la dirección “y” de la celda.

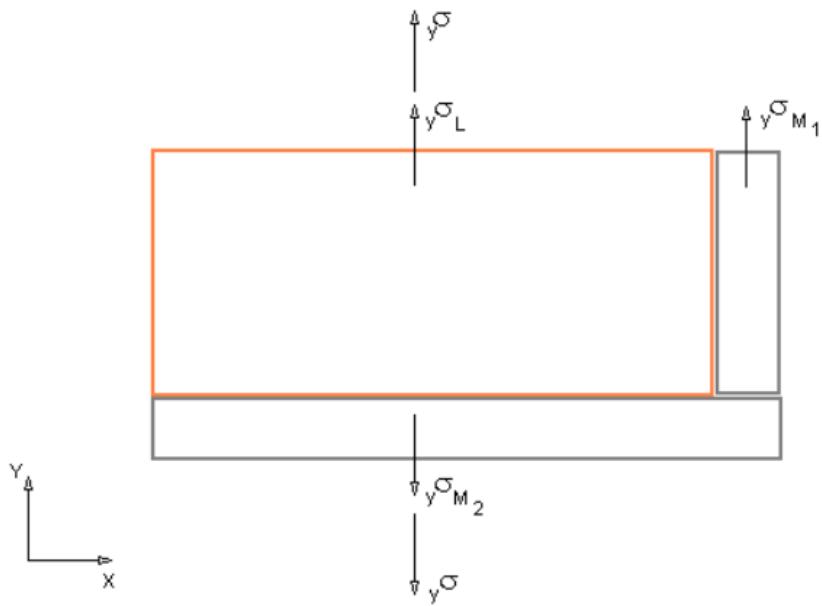


Figura 6.9 – Representación del *Modo 2* de comportamiento de la celda.

- **Condición de equilibrio en “*Modo 2*”.**

Recordando que la celda tiene un espesor uniforme $t = cte.$, se obtiene las siguientes ecuaciones de equilibrio en la dirección “ y ”,

$$_y\sigma \cdot l_G = _y\sigma_L \cdot l_L + _y\sigma_{M_1} \cdot l_{M_1} = _y\sigma_{M_2} \cdot l_{M_2}$$

$$l_{M_2} = l_G \Rightarrow _y\sigma \equiv _y\sigma_{M_2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} {}_y\sigma = {}_y\sigma_L \cdot \frac{l_L}{l_G} + {}_y\sigma_{M_1} \cdot \frac{l_{M_1}}{l_G} \\ {}_y\sigma = {}_y\sigma_{M_2} \end{cases} \quad (6.9)$$

donde ${}_i\sigma_j$ representa el estado tensional homogéneo en la dirección “ j ” del material componente “ i ”, y l_i representa la longitud del material componente “ i ”.

- **Condición de compatibilidad en “*Modo 2*”.**

A partir de la celda de la Figura 6.9 se formulan las siguientes ecuaciones de compatibilidad,

$$\begin{cases} {}_y\dot{\varepsilon}_G \cdot h_G = {}_y\dot{\varepsilon}_L \cdot h_L + {}_y\dot{\varepsilon}_{M_2} \cdot h_{M_2} \\ {}_y\dot{\varepsilon}_G \cdot h_G = {}_y\dot{\varepsilon}_{M_1} \cdot h_{M_1} + {}_y\dot{\varepsilon}_{M_2} \cdot h_{M_2} \end{cases} \quad (6.10)$$

donde ${}_i \varepsilon_j$ representa la deformación homogénea en la dirección “ i ” del material componente “ j ” y h_i representa la altura del material componente “ i ”.

- **Ecuación constitutiva en “Modo 2”.**

A continuación se escribe la ecuación constitutiva general para cada componente de la “celda” básica

$${}_y \dot{\sigma}_i = {}_y E_i(\omega_i) \cdot ({}_y \dot{\varepsilon}_i - {}_y \dot{\varepsilon}_i^p) \quad (6.11)$$

$${}_y \dot{\varepsilon}_i = \frac{{}_y \dot{\sigma}_i}{{}_y E_i(\omega_i)} + {}_y \dot{\varepsilon}_i^p$$

Al igual que en el modo anterior, se considera el modulo elástico en la dirección Y, susceptible de sufrir degradación. Esto se consigue a través de la variable de daño ω_i .

- **Determinación de las tensiones en cada componente.**

Sustituyendo la ecuación (6.9) en la (6.11), se obtiene la deformación total de las filas de mortero M_1 y M_2 . Esto es,

$$\begin{aligned} {}_y \sigma_{M_1} &= {}_y \sigma \cdot \frac{l_G}{l_{M_1}} - {}_y \sigma_L \cdot \frac{l_L}{l_{M_1}} \Rightarrow {}_y \dot{\sigma}_{M_1} = {}_y \dot{\sigma} \cdot \frac{l_G}{l_{M_1}} - {}_y \dot{\sigma}_L \cdot \frac{l_L}{l_{M_1}} \\ {}_y \dot{\varepsilon}_{M_1} &= \left[\frac{{}_y \dot{\sigma}}{{}_y E_{M_1}} \cdot \frac{l_G}{l_{M_1}} - \frac{{}_y \dot{\sigma}_L}{{}_y E_{M_1}} \cdot \frac{l_L}{l_{M_1}} \right] + {}_y \dot{\varepsilon}_{M_1}^p \\ {}_y \dot{\varepsilon}_{M_2} &= \left[\frac{{}_y \dot{\sigma}_{M_2}}{{}_y E_{M_2}} \right] + {}_y \dot{\varepsilon}_{M_2}^p = \left[\frac{{}_y \dot{\sigma}}{{}_y E_{M_2}} \right] + {}_y \dot{\varepsilon}_{M_2}^p \end{aligned} \quad (6.12)$$

Sustituyendo éstas últimas en las ecuaciones (6.10), resulta la expresión de la deformación global en las dos formas siguientes,

$$\begin{aligned} {}_y \dot{\varepsilon}_G \cdot h_G &= {}_y \dot{\varepsilon}_L \cdot h_L + {}_y \dot{\varepsilon}_{M_2} \cdot h_{M_2} = \left(\frac{{}_y \dot{\sigma}_L}{{}_y E_L} + {}_y \dot{\varepsilon}_L^p \right) \cdot h_L + \left(\frac{{}_y \dot{\sigma}}{{}_y E_{M_2}} + {}_y \dot{\varepsilon}_{M_2}^p \right) \cdot h_{M_2} \\ {}_y \dot{\varepsilon}_G \cdot h_G &= {}_y \dot{\varepsilon}_{M_1} \cdot h_{M_1} + {}_y \dot{\varepsilon}_{M_2} \cdot h_{M_2} = \left(\frac{{}_y \dot{\sigma}}{{}_y E_{M_1}} \cdot \frac{l_G}{l_{M_1}} - \frac{{}_y \dot{\sigma}_L}{{}_y E_{M_1}} \cdot \frac{l_L}{l_{M_1}} + {}_y \dot{\varepsilon}_{M_1}^p \right) \cdot h_{M_1} + \left(\frac{{}_y \dot{\sigma}}{{}_y E_{M_2}} + {}_y \dot{\varepsilon}_{M_2}^p \right) \cdot h_{M_2} \end{aligned}$$

Igualando estas dos últimas, se obtiene la variación temporal de la tensión en el ladrillo

$$\begin{aligned} {}_y \dot{\sigma} \cdot \frac{l_G}{{}_y E_{M_1} \cdot l_{M_1}} \cdot h_{M_1} - {}_y \dot{\sigma} \cdot h_{M_2} + {}_y \dot{\sigma} \cdot h_{M_2} - {}_y \dot{\epsilon}_L^P \cdot h_L - {}_y \dot{\epsilon}_{M_2}^P \cdot h_{M_2} + {}_y \dot{\epsilon}_{M_1}^P \cdot h_{M_1} + {}_y \dot{\epsilon}_{M_2}^P \cdot h_{M_2} = \\ = \frac{{}_y \dot{\sigma}_L}{{}_y E_L} \cdot h_L + {}_y \dot{\sigma}_L \cdot \frac{l_L}{{}_y E_{M_1} \cdot l_{M_1}} \cdot h_{M_1} \end{aligned}$$

$${}_y \dot{\sigma} \cdot \left(\frac{l_G}{{}_y E_{M_1} \cdot l_{M_1}} \cdot h_{M_1} - \frac{h_{M_2}}{{}_y E_{M_2}} + \frac{h_{M_2}}{{}_y E_{M_2}} \right) - {}_y \dot{\epsilon}_L^P \cdot h_L + {}_y \dot{\epsilon}_{M_1}^P \cdot h_{M_1} = {}_y \dot{\sigma}_L \cdot \left(\frac{h_L}{{}_y E_L} + \frac{l_L}{{}_y E_{M_1} \cdot l_{M_1}} \cdot h_{M_1} \right)$$

$${}_y \dot{\sigma}_L = \underbrace{\left(\frac{{}_y E_L \cdot {}_y E_{M_1} \cdot l_{M_1}}{{}_y E_L \cdot l_{M_1} \cdot h_L + {}_y E_L \cdot l_L \cdot h_{M_1}} \right)}_{{}^y A_L} \cdot \left[\left(\frac{l_G}{{}_y E_{M_1} \cdot l_{M_1}} \cdot h_{M_1} \right) \cdot {}_y \dot{\sigma} - {}_y \dot{\epsilon}_L^P \cdot h_L + {}_y \dot{\epsilon}_{M_1}^P \cdot h_{M_1} \right]$$

$${}_y \dot{\sigma}_L = {}_y \dot{\sigma} \cdot \underbrace{\left({}^y A \cdot \frac{l_G \cdot h_{M_1}}{{}_y E_{M_1} \cdot l_{M_1}} \right)}_{{}^y B_L} + \underbrace{{}^y A \cdot \left(- {}_y \dot{\epsilon}_L^P \cdot h_L + {}_y \dot{\epsilon}_{M_1}^P \cdot h_{M_1} \right)}_{{}^y \dot{C}_L}$$

$$\boxed{{}_y \dot{\sigma}_L = {}_y \dot{\sigma} \cdot {}^y B_L + {}^y \dot{C}_L}$$

A partir de la tensión en el ladrillo y de la ecuación (6.12), se obtiene la tensión en el mortero M_1 ,

$$\begin{aligned} {}_y \dot{\sigma}_{M_1} &= {}_y \dot{\sigma} \cdot \frac{l_G}{l_{M_1}} - {}_y \dot{\sigma}_L \cdot \frac{l_L}{l_{M_1}} = {}_y \dot{\sigma} \cdot \frac{l_G}{l_{M_1}} - \left({}_y \dot{\sigma} \cdot {}^y B_L + {}^y \dot{C}_L \right) \cdot \frac{l_L}{l_{M_1}} \\ {}_y \dot{\sigma}_{M_1} &= {}_y \dot{\sigma} \cdot \underbrace{\left(\frac{l_G - {}^y B_L \cdot l_L}{l_{M_1}} \right)}_{{}^y B_{M_1}} - \underbrace{{}^y \dot{C}_L \cdot \frac{l_L}{l_{M_1}}}_{{}^y \dot{C}_{M_1}} \end{aligned}$$

$$\boxed{{}_y \dot{\sigma}_{M_1} = {}_x \dot{\sigma} \cdot {}^y B_{M_1} - {}^y \dot{C}_{M_1}}$$

La tensión en el mortero M_2 , resulta directamente de la condición impuesta en la ecuación (9), esto es,

$$\boxed{{}_y \dot{\sigma}_{M_2} = {}_y \dot{\sigma}}$$

- **Ley constitutiva global para el “Modo 2”.**

A partir de la ecuación de deformación global, previamente descrita y de la tensión en el ladrillo y en el mortero M_2 , se obtiene,

$${}_y\dot{\varepsilon}_G = {}_y\dot{\varepsilon}_L \cdot \frac{h_L}{h_G} + {}_y\dot{\varepsilon}_{M_2} \cdot \frac{h_{M_2}}{h_G}$$

$${}_y\dot{\varepsilon}_G = \left(\frac{{}_y\dot{\sigma}_L}{{}_yE_L} + {}_y\dot{\varepsilon}_L^P \right) \cdot \frac{\dot{h}_L}{h_G} + \left(\frac{{}_y\dot{\sigma}_{M_2}}{{}_yE_{M_2}} + {}_y\dot{\varepsilon}_{M_2}^P \right) \cdot \frac{h_{M_2}}{h_G} = \frac{{}_y\dot{\sigma}_L}{{}_yE_L} \cdot \frac{h_L}{h_G} + {}_y\dot{\varepsilon}_L^P \cdot \frac{h_L}{h_G} + \frac{{}_y\dot{\sigma}_{M_2}}{{}_yE_{M_2}} \cdot \frac{h_{M_2}}{h_G} + {}_y\dot{\varepsilon}_{M_2}^P \cdot \frac{h_{M_2}}{h_G}$$

Sustituyendo en esta la expresión de ${}_y\dot{\sigma}_L$ y ${}_y\dot{\sigma}_{M_2}$ previamente determinada, resulta el cambio temporal de la deformación global –del compuesto– en función del cambio temporal de la tensión aplicada ${}_y\dot{\sigma}$,

$${}_y\dot{\varepsilon}_G = \left({}_y\dot{\sigma} \cdot {}^yB_L + {}^y\dot{C}_L \right) \cdot \frac{h_L}{{}_yE_L \cdot h_G} + \frac{{}_y\dot{\sigma} \cdot h_{M_2}}{{}_yE_{M_2} \cdot h_G} + {}_y\dot{\varepsilon}_L^P \cdot \frac{h_L}{h_G} + {}_y\dot{\varepsilon}_{M_2}^P \cdot \frac{h_{M_2}}{h_G}$$

$${}_y\dot{\varepsilon}_G = {}_y\dot{\sigma} \cdot \underbrace{\left(\frac{{}^yB_L \cdot h_L}{{}_yE_L \cdot h_G} + \frac{h_{M_2}}{{}_yE_{M_2} \cdot h_G} \right)}_{\frac{1}{{}_yE_G}} + \underbrace{{}_y\dot{C}_L \cdot \frac{h_L}{{}_yE_L \cdot h_G} + {}_y\dot{\varepsilon}_L^P \cdot \frac{h_L}{h_G} + {}_y\dot{\varepsilon}_{M_2}^P \cdot \frac{h_{M_2}}{h_G}}_{{}_y\dot{\varepsilon}_G^P}$$

Ordenando este resultado se expresa la ley constitutiva homogeneizada de la celda en la dirección “y”,

Resultando:

$$\boxed{{}_y\dot{\varepsilon}_G = \underbrace{\frac{{}_y\dot{\sigma}}{{}_yE_G}}_{{}_y\dot{\varepsilon}_G^e} + {}_y\dot{\varepsilon}_G^P} \quad (6.13)$$

6.4.1.3 Ecuaciones del “Modo 3”.

El tercer modo es el que corresponde al modo de deformación provocado por la acción de una tensión tangencial actuando en el plano “x-y” de la “celda” base. En la Figura 6.10 puede verse el elemento discretizado así como la configuración deformada de la “celda”. Cabe mencionar que el bloque de ladrillo y el mortero sufren distorsiones diferentes al tener propiedades mecánicas y geométricas diferentes. Se introduce una distorsión global sobre la celda homogeneizada y se estudia el comportamiento del conjunto y de cada componente y su interrelación.

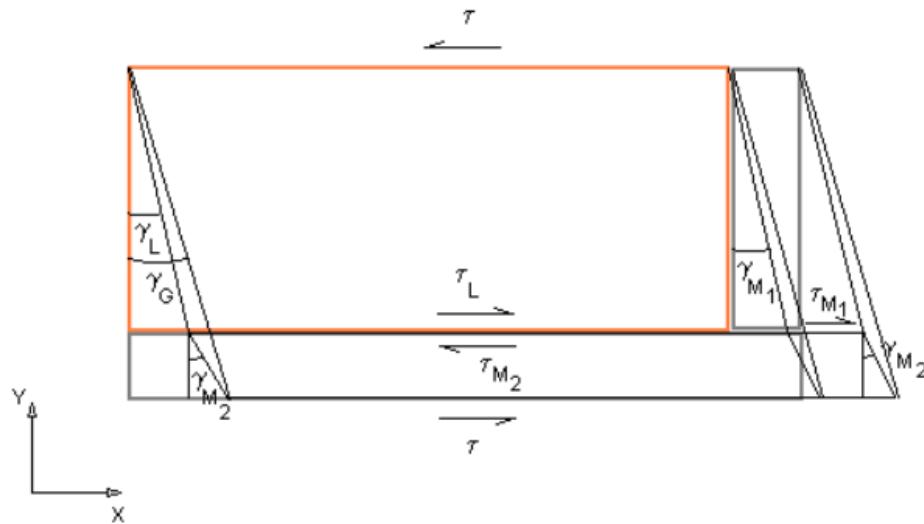


Figura 6.10 – Representación del *Modo 3* de comportamiento de la celda.

Siguiendo el mismo procedimiento que para los dos primeros modos de deformación, se escriben a continuación las siguientes relaciones,

- **Condición de equilibrio en “Modo 3”.**

Observando el estado tensional desarrollado en la “celda”, se pueden escribir las siguientes relaciones de equilibrio,

$$\begin{aligned} \dot{\tau} \cdot l_G &= \dot{\tau}_L \cdot l_L + \dot{\tau}_{M_1} \cdot l_{M_1} = \dot{\tau}_{M_2} \cdot l_{M_2} \quad \Rightarrow \quad \dot{\tau} = \dot{\tau}_L \cdot \frac{l_L}{l_G} + \dot{\tau}_{M_1} \cdot \frac{l_{M_1}}{l_G} = \dot{\tau}_{M_2} \\ \Rightarrow \quad \left. \begin{array}{l} \dot{\tau} = \dot{\tau}_L \cdot \frac{l_L}{l_G} + \dot{\tau}_{M_1} \cdot \frac{l_{M_1}}{l_G} \\ \dot{\tau} = \dot{\tau}_{M_2} \end{array} \right\} & \quad (a) \\ (b) \end{aligned} \quad (6.14)$$

Donde τ_i representa la tensión tangencial en el material componente “ i ” en el plano “ $x-y$ ”.

- **Condición de compatibilidad en “Modo 2”.**

Suponiendo cierto el modo de deformación impuesto a la “celda” en la Figura 6.10, se obtienen las siguientes ecuaciones de compatibilidad cinemática,

$${}_{xy} \dot{\gamma}_{M_1} \cdot h_{M_1} = {}_{xy} \dot{\gamma}_L \cdot h_L \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} {}_{xy} \gamma_{M_1} = {}_{xy} \gamma_L \\ h_{M_1} = h_L \end{cases}$$

Donde ${}_{xy} \gamma_j$ representa la distorsión en el plano “ $x-y$ ” del material, componente “ j ”. Esta compatibilidad de movimientos implica igual distorsión para el ladrillo y el mortero M_j . A partir de esta expresión se obtiene la relación entre la tensión en el ladrillo y el mortero M_j . Esto es,

$${}_{xy}\dot{\gamma}_{M_1}^e = \left[{}_{xy}\dot{\gamma}_{M_1} - {}_{xy}\dot{\gamma}_{M_1}^p \right] = \left[{}_{xy}\dot{\gamma}_L - {}_{xy}\dot{\gamma}_{M_1}^p \right] = \left[({}_{xy}\dot{\gamma}_L^e + {}_{xy}\dot{\gamma}_L^p) - {}_{xy}\dot{\gamma}_{M_1}^p \right]$$

$$\dot{\tau}_{M_1} = {}_{xy}G_{M_1} \cdot {}_{xy}\dot{\gamma}_{M_1}^e = {}_{xy}G_{M_1} \cdot \left(\frac{\dot{\tau}_L}{{}_{xy}G_L} + {}_{xy}\dot{\gamma}_L^p - {}_{xy}\dot{\gamma}_{M_1}^p \right) \quad (6.15)$$

$$\dot{\tau}_{M_1} = \dot{\tau}_L \cdot \frac{{}_{xy}G_{M_1}}{{}_{xy}G_L} + {}_{xy}G_{M_1} \cdot \left({}_{xy}\dot{\gamma}_L^p - {}_{xy}\dot{\gamma}_{M_1}^p \right)$$

• **Determinación de las tensiones en cada componente.**

Sustituyendo la expresión (6.15) en la expresión (6.14)a, se obtiene la variación temporal de la tensión en el ladrillo,

$$\dot{\tau} = \dot{\tau}_L \cdot \frac{l_L}{l_G} + \dot{\tau}_L \cdot \frac{{}_{xy}G_{M_1}}{{}_{xy}G_L} \cdot \frac{l_{M_1}}{l_G} + {}_{xy}G_{M_1} \cdot \frac{l_{M_1}}{{}_{xy}G_L} \left({}_{xy}\dot{\gamma}_L^p - {}_{xy}\dot{\gamma}_{M_1}^p \right) \equiv \dot{\tau}_{M_2}$$

$$\begin{aligned} \dot{\tau} &= \dot{\tau}_L \cdot \left(\frac{l_L}{l_G} + \frac{{}_{xy}G_{M_1}}{{}_{xy}G_L} \cdot \frac{l_{M_1}}{l_G} \right) + {}_{xy}G_{M_1} \cdot \frac{l_{M_1}}{{}_{xy}G_L} \cdot \left({}_{xy}\dot{\gamma}_L^p - {}_{xy}\dot{\gamma}_{M_1}^p \right) \\ \dot{\tau}_L &= \left[\dot{\tau} - \underbrace{{}_{xy}G_{M_1} \cdot \frac{l_{M_1}}{{}_{xy}G_L} \cdot \left({}_{xy}\dot{\gamma}_L^p - {}_{xy}\dot{\gamma}_{M_1}^p \right)}_{{}_{xy}\dot{B}_L} \right] \cdot \underbrace{\frac{{}_{xy}G_L \cdot l_G}{{}_{xy}G_L \cdot l_L + {}_{xy}G_{M_1} \cdot l_{M_1}}}_{{}_{xy}\dot{A}_L} \end{aligned}$$

Cuya expresión compacta queda de la siguiente forma,

$$\boxed{\dot{\tau}_L = \dot{\tau} \cdot {}_{xy}\dot{A}_L - {}_{xy}\dot{B}_L \cdot {}_{xy}\dot{A}_L} \quad (6.16)$$

A partir de la tensión en el ladrillo (6.16) y de la ecuación de equilibrio (6.14)a, se obtiene la tensión en el mortero M_1 ,

$$\dot{\tau}_{M_1} = \dot{\tau} \cdot \frac{l_G}{l_{M_1}} - \dot{\tau}_L \cdot \frac{l_G}{l_{M_1}} = \dot{\tau} \cdot \frac{l_G}{l_{M_1}} - \left(\dot{\tau} \cdot {}_{xy}\dot{A}_L - {}_{xy}\dot{B}_L \cdot {}_{xy}\dot{A}_L \right) \cdot \frac{l_L}{l_{M_1}}$$

$$\dot{\tau}_{M_1} = \dot{\tau} \cdot \underbrace{\left(\frac{l_G}{l_{M_1}} - \frac{{}_{xy}\dot{A}_L \cdot l_L}{l_{M_1}} \right)}_{{}_{xy}\dot{A}_{M_1}} + \underbrace{\frac{{}_{xy}\dot{B}_L \cdot {}_{xy}\dot{A}_L \cdot l_L}{l_{M_1}}}_{- {}_{xy}\dot{B}_{M_1}}$$

Cuya expresión compacta queda de la siguiente forma,

$$\boxed{\dot{\tau}_{M_1} = \dot{\tau} \cdot {}_{xy}\dot{A}_{M_1} - {}_{xy}\dot{B}_{M_1}} \quad (6.17)$$

• **Ley constitutiva para cada componente.**

A partir de las tensiones en cada componente obtenidas para el Modo 3 de deformaciones en el apartado anterior, puede presentarse su ley constitutiva elastoplástica como

$$\dot{\tau}_i = {}_{xy}G_i(\omega_i) \cdot \left({}_{xy}\dot{\gamma}_i - {}_{xy}\dot{\gamma}_i^p \right) \Rightarrow {}_{xy}\dot{\gamma}_i = \frac{\dot{\tau}_i}{{}_{xy}G_i} + {}_{xy}\dot{\gamma}_i^p$$

- **Ley constitutiva global para el “Modo 3”.**

Partiendo de la condición de compatibilidad para toda la celda, y de la ecuación constitutiva de cada componente, se obtiene la ley constitutiva homogeneizada en “Modo 3” para toda la “celda”. Esto es,

$${}_{xy}\dot{\gamma}_G \cdot h_G = ({}_{xy}\dot{\gamma}_L \cdot h_L) + ({}_{xy}\dot{\gamma}_{M_2} \cdot h_{M_2}) = ({}_{xy}\dot{\gamma}_{M_1} \cdot h_{M_1}) + ({}_{xy}\dot{\gamma}_{M_2} \cdot h_{M_2})$$

$${}_{xy}\dot{\gamma}_G = \left({}_{xy}\dot{\gamma}_L \cdot \frac{h_L}{h_G} \right) + \left({}_{xy}\dot{\gamma}_{M_2} \cdot \frac{h_{M_2}}{h_G} \right)$$

Introduciendo en esta expresión las ecuaciones constitutivas de cada componente y las tensiones (6.16) y (6.17), resulta la ecuación constitutiva en “Modo 3” para toda la “celda”.

$${}_{xy}\dot{\gamma}_G = \left(\frac{\dot{\tau}_L}{{}_{xy}G_L} \cdot \frac{h_L}{h_G} + {}_{xy}\dot{\gamma}_L^p \cdot \frac{h_L}{h_G} \right) + \left(\frac{\dot{\tau}_{M_2}}{}_{xy}G_{M_2} \cdot \frac{h_{M_2}}{h_G} + {}_{xy}\dot{\gamma}_{M_2}^p \cdot \frac{h_{M_2}}{h_G} \right)$$

$${}_{xy}\dot{\gamma}_G = \left((\dot{\tau} \cdot {}_{xy}A_L - {}_{xy}\dot{B}_L \cdot {}_{xy}A_L) \cdot \frac{h_L}{{}_{xy}G_L \cdot h_G} + {}_{xy}\dot{\gamma}_L^p \cdot \frac{h_L}{h_G} \right) + \left(\dot{\tau} \cdot \frac{h_{M_2}}{}_{xy}G_{M_2} \cdot h_G + {}_{xy}\dot{\gamma}_{M_2}^p \cdot \frac{h_{M_2}}{h_G} \right)$$

$${}_{xy}\dot{\gamma}_G = \dot{\tau} \cdot \frac{{}_{xy}A_L \cdot h_L}{{}_{xy}G_L \cdot h_G} + \dot{\tau} \cdot \frac{h_{M_2}}{}_{xy}G_{M_2} \cdot h_G - {}_{xy}\dot{B}_L \cdot {}_{xy}A_L \cdot \frac{h_L}{{}_{xy}G_L \cdot h_G} + {}_{xy}\dot{\gamma}_L^p \cdot \frac{h_L}{h_G} + {}_{xy}\dot{\gamma}_{M_2}^p \cdot \frac{h_{M_2}}{h_G}$$

Reordenando los términos, la distorsión global en el material compuesto puede expresarse como,

$$\begin{aligned} {}_{xy}\dot{\gamma}_G &= \dot{\tau} \cdot \underbrace{\left(\frac{{}_{xy}A_L \cdot h_L}{{}_{xy}G_L \cdot h_G} + \frac{h_{M_2}}{}_{xy}G_{M_2} \cdot h_G \right)}_{\frac{1}{{}_{xy}G_G}} + \underbrace{\left(- {}_{xy}\dot{B}_L \cdot {}_{xy}A_L \cdot \frac{h_L}{{}_{xy}G_L \cdot h_G} + {}_{xy}\dot{\gamma}_L^p \cdot \frac{h_L}{h_G} + {}_{xy}\dot{\gamma}_{M_2}^p \cdot \frac{h_{M_2}}{h_G} \right)}_{{}_{xy}\dot{\gamma}_G^p} \end{aligned}$$

Cuya forma compacta puede escribirse como,

$${}_{xy}\dot{\gamma}_G = \dot{\tau} \cdot \frac{1}{{}_{xy}G_G} + {}_{xy}\dot{\gamma}_G^p$$

(6.18)

6.4.1.4 Ecuaciones del “Modo 4”.

El cuarto modo de comportamiento corresponde al campo de deformaciones fuera del plano de cargas (plano “x-y”). Dado que en el modelo se acepta la hipótesis de tensión plana, las deformaciones en el plano “x-z” se deben exclusivamente a deformaciones producidas por efecto Poisson. Así mismo, debido a que no existen acciones tangenciales exteriores asociadas a los planos “x-z” y “y-z” (hipótesis de tensión plana), la resultante de las ten-

siones tangenciales τ_{xy} y τ_{yz} integradas sobre toda la “celda” son nulas y por lo tanto se supondrá que las distorsiones asociadas son también nulas.

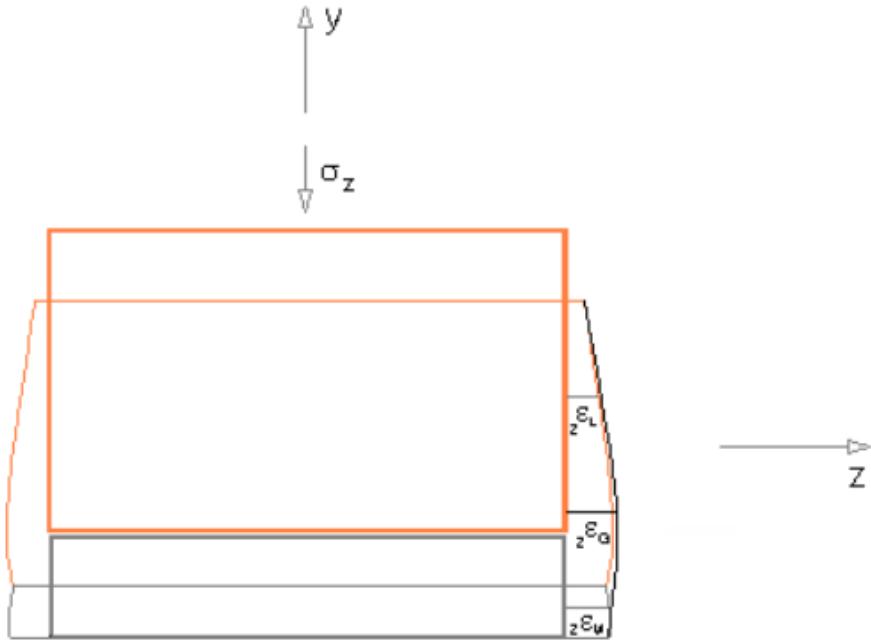


Figura 6.11 – Representación del *Modo 3* de comportamiento de la celda.

En el dibujo de la Figura 6.11 puede observarse que el ladrillo y el mortero presentan deformadas sin continuidad en sus curvaturas debido a las diferentes propiedades mecánicas y geométricas de cada componente. En el modelo homogeneizado que aquí se presenta se ha adoptado como deformada la envolvente de ambas.

A diferencia que la metodología seguida en los modos anteriores, en este caso se ha tomado como punto de partida la expresión del tensor de rigidez secante en el caso de simetría ortotropa y se analizan los términos faltantes que pueden solucionarse con este cuarto modo de deformación.

$$\mathbf{C}^s = \begin{bmatrix} \frac{x E_G \cdot (-1 + yz v_G \cdot zy v_G)}{D} & -\frac{x E_G \cdot (yx v_G + yz v_G \cdot zx v_G)}{D} & -\frac{x E_G \cdot (zx v_G + yx v_G \cdot zy v_G)}{D} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{y E_G \cdot (xy v_G + xz v_G \cdot zy v_G)}{D} & \frac{y E_G \cdot (-1 + xz v_G \cdot zx v_G)}{D} & -\frac{y E_G \cdot (zy v_G + xy v_G \cdot zx v_G)}{D} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{z E_G \cdot (xz v_G + xy v_G \cdot yz v_G)}{D} & -\frac{z E_G \cdot (yz v_G + xz v_G \cdot yx v_G)}{D} & -\frac{z E_G \cdot (-1 + xy v_G \cdot yx v_G)}{D} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_y G_G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_z G_G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_x G_G \end{bmatrix}$$

donde el término del denominador de los elementos de rigidez axial vale según la siguiente expresión $D = -1 + xy v_G \cdot yx v_G + xz v_G \cdot zx v_G + yz v_G \cdot zy v_G + xy v_G \cdot yz v_G \cdot zx v_G + xz v_G \cdot yx v_G \cdot zy v_G$ y los módulos $x E_G$, $y E_G$, $x_y G_G$, son los términos de elasticidad obtenidos para cada uno de los tres modos previamente analizados, ecuaciones (6.8), (6.13), (6.18) respectivamente. Los restantes módulos $z E_G$, $y_z G_G$, $z_x G_G$, se obtendrán a partir una extensión conceptual de toda la formulación hasta aquí desarrollada.

Con este tensor así definido en forma matricial, se escribe la siguiente relación constitutiva global,

$$\vec{\sigma}_G = \mathbf{C}^s \cdot \vec{\epsilon}_G$$

Aislando la componente de $z\vec{\sigma}_G$ del vector $\vec{\sigma}_G$ y aplicando la hipótesis de tensión plana resulta :

$$\sigma_z = -\frac{E_z}{D} \left({}_{xz} v_G + {}_{xy} v_G \cdot {}_{yz} v_G \right)_x \epsilon_G - \frac{E_z}{D} \left({}_{yz} v_G + {}_{xz} v_G \cdot {}_{yx} v_G \right)_y \epsilon_G + \frac{E_z}{D} \left(-1 + {}_{xy} v_G \cdot {}_{yx} v_G \right)_z \epsilon_G = 0$$

$$\sigma_z = \frac{E_z}{D} \left[- \left({}_{xz} v_G + {}_{xy} v_G \cdot {}_{yz} v_G \right)_x \epsilon_G - \left({}_{yz} v_G + {}_{xz} v_G \cdot {}_{yx} v_G \right)_y \epsilon_G + \left(-1 + {}_{xy} v_G \cdot {}_{yx} v_G \right)_z \epsilon_G \right] = 0$$

$$z\epsilon_G = z\epsilon_G^e + z\epsilon_G^p = \frac{\left({}_{xz} v_G + {}_{xy} v_G \cdot {}_{yz} v_G \right)_x \epsilon_G + \left({}_{yz} v_G + {}_{xz} v_G \cdot {}_{yx} v_G \right)_y \epsilon_G}{\left(-1 + {}_{xy} v_G \cdot {}_{yx} v_G \right)}$$

$$z\epsilon_G = z\epsilon_G^e + z\epsilon_G^p = \frac{\left({}_{xz} v_G + {}_{xy} v_G \cdot {}_{yz} v_G \right) \cdot \left({}_x \epsilon_G^e + {}_x \epsilon_G^p \right) + \left({}_{yz} v_G + {}_{xz} v_G \cdot {}_{yx} v_G \right) \cdot \left({}_y \epsilon_G^e + {}_y \epsilon_G^p \right)}{\left(-1 + {}_{xy} v_G \cdot {}_{yx} v_G \right)}$$

A partir de esta expresión y separando las componentes elásticas y plásticas se tienen las deformaciones globales según la dirección “z”,

$$z\epsilon_G^e = \frac{\left({}_{xz} v_G + {}_{xy} v_G \cdot {}_{yz} v_G \right)_x \epsilon_G^e + \left({}_{yz} v_G + {}_{xz} v_G \cdot {}_{yx} v_G \right)_y \epsilon_G^e}{\left(-1 + {}_{xy} v_G \cdot {}_{yx} v_G \right)} \quad (6.19)$$

$$z\epsilon_G^p = \frac{\left({}_{xz} v_G + {}_{xy} v_G \cdot {}_{yz} v_G \right)_x \epsilon_G^p + \left({}_{yz} v_G + {}_{xz} v_G \cdot {}_{yx} v_G \right)_y \epsilon_G^p}{\left(-1 + {}_{xy} v_G \cdot {}_{yx} v_G \right)} \quad (6.20)$$

6.4.1.5 Resumen de los parámetros mecánicos homogenizados para una “celda” en 3-D.

A partir de los desarrollos previos, se han obtenido los valores de los parámetros mecánicos de la mampostería homogeneizada. De las expresiones que se han presentado previamente, puede observarse la sensibilidad de éstas a las propiedades y dimensiones de los elementos componentes de la “celda” (ladrillos y juntas de mortero, Figura 6.12).

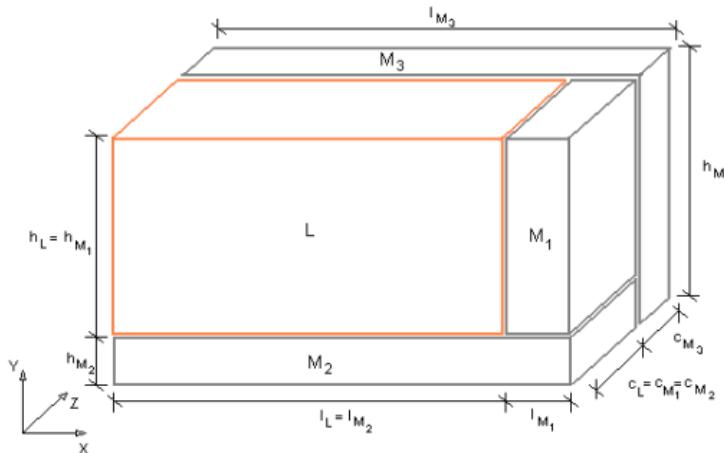


Figura 6.12 – Representación geométrica tridimensional de una celda de mampostería.

A continuación se obtienen las expresiones de los parámetros mecánicos utilizando los desarrollos realizados previamente para cada modo de deformación y en el caso tridimensional se hace una extensión conceptual para la tercera dimensión.

De la expresión (6.8) se obtiene el módulo de elasticidad longitudinal en dirección “x” global,

$$\boxed{{}_x E_G = \frac{1}{{}_x B_L \cdot {}_x D}} \quad \left\{ \begin{array}{l} {}_x D = \frac{l_L}{{}_x E_L \cdot l_G} + \frac{l_{M_1}}{{}_x E_{M_1} \cdot l_G} \quad ; \quad {}_x B_L = \frac{{}_x A_L \cdot l_{M_2} \cdot h_G}{{}_x E_{M_2} \cdot h_{M_2}} \\ {}_x A_L = \frac{{}_x E_L \cdot {}_x E_{M_1} \cdot {}_x E_{M_2} \cdot h_{M_1}}{{}_x E_{M_1} \cdot {}_x E_{M_2} \cdot h_{M_2} \cdot l_L + {}_x E_L \cdot {}_x E_{M_2} \cdot h_{M_2} \cdot l_{M_1} + {}_x E_L \cdot {}_x E_{M_1} \cdot h_L \cdot l_{M_2}} \end{array} \right. \quad (6.21)$$

De la expresión (6.13) se obtiene el módulo de elasticidad longitudinal en dirección “y” global,

$$\boxed{{}_y E_G = \frac{1}{{}_y B_L \cdot h_L}} \quad \left\{ \begin{array}{l} {}_y B_L = \frac{{}_y A_L \cdot l_G \cdot h_{M_1}}{{}_y E_{M_1} \cdot h_{M_1}} \quad ; \quad {}_y A_L = \frac{{}_y E_L \cdot {}_y E_{M_1} \cdot l_{M_1}}{{}_x E_{M_1} \cdot l_{M_1} \cdot h_L + {}_x E_L \cdot l_L \cdot h_{M_1}} \end{array} \right. \quad (6.22)$$

Para la obtención de ${}_z E_G$ se hace una extrapolación conceptual del desarrollo realizado para el “Modo 1”. Así el módulo de elasticidad longitudinal en dirección “z” global se escribe,

$$\boxed{{}_z E_G = \frac{1}{{}_z B_L \cdot {}_z D}} \quad \left\{ \begin{array}{l} {}_z D = \frac{c_L}{{}_z E_L \cdot c_G} + \frac{c_{M_1}}{{}_z E_{M_1} \cdot c_G} \quad ; \quad {}_z B_L = \frac{{}_z A_L \cdot c_{M_2} \cdot h_G}{{}_z E_{M_2} \cdot h_{M_2}} \\ {}_z A_L = \frac{{}_x E_L \cdot {}_x E_{M_1} \cdot {}_x E_{M_2} \cdot h_{M_1}}{{}_x E_{M_1} \cdot {}_x E_{M_2} \cdot h_{M_2} \cdot c_L + {}_x E_L \cdot {}_x E_{M_2} \cdot h_{M_2} \cdot c_{M_3} + {}_x E_L \cdot {}_x E_{M_1} \cdot h_L \cdot c_{M_2}} \end{array} \right. \quad (6.23)$$

De la expresión (6.18) se obtiene el módulo elástico transversal en el plano “xy” global:

$$\boxed{\frac{1}{_{xy}G_G = \frac{_{xy}A_L \cdot h_L}{_{xy}G_L \cdot h_G + \frac{h_{M_2}}{_{xy}G_{M_2} \cdot h_G}}}} \quad \left\{ \begin{array}{l} {}^{xy}A_L = \frac{{}_{xy}G_L \cdot l_G}{{}_{xy}G_L \cdot l_L + {}_{xy}G_{M_1} \cdot l_{M_1}} \end{array} \right. \quad (6.24)$$

Procediendo de igual forma para el resto de direcciones se obtienen:

Módulo de elasticidad transversal en el plano “yx” global

$$\boxed{\frac{1}{_{yx}G_G = \frac{_{yx}A_L \cdot l_L}{_{yx}G_L \cdot l_G + \frac{l_{M_2}}{_{yx}G_{M_2} \cdot l_G}}}} \quad \left\{ \begin{array}{l} {}^{yx}A_L = \frac{{}_{yx}G_L \cdot h_G}{{}_{xy}G_L \cdot h_L + {}_{xy}G_{M_1} \cdot h_{M_2}} \end{array} \right. \quad (6.25)$$

Módulo de elasticidad transversal en el plano “xz” global

$$\boxed{\frac{1}{_{xz}G_G = \frac{_{xz}A_L \cdot c_L}{_{xz}G_L \cdot c_G + \frac{c_{M_3}}{_{xz}G_{M_3} \cdot c_G}}}} \quad \left\{ \begin{array}{l} {}^{xz}A_L = \frac{{}_{xz}G_L \cdot l_G}{{}_{xz}G_L \cdot l_L + {}_{xz}G_{M_1} \cdot l_{M_1}} \end{array} \right. \quad (6.26)$$

Módulo de elasticidad transversal en el plano “zx” global

$$\boxed{\frac{1}{_{zx}G_G = \frac{_{zx}A_L \cdot l_L}{_{zx}G_L \cdot l_G + \frac{l_{M_1}}{_{zx}G_{M_1} \cdot l_G}}}} \quad \left\{ \begin{array}{l} {}^{zx}A_L = \frac{{}_{zx}G_L \cdot c_G}{{}_{zx}G_L \cdot c_L + {}_{xz}G_{M_3} \cdot c_{M_3}} \end{array} \right. \quad (6.27)$$

Módulo de elasticidad transversal en el plano “zy” global

$$\boxed{\frac{1}{_{zy}G_G = \frac{_{zy}A_L \cdot h_L}{_{zy}G_L \cdot h_G + \frac{h_{M_2}}{_{zy}G_{M_2} \cdot h_G}}}} \quad \left\{ \begin{array}{l} {}^{zy}A_L = \frac{{}_{zy}G_L \cdot c_G}{{}_{zy}G_L \cdot c_L + {}_{xy}G_{M_3} \cdot c_{M_3}} \end{array} \right. \quad (6.28)$$

Módulo de elasticidad transversal en el plano “yz” global

$$\boxed{\frac{1}{_{yz}G_G = \frac{_{yz}A_L \cdot c_L}{_{yz}G_L \cdot c_G + \frac{c_{M_3}}{_{yz}G_{M_3} \cdot c_G}}}} \quad \left\{ \begin{array}{l} {}^{yz}A_L = \frac{{}_{yz}G_L \cdot h_G}{{}_{yz}G_L \cdot h_L + {}_{yz}G_{M_2} \cdot c_{M_2}} \end{array} \right. \quad (6.29)$$

Dado que los componentes que integran la celda básica están orientados según las direcciones principales, se deben cumplir las siguientes relaciones de elasticidad,

$${}_{xy}G_G = \alpha_{xy} \cdot \sqrt{{}_x E_G \cdot {}_y E_G} \quad {}_{yx}G_G = \alpha_{yx} \cdot \sqrt{{}_y E_G \cdot {}_x E_G}$$

$${}_{yz}G_G = \alpha_{yz} \cdot \sqrt{{}_y E_G \cdot {}_z E_G} \quad {}_{zy}G_G = \alpha_{zy} \cdot \sqrt{{}_z E_G \cdot {}_y E_G}$$

$${}_{xz}G_G = \alpha_{xz} \cdot \sqrt{{}_x E_G \cdot {}_z E_G} \quad {}_{zx}G_G = \alpha_{zx} \cdot \sqrt{{}_z E_G \cdot {}_x E_G}$$

que para el caso de geomateriales dentro del campo elástico, se verifica (Luccioni,1993):

$$\boxed{v_{ij} = \frac{2 \cdot ij G_G}{\sqrt{i E_G \cdot j E_G}} - 1} \quad \left\{ \alpha_{ij} = \frac{1}{2} (1 + v_{ij}) \quad ; \quad ij G_G = \frac{1}{2} (1 + v_{ij}) \cdot \sqrt{i E_G \cdot j E_G} \right. \quad (6.30)$$

Resultando para las diferentes direcciones, los siguientes coeficientes de Poisson,

$$\boxed{\begin{array}{ll} xy v_G = \frac{2 \cdot xy G_G}{\sqrt{x E_G \cdot y E_G}} - 1 & yx v_G = \frac{2 \cdot yx G_G}{\sqrt{y E_G \cdot x E_G}} - 1 \\ xz v_G = \frac{2 \cdot xz G_G}{\sqrt{x E_G \cdot z E_G}} - 1 & zx v_G = \frac{2 \cdot zx G_G}{\sqrt{z E_G \cdot x E_G}} - 1 \\ yz v_G = \frac{2 \cdot yz G_G}{\sqrt{y E_G \cdot z E_G}} - 1 & zy v_G = \frac{2 \cdot zy G_G}{\sqrt{z E_G \cdot y E_G}} - 1 \end{array}}$$

donde $ij v_G$ representa el coeficiente de Poisson homogeneizado en el plano “ $i-j$ ”.

6.4.1.6 Flujo Plástico Homogeneizado.

Superado el límite elástico, el cual viene definido por el criterio de fluencia apropiado para geomateriales (ej.: Mohr-Coulomb modificado (Oller (1991)⁹), el material presenta deformaciones plásticas influidas por las direcciones de anisotropía. Esto implica que es necesario definir el modelo inelástico en el campo anisótropo, situación compleja, más tratándose de un compuesto constituido por geomateriales. Para ello y con el fin simplificar el problema, se define un criterio de fluencia y potencial plástico “implícito ^{*}” en el espacio anisótropo, a través de una imagen isótropa del mismo elegida a conveniencia. Esta transformación de espacio está perfectamente definida por la *Teoría del Mapeo de Espacios* (Oller *et. al.* (1995)¹⁰, (2003)¹¹), que establece una forma general de definición de criterios umbrales anisótropos a través de umbrales isótropos.

En principio se trabajara con la hipótesis de plasticidad asociada isótropa de Mohr-Coulomb, por lo que las superficies de fluencia y potencial $\mathbb{F}^t(\bar{\tau}, g, \alpha, f^t) \equiv \mathbb{G}^t(\bar{\tau}, g)$ coinciden en el espacio isótropo ficticio. Donde $\mathbb{F}^t(\bar{\tau}, g, \alpha, f^t) = 0$ y $\mathbb{G}^t(\bar{\tau}, g) = \text{cte}$, representan las funciones de fluencia y potencial plástico en la configuración actualizada, $\bar{\tau}$ es el tensor de tensión de Kirchhoff, g el tensor métrico en la configuración espacial, α el grupo de variables internas y f^t el tensor de resistencia en el umbral del límite elástico del material en la configuración actualizada.

La condición de fluencia plástica en el espacio de tensiones isótropo $\bar{\tau}$ establece el cumplimiento de la siguiente desigualdad,

^{*} **Nota:** Entiéndase en este caso por formulación “implícita” a aquella que no está expresamente formulada, sino a través de otra expresión “explícitamente” definida y entre las cuales hay una correspondencia biunívoca.

¹⁰ Oller, S., Botello, S., Miquel, J., Oñate, E. (1995). An isotropic elastoplastic model based on an isotropic formulation. *Engineering Computations*, Vol. 12, 245-262.

¹¹ Oller s., Car E. and Lubliner J. (2003). Definition of a general implicit orthotropic yield criterion. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol. 192, No. 7-8, pp. 895-912.

$$\mathbb{F}^{\tau}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{f}^{\tau}) = f(\bar{\boldsymbol{\tau}}) - f_G^{\tau}(\kappa^p) \leq 0 \quad (6.31)$$

donde $f_G^{\tau}(\kappa^p) \equiv c_G(\kappa^p)$ es la cohesión del material homogeneizado función del parámetro de daño κ^p y $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ el tensor de tensiones en el espacio isótropo ficticio.

El valor de la cohesión homogeneizada se obtiene a partir de una generalización de la expresión de equilibrio en compresión (“Modo 2”, ecuación (6.3)). Esto es,

$$c_G(\kappa^p) = c_L(\kappa^p) \cdot \frac{l_L}{l_G} + c_{M_1}(\kappa^p) \cdot \frac{l_{M_1}}{l_G} \quad (6.32)$$

El parámetro de daño κ^p representa la energía disipada normalizada a la unidad, (Oller, (1991)⁹),

$$\kappa^p = \int_t \frac{\Xi^p}{[g_L + g_{M_1} + g_{M_2}]_{PR}} dt$$

En la que Ξ^p representa la disipación determinada a partir de la segunda ley de la termodinámica (Lubliner (1990)¹²), $[g_i]_{PR}$ la máxima energía a disipar por el componente “ i ” del material compuesto, según el proceso mecánico PR al que esté sometido (tracción, compresión, cortante puro o estados intermedios).

Cumplida la expresión (6.31), la deformación total homogeneizada en cada dirección se puede expresar como suma de una componente elástica y otra plástica,

$${}_i \boldsymbol{\varepsilon}_G = {}_i \boldsymbol{\varepsilon}_G^e + {}_i \boldsymbol{\varepsilon}_G^p \quad (6.33)$$

donde “ i ” representa la componente de la deformación global de la “celda” según la dirección de ortotropía. Las diferentes componentes de la deformación plástica se obtienen del desarrollo previamente presentado en este capítulo y para aclarar sus términos, se expresan a continuación. Esto es, a partir del “Modo 1” de deformación, Ecuación (6.8), se obtiene la componente de deformación plástica en la dirección “ x ”

$${}_x \boldsymbol{\varepsilon}_G^p = {}^x A_L \cdot \left({}_x \boldsymbol{\varepsilon}_{M_2}^p \cdot l_{M_2} - {}_x \boldsymbol{\varepsilon}_L^p \cdot l_L - {}_x \boldsymbol{\varepsilon}_{M_1}^p \cdot l_{M_1} \right) \cdot \left(\frac{1}{{}^x E_L} \cdot \frac{l_L}{l_G} + \frac{1}{{}^x E_{M_1}} \cdot \frac{l_{M_1}}{l_G} \right) + \left({}_x \boldsymbol{\varepsilon}_L^p \cdot \frac{l_L}{l_G} + {}_x \boldsymbol{\varepsilon}_{M_1}^p \cdot \frac{l_{M_1}}{l_G} \right)$$

Puesto que todos los materiales que componen la celda son geomateriales, puede adoptarse la misma superficies de fluencia y potencial para todos ellos. En este caso particular se ha elegido la de Mohr-Coulomb. De esta forma se puede hacer la siguiente simplificación en la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} {}_x \boldsymbol{\varepsilon}_G^p &= A_x^p \cdot (l_{M_2} - l_L - l_{M_1}) \cdot {}_x \boldsymbol{\varepsilon}_G^p \Big|_{Mohr} + \left(\frac{l_L}{l_G} + \frac{l_{M_1}}{l_G} \right) \cdot {}_x \boldsymbol{\varepsilon}_G^p \Big|_{Mohr} \\ {}_x \boldsymbol{\varepsilon}_G^p &= \left[A_x^p \cdot l_{M_2} + \left(\frac{1}{l_G} - A_x^p \right) \cdot (l_L + l_{M_1}) \right] \cdot {}_x \boldsymbol{\varepsilon}_G^p \Big|_{Mohr} \end{aligned} \quad (6.34)$$

Donde,

¹² Lubliner J. (1990). *Plasticity Theory*. Macmillan Publishing, U.S.A.

$$A_x^p = \frac{x E_L \cdot x E_{M_1} \cdot x E_{M_2} \cdot h_{M_2}}{x E_{M_1} \cdot x E_{M_2} \cdot h_{M_2} \cdot l_L + x E_L \cdot x E_{M_2} \cdot h_{M_2} \cdot l_{M_2} + x E_L \cdot x E_{M_1} \cdot h_{M_2} \cdot l_{M_1}} \left(\frac{l_L}{x E_L \cdot l_G} + \frac{l_{M_1}}{x E_{M_1} \cdot l_G} \right)$$

Siguiendo el mismo procedimiento, se obtiene a partir del “Modo 2”, Ecuación (6.13), la componente “y” de la deformación plástica global se expresa como,

$$_y \varepsilon_G^p = A_y^p \cdot \left(-_y \varepsilon_L^p \cdot h_L + _y \varepsilon_{M_1}^p \cdot h_{M_1} \right) + \left(_y \varepsilon_L^p \cdot \frac{h_L}{h_G} + _y \varepsilon_{M_1}^p \cdot \frac{h_{M_2}}{h_G} \right)$$

Tomando el mismo tipo de superficie potencial para todos los materiales de la celda, se tiene

$$\begin{aligned} _y \varepsilon_G^p &= A_y^p \cdot \left(-h_L + h_{M_1} \right) \cdot |_y \varepsilon_G^p |_{Mohr} + \left(\frac{h_L}{h_G} + \frac{h_{M_2}}{h_G} \right) \cdot |_y \varepsilon_G^p |_{Mohr} \\ _y \varepsilon_G^p &= \left[A_y^p \cdot h_{M_1} + \left(\frac{1}{h_G} - A_y^p \right) \cdot h_L + \frac{h_{M_2}}{h_G} \right] \cdot |_y \varepsilon_G^p |_{Mohr} \end{aligned} \quad (6.35)$$

donde:

$$A_y^p = \frac{_y E_L \cdot _y E_{M_1} \cdot l_{M_1}}{_y E_{M_1} \cdot l_{M_1} \cdot h_L + _y E_L \cdot l_L \cdot h_{M_1}} \cdot \frac{h_L}{_y E_L \cdot h_G}$$

De igual forma que se ha procedido para las dos componentes anteriores de la deformación plástica global, se obtiene la distorsión plástica global,

$$_{xy} \gamma_G^p = A_\gamma^p \cdot \left(_{xy} \gamma_L^p - _{xy} \gamma_{M_1}^p \right) + _{xy} \gamma_L^p \cdot \frac{h_L}{h_G} + _{xy} \gamma_{M_2}^p \cdot \frac{h_{M_2}}{h_G}$$

Y de aquí resulta, luego de sustituir el flujo de Mohr-Coulomb, la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} _{xy} \gamma_G^p &= A_\gamma^p \cdot \left(_{xy} \gamma_G^p |_{Mohr} - _{xy} \gamma_G^p |_{Mohr} \right) + _{xy} \gamma_G^p |_{Mohr} \cdot \frac{h_L}{h_G} + _{xy} \gamma_G^p |_{Mohr} \cdot \frac{h_{M_2}}{h_G} \\ _{xy} \gamma_G^p &= \boxed{\left(\frac{h_L + h_{M_2}}{h_G} \right) \cdot _{xy} \gamma_G^p |_{Mohr}} \end{aligned} \quad (6.36)$$

Donde

$$A_\gamma^p = G_{M_1} \cdot \frac{l_{M_1}}{l_G} \cdot \left(\frac{G_L \cdot l_G}{G_L \cdot l_L + G_{M_1} \cdot l_{M_1}} \right) \cdot \frac{h_L}{G_L \cdot h_G}$$

De la expresión (6.20) resulta directamente el flujo plástico según la componente “z”

$$\boxed{_z \varepsilon_G^p = \frac{\left(_{xz} v_G + _{xy} v_G \cdot _{yz} v_G \right) \cdot |_z \varepsilon_G^p |_{Mohr} + \left(_{yz} v_G + _{xz} v_G \cdot _{yx} v_G \right) \cdot |_z \varepsilon_G^p |_{Mohr}}{\left(-1 + _{xy} v_G \cdot _{yx} v_G \right)}} \quad (6.37)$$

A partir de las expresiones (6.34), (6.35), (6.36) y (6.37) resulta el flujo de deformaciones plásticas, para un punto del compuesto representado por la “celda” homogenizada, en función del flujo de Mohr-Coulomb. Esto es,

$$\vec{\varepsilon}_G^p = \mathbf{M}^p \cdot \vec{\varepsilon}^p \Big|_{Mohr} = \left\{ {}_x\varepsilon_G^p, {}_y\varepsilon_G^p, {}_{xy}\gamma_G^p \right\}^T \quad (6.38)$$

siendo:

$$\vec{\varepsilon}^p \Big|_{Mohr} = \left\{ {}_x\varepsilon_G^p \Big|_{Mohr}, {}_y\varepsilon_G^p \Big|_{Mohr}, {}_{xy}\gamma_G^p \Big|_{Mohr} \right\}^T$$

$$\mathbf{M}^p = \begin{bmatrix} A_x^p \cdot l_{M_2} + \left(\frac{1}{l_G} - A_x^p \right) \cdot (l_L + l_{M_1}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_y^p \cdot h_{M_1} + \left(\frac{1}{h_G} - A_y^p \right) \cdot h_L + \frac{h_{M_2}}{h_G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h_L + h_{M_2}}{h_G} & 0 \\ \frac{xz \mathbf{v} + xy \mathbf{v} \cdot yz \mathbf{v}}{-1 + xy \mathbf{v} \cdot yx \mathbf{v}} & \frac{yz \mathbf{v} + xz \mathbf{v} \cdot yz \mathbf{v}}{-1 + xy \mathbf{v} \cdot yx \mathbf{v}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El vector de flujo plástico se obtiene como:

$$\vec{g}_G = \frac{\dot{\varepsilon}_G^p}{\lambda} \quad (6.39)$$

siendo en esta última $\lambda = \frac{f(\tau) - c_G}{H + g_G : \mathbf{C} : f_G}$ el factor de consistencia plástico clásico. De todo

esto se deduce que la homogeneización induce a un comportamiento plástico con una función potencial no asociada a la de fluencia.

6.5 Ejemplo de comprobación de la formulación.

Se utilizan los resultados experimentales de Page (1978)⁷ para comprobar el funcionamiento del modelo aquí presentado. Este ensayo es uno de los más utilizados para calibración de modelos numéricos en mampostería. Lourenço (1992)¹³ también utilizó este ensayo para calibrar su modelo, por lo que los resultados obtenidos en este trabajo, si bien se contrastan con el modelo experimental también se tomará como referencia el modelo numérico de Lourenço.

Las dimensiones del panel de mampostería son de $75.7 \times 45.7 \times 5.4 \text{ cm}^3$, utilizando ladrillos de $12.2 \times 3.7 \times 5.4 \text{ cm}^3$ siendo las juntas de un espesor de 0.5 cm . Las características mecánicas de los materiales utilizados se resumen en la Tabla 6.1. El ensayo obtiene valores de tensiones y deformaciones verticales en una línea de galgas dispuestas a 18.65 cm . del paramento inferior. La carga se introduce de forma puntual \mathbf{P} con un gato que se encarga de repartir una viga de acero en la zona central y con una longitud de reparto de 38.1 cm . (ver Figura 6.13)

¹³ Lourenço, P. B. (1996). *Computational Strategies for Masonry Structures*, Tesis doctoral, Universidad Tecnológica de Delft . Delft University Press.

Propiedad	Valor
Módulo de elasticidad para carga paralela a la base de la placa de carga del ladrillo, E_x (en kp/cm ²)	59200
Modulo de elasticidad para carga perpendicular a la base de la placa de carga del ladrillo, E_y (en kp/cm ²)	75500
E_y/E_x	1.35
Coeficiente de Poisson en el plano	0.167
Resistencia a compresión del ladrillo (en kp/cm ²)	362.5
Resistencia a compresión del mortero (en kp/cm ²)	32
Ángulo de rozamiento interno	30°
Módulo de elasticidad para el mortero (en kp/cm ²)	8041

Tabla 6.1 – Parámetros mecánicos de la mampostería.

Debido a que en el ensayo no existían registros de las energías de fractura y aplastamiento de los materiales, se han adoptado como valores para la de fractura de mortero y ladrillo 8.32 kp/cm y 207.36 kp/cm respectivamente. En el caso de la energía de aplastamiento se toman 384 kp/cm para mortero y 592 kp/cm para ladrillo. Estos valores se han tomado altos para mejorar la convergencia de la ecuación constitutiva para niveles altos de tensión. El objetivo fundamental no es obtener toda la respuesta post-pico, y por ello se considera como aceptable la adaptación de estos valores de energía.

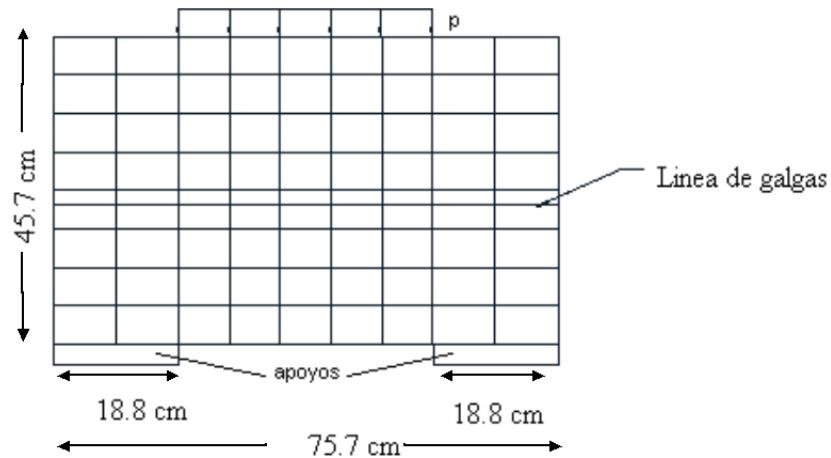


Figura 6.13 – Esquema geométrico del ensayo de Page.

El ensayo se ha llevado para cargas de 20 KN., 40 KN., 60 KN y se han obtenido los resultados en tensiones que aparecen en la Figura 6.14 y Figura 6.15. Las galgas coinciden con la posición de los puntos de Gauss superiores de los elementos de la franja intermedia por lo que los resultados controlados han sido tomados para dichos puntos de Gauss.

La malla generada tiene 72 elementos cuadriláteros de 4 nodos y 4 puntos de Gauss por elemento (ver Figura 6.13). El no utilizar mayor número de elementos tiene por objetivo observar la respuesta del modelo ante mallas de pequeño número de elementos, ya que hacer un mallado muy denso no destacaría las ventajas respecto a micromodelos simplifi-

cados donde juntas y ladrillos están discretizados por elementos distintos. El provecho de este tipo de homogeneización es la de poder ahorrar tiempo computacional y simplificar el proceso de generación de malla.

A continuación se establece una comparación entre el estado tensional de tres ensayos –Page (1978)⁷, Lourenço (1996)¹³ y el modelo homogeneizado presentado en éste capítulo–, a lo largo de la línea de galgas. Se comienza a incrementar la carga paulatinamente, recogiéndose los resultados para valores característicos.

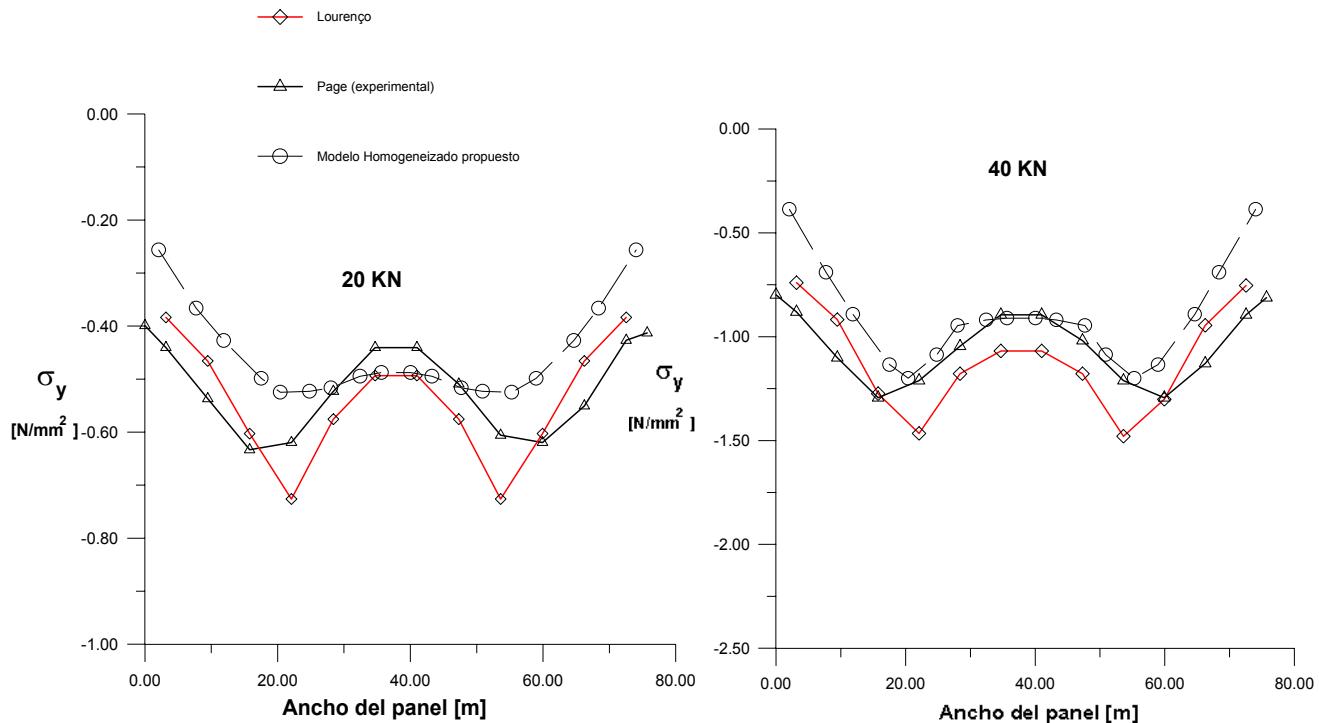


Figura 6.14 – Curvas tensión-deformación para 20 KN y 40 KN.

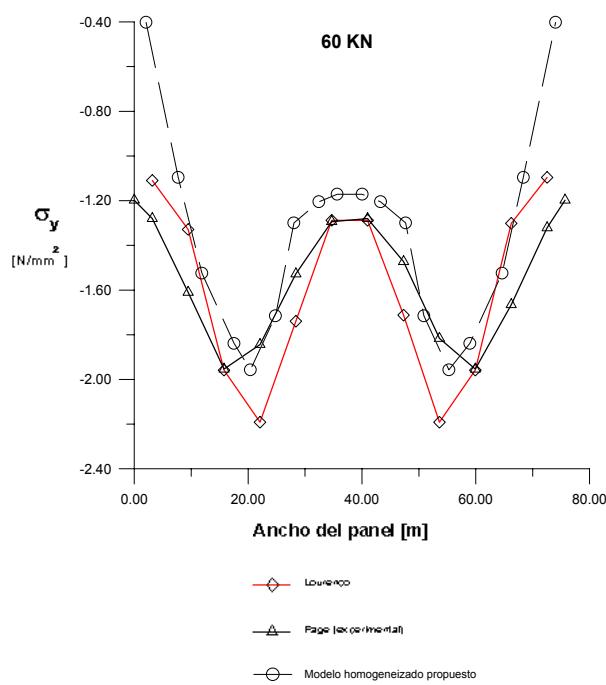


Figura 6.15 – Curva tensión-deformación para 60.

De las curvas podemos extraer que la aproximación es buena a excepción de los extremos que puede ser motivado a efectos locales en la zona de medida (experimental) o que el punto de Gauss donde se ha tomado la medida no coincide exactamente con la posición exacta de la galga ya que no se tiene registro exacto de su posición. También la falta de discretización en los extremos puede producir este efecto de pobre aproximación.

7 PANDEO INELÁSTICO en COMPUESTOS REFORZADOS.

7.1 Introducción.

Este capítulo resume parte del trabajo de investigación publicado por J. Puig (2001)¹ y Puig et al. (2002)², cuya motivación ha sido la solución de este complejo fenómeno dentro del marco teórico que se ha descrito en los capítulos previos.

La presencia en la literatura especializada de artículos que traten el tema de la inestabilidad elástica por compresión de las fibras mediante aproximaciones por el método de los elementos finitos es en realidad muy escasa. De hecho, esto puede deberse a la falta de un modelo adecuado para tratar los complejos fenómenos de interacción entre las fibras y matriz que se desarrollan en estos materiales compuestos. En este capítulo se hace una aproximación a la solución numérica de este fenómeno de inestabilidad local inelástica. Para ello, se presenta un modelo constitutivo de pérdida de rigidez por *micro-pandeo* de las fibras largas en materiales compuestos reforzados. Dicho modelo se establece a partir de una generalización del de daño isotrópico de Kachanov (ver Oliver et al (1990)³ y Oller (1991)⁴, (2001)⁵). La formulación resultante se considera dentro del contexto de los materiales compuestos anisótropos y se integra en un código de elementos finitos. Esta formulación así obtenida, permite simular numéricamente el complejo fenómeno de la inestabilidad de las fibras en materiales compuestos de fibras largas y tratar esta inestabilidad local dentro de una inestabilidad global representada mediante una formulación en grandes deformaciones. Esta formulación se basa en la teoría de mezclas de sustancias básicas, anisotropía general, grandes deformaciones y comportamiento no lineal de cada sustancia básica que compone el material compuesto. Dada la amplitud del trabajo que implica el tratamiento de este fenómeno de pandeo, aquí sólo se hace un esfuerzo por presentar la inestabilidad local y su influencia global en la pieza.

¹ Puig, J.M. (2001). *Resolución del Problema de Inestabilidad Elástica por Compresión en Materiales Compuestos con Fibras Largas*. Tesis de Especialidad, Universidad Politécnica de Cataluña. Barcelona, España.

² Puig J.M., Car E., Oller S. (2002). *Solución numérica para el pandeo inelástico de materiales compuestos reforzados con fibras largas*. Capítulo del libro: *Análisis y cálculo de estructuras de materiales compuestos*, - pp. 295, 320 - Ed. S. Oller. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería. Barcelona

³ Oliver, J.; Cervera, M.; Oller, S. & Lubliner, J. (1990). Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete. In N. Bicanic & H. Mang (eds), *Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures; Proceedings 2nd International Conference 2*: 945-958.

⁴ Oller, S. (1991). *Modelización Numérica de Materiales Frictionales*. Monografía No. 3, Ed. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería. Barcelona.

⁵ Oller, S. (2001). *Fractura mecánica - Un enfoque global*. CIMNE-Editiones UPC.

7.2 Descripción del fenómeno – Estado del conocimiento.

El fenómeno que se estudia se produce en aquellos materiales compuestos reforzados con fibras paralelas entre sí y orientadas en la dirección longitudinal de la pieza estructural. Estas fibras se comportan solidariamente entre sí y trabajan en forma confinada por influencia de la matriz. El refuerzo dispuesto en este tipo de materiales se calcula para que el compuesto ofrezca una respuesta óptima a esfuerzos de tracción, ya que no se espera que estos materiales esbeltos de matriz reforzada con fibra trabajen a compresión. Sin embargo, deben considerarse aquellas situaciones de cargas no esperadas que exigen que el material responda adecuadamente frente a esta imposición.

Como se podrá observar en la formulación, el modelo no se ha pensado para ninguna combinación de materiales fibra y matriz en particular. En este sentido, es todo lo general que puede ser. Puede aplicarse tanto a lo que se entiende como materiales compuestos avanzados, como también a un material tan clásico de la ingeniería civil como el hormigón armado. El concepto es el mismo, sólo varía la escala.

7.2.1 Carga crítica de Euler.

El punto de partida del estudio debe ser, sin duda, la solución del problema de la inestabilidad por compresión de estructuras esbeltas para materiales elásticos, homogéneos e isótropos⁶. Mediante el planteamiento del problema, tal y como se observa en la Figura 7.1, se obtiene la ecuación diferencial no homogénea que gobierna el fenómeno para el caso de piezas ideales

$$EIy''(x) + N \cdot y = F(Y_A, q, x) \quad (7.1)$$

donde E es el módulo elástico del material; I es la inercia de la sección recta de la pieza respecto del eje de flexión; N la carga de compresión aplicada en el eje de la pieza; y la distancia vertical de un punto de la deformada a la posición sin deformar de la pieza; y F una función que depende del estado de cargas particular de la estructura. En el caso de que no haya carga transversal u otra acción que produzca flexión, entonces la ecuación (7.1) se reduce a su expresión homogénea

$$EIy''(x) + N \cdot y = 0 \quad (7.2)$$

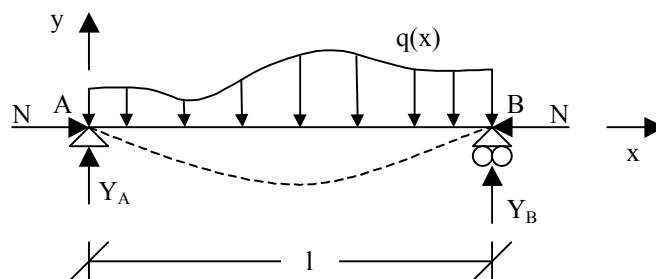


Figura 7.1 – Esquema de una pieza ideal comprimida y flectada.

⁶ Timoshenko, S.P. y Gere. J.M. (1961). *Theory of elastic stability* (Second edition). McGraw-Hill.

cuya solución se conoce como la carga crítica de Euler

$$N_E = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2} \quad (7.3)$$

donde l es la longitud de la pieza.

Para piezas estructurales en general, y en particular para aquellas conformadas por materiales anisótropos, es posible obtener buenas aproximaciones con programas de elementos finitos que tengan implementada una cinemática en grandes deformaciones.

Sin embargo, la inestabilidad por compresión de las fibras largas embebidas en una matriz es un fenómeno de gran complejidad y de difícil estudio y comprensión. La principal dificultad estriba en el hecho de que en el mismo influyen tanto propiedades de la propia fibra como de la matriz (problema no local). La geometría de la fibra, altamente esbelta por naturaleza, y la coacción al movimiento que ejerce la matriz influyen decisivamente en el fenómeno. La anisotropía que caracteriza a la mayoría de las fibras utilizadas en materiales compuestos avanzados condiciona igualmente la respuesta de estos materiales a compresión.

La importancia del fenómeno del pandeo de las fibras es el hecho de que tiene lugar a esfuerzos bajos en comparación con los valores predichos por la teoría de láminas (abolladura), o por la teoría de inestabilidad elástica de vigas.

7.2.2 Modelo de Rosen.

El primer intento de proponer un modelo analítico para estudiar el fenómeno se debe a Rosen (1965)⁷, basándose en la idea de que la rotura a compresión axial estaría asociada al curvado de las fibras cuyo comportamiento es análogo al de pandeo de columnas esbeltas. En efecto, en piezas ensayadas hasta rotura por inestabilidad de las fibras, el fenómeno se revela microscópicamente como un sistema de micro-dobleces en las mismas. Basándose en estas evidencias, diferenció dos posibles modos de pandeo según el volumen de fibras del material compuesto: modo “extensional” o desfasado, propio de volúmenes de fibra bajos; y “shear” o en fase, para grandes volúmenes de fibra (Figura 7.2). Sobre la base de estos modos y de la teoría de mezclas se formuló la primera teoría para predecir los valores de rotura del material por inestabilidad de la fibra. En concreto, para el modelo de curvado en cortadura (“shear”) o en fase, Rosen obtuvo la siguiente aproximación:

$$\sigma_u = \frac{G_m}{1 - V_f} \quad (7.4)$$

donde σ_u es la tensión última de rotura a compresión del compuesto; G_m es el módulo a cortadura de la matriz; y V_f es el volumen de fibra del compuesto. A pesar de que posteriormente el trabajo de Rosen resultó insuficiente para la predicción fiable de las cargas de rotura, sobreestimando las mismas, la idea básica de su formulación, basada en los modos de micro-dobleces, ha supuesto el punto de partida de la mayoría de los trabajos posteriores.

⁷ Rosen, B.W. (1965). *Mechanics of composite strengthening*. Fibre Composite Materials.

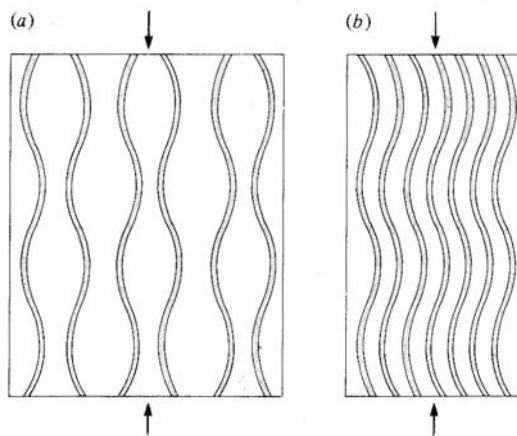


Figura 7.2 – Representación esquemática de los modos de curvado (a) en desfase y (b) en fase en láminas unidireccionales a compresión longitudinal. (Hull, (1987)⁸)

7.2.3 Modelos micro-mecánicos.

7.2.3.1 Formulación en elementos finitos.

En trabajos posteriores al de Rosen, diversas han sido las líneas de investigación. Una de ellas tiene como finalidad la obtención de un modelo que reproduzca el micro-pandeo de las fibras y su cinemática. En esta línea, Balacó de Moraes (1996)⁹ propone una formulación 2-D y 3-D en elementos finitos, que se basa en la hipótesis de que la inestabilidad local de las fibras gobierna la rotura a compresión longitudinal de las láminas unidireccionales. El modelo original fue simplificado en trabajos posteriores (Balacó de Moraes (2000)¹⁰) hasta conseguir la linealización del mismo. En cualquier caso, se parte de la hipótesis de que la ondulación de las fibras en fase puede aproximarse con suficiente precisión mediante una curva senoidal:

$$y_0 = a_0 \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \right] \quad (7.5)$$

La ondulación de las fibras queda completamente definida mediante dos únicos parámetros, a saber, la longitud de onda λ y el máximo ángulo de desviación respecto de la hipótesis de fibras perfectamente alineadas:

$$\tan \theta_{\max} = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{\max} = \frac{2\pi a_0}{\lambda} \quad (7.6)$$

⁸ Hull, D. (1987). *Materiales Compuestos*. Editorial Reverté, S.A., Barcelona, España.

⁹ Balacó de Moraes, A. (1996). Modelling lamina longitudinal compression strength of carbon fibre composite laminates. *Journal of Composite Materials* 30(10): 1115-1131.

¹⁰ Balacó de Moraes, A. (2000). Prediction of the layer longitudinal compression strength. *Journal of Composite Materials* 34(21): 1808-1820.

En el modelo original de elementos finitos, se consideró para la matriz un comportamiento elasto-plástico perfecto con un criterio plástico de Von Mises. En el mismo trabajo se reconoce que esto es una simplificación importante del comportamiento real de las matrices poliméricas, mucho más complejo. Sin embargo, la hipótesis era suficiente para los objetivos del trabajo, que eran comprobar si los valores obtenidos eran realistas y para determinar las variables más importantes que afectan el proceso de compresión.

Sin embargo, el modelo multi-fibra era muy costoso computacionalmente, por lo cual se utilizó principalmente para verificar un modelo simplificado de celda básica 2-D. Para el caso 3-D, se obró de la misma forma, pero se diferenciaron dos casos para sendas distribuciones espaciales de las fibras consideradas: hexagonal y cuadrada.

Los resultados obtenidos mostraron que la longitud de onda λ de la ondulación inicial de la fibra no es particularmente relevante. Por contra, se comprobó que el módulo elástico de la matriz y la participación volumétrica de la fibra en el compuesto afectaban de forma importante la resistencia a compresión de la lámina, siendo ésta mayor para valores elevados de aquéllos. En general, sin embargo, los valores predichos usando datos realistas para definir el modelo son muy superiores a los obtenidos mediante ensayos experimentales.

7.2.3.2 Formulación simplificada.

Debido al alto coste computacional del modelo desarrollado, en trabajos posteriores se presentaron simplificaciones del mismo, hasta llegar a una linealización de la formulación (Balacó de Morais (2000)¹⁰). Dicha formulación parte, pues, de las mismas hipótesis que el modelo original, es decir, se supone una ondulación inicial de la fibra de la forma expresada en la ecuación (7.5), y cuyo parámetro principal es el ángulo de desviación máximo dado en la ecuación (7.6). Igualmente, se asume que la deformada de la fibra, en cualquier instante del proceso de carga, puede expresarse como:

$$y = a \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \right] \quad (7.7)$$

La energía potencial del sistema se define como,

$$\Pi = U_f + U_m - W \quad (7.8)$$

donde U_f es la energía de deformación por pandeo de la fibra; U_m es la energía de deformación a cortante de la matriz; y W es el trabajo realizado por las cargas de compresión aplicadas. En un trabajo anterior de los autores Balacó de Morais & Marques (1997)¹¹, se demostró que la energía de deformación por pandeo de la fibra era despreciable, con lo que la ecuación (7.8) se reduce a la siguiente

$$\Pi = U_m - W \quad (7.9)$$

El trabajo realizado por las cargas aplicadas, asumiendo la hipótesis de pequeños desplazamientos, puede escribirse como

¹¹ Balacó de Morais, A. & Marques, A. T. (1997). A micromechanical model for the prediction of the lamina longitudinal compression strength of composite laminates. *Journal of Composite Material* 31(14): 1397-1412.

$$W = \sigma_c (h + 2c) \frac{\pi^2}{\lambda} (a^2 - a_0^2) \quad (7.10)$$

donde h y $2c$ son las dimensiones transversales de la fibra y la matriz, respectivamente; y σ_c es la tensión del compuesto que se obtiene mediante la teoría de mezclas

$$\sigma_c = V_f \sigma_f + (1 - V_f) \sigma_m \quad (7.11)$$

Por otro lado, la energía de deformación a cortante de la matriz puede escribirse como

$$U_m = 2c \frac{G_m}{(1 - V_f)^2} \frac{\pi^2}{\lambda} (a^2 - a_0^2) \quad (7.12)$$

Sustituyendo las ecuaciones (7.10) y (7.12) en la ecuación (7.9), y aplicando el principio variacional de la energía potencial mínima:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} = 0 \quad (7.13)$$

resulta:

$$a = \frac{a_0}{1 - \left[\frac{1 - V_f}{G_m} \right] \sigma_c} \quad (7.14)$$

Cabe hacer notar que, en el momento de producirse inestabilidad, $a \rightarrow \infty$, y se recupera la fórmula de Rosen dada en la ecuación (7.4). Es importante señalar también que la naturaleza lineal de la formulación es inadecuada para el criterio de rotura por micro-pandeo. En su lugar, se supone que la rotura se produce al iniciarse la plastificación de la matriz, usándose a tal efecto una curva tensión-deformación a cortante elasto-plástica perfecta con idéntica energía de deformación de la actual curva, tal y como muestra la Figura 7.3.

El criterio de rotura aceptado es el de Drucker-Prager, que para este caso particular puede escribirse en la siguiente forma,

$$\sqrt{\sigma_m^2 + 3\tau_m^2} - \frac{\tan \beta}{3} \sigma_m - \sqrt{3}\tau_{um} = 0 \quad (7.15)$$

donde τ_{um} es la resistencia a cortante de la matriz; y el ángulo de fricción vale

$$\tan \beta = 3 \left[1 - \sqrt{3} \frac{\tau_{um}}{\sigma_{um}} \right] \quad (7.16)$$

siendo σ_{um} la resistencia a compresión de la matriz.

Realizando una serie de suposiciones, y sustituyendo las expresiones anteriormente obtenidas, se obtiene un polinomio de cuarto orden de la forma

$$C_i \sigma_{uc}^i = 0 \quad (7.17)$$

Con $i = 1 - 4$, que puede ser resuelto mediante métodos numéricos.

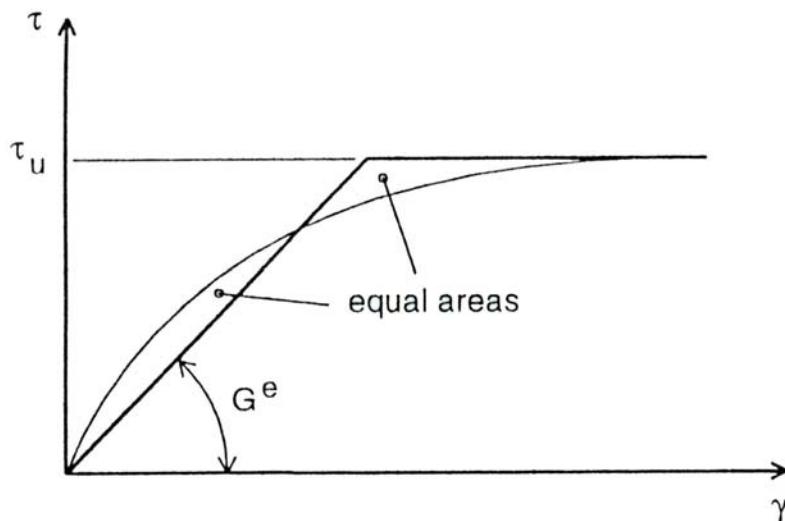


Figura 7.3 – Curva elasto-plástica perfecta con la misma energía de deformación. (Balacó de Moraes, 2000)

Puede demostrarse que, en el caso de la aproximación elasto-plástica perfecta, la rotura tendrá lugar primeramente la máxima tensión a cortante de la matriz sea igual a la tensión de rotura a cortante de la misma. Es decir,

$$(\tau_m)_{\max} = \tau_{um} \quad (7.18)$$

Teniendo todo esto en cuenta, y considerando que los ángulos de ondulación son pequeños ($\tan \theta \approx \theta$), se obtiene una expresión explícita de la tensión de rotura a compresión

$$\sigma_{uc} = \frac{\tau_{um}}{\theta_0 + \frac{1-V_f}{1+V_f} \frac{\tau_{um}}{G_m^e}} \quad (7.19)$$

Los valores obtenidos con estas formulaciones, en general resultan ser una buena aproximación a los resultados obtenidos en los ensayos experimentales, excepto para laminados con fibra de vidrio. En este caso, algunas de las hipótesis realizadas no se cumplirían.

En conclusión, los modelos micro-mecánicos, cuya finalidad es la de obtener la carga de rotura a compresión del compuesto mediante aproximaciones a la cinemática real del pandeo de las fibras, resulta ser excesivamente costosa computacionalmente, con lo cual deben deducirse formulaciones simplificadas que permitan obtener dichos valores de forma explícita.

7.2.4 Modelos de daño mecánico.

La otra línea principal de investigación que se encuentra en las referencias se basa en la consideración de las imperfecciones como la variable fundamental para formular un modelo válido. En este sentido, Barbero & Tomblin (1996)¹² combinan una distribución estadística de las imperfecciones con el clásico modelo de daño mecánico de Kachanov.

¹² Barbero, E.J. & Tomblin, J.S. (1996). A damage mechanics model for compression strength of composites. *International Journal of Solids Structures* 33(29):4379-4393.

De esta manera, la resistencia de la fibra disminuye debido a la presencia de las imperfecciones, siendo tanto mayor esta reducción como mayor sea el volumen de fibra.

El modelo parte de la constatación de que el micro-pandeo de fibras perfectamente alineadas (modelo de Rosen) es un problema sensible a las imperfecciones. Es decir, pequeñas cantidades de imperfecciones (desalineaciones) pueden causar grandes reducciones de la carga de pandeo, y de esta manera reducir la resistencia a compresión respecto la predicción que realiza el modelo de Rosen. Sin embargo, se ha observado que esta sensibilidad respecto a las imperfecciones sólo ocurre en compuestos cuya respuesta a cortante (o cizalladura) sea no-lineal. Por lo tanto, aquellos modelos que usan una respuesta a cortante lineal no muestran esta sensitividad.

En base a los ensayos experimentales llevados a cabo por los autores, la respuesta tensodeformacional a cortante se approximó mediante la siguiente ecuación,

$$\tau = \tau_u \tanh\left(\frac{G_{LT}}{\tau_u} \gamma\right) \quad (7.20)$$

donde G_{LT} es la rigidez a cortante inicial y τ_u es el valor asintótico de la tensión cortante obtenida en los ensayos.

A partir de esos mismos ensayos, el ajuste de la distribución normal de las desalineaciones medidas en los mismos resulta

$$f(x) = \frac{1}{\Sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\Sigma^2}\right); \quad -\infty < x < +\infty \quad (7.21)$$

donde Σ es la desviación estándar y x es la variable aleatoria continua, en este caso el ángulo de desalineación.

El fenómeno del micro-pandeo ocurre para la misma carga tanto para ángulos de desalineación positivos como negativos. Debido a esto, es necesario convertir la distribución normal simétrica en una distribución semi-normal. En este tipo de distribución, la variable aleatoria viene dada por $\alpha = |x|$, donde x es la variable aleatoria de la distribución normal. Usando la nueva variable α , la función de densidad de la distribución semi-normal viene dada por

$$f(\alpha) = \frac{1}{\Sigma\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(\frac{-\alpha^2}{2\Sigma^2}\right); \quad \alpha \geq 0 \quad (7.22)$$

Esta ecuación tiene dos significados distintos en el contexto de los materiales reforzados con fibras. Primeramente, representa la probabilidad de que una fibra escogida aleatoriamente tenga una desalineación de valor α . Pero más importante, asumiendo que el número de fibras de una sección es muy elevado, la ecuación (7.22) muestra la proporción del número de fibras con una desalineación α sobre el número de fibras total. Debido a la naturaleza estadística del modelo, no es posible señalar qué fibras tienen un valor particular de desalineación, pero es posible asegurar que un número de ellas, proporcional a $f(\alpha)$, están presentes en la sección.

La relación entre la tensión de pandeo (resistencia a compresión) y la magnitud de las imperfecciones (desalineaciones) es conocida en la teoría de la estabilidad como la curva de sensibilidad a las imperfecciones. En el trabajo realizado por Barbero & Tomblin (1996)¹², también se comprueba que las predicciones son muy sensibles a la ecuación que

modela la respuesta tenso-deformacional a cortante. Debido a esto, y a pesar de que la ecuación (7.20) fue hallada de manera que fuera la que mejor representase dicho comportamiento de los materiales analizados, se hizo necesario el desarrollo de un nuevo modelo basado en la teoría de la estabilidad.

Por lo tanto, se desarrolla un nuevo modelo basado en un elemento de volumen representativo (EVR) (Figura 7.4) usando la representación de la respuesta a cortante dada por la ecuación (7.20). De esta manera se incorpora una representación realista de la forma sinusoidal que se usa para representar la fibra. La energía a cortante de todo el EVR está representada en la formulación energética que se utiliza.

El modelo está basado en el principio de la energía potencial total y, por simplicidad, se supone que los efectos axiales son despreciables. También se supone que el micro-pandeo se produce en modo extensional (o en fase), hipótesis ampliamente aceptada en los modelos que usan la teoría de la estabilidad. El hecho de asumir esta hipótesis se justifica por el hecho de que este tipo de micro-pandeo se da para materiales con alto volumen de fibras, que son precisamente los más usados en las aplicaciones ingenieriles. Sustituyendo y operando, puede obtenerse una relación explícita entre las tensiones aplicadas en términos del ángulo de desalineación α y de la deformación a cortante γ

$$\sigma = \frac{\tau_u}{2(\gamma + \alpha)} \cdot \frac{(\sqrt{2} - 1) \cdot (e^{\sqrt{2}\gamma G_{LT}/\tau_u} - e^{2\gamma G_{LT}/\tau_u}) + (\sqrt{2} + 1) \cdot (e^{(2+\sqrt{2})G_{LT}/\tau_u} - 1)}{1 + e^{2\gamma G_{LT}/\tau_u} + e^{\sqrt{2}\gamma G_{LT}/\tau_u} + e^{(2+\sqrt{2})G_{LT}/\tau_u}} \quad (7.23)$$

Los resultados obtenidos mediante esta formulación se muestran en la figura 5 para dos comportamientos de respuesta a cortante distintos. Nótese que, si el comportamiento a cortante es lineal (rigidez a cortante constante), el modelo no predice ningún valor crítico (máximo) de tensión. Si, al contrario, se utiliza la representación de la ecuación (7.20), se alcanza un máximo que corresponde a la resistencia a compresión para el ángulo de desalineación particular considerado. Ante la complejidad de hallar una expresión explícita de este máximo, se proporciona una solución implícita de la forma $F(\sigma_{CR}, \alpha) = 0$. Si se desea una solución explícita $\sigma_{CR} = f(\alpha)$, la solución implícita puede aproximarse mediante

$$\sigma_{CR} = (G_{LT} - k_1) \cdot \exp(k_2 \sqrt{\alpha}) + k_1 \exp(k_3 \sqrt{\alpha}) \quad (7.24)$$

donde k_1 , k_2 y k_3 son constantes determinadas mediante la curva definida por la solución implícita. La ecuación (24) muestra las siguientes características: cuando $\alpha \rightarrow 0$, $\sigma_{CR} \rightarrow G_{LT}$, que coincide con el valor predicho por Rosen; y cuando $\alpha \rightarrow \pi/2$, $\sigma_{CR} \rightarrow 0$.

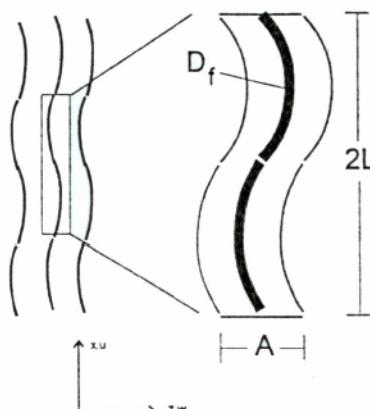


Figura 7.4 – Elemento de volumen representativo (EVR). (Barbero & Tomblin, 1996)

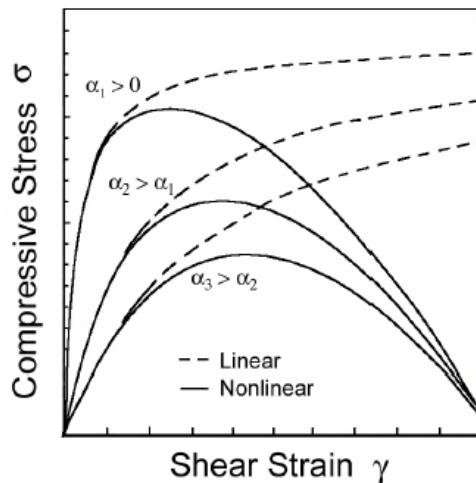


Figura 7.5 – Estados de equilibrio en los que se muestra la tensión de compresión aplicada como una función de deformación a cortante para tres valores del ángulo de desalineación y considerando respuesta a cortante lineal (línea de trazos) y no-lineal (línea continua). (Barbero & Tomblin, 1996).

Para la definición final del modelo de daño, deben tenerse en cuenta algunas consideraciones. En un trabajo anterior de Tomblin (1994)¹³, se demostró que una fibra pandeada no tiene resistencia post-pandeo (o post-crítica). Esta afirmación, sin embargo, no implica ni asume que una fibra pandeada esté permanentemente dañada, ni que el proceso sea irreversible. Sólo indica que la capacidad de carga de una fibra pandeada es menor que la carga aplicada. La fibra puede romperse debido a la curvatura cuando la deformación lateral es excesiva. Por lo tanto, el modelo de daño unidimensional no requiere que la fibra esté en un estado de daño permanente. Es suficiente asumir que todas las fibras que hayan pandeado no son capaces de soportar cargas mayores debido a que no disponen de resistencia post-pandeo. En el momento en que una fibra pandea, la carga aplicada se redistribuye entre el resto de las fibras que no han pandeado todavía.

En cualquier instante de carga de la probeta, la carga aplicada (que en el instante inicial la tensión se aplica al área de fibra total) es igual a la tensión efectiva en el instante de carga considerado aplicada en el área de las fibras que permanecen sin pandear. Es decir,

$$\sigma_{app} = \sigma_{CR}(\alpha) \cdot [1 - \omega(\alpha)] \quad (7.25)$$

donde $0 \leq \omega(\alpha) \leq 1$ es el área de las fibras pandeadas por unidad de área de fibra inicial. El área de las fibras pandeadas $\omega(\alpha)$ es proporcional al área bajo la curva de la distribución semi-normal (Figura 7.6) localizada más allá del ángulo de desalineación α correspondiente al valor actual de la tensión efectiva. Por lo tanto, $\omega(\alpha)$ puede escribirse como

$$\omega(\alpha) = 1 - F(\alpha) = 1 - \int_0^\alpha f(\alpha) d\alpha = \int_\alpha^\infty f(\alpha) d\alpha \quad (7.26)$$

¹³ Tomblin, J. S. (1994). *Compressive Strength Models for Pultruded Glass Fiber Reinforced Composites*. PhD thesis, West Virginia University, Morgantown, WV, U.S.A.

La ecuación (7.25) tiene un máximo que se corresponde con la tensión máxima que puede ser aplicada al compuesto. Este máximo es único y proporciona un valor de la resistencia a compresión del compuesto que considera la curva de sensibilidad a las imperfecciones y la distribución aleatoria de las desalineaciones de las fibras.

La comparación de las predicciones obtenidas con el modelo con los ensayos experimentales demostró que las diferencias eran muy sensibles a la forma de medición de las propiedades a cortante de las probetas ensayadas. Así mismo, se constató la dependencia clara de la resistencia a compresión con la rigidez a cortante inicial.

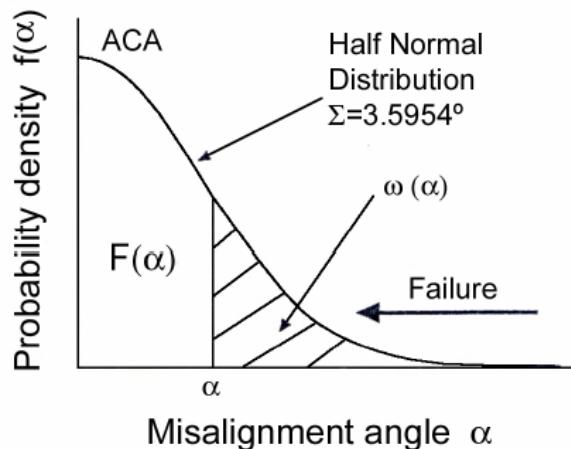


Figura 7.6 – Distribución de densidad de probabilidad semi-normal de las desalineaciones e interpretación de la evolución del pandeo de las fibras. (Barbero & Tomblin, 1996).

También a modo de conclusiones se observó que la resistencia a compresión decrece claramente cuando las imperfecciones de las fibras aumentan, y que no aumentan a mayores volúmenes de fibra debido a que también aumenta la probabilidad de que presenten imperfecciones.

En el próximo apartado, se presenta un modelo formulado dentro de la mecánica de medios continuos, que permite generalizar la simulación numérica del fenómeno de inestabilidad en estos materiales compuestos.

7.3 Modelo de pérdida de rigidez por pandeo de los compuestos con fibras largas.

7.3.1 Introducción.

En este apartado se presenta una aproximación al fenómeno a través de la mecánica de los medios continuos. La dificultad de este planteamiento es el de considerar un fenómeno esencialmente un problema cinemático a través de un símil constitutivo. Sin embargo, el mismo fenómeno puede observarse desde los dos puntos de vista:

1. El cinemático que estudia la pérdida de rigidez global;

2. El constitutivo que estudia la pérdida de resistencia en un punto como consecuencia de la pérdida de rigidez global.

En este planteo se admiten como válidas a ambos puntos de vista.

También debe mencionarse el hecho de que no se ha pensado el modelo para ningún tipo de material en particular. En este sentido, la formulación es todo lo general posible. Puede aplicarse tanto a lo que se entiende como materiales compuestos avanzados, como a un material tan clásico de la ingeniería civil como el hormigón armado. El concepto es el mismo, sólo varía la escala.

Igualmente, la teoría no supone a priori ningún modo de pandeo determinado. Esto permite al modelo ser válido para cualquier volumen de fibras.

7.3.2 Definición general del modelo de fibras.

El modelo que se propone es una modificación del de daño isótropo de Kachanov (Oliver et al. (1990)³). Dicha modificación consiste en la inclusión de una nueva variable interna escalar, que define el comportamiento por pandeo, como se muestra en la siguiente ecuación

$$\sigma = (1 - d_f) \cdot (1 - d_p) \cdot \mathbb{C} : \epsilon \quad (7.27)$$

donde σ es el tensor de tensiones; ϵ el tensor de deformaciones; \mathbb{C} el tensor constitutivo inicial; d_f la variable de daño mecánico; y d_p la variable de pérdida de rigidez por pandeo. La variable d_p está acotada inferior y superiormente, tomando valores entre cero y uno, $0 < d_p < 1$, para cada extremo. El modelo resultante sigue siendo, por lo tanto, de daño isótropo. La variable de daño mecánico d_f está también acotada, $0 < d_f < 1$, y se obtiene de igual forma que en el modelo original que puede consultarse en la referencia Oliver et al. (1990)³. Su propiedad fundamental es su irreversibilidad, y su función dentro del modelo es la de cuantificar la degradación del material debida a la superación de la capacidad portante del mismo.

La variable de pérdida de rigidez por pandeo d_p , opuestamente a la variable de daño mecánico, se caracteriza principalmente por su reversibilidad. Su finalidad es la de considerar la pérdida de rigidez que acontece en la fibra en el momento de producirse su inestabilidad como una pérdida de capacidad portante a nivel constitutivo, influenciada por la interacción fibra matriz. Sobre esta afirmación es importante recordar, para evitar equívocos, que desde el punto de vista fenomenológico, el pandeo no es un fenómeno constitutivo, pero con este modelo, se hace una similitud entre el problema cinemático del pandeo y el problema constitutivo introducido por esta variable reversible d_p de pérdida de rigidez. Este procedimiento de “simulación macroscópica”, permite estudiar la inestabilidad de un gran número de fibras, sin que importe exactamente el comportamiento de una cualquiera de ellas, sino sólo la influencia que este fenómeno tiene en el conjunto.

7.3.3 Definición de la variable de pérdida de rigidez por pandeo.

La definición de d_p se complementa con la inserción del modelo de daño en la teoría de mezclas generalizada y en la técnica del mapeo de espacios para el tratamiento de la

anisotropía general propuestas por Car (2000)¹⁴. También tiene en cuenta la propuesta de Rosen (1965)⁷ de asimilar la fibra a un conjunto de columnas esbeltas. A diferencia de éste, aquí no se supone a priori ningún modo de micro dobleces de fibra del material, sino que el modo de inestabilidad resulta naturalmente de la formulación misma.

La definición más general se muestra en la siguiente ecuación,

$$d_p = f_1(\text{fibra}) \cdot f_2(\text{matriz}) \quad (7.28)$$

donde $f_1(\text{fibra})$ es una función que depende de las propiedades características de la fibra; y $f_2(\text{matriz})$ depende de las propiedades de la matriz. La consideración de la primera de ellas es obligada puesto que un modelo de inestabilidad de las fibras debe tener de alguna forma en consideración las propiedades mecánicas de las mismas. La inclusión de la segunda función tiene como finalidad simular la coacción al movimiento que ejerce la matriz sobre la fibra, estableciendo así una condición de contorno para las fibras, que depende de la propia evolución del proceso mecánico (variable interna).

La idea básica de esta definición es la de aprovechar la situación que crea la teoría de mezclas generalizada para la solución numérica del problema de interacción entre las sustancias componentes. Dicha teoría se basa en la descomposición del material compuesto en sus componentes, la integración de la ecuación constitutiva particular de cada uno de ellos, y la obtención de la respuesta del compuesto como una recomposición de las respuestas obtenidas para los materiales componentes en función de la participación volumétrica de los mismos. La interacción entre los distintos materiales se produce en la etapa de recomposición de la respuesta. En este marco, la idea es considerar la fibra como un sistema de columnas independientes que actúan de forma conjunta, pero sin la matriz que las une y las cohesiona (Figura 7.7). Estas columnas son geométricamente perfectas y sin imperfecciones. Frente a cargas actuantes, las fibras tendrán una tendencia natural a pandear debido a su gran esbeltez. La consideración del efecto de coacción al movimiento y, en general, de confinamiento que ejerce la matriz circundante se tiene en cuenta a dos niveles: a través de la recomposición de la teoría de mezclas y de la variable de pérdida de rigidez por pandeo. Esto supone un mayor factor de interrelación entre los materiales componentes.

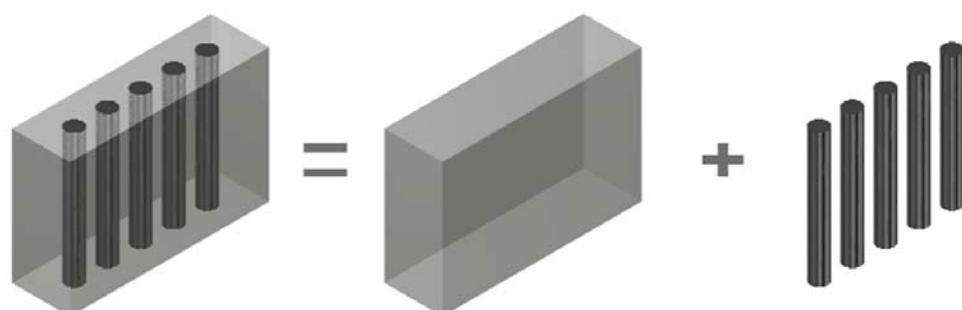


Figura 7.7 – Descomposición del material compuesto en sus componentes.

¹⁴ Car, E.J. (2000). *Modelo Constitutivo Continuo para el Estudio del Comportamiento Mecánico de los Materiales Compuestos*. PhD thesis, Universitat Politècnica de Catalunya. Barcelona, España.

7.3.3.1 Participación de la fibra.

La participación de la fibra se realiza mediante la definición de una relación entre la tensión aplicada y la tensión de comparación ($f_i(\text{fibra}) = \sigma_{\text{aplic}}/\sigma_{\text{comp}}$). Esta formulación para la fibra se obtiene a partir de la expresión clásica de la tensión crítica de Euler, modificada para tener en cuenta la reducción del módulo elástico debido a la degradación de la propia fibra. Estas tensiones aplicadas y de comparación se definen para la fibra como,

$$\sigma_{\text{aplic}} = (1 - d_f) \cdot (1 - d_p) E_0 \varepsilon \quad (7.29)$$

donde σ_{aplic} es la tensión longitudinal de la fibra; E_0 el módulo longitudinal de la fibra; y ε la deformación elástica longitudinal de la fibra, y

$$\sigma_{\text{comp}} = \frac{n_p^2 \pi^2 I}{A \cdot l^2} (1 - d_f) \cdot (1 - d_p) E_0 \quad (7.30)$$

donde σ_{comp} es la tensión de comparación; n_p el modo de pandeo; $I = \pi d^4 / 64$ la inercia de la sección recta de la fibra respecto del eje de flexión donde d es el diámetro nominal de la fibra; y l la longitud nominal de la fibra. La longitud de pandeo puede definirse en forma general como

$$\bar{l} = \frac{l}{n_p} \quad (7.31)$$

La tensión de comparación definida en la ecuación (7.30) se ha obtenido de sustituir el módulo elástico del material en la expresión de la tensión crítica de Euler (ecuación (7.3)) por el módulo dañado correspondiente a cada paso de carga. Este cambio implica que la tensión de comparación difiera de la tensión crítica de Euler en que aquélla depende del proceso de carga y por lo tanto no puede definirse a priori, mientras que la expresión clásica de Euler no depende del proceso de carga. La idea básica, sin embargo, es la misma en ambos casos, que es proporcionar una tensión de referencia que permita decidir si la tensión en el material es suficiente para producir la inestabilidad, y en qué modo se producirá ésta.

La longitud de pandeo del modelo (ecuación (7.31)) puede interpretarse como una modificación adecuada de una longitud nominal original l . En cada caso particular, el proyectista o analista deberá decidir su valor más adecuado y que mejor represente el problema a estudiar. En particular, para el caso de un material compuesto laminado típico, la longitud l tomaría el valor de la longitud nominal de las fibras. De la misma manera, si el análisis consistiera en el estudio de una viga o columna de hormigón armado, el valor adecuado sería la longitud libre entre cercos. La evolución posterior de la longitud de pandeo estará condicionada por el proceso de carga, pero no serán necesarios ajustes complementarios por parte del analista.

La evolución de los modos de pandeo n_p depende del proceso de carga. Para estados de carga en que la tensión en la fibra aumenta con los desplazamientos (rama creciente del diagrama tensión-deformación), el modo de pandeo debe ser tal que la tensión de comparación sea igual o superior a la tensión alcanzada en el paso anterior del proceso de carga. Es decir,

$$n_p^{t+1} / \sigma_{\text{comp}}^{t+1} \geq \sigma_f^t \quad (7.32)$$

Donde $t+1$ es el paso de carga correspondiente al tiempo actual, t el paso de carga anterior; y σ_f la tensión en la fibra para el estado convergido. En el caso que la fibra no pueda asumir mayores niveles de tensión para nuevos aumentos de deformación (rama decreciente del diagrama tensión-deformación), se supone que la fibra pandea y, por lo tanto, la relación entre las tensiones aplicada σ_{aplic} y de comparación σ_{comp} es idéntica a la unidad. En este supuesto, se obtiene una aproximación al modo de pandeo de la fibra de la siguiente forma,

$$n_{\text{lim}} = \frac{4l}{\pi d} \sqrt{\varepsilon} \quad (7.33)$$

donde n_{lim} es el modo de pandeo límite para la rama descendiente del diagrama tensión-deformación.

En resumen, en este caso la participación de la fibra se define como

$$f_1(\text{fibra}) = \frac{\sigma_{\text{aplic}}}{\sigma_{\text{comp}}} = \left(\frac{4l}{n_p \pi d} \right)^2 \varepsilon \quad (7.34)$$

7.3.3.2 Participación de la matriz.

La segunda parte de la definición se basa en la idea de que la variable de pérdida de rigidez por pandeo debe considerar en su definición el efecto de coacción al movimiento y de confinamiento que sobre ella ejerce la matriz. Este efecto debe considerarse en la definición debido a que la teoría de mezclas no es una herramienta válida para su representación.

Para tal fin, es necesario que la matriz se modele mediante un modelo de daño isótropo de Kachanov. La variable de daño mecánico correspondiente a la matriz, d_m , como medida de la degradación de dicho material, se utiliza también en el presente modelo como una variable representativa de la evolución de la capacidad de confinamiento de la matriz sobre la fibra. Es decir, y en el caso de que la matriz esté formada por un único material, se define,

$$f_2(\text{matriz}) = d_m \quad (7.35)$$

En el caso de que la matriz estuviese constituida a su vez por más de un material componente, la definición dada en la Ecuación (7.9) se generalizaría de la siguiente forma

$$f_2(\text{matriz}) = \sum_{j=1}^{n_m} k_{m,j} d_{m,j} \quad (7.36)$$

donde n_m es el número de materiales componentes de la matriz; $d_{m,j}$ es el daño mecánico del material j -ésimo de la matriz, y $k_{m,j}$ es el coeficiente de participación volumétrica local de la matriz del material j -ésimo de la misma, que se define como

$$k_{m,j} = \frac{V_{m,j}}{V_m} = \frac{V_{m,j}}{V - V_f} \quad (7.37)$$

donde V_m , V_f , $V_{m,j}$ y V son respectivamente los volúmenes de la matriz, de la fibra, del material componente j -ésimo y del compuesto total. Es decir, se aplica la teoría de la mezcla de sustancias al daño mecánico de los materiales componentes de la matriz, estableciéndose así una composición de comportamientos.

Debe considerarse, por último, la conveniencia o no de modificar la definición dada en la ecuación (7.36) de la siguiente manera:

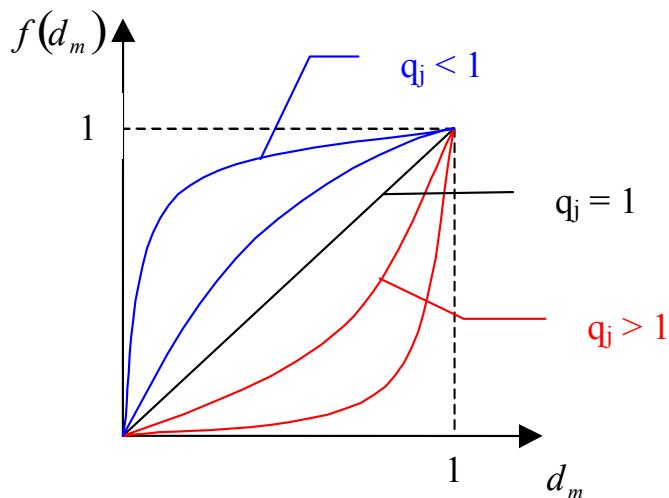


Figura 7.8 – Representación de la capacidad de confinamiento de la matriz mediante un exponente q_j .

$$f_2(\text{matriz}) = \sum_{j=1}^{n_m} k_{m,j} (d_{m,j})^{q_j} \quad (7.38)$$

donde q_j actuaría como un factor regulador de la influencia de la matriz sobre la fibra. Es decir, si $q_j > 1$, se estaría asumiendo que en los primeros estadios del proceso de degradación del material matriz considerado, éste es capaz de seguir coaccionando el movimiento de una forma bastante efectiva (Figura 7.8). A medida que aumentara el daño, la posibilidad del pandeo aumentaría en mayor medida que al principio. Si, por el contrario, se define una $q_j < 1$, se estaría considerando que el material pierde rápidamente la capacidad de coacción en el momento en que empieza a degradarse.

Probablemente, sin embargo, la problemática será mucho más extensa de lo que aquí se da a entender. Es posible que el ajuste exacto de dichos coeficientes dependa en realidad de la combinación de materiales que se realice. Es decir, una misma matriz con dos tipos de fibras diferentes podría tener un diferente comportamiento frente a la inestabilidad de estas últimas debido a que los mecanismos de adherencia son distintos, al propio proceso de fabricación del compuesto, etc. Sin embargo, debe huirse de considerar casos extremos. Es decir, ajustar el valor de un único coeficiente para todos los casos posibles sería tan poco práctico como intentar definir un valor para todas y cada una de las combinaciones de materiales posibles. Definiendo un valor medio para cada material, indistintamente de la combinación que se haga de los mismos y del tipo de fibra con el que formará el compuesto, debería ser suficiente en la mayoría de los casos.

Sin embargo, la inclusión de esta variable q_j en el modelo tiene una clara desventaja, en una primera aproximación, se trataría de un parámetro empírico o semi-empírico. Lo

ideal sería definir dichos coeficientes como una función de las propiedades de los propios materiales componentes de la matriz. Sin embargo, resultaría más fácil aproximar el valor a partir de ensayos experimentales. Si se actuara de esta última forma, el modelo dependería de una variable ajustada experimentalmente, con lo cual se perdería la generalidad con que se ha tratado el problema hasta el momento. Por lo tanto, antes de intentar definir o ajustar dicho parámetro, debería discutirse acerca de la conveniencia de incluirlo o no en el modelo.

7.3.3.3 Propuesta de la variable de pérdida de rigidez por pandeo.

Con los elementos presentados hasta el momento, la definición de la variable de pérdida de rigidez por pandeo que se propone en este trabajo resulta escrita del siguiente modo,

$$d_p = \left(\frac{4l}{n_p \pi d} \right)^2 \varepsilon \left[\sum_{j=1}^{n_m} k_{m,j} d_{m,j} \right] \quad (7.39)$$

Es decir, la variable de pérdida de rigidez por pandeo depende de características geométricas propias de la fibra (longitud y diámetro), de la evolución de las características mecánicas de la matriz (suma ponderada del daño mecánico de los materiales componentes de la matriz) y del paso de carga considerado (deformación actuante y condiciones sobre la evolución del modo de pandeo).

7.4 Principales características del modelo.

De la propia definición de la variable de pérdida de rigidez por pandeo d_p (ecuación (7.39)) pueden extraerse conclusiones respecto al comportamiento del modelo definido en la ecuación (7.27). En primer lugar, el pandeo de la fibra no es posible si no existen procesos de degradación en la matriz. Este hecho se refleja con claridad en la ecuación (7.39), pues si no existe degradación de la matriz, el daño mecánico de la misma es nulo y la variable de pérdida de rigidez d_p vale cero. Sólo cuando se supere el primer umbral de daño en la matriz podrá producirse pérdida de rigidez.

A tenor de la ecuación (7.27), la pérdida total de capacidad portante en la fibra puede darse como consecuencia del daño mecánico d_f en ella misma, de la pérdida de rigidez por pandeo d_p o por una combinación de ambos. Los estudios llevados a cabo al respecto demuestran, en los casos estudiados, que la rotura tiene lugar por una combinación de ambos fenómenos. Al iniciarse el fenómeno, las fibras podrían estar sometidas a desplazamientos y curvaturas excesivas que no serían capaces de soportar, con lo que se iniciarían procesos de rotura física de las mismas. Un ejemplo sencillo permite demostrar esta afirmación.

El ejemplo consiste en un único elemento finito cuadrangular de 4 nodos y 4 puntos de Gauss, en estado plano de tensiones, y sometido a desplazamientos impuestos, tal y como muestra la Figura 7.9. Las fibras están dispuestas paralelamente a la dirección del esfuerzo. Las propiedades de los materiales pueden observarse en la Tabla 7.1 y Tabla 7.2.

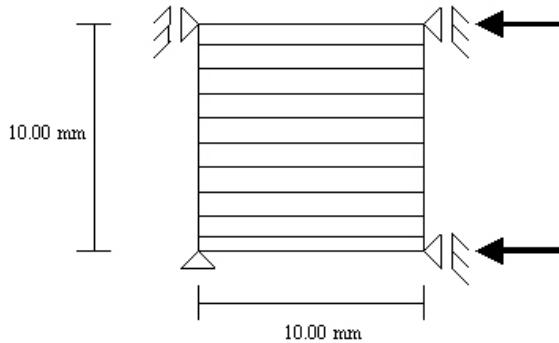


Figura 7.9 – Esquema y condiciones de contorno utilizadas.

Propiedad	Valor
Tipo de modelo	Daño Isótropo de Kachanov
Módulo de Young (MPa)	$3.5 \cdot 10^4$
Resistencia a Compresión (MPa)	10
Ángulo de fricción interna	30°
Energía de aplastamiento a comp. (N/m)	$2.0 \cdot 10^3$
Volumen de matriz (k_m)	0.40

Tabla 7.1 – Propiedades mecánicas de la matriz (hormigón).

Propiedad	Valor
Tipo de modelo	Varios:
	Daño Isótropo de Kachanov
	Pérdida de rigidez por pandeo
	Daño Isótropo de Kachanov
	y pandeo acoplados
Módulo de Young longitudinal (MPa)	$2.1 \cdot 10^5$
Módulo de Young transversal (MPa)	$2.33 \cdot 10^4$
Resistencia a compresión (MPa)	200
Coeficiente de Poisson	0.00
Energía de aplastamiento a comp. (N/m)	$5.0 \cdot 10^3$
Volumen de fibra (k_f)	0.60

Tabla 7.2 – Propiedades mecánicas de la fibra (acero).

La fibra se ha modelado con tres tipos de modelo distintos para comparar las diferentes respuestas. El primero de ellos es un modelo de daño isótropo de Kachanov. El segundo es un modelo simplificado del que se presenta, en el que sólo se tiene en cuenta la pérdida de rigidez por pandeo, y no se tiene en cuenta el posible daño mecánico. Por último, se utiliza el modelo de pérdida de rigidez por pandeo que aquí se presenta, en el que se acoplan las variables de daño mecánico y la variable de pandeo.

Debe remarcarse que el objetivo de este ejemplo no es simular el posible pandeo global de la probeta (no tiene sentido hablar del pandeo de un elemento finito), sino la pérdida de rigidez debida a la inestabilidad a nivel microscópico de la fibra. Aunque, como se ha visto, ambos fenómenos comparten una base teórica similar, representan comportamientos estructurales muy diferentes. Así, mientras el pandeo general de la estructura induce

una pérdida de rigidez a todos los materiales del compuesto, la inestabilidad local de las fibras produce una pérdida de capacidad portante brusca en el material de refuerzo y una transferencia de esfuerzos a la matriz que suele sobrepasar con creces la resistencia de la misma, produciéndose la rotura de todo el compuesto. A modo de resumen, el pandeo global de la estructura induce una pérdida de rigidez de compuesto a componentes, mientras que la inestabilidad local la induce en el sentido contrario, de componentes a compuesto.

Como complemento a todo lo anterior, y aunque no se trate en este trabajo, hay que mencionar que la teoría de mezclas está también considerando el daño en la matriz no sólo desde el punto de vista de su influencia en el pandeo de las fibras, sino como deterioro de la matriz misma. Entre las posibles causas que conducen a este deterioro está la influencia del daño inducido por el pandeo global.

Los resultados se muestran en la Figura 7.10. El modelo de daño isótropo de Kachanov es incapaz de simular la degradación de la fibra por inestabilidad (Figura 7.1), debido a que este hecho tiene lugar para tensiones y deformaciones mucho menores al límite del primer umbral de daño. Dicho de otra manera, la variable de daño mecánico es una medida de la pérdida de capacidad portante debida a incrementos de los esfuerzos actuantes sobre la fibra, pero es incapaz de reflejar fenómenos de inestabilidad inducidos por la pérdida de las propiedades resistentes de la matriz.

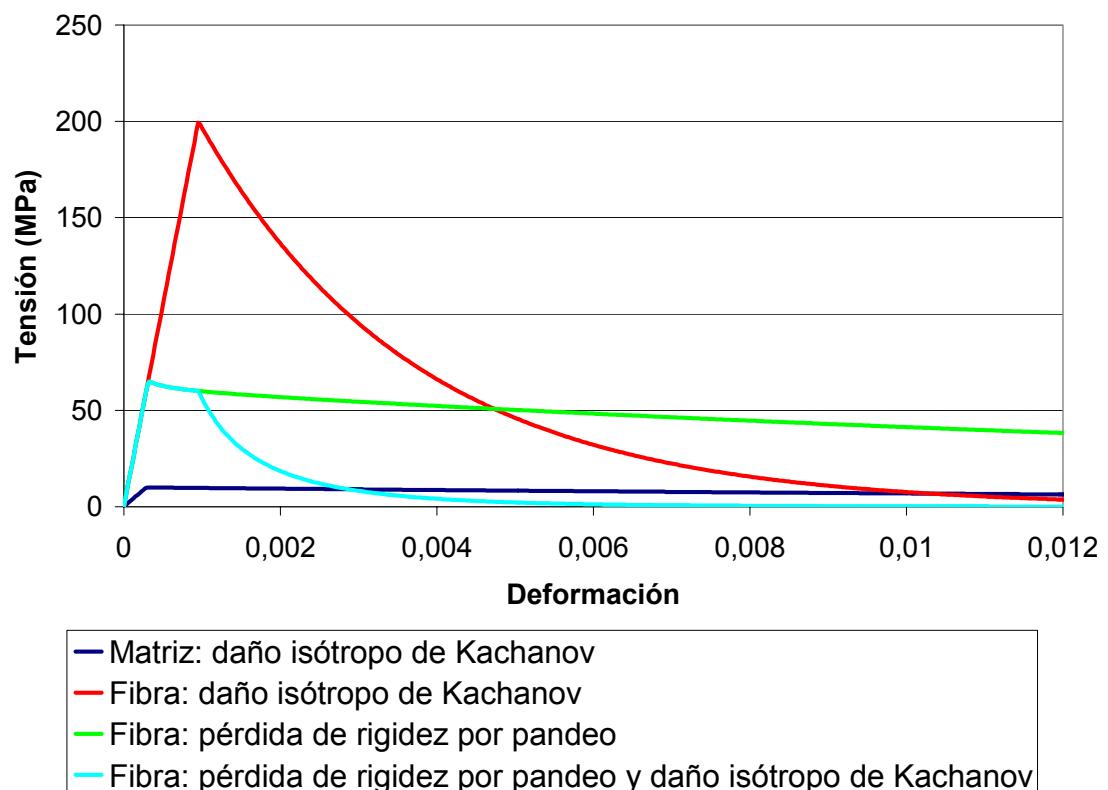


Figura 7.10 – Comparación de la respuesta de la fibra para diferentes modelos.

La variable de pérdida de rigidez por pandeo d_p , por sí sola, tampoco es capaz de reproducir la totalidad del fenómeno, ya que no puede considerar actuantes sobre la fibra,

pero es incapaz de reflejar fenómenos de inestabilidad inducidos por la pérdida de las propiedades resistentes de la matriz. La variable de pérdida de rigidez por pandeo d_p , por sí sola, tampoco es capaz de reproducir la totalidad del fenómeno, ya que no puede considerar las fisuras y roturas que se producen debido a las deformaciones excesivas. Únicamente la combinación de ambas variables puede reproducir la complejidad del fenómeno. En el caso que se estudia, en que la resistencia de la matriz es mucho menor que la de la fibra (caso más común en los materiales compuestos avanzados), se inicia la pérdida de rigidez de la fibra en el momento en que se supera el primer umbral de daño de la matriz. De esta manera, el valor de pico de la tensión en la fibra es muy inferior a la tensión de fluencia del material. En el momento en que se inicia el proceso de daño mecánico en la fibra, se observa el efecto multiplicador de la pérdida de rigidez por pandeo: la pérdida de capacidad portante disminuye de forma importante, de forma más acelerada y a niveles de tensión muy inferiores a los obtenidas mediante un modelo de daño de Kachanov. Un análisis más detallado puede encontrarse en la referencia Puig (2001)¹.

Una de las principales propiedades de la variable de pérdida de rigidez por pandeo definida en la ecuación (7.39), y que la diferencia fundamentalmente de la variable de daño clásica, es su reversibilidad. En efecto, durante un proceso de carga monótono creciente, la variable de pérdida de rigidez por pandeo también evolucionará de forma creciente. En concreto, en cada paso de carga deberán actualizarse los valores del modo de pandeo n_p , de la deformación ε y del daño de la matriz d_m . Si, llegados a cierto punto, se inicia un proceso de descarga, el daño de la matriz y el modo de pandeo se mantienen constantes: el primero por su naturaleza irreversible, y el segundo por el mantenimiento de las condiciones de contorno que se derivan de la degradación de la matriz. En efecto, el confinamiento que la matriz ejerce sobre la fibra puede asimilarse, en un esquema estructural, a unas micro-condiciones de contorno inducida de un material a otro. Al cambiar las propiedades físicas de la matriz por efecto de su propia degradación, las micro condiciones de contorno también varían y, por lo tanto, el modo en qué puede pandear la fibra también debe hacerlo. En el proceso de descarga, la matriz no puede recuperar las propiedades del material original, manteniéndose constante el daño alcanzado y, también, las micro-condiciones de contorno inducidas a la fibra. De esta manera, el modo de pandeo debe mantenerse constante igualmente.

La deformación total para el compuesto, en cada paso de carga, se predice antes de la aplicación del algoritmo de la teoría de mezclas. Luego, mediante una ecuación de compatibilidad entre fibra y matriz (Car (2000)¹⁴) se obtiene la deformación de cada componente. Este procedimiento es independiente del proceso de carga o de descarga. Por lo tanto, la deformación ε variará desde el último valor alcanzado en el proceso de carga hasta el valor nulo si se realiza una descarga completa. Por lo tanto, la variable de pérdida de rigidez por pandeo d_p , también actuará de la misma manera. Es decir, en un proceso de carga hasta el paso $r = t+i$, se tiene:

$$d_p^{t+1} \in [0, d_p^r]; \forall (t+1) \in [1, r] \quad (7.40)$$

Si en el paso $r+1$ se inicia un proceso de descarga completa hasta el paso $s = r+k$, se tiene

$$d_p^{r+j} \in [d_p^r, 0]; \forall (r+j) \in [r, s] \quad (7.41)$$

Es decir, el valor de la variable de pérdida de rigidez por pandeo es totalmente reversible. Sin embargo, el proceso mismo de carga no lo es.

En efecto, la Figura 7.11 muestra un ciclo completo de carga, descarga y recarga para la fibra. El proceso de carga sigue la curva O - A - B - C, el de descarga la parábola C - O, la recarga sigue también la parábola O - C, y en este punto se sigue cargando y el material sigue el proceso de degradación que tenía lugar antes de la descarga.

La **primera conclusión** que resulta de este proceso de carga-descarga-recarga es la evidencia que la descarga sigue un camino elástico no-lineal, y puede demostrarse que toma la forma (Puig, 2001),

$$\sigma_{\text{descarga/recarga}} = \mathbb{C}(\varepsilon) : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (7.42)$$

La **segunda conclusión** hace referencia a que el fenómeno de la inestabilidad de las fibras es no-recuperable en parte, esto se debe a que ésta inestabilidad se produce luego de dañarse la matriz. Es decir, la pérdida de rigidez por inestabilidad es un fenómeno asociado directamente a la carga de compresión actuante. Si disminuye, el material debe recuperar la rigidez perdida (la expresión (7.41) refleja este hecho, indicando que la variable de pérdida de rigidez es totalmente recuperable). Ahora bien, debe tenerse en cuenta que el proceso de carga de la fibra se ha realizado con una matriz, cuya rigidez no es constante durante el proceso mecánico, pues está sujeta a la degradación considerada en la variable de daño mecánico de la misma. En el proceso de descarga, la matriz no puede recuperar sus propiedades originales, por lo que el proceso de descarga de la fibra debe seguir, obligatoriamente, una curva distinta a la de carga.

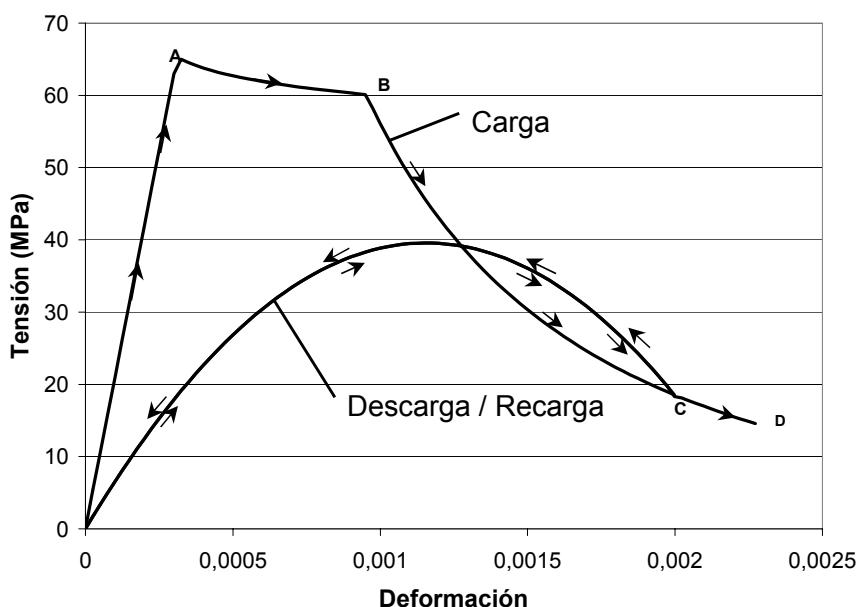


Figura 7.11 – Ciclo de carga, descarga y recarga de la fibra.

La **tercera conclusión** es que en un proceso de descarga-recarga, una vez se ha iniciado la pérdida de rigidez por pandeo, la fibra no resiste de la misma forma que el material original, aun en ausencia de daño mecánico en la misma. Fijándose en la Figura 7.10, si se inicia un proceso de descarga antes de que se supere el primer umbral de daño mecánico de la fibra, el modelo de daño isótropo de Kachanov predice que la fibra se mantiene en el rango elástico, por lo que debería resistir de la misma manera que el material original, independientemente de que la matriz haya iniciado su proceso de degradación. En

cambio, si también se considera la pérdida de rigidez por pandeo, se observa en la Figura 7.11 que la fibra no resiste de la misma manera. Y si la descarga se produce cuando el daño mecánico de la fibra ha superado su primer umbral, el modelo predice que la respuesta de la fibra será siempre menor que la respuesta del modelo de daño isótropo de Kachanov debido al hecho de que la variable de pérdida de rigidez, a pesar de que disminuye, se mantiene distinta de cero hasta que la descarga es completa.

La cuarta y más importante conclusión, que se deduce de la anterior, es que el fenómeno del pandeo de las fibras largas se desarrolla bajo un proceso disipativo, cuyos detalles pueden verse en la referencia de Puig (2001)¹.

7.5 Disipación de energía.

La Figura 7.11 y, de forma más clara, la Figura 7.12 muestran que el fenómeno del pandeo de las fibras largas ocurre durante un proceso mecánico disipativo. En efecto, en la Figura 7.12 puede verse un ciclo completo de carga y descarga para la fibra. La energía de deformación del proceso de carga (área bajo la curva O-A-B) es mayor que la del proceso de descarga (área bajo la curva B-O). La diferencia es la energía disipada. La recarga, como se ha visto anteriormente, se produce por la misma curva que la de descarga (curva O - C en la Figura 7.11). Es decir, los procesos de descarga-recarga son no disipativos.

La energía disipada se justifica físicamente atendiendo al hecho de que las condiciones de contorno de la fibra, son distintas durante el proceso de carga y el de descarga. En efecto, las micro condiciones de contorno inducidas por la matriz a la fibra, debido al confinamiento que la primera ejerce sobre la segunda, evolucionan a lo largo del proceso de carga debido a la degradación de la matriz. Es decir, esta degradación en la matriz impide que ésta ejerza el confinamiento con la misma eficacia que el material no dañado. Al ser las condiciones de contorno distintas, las energías de deformación generadas por ambos procesos también deben serlo.

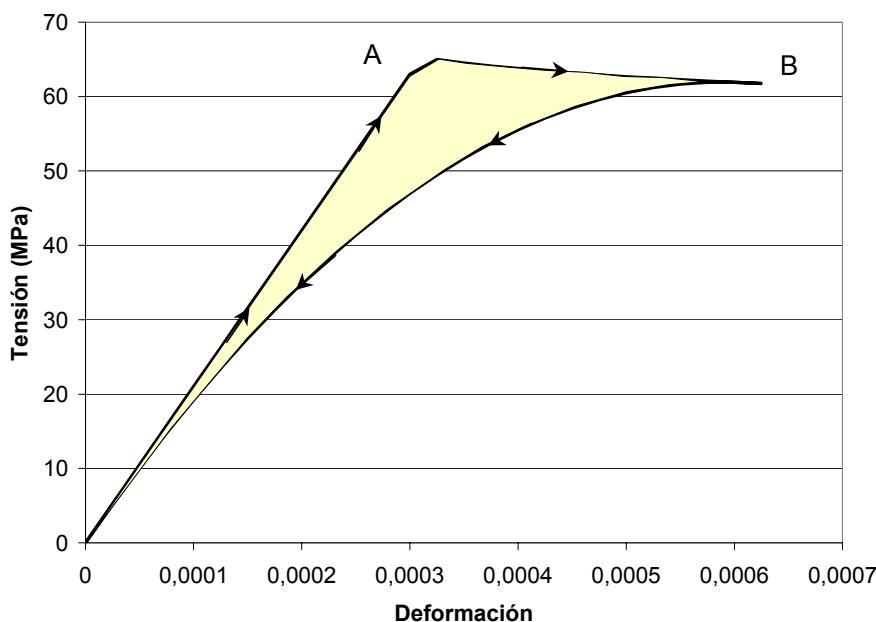


Figura 7.12 – Ciclo de carga y descarga de la fibra. Energía disipada.

Para aclarar el concepto que se trata, considérese el proceso descrito en la figura 13, donde una columna esbelta de longitud l con los movimientos laterales coaccionados en sus extremos y en el punto medio se somete a un proceso de carga, y la columna pandea. En esta situación, la carga crítica para cada vano y, por lo tanto, para la estructura, se expresa como,

$$N_{E,a} = \frac{\pi^2 EI}{(l/2)^2} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2} \quad (7.43)$$

En la situación pandeada, supóngase que el arriostramiento intermedio falla. Este suceso puede interpretarse como que el punto intermedio se daña de manera que no puede seguir ejerciendo su efecto de coacción al movimiento. En esta situación, la carga crítica de Euler se escribe

$$N_{E,b} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (7.44)$$

Las igualdades (7.43) y (7.44) pueden interpretarse también como las cargas críticas de Euler correspondientes al primer y segundo modos de pandeo de una columna esbelta de longitud l (ecuación (7.3)). Si se tratara de piezas ideales, en la situación b) de la Figura 7.13 la columna asumiría de forma natural la deformada y la carga correspondientes al segundo modo de pandeo. Sin embargo, en una situación real, con piezas reales, la columna asumiría el primer modo de pandeo por representar una situación de equilibrio energético menor. El cambio de estructura se reflejará a nivel constitutivo como un aumento de las deformaciones y una disminución de las tensiones, como muestra la Figura 7.13c. Si en estas condiciones se produce la descarga de la estructura, es obvio que el recorrido en el diagrama tensión-deformación no será el mismo que en el proceso de carga. Por lo tanto, todo el proceso habrá disipado energía (el área rayada de la Figura 7.13c). Es decir, *la disipación de energía se produce por un cambio en las condiciones de contorno de la estructura*. Todo este razonamiento puede resumirse argumentando que las condiciones de contorno en los procesos de carga y descarga son distintas. Y dos procesos elásticos, con distintas condiciones de contorno, generan diferentes energías de deformación.

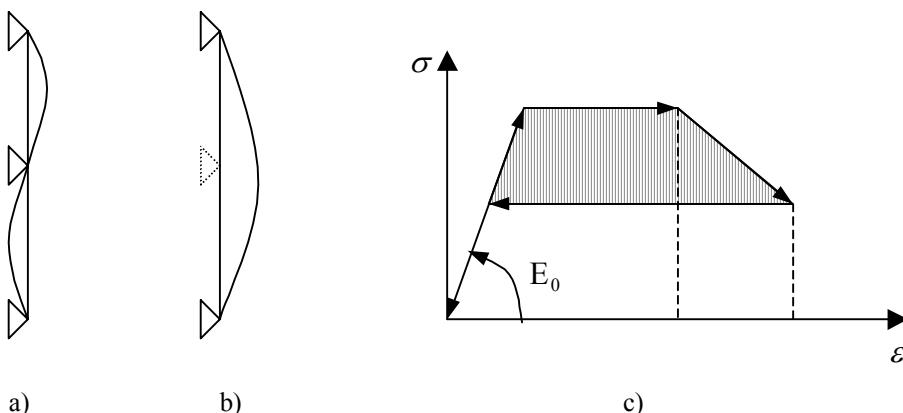


Figura 7.13 – Carga y descarga de una columna esbelta; a) carga y pandeo; b) daño del apoyo intermedio y descarga; c) energía disipada.

A modo de corolario, puede afirmarse que *el fenómeno de la inestabilidad elástica en materiales compuestos con fibras largas disipa energía* del mismo modo que *un proceso evolutivo de inestabilidad elástica clásica también disipa*. En ambos casos, la disipación es debida a un cambio en las condiciones de contorno del problema.

Por último, cabe señalar que el calificativo de *elástica* hace referencia a la ausencia de fenómenos plásticos en los materiales componentes del compuesto. Sin embargo, todo el proceso puede cualificarse de *inelástico* en cuanto que disipa energía.

Finalmente, en el proceso de descarga la degradación de la matriz se mantiene constante, ya que no es posible que pueda recuperar sus propiedades iniciales de material no dañado. Por lo tanto, las micro-condiciones de contorno no varían, como tampoco deben hacerlo en el proceso de recarga. Por lo tanto, ambos fenómenos son no-disipativos. Cuando la recarga alcanza de nuevo los valores a los cuales se había iniciado la descarga (punto C, Figura 7.11), la matriz supera de nuevo su umbral de daño y se reanudan los procesos de degradación de la misma (curva C-D, Figura 7.11). Consecuentemente, la pérdida de rigidez por pandeo y los fenómenos de degradación mecánica de la fibra (si ha lugar), también se reanudan.

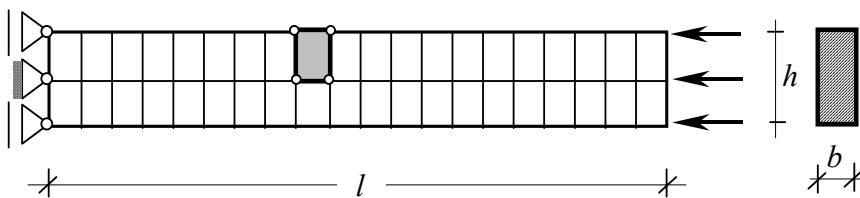


Figura 7.14 – Malla de elementos finitos y condiciones de contorno utilizadas para la simulación numérica.

7.6 Ejemplo de comprobación.

En este apartado se presenta un ejemplo de aplicación de la formulación del modelo de pandeo previamente presentado. El ejemplo consiste en simular numéricamente una pieza esbelta constituida por un material compuesto de matriz reforzada con fibras largas (hormigón armado). Las propiedades mecánicas de la matriz son las propias de hormigón con resistencia de 10 MPa, y las de la fibra de un acero de resistencia de 200 MPa, ver Tabla 7.3 y Tabla 7.4. Las participaciones de la matriz y la fibra son del 40% y del 60% respectivamente. La Figura 7.14 muestra la malla de elementos finitos usada. La fibra está dispuesta según el eje longitudinal de la barra. Se ha resuelto un problema con grandes deformaciones en tensión plana para tener en cuenta la inestabilidad global de la barra.

El objetivo del ejemplo es la comparación entre los comportamientos con y sin pandeo local. Esto pone en evidencia las diferencias entre los fenómenos de la inestabilidad global de la estructura y el de inestabilidad local de la fibra.

Propiedad	Valor
Tipo de modelo	Varios:
Módulo de Young (MPa)	Elástico.
Resistencia a Compresión (MPa)	Daño Isótropo de Kachanov
Coeficiente de Poisson	$3.5 \cdot 10^4$
Ángulo de fricción interna	10
Energía de aplastamiento a comp. (N/m)	0.20
Volumen de matriz (k_m)	30°
	$2.0 \cdot 10^3$
	0.40

Tabla 7.3 – Propiedades mecánicas de la matriz (hormigón).

Propiedad	Valor
Tipo de modelo	Varios:
Módulo de Young longitudinal (MPa)	Elástico.
Módulo de Young transversal (MPa)	Daño Isótropo de Kachanov
Resistencia a compresión (MPa)	y pérdida de rigidez por pandeo.
Coeficiente de Poisson	$2.1 \cdot 10^5$
Energía de aplastamiento a comp. (N/m)	$2.33 \cdot 10^4$
Volumen de fibra (k_f)	200
	0.00
	$5.0 \cdot 10^3$
	0.60

Tabla 7.4 – Propiedades mecánicas de la fibra (acero).

El *primer* caso se obtiene mediante la simulación del pandeo global y sin pandeo local, con los materiales componentes definidos elásticamente. Con el fin de alcanzar la inestabilidad global de la estructura, es necesario introducir en el sistema una perturbación. Ésta se ha materializado mediante una pequeña fuerza transversal aplicada en el extremo derecho de la malla de la Figura 7.14. La deformada final de la estructura se muestra en la Figura 7.15a (desplazamientos en cm.), donde se hace evidente la inestabilidad global. En la Figura 7.16 se muestra la curva reacción-movimiento lateral de los puntos medios de cada extremo de la estructura. Como puede observarse en dicha gráfica, a la fase de pandeo le sucede una rigidización de la estructura (resistencia post-crítica) para desplazamientos transversales superiores a 40 mm.

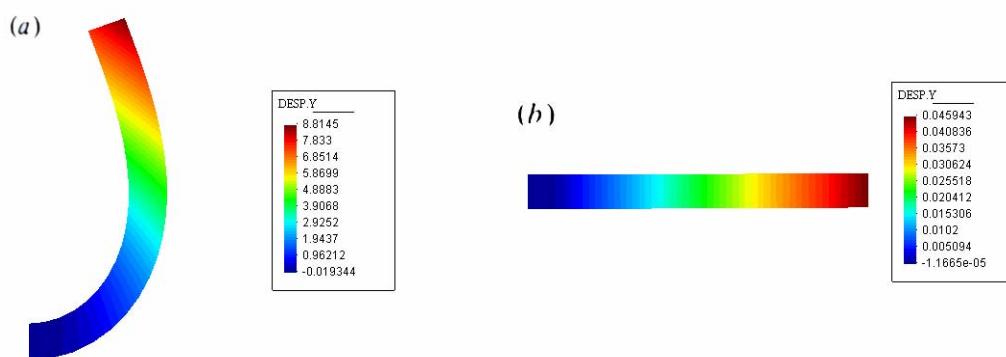


Figura 7.15 – Deformada de la estructura: a) caso en que matriz y fibra se comportan como elásticamente perfectos; b) caso en que la matriz se simule mediante un modelo de daño isótropo de Kachanov y la fibra mediante un modelo de daño isótropo con pérdida de rigidez por pandeo.

La *segunda* simulación modela la matriz mediante un modelo de daño isótropo de Kachanov, y la fibra mediante el modelo de pérdida de rigidez por pandeo. La deformada final, a la misma escala y con las mismas unidades que en el caso anterior, se muestra en la Figura 7.15b. En este caso, la estructura falla por el micro-pandeo de las fibras, pero no tiene lugar ninguna inestabilidad global. En comparación, en el modelo de daño la estructura falla casi de manera frágil. Igualmente, los resultados en términos de reacción - desplazamiento lateral en los mismos puntos considerados en el caso anterior se grafican en la Figura 7.16. Debido a la diferencia de escalas que puede observarse en dicha figura, en la Figura 7.17 se realiza una ampliación de la primera parte de la gráfica.

Los resultados obtenidos en esta segunda simulación son completamente distintos a los de la simulación anterior. En primer lugar, los desplazamientos son mucho menores que en el caso elástico. Por otro lado, estos desplazamientos aumentan rápidamente a niveles de esfuerzos muy inferiores a los observados en la primera simulación. Sin embargo, la diferencia cualitativa más importante puede verse en la parte final de la gráfica, pues este caso no se produce rigidización. Los resultados de la figura 17 muestran la incapacidad de la estructura de resistir mayores niveles de deformación, lo que en un ensayo experimental equivaldría a una situación de rotura del material.

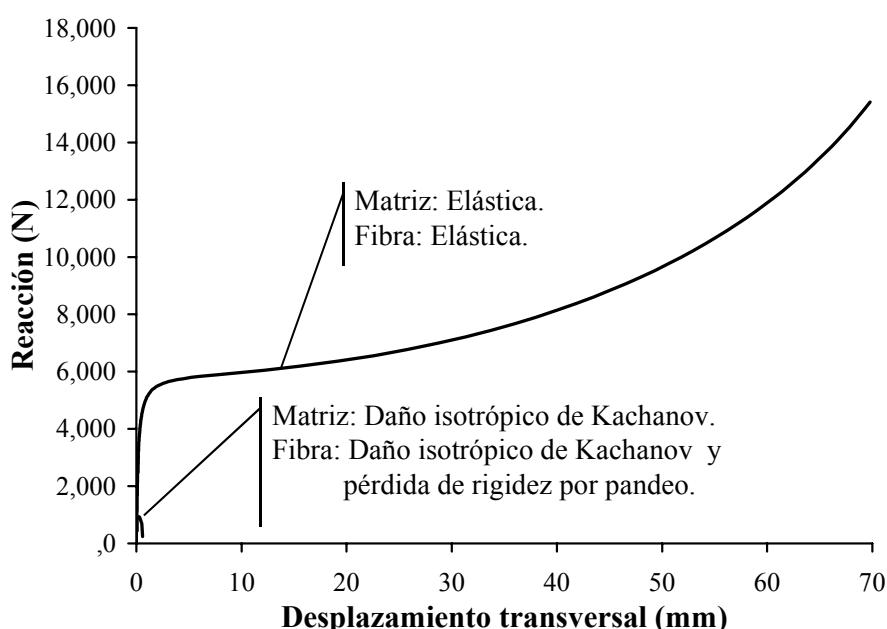


Figura 7.16 – Comparación de los resultados obtenidos con los distintos modelos.

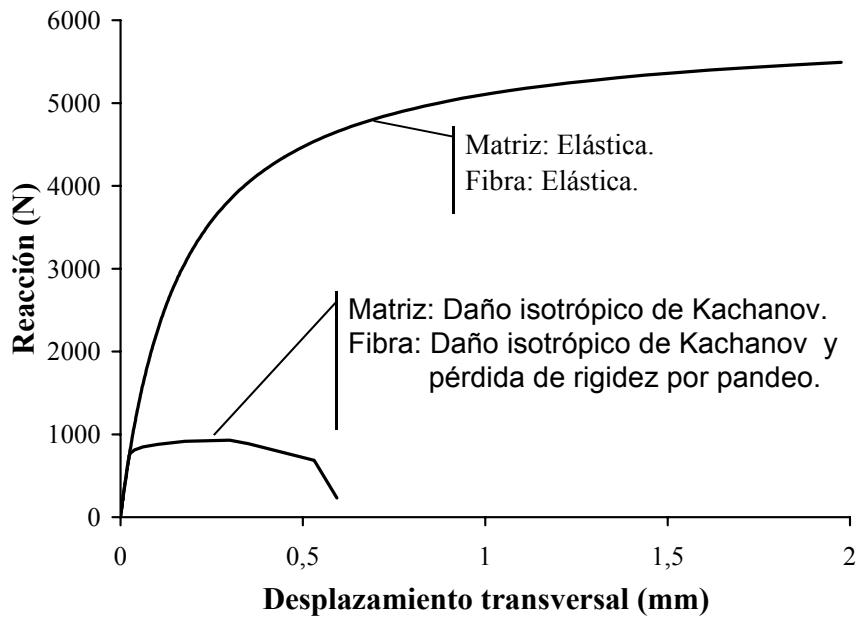


Figura 7.17 – Ampliación de la primera parte de la Figura 7.16.

Por lo tanto, las diferencias entre las simulaciones no son sólo cuantitativas, sino también cualitativas.

En el segundo caso estudiado, la inestabilidad de las fibras tiene lugar a niveles de esfuerzos y desplazamientos muy inferiores a los que se dan en la inestabilidad elástica. Por otro lado, la resistencia post-crítica que se obtiene en el modelo elástico no reproduce la realidad del fenómeno. El modelo de daño, por contra, no presenta dicha resistencia post-crítica, sino una pérdida de rigidez por deterioro de la matriz e inestabilidad de las fibras.

Por todo ello, se concluye que el modelo elástico (elasticidad perfecta para cada componente) no es adecuado para la simulación del pandeo de las fibras largas, debiéndose utilizar a tal efecto el modelo de daño (daño isotrópico para la matriz y con pérdida de rigidez por pandeo para la fibra).

