

MODELOS NUMERICOS HIDRODINAMICOS EN REDES FLUVIALES COMPLEJAS

PABLO MIGUEL JACOVKIS*

*Departamento de Computación,
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,
Universidad de Buenos Aires,
Pabellón I, Ciudad Universitaria,
1428 Buenos Aires, Argentina.*

RESUMEN

Los métodos implícitos de resolución numérica de las ecuaciones hiperbólicas casilineales de Saint-Venant de la hidráulica fluvial utilizados para analizar tramos de ríos o canales unidimensionales en régimen impermanente sobre fondo fijo pueden reducirse en cada paso de tiempo de cálculo (bajo la mayoría de los esquemas en diferencias finitas en uso) a la resolución de un sistema lineal $Ax = b$, donde A es una matriz banda. En este trabajo el análisis de tramos unidimensionales se generaliza a redes fluviales deltaicas con estructura compleja (tramos con afluentes, efluentes, bifurcaciones, etc.), en los que es necesario introducir las ecuaciones de compatibilidad en las confluencias. Si bien no se puede mantener la estructura de la matriz banda, se muestra que se puede ordenar A en forma de matriz rala con una estructura especial que facilita su solución, reduciendo el tiempo y memoria de computadora necesarias al mismo orden de magnitud que los requeridos para matriz banda de igual dimensión. Se describen diversos experimentos numéricos.

SUMMARY

The implicit methods for the numerical solution of the quasilinear hyperbolic equations of unsteady fluvial hydraulics (Saint-Venant equations) used to analyse reaches of one-dimensional rivers or channels over fixed beds may be reduced, for each time step (under most finite differences schemes currently applied), to the solution of a linear system $Ax = b$, where A is a band matrix. In this paper is described the generalization of the analysis of one-dimensional reaches to fluvial networks with a complex deltaic structure (reaches with tributaries, effluents, bifurcations, etc.), where the compatibility equations must hold at the junction points. Although the band matrix structure can not be maintained, it is shown that the matrix A has special block structure that simplifies considerably its solution, reducing the time and core memory so that they become proportional to those necessary for a band matrix. Several numerical experiments are described.

* Parte de este trabajo fue llevada a cabo mediante el apoyo del subsidio IN 013 de la Universidad de Buenos Aires.

INTRODUCCION

El flujo impermanente unidimensional de un fluido con superficie libre a lo largo de un canal o cauce fluvial no prismático de sección transversal de forma arbitraria sobre fondo fijo se describe aproximadamente mediante el sistema de ecuaciones diferenciales hiperbólicas casilineales de Saint-Venant:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q}{S} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{2gS^2} \right) + \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{Q|Q|}{D^2} = 0 \quad (1)$$

$$B \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

donde t y x indican la variable temporal y espacial, respectivamente, a lo largo del eje longitudinal del cauce, g la aceleración de la gravedad, $Q = Q(x, t)$ el caudal, $Z = Z(x, t)$ la altura o nivel de la superficie del escurrimiento respecto de un plano de referencia, $S = S(Z(x, t), x)$ el área mojada de la sección transversal al escurrimiento, $B = B(Z(x, t), x) = \frac{dS}{dZ}$ el ancho de la superficie libre y $D = D(Z(x, t), x)$ el coeficiente de conducción que mide la rugosidad del lecho (ver Figuras 1 y 2). La ecuación (1) es la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento y la (2) es la de conservación de la masa.

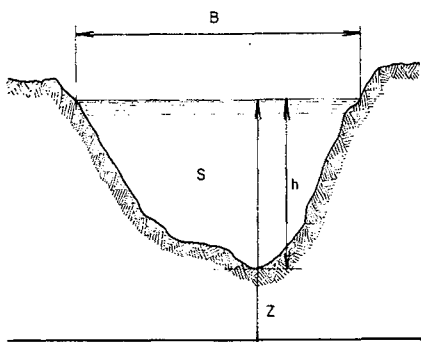


Figura 1. Sección transversal de un cauce fluvial.

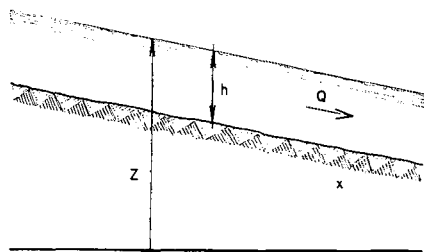


Figura 2. Corte longitudinal de un tramo fluvial.

La deducción detallada de estas fórmulas puede verse en Liggett¹. En Chow² se analizan, además del coeficiente de conducción, otros coeficientes usados para la estimación del término de resistencia. Dicho coeficiente, para casos reales, puede estimarse sólo en forma aproximativa, y su ajuste es una etapa crucial en cualquier modelización fluvial.

El sistema (1), (2) con condiciones iniciales

$$Q(x, t_0) = Q_0(x) \quad Z(x, t_0) = Z_0(x) \quad (3)$$

se puede escribir en la forma vectorial

$$\frac{\partial w}{\partial t} + A \frac{\partial w}{\partial x} = c \quad w(x, t) = w_o(x)$$

donde

$$w(x, t) = \begin{bmatrix} Q(x, t) \\ Z(x, t) \end{bmatrix}$$

$$A(w, x) = \begin{bmatrix} 2\frac{Q}{S} & gS - B\frac{Q^2}{S^2} \\ \frac{1}{B} & 0 \end{bmatrix}$$

$$c(w, x) = \begin{bmatrix} S_x \frac{Q^2}{S^2} - gS \frac{Q|Q|}{D^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los autovalores de A , reales en toda la región de existencia de la solución w , son

$$\lambda_{1,2} = \frac{Q}{S} \pm \sqrt{g \frac{S}{B}}$$

Por consiguiente, el sistema (1), (2) con condiciones iniciales (3) es un sistema de dos ecuaciones diferenciales en derivadas parciales hiperbólico casilineal de primer orden. En este trabajo nos referiremos exclusivamente al caso *subcrítico*, o sea cuando $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.

Si no se dan condiciones de contorno, el problema a resolver en una franja $\Omega = (x, t/x \in \mathbb{R}, t_o \leq t \leq T)$ es un problema con condiciones iniciales o de Cauchy; si la franja es en realidad un rectángulo $\Omega = (x, t/x_o \leq x \leq x_L, t_o \leq t \leq T)$ —como es el caso en estudio, en que los ríos se consideran desde un extremo aguas arriba hasta otro extremo aguas abajo— y estamos en el caso subcrítico, sobre las rectas $x = x_o$ y $x = x_L$ se dan condiciones de contorno del tipo

$$F_1(Q(x_o, t), Z(x_o, t)) = g_1(t) \quad F_2(Q(x_L, t), Z(x_L, t)) = g_2(t) \quad (4)$$

En este caso se tiene un problema mixto con condiciones iniciales y de contorno (ver, por ejemplo, Rozdestvenskii y Janenko³). Cabe observar que, dado que el sistema (1), (2) no es lineal, la existencia de una solución al problema de Cauchy o mixto no puede asegurarse a priori; la solución deberá ser una solución generalizada, o débil en el sentido de Lax⁴, con discontinuidades.

Usualmente, en los análisis teóricos se usan las ecuaciones simplificadas de aguas poco profundas, en las que se considera una sección transversal rectangular prismática y se desprecian los términos no homogéneos (es decir, la pendiente de fondo y el término de rozamiento son nulos). Las ecuaciones resultantes se pueden escribir como

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

donde $u = \frac{Q}{Bh}$ es ahora la velocidad en el sentido longitudinal y h es la altura del agua desde el fondo. Usando la analogía entre estas ecuaciones de aguas poco profundas y las ecuaciones isentrópicas de gases politrópicos, que se puede ver en Stoker⁵, y considerando el problema (5), (6) exclusivamente como problema de Cauchy, con condiciones iniciales sobre toda la recta $-\infty < x < \infty$

$$\begin{aligned} u(x, t_0) &= u_o(x) \\ h(x, t_0) &= h_o(x) \end{aligned} \quad (7)$$

se puede demostrar (ver Di Perna⁶) que existe solución débil si las condiciones iniciales tienen variación acotada y si

$$\inf_x u_o(x) + 2\sqrt{gh_o(x)} > \sup_x u_o - 2\sqrt{gh_o(x)}$$

Existen diversos métodos para resolver numéricamente este problema en una región acotada $\Omega = [x_o, x_L] \times [t_o, T]$. Una reseña de métodos en diferencias finitas y de características aplicables a este problema puede verse en Liggett y Cunge⁷.

Sea ahora una grilla en la región $\Omega_o = [0, x_L] \times [0, T]$, de paso espacial Δx y de paso temporal Δt , o sea la grilla incluye los puntos de discretización (x_i, t^n) , con $x_i = i\Delta x$ y $t^n = n\Delta t$. Una aproximación linealizada en diferencias finitas al sistema (1), (2) con dos niveles temporales (ver, por ejemplo, Richtmyer y Morton⁸) puede escribirse vectorialmente como

$$B_1^{n+1} w^{n+1} = B_o^n w^n + c^n$$

donde $B_o^n = B_o^n(\Delta t, \Delta x)$ y $B_1^{n+1} = B_1^{n+1}(\Delta t, \Delta x)$ indican operadores lineales en diferencias finitas que reemplazan a las derivadas. w^{n+1} indica el vector de valores desconocidos de las variables Q y Z en el instante $(n+1)\Delta t$. w^n indica el vector de valores conocidos en el tiempo actual $n\Delta t$. c^n es un vector conocido obtenido a partir de las condiciones de contorno y del término de resistencia. La solución se obtiene secuencialmente a partir de la condición inicial conocida. Si $B_1^{n+1} \neq I$ (matriz unidad) se tiene un esquema numérico implícito, y en cada intervalo de tiempo es necesario resolver un sistema lineal

$$B_1^{n+1} w^{n+1} = d^n \quad (8)$$

con d^n conocido.

Usualmente, cuando se analizan tramos unidimensionales de ríos, los esquemas numéricos implícitos para resolver (8) conducen a que la matriz B_1^{n+1} tenga forma de matriz banda. El ancho de la banda dependerá del número de puntos adyacentes que se toman para la discretización numérica. Esto permite resolver el sistema (8) en cada paso de tiempo usando un algoritmo de resolución de sistemas para matrices banda, con el consiguiente ahorro en tiempo de computadora y memoria central, dado que para

matrices banda tanto la memoria necesaria como el número de operaciones aumentan linealmente con el número de puntos de discretización sobre el eje x con una constante de proporcionalidad dependiente del ancho de la banda.

Mediante métodos numéricos que discretizan las ecuaciones de Saint-Venant usando propiedades de matrices banda se han podido modelizar matemáticamente en forma precisa y eficiente numerosos tramos de ríos y canales naturales. Es importante analizar, por consiguiente, si la estructura de matriz de banda se mantiene al generalizar la modelización a redes fluviales (unidimensionales) más complejas, como ríos con afluentes, deltas, etc. En Jacovkis⁹ se analiza la modelización por métodos implícitos de redes fluviales con estructura arborescente y se prueba que se puede mantener el esquema de matriz banda. En este trabajo se extiende el anterior análisis, teórica y numéricamente, al caso deltaico, es decir, al caso de redes con afluentes, efluentes, bifurcaciones, etc. Se prueba que, para métodos numéricos de tipo "caja de cuatro puntos", se puede plantear la matriz de resolución del sistema (8) en cada paso de tiempo de modo que quede estructurada en bloques "casi" como una matriz banda, lo que permite su solución eficiente, y se ejemplifica mediante experimentos numéricos.

MODELO DE RED FLUVIAL COMPLEJA

Para generalizar el modelo hidrodinámico (1), (2), (3), (4) a redes fluviales con estructura arborescente o deltaica, es necesario analizar las ecuaciones que reflejan la modelización de la confluencia de dos tramos en un punto a partir del cual continúa uno solo dividiendo dicha confluencia en tres secciones transversales: dos aguas arriba de la confluencia y una aguas abajo (ver Figura 3). Las ecuaciones de compatibilidad de Stoker son la ecuación de conservación de la masa

$$Q_i + Q_j = Q_k \quad (9)$$

y las ecuaciones que relacionan las alturas en las secciones transversales

$$Z_i = Z_j = Z_k \quad (10)$$

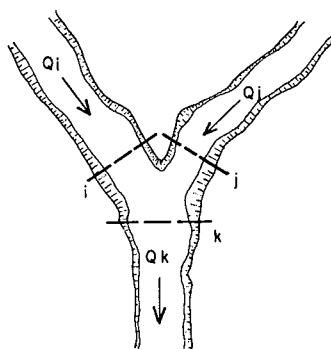


Figura 3. Confluencia de dos cauces fluviales.

Los puntos i , j y k representan los extremos aguas abajo de los tramos que finalizan en la confluencia y el extremo aguas arriba del tramo resultante, respectivamente. El mismo análisis vale para una bifurcación, cambiando el signo de los caudales.

La condición (9) es obvia; la condición (10) es una aproximación a las condiciones más precisas

$$\begin{aligned} Z_k - Z_i &= \frac{(U_i + U_k) \cdot (U_i - U_k)}{(2g)} \\ Z_k - Z_j &= \frac{(U_j + U_k) \cdot (U_j - U_k)}{(2g)} \end{aligned} \quad (11)$$

donde $U_k = \frac{Q_k}{S_k}$, $U_i = \frac{Q_i}{S_i}$, $U_j = \frac{Q_j}{S_j}$ indican las velocidades medias del escurrimiento en las secciones transversales k , i , j , respectivamente. Estas condiciones se deducen directamente de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento (1), como puede verse en Li et al¹⁰. Usualmente los términos de la derecha en (11) son despreciables, y se obtienen así las condiciones (10). En Jacovkis¹¹ se mencionan diversas modelizaciones, y se indican métodos numéricos usados. Por otra parte, en Jacovkis¹² se prueba la existencia de solución teórica para el sistema (1), (2) *linealizado*, con condiciones iniciales (3), condiciones de contorno (4) y condiciones de compatibilidad (9), (10), para régimen subcrítico, y también supercrítico. En el caso subcrítico, que estudiaremos, se necesita una condición de contorno en cada extremo abierto de la red.

En todos los casos mencionados gran parte del problema numérico consiste en resolver un sistema lineal donde la matriz es rala pero no banda. Por consiguiente, resulta muy deseable, por razones no solamente de tiempo y memoria de computadora sino también de programación, poder usar un esquema directo de solución de sistemas lineales utilizando algún tipo de estructura de la matriz que permita optimizar su resolución.

ALGORITMO DE PREPARACION DE LA MATRIZ

Un esquema en diferencias finitas de tipo "caja de cuatro puntos" es un esquema implícito tal que en la capa t^{n+1} intervienen en cada ecuación en diferencias dos puntos contiguos x_i , x_{i+1} separados por un intervalo espacial Δx_i , es decir, en el que cada par de ecuaciones discretizadas es de la forma

$$A_{1i}Q_i + A_{2i}Z_i + A_{3i}Q_{i+1} + A_{4i}Z_{i+1} = A_{5i} \quad (12.i)$$

$$B_{1i}Q_i + B_{2i}Z_i + B_{3i}Q_{i+1} + B_{4i}Z_{i+1} = B_{5i} \quad (13.i)$$

donde (12.i) y (13.i) indican una discretización de las dos ecuaciones (1), (2), y donde se ha suprimido el superíndice $n+1$ de las incógnitas Q_i^{n+1} y Z_i^{n+1} . Los A_{ki} y B_{ki} , $1 \leq k \leq 5$, son coeficientes deducidos según la discretización empleada. En particular, se usará en los experimentos numéricos de este trabajo el método de Preissmann, muy

difundido en hidráulica fluvial (ver Liggett y Cunge⁷, donde está explicado en forma muy detallada). En esencia, la discretización de Preissmann para una función genérica $f(x, t)$ y sus derivadas es la siguiente:

$$\begin{aligned} f &\sim \frac{e}{2}(f_{i+1}^{n+1} + f_i^{n+1}) + \frac{(1-e)}{2}(f_{i+1}^n + f_i^n) \\ \frac{\partial f}{\partial t} &\sim \frac{1}{2\Delta t}(f_{i+1}^{n+1} + f_i^{n+1} - f_{i+1}^n - f_i^n) \\ \frac{\partial f}{\partial x} &\sim \frac{e}{\Delta x}(f_{i+1}^{n+1} - f_i^{n+1}) + \frac{(1-e)}{\Delta x}(f_{i+1}^n - f_i^n) \end{aligned}$$

donde el “coeficiente de implicitud” e cumple $0 \leq e \leq 1$.

Aplicado a un sistema diferencial hiperbólico lineal con coeficientes constantes se prueba (Cunge¹³) que debe ser $e \geq 1/2$ para que el método sea estable. La aproximación es de primer orden para $e \geq 1/2$ y de segundo orden para $e = 1/2$, pero en este caso pueden aparecer oscilaciones parásitas. Experimentalmente se ha comprobado que $e \geq 1/2$ garantiza en general la estabilidad de las ecuaciones casilineales de Saint-Venant.

Es fácil observar que para tramos unidimensionales, en que simplemente se tiene el par de ecuaciones (12.*i*), (13.*i*) para $0 \leq i \leq L$ (con un término menos —pues ya es conocido— en el miembro de la izquierda para (12.0) y (13.0) y para (12. $L-1$) y (13. $L-1$)) queda naturalmente planteada una matriz banda de forma

[illegible]

Como se indica en Jacovkis⁹, esta matriz se puede tridiagonalizar mediante operaciones gaussianas, obteniéndose los pares

$$C_{1i}Q_i + C_{2i}Z_i + C_{3i}Q_{i+1} = C_{4i} \quad (14.i)$$

$$D_{1i}Z_i + D_{2i}Q_{i+1} + D_{3i}Z_{i+1} = D_{4i} \quad (15.i)$$

y a partir de allí la matriz se triangulariza, resultando

$$A_{1,1,i}Z_i + A_{1,2,i}Q_{i+1} = A_{1,3,i} \quad (16.i)$$

$$A_{2,1,i}Q_{i+1} + A_{2,2,i}Z_{i+1} = A_{2,3,i} \quad (17.i)$$

teniendo en cuenta las modificaciones en las ecuaciones (14.0), (16.0), (15. $L-1$), (17. $L-1$), y eventualmente (14. $L-1$), (16. $L-1$), (15.0) y (17.0) según qué condiciones de contorno se conocen. La triangularización de la matriz (barrido descendente) permite la solución inmediata del sistema (barrido ascendente).

Hemos indicado (Jacovkis⁹) que para estructuras fluviales arborescentes la matriz se puede llevar a una forma muy similar; en Jacovkis¹¹ se muestra que el algoritmo propuesto se basa en un recorrido de la cuenca fluvial en postorden, dando a la cuenca fluvial una estructura conveniente de árbol binario, según la terminología de teoría de estructuras de información (ver, por ejemplo, Knuth¹⁴). Pero si la red fluvial considerada tiene bifurcaciones que se cierran, o sea ramas que son efluentes de un cauce y afluentes del mismo (representando, por ejemplo, islas en medio de un cauce, como indica la Figura 4) o de algún otro tramo, no se puede usar dicho algoritmo.

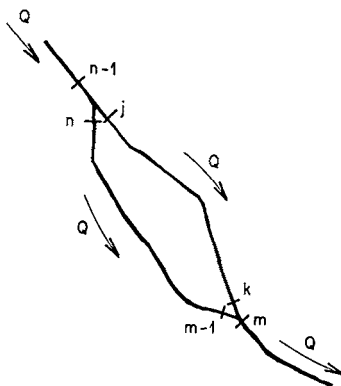


Figura 4. Red fluvial deltaica simplificada.

El sistema lineal discretizado (12),(13), con las ecuaciones de compatibilidad (9), (10), origina en el caso de redes fluviales complejas un sistema lineal a resolver dado por (8), donde en este caso la matriz B_1^{n+1} es una matriz rala no banda: la ubicación de los elementos no nulos de la misma depende de la topología de la red fluvial considerada, y puede ser extremadamente complicada. Para matrices ralas suele sugerirse reemplazar los métodos directos de solución de los correspondientes problemas lineales por métodos iterativos, tipo Jacobi o Gauss-Seidel, que tienen la ventaja de no destruir la rareza de la matriz (los elementos no nulos son los mismos en cada iteración y su ubicación no cambia en cada paso de tiempo de cálculo) y que permiten utilizar como aproximación inicial en el instante t^{n+1} los valores obtenidos en el instante t^n . Desgraciadamente estos métodos no convergen necesariamente. El método iterativo de las proyecciones, o de Kaczmarz (ver Gastinel¹⁵), tiene convergencia asegurada teóricamente, pero su lentitud lo hace impracticable. (Este autor ha efectuado experimentos ilustrativos en ambos casos). Es necesario, por lo tanto, volver a los métodos directos, que es lo que haremos a continuación. El método aquí propuesto es mucho más eficiente, en tiempo y memoria de computadora, que el desarrollado hace tiempo por Gradowczyk y Jacovkis¹⁶ con el mismo propósito.

DISCRETIZACION DE REDES FLUVIALES DELTAICAS

La discretización de una red deltaica se hará en base a una enumeración de puntos de discretización que permita la estructuración conveniente de la matriz A . A tal efecto, se conviene la siguiente nomenclatura:

Confluencia será un punto en el cual dos afluentes confluyen a otro curso de agua o un curso de agua se bifurca. A una confluencia corresponderán tres puntos de discretización de la red, uno en el extremo de cada tramo que afluye o efluye, según se ve en las Figuras 5 y 6. Las confluencias representadas en dichas figuras serán llamadas *afluencias* y *efluencias*, respectivamente.

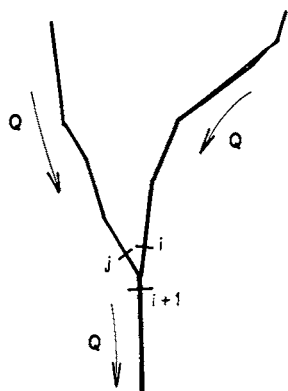


Figura 5. Puntos de una afluencia.

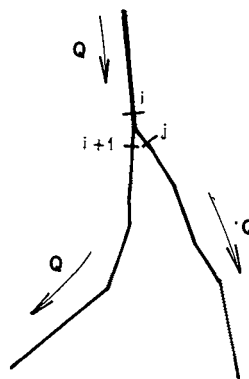


Figura 6. Puntos de una efluencia.

Extremo abierto de la red fluvial será cualquier punto extremo aguas arriba o aguas abajo. Como analizaremos exclusivamente redes fluviales en régimen subcrítico, en cada extremo abierto será necesario prescribir una condición de contorno.

Tramo simple de una red fluvial es un tramo discretizado entre dos confluencias, o entre una confluencia y un punto extremo abierto aguas abajo, o entre un punto abierto aguas arriba y una confluencia, tal que no tenga confluencias interiores. El sentido del tramo será de aguas arriba hacia aguas abajo.

Un *camino* será una sucesión de tramos simples tales que el extremo aguas arriba de uno es el extremo aguas abajo del anterior, o un punto extremo abierto aguas arriba de la red, y el extremo aguas abajo de uno es el extremo aguas arriba del siguiente o un extremo abierto aguas abajo de la red. Es decir el agua fluye en cada camino desde el extremo aguas arriba del primer tramo hasta el extremo aguas abajo del último.

La numeración de la red fluvial discretizada será entonces la siguiente:

1) Se toma un extremo abierto aguas arriba, que será el punto de discretización 1. Se numeran los puntos de discretización consecutivamente siguiendo un camino hasta que éste termina en un extremo abierto. Para ello, cada vez que se llega a una confluencia, se sigue por la rama en la cual el camino desemboca o por uno de los dos tramos en que se bifurca, según el caso.

2) Si hay otro extremo abierto aguas arriba, se sigue numerando entonces con un nuevo camino a partir de este extremo abierto. Este camino termina en un extremo abierto, como antes, o en un punto de discretización perteneciente a una confluencia de la cual los otros dos tramos ya fueron recorridos. En este último caso, los otros dos puntos de discretización de la confluencia estarán numerados como i e $i + 1$ para algún i .

3) En cualquiera de ambos casos, se recomienza con un nuevo extremo abierto aguas arriba, si hay, y se procede de la misma manera. Cuando ya se recorrieron todos los caminos que comienzan en extremos abiertos aguas arriba, se busca la primer efluencia de la cual se ha recorrido el tramo que llega a la misma (o sea, de la cual uno de los puntos de discretización es extremo aguas abajo) y uno de los tramos que salen de la misma, y de la cual el otro tramo efluente es el que numeramos ahora. Se sigue con este camino hasta que termina en un extremo abierto o en un punto de discretización perteneciente a una confluencia cuyos otros dos puntos de discretización ya han sido recorridos.

4) Cuando se han recorrido todos los caminos que comienzan así (que puede no ser ninguno) se ha terminado la numeración de los puntos de discretización.

Esta será la discretización a usar. Observemos que por el algoritmo de la numeración, toda confluencia es de la forma $\{i, j, i + 1\}$. Estamos ya en condiciones de preparar la matriz B_1^{n+1} . Para ello usaremos el siguiente teorema:

Teorema: Sea n el número total de puntos de discretización de la red fluvial considerada, m el número total de tramos simples de la red, s el número total de extremos abiertos, aguas arriba o aguas abajo, y t el número total de confluencias. Entonces, si se identifican como una única incógnita las tres alturas (iguales, por las ecuaciones de compatibilidad de Stoker) correspondientes a cada confluencia, vale que el orden N de la matriz B_1^{n+1} (o sea el número de las incógnitas resultantes a partir de esas identificaciones) será:

$$N = 2(n - t) - s$$

Además, se puede estructurar la matriz B_1^{n+1} , el vector de incógnitas w^{n+1} , y el vector de datos d^n de la ecuación matricial (8) de modo que

$$B_1^{n+1} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$$

donde:

a) A_1 es una submatriz cuadrada de orden $N - t = 2n - 3t - s$, con m bloques $A_{11}, \dots, A_{1m}$, cada uno correspondiente a un tramo simple, y el resto de sus elementos nulos:

$$A_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & & & & & \\ & A_{12} & & & & \\ & & A_{13} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & A_{1m} \end{bmatrix}$$

A su vez, cada A_{1k} tendrá la forma

$$A_{1k} = \begin{bmatrix} x & x & x & & & & & & & & \\ x & x & x & & & & & & & & \\ & x & x & x & x & & & & & & \\ & x & x & x & x & & & & & & \\ & & x & x & x & x & & & & & \\ & & x & x & x & x & & & & & \\ & & & x & x & x & x & & & & \\ & & & & x & x & x & x & & & \\ & & & & & x & x & x & x & & \\ & & & & & & x & x & x & x & \\ & & & & & & & x & x & x & x \\ & & & & & & & & x & x & x & x \\ & & & & & & & & & x & x & x & x \end{bmatrix}$$

es decir, cada bloque A_{1k} tiene la misma estructura de la de la matriz que se origina en la discretización del tramo k como si fuera un único tramo unidimensional. El orden del bloque A_{1k} es $2(k_2 - k_1)$, si el tramo simple k contiene los puntos de discretización $k_1, k_1 + 1, \dots, k_2$.

b) A_2 es una submatriz rectangular de $N - t$ filas por t columnas. Cada columna corresponde a la altura (común) de una confluencia, y tiene seis elementos no nulos, agrupados de a pares.

c) A_3 es una submatriz rectangular de t filas por $N - t$ columnas, con tres elementos no nulos que valen 1 o -1 . Cada fila corresponde a una ecuación de conservación de la masa (9).

d) A_4 es una submatriz nula de t filas por t columnas.

e) Los t elementos inferiores del vector d^n son nulos.

Demostración:

La primera parte del teorema se demuestra del siguiente modo: para cada punto de discretización i hay dos valores, Z_i y Q_i . De éstos, las condiciones de contorno, que serán s , no son variables a calcular en cada intervalo de tiempo, y, por cada confluencia, dos de las tres alturas (pues son iguales a la que si se toma como variable).

Observemos que la matriz B_1^{n+1} servirá para resolver un sistema de ecuaciones lineales $B_1^{n+1} \cdot w^{n+1} = d^n$, donde las incógnitas $w^{n+1} = (w_1, \dots, w_N)$ serán las siguientes:

Para el k -simo tramo simple, que comprende los puntos de discretización k_1 a k_2 , w_{l+1} , donde l es el conjunto de variables ya asignadas a los tramos simples $1, \dots, k-1$, será:

Q_{k_1} si el punto de discretización k_1 es un extremo abierto aguas arriba con condiciones de contorno Z_{k_1} dada, o si el punto de discretización x_{k_1} pertenece a una confluencia.

Z_{k_1} si el punto de discretización k_1 es un extremo abierto aguas arriba con condición de contorno Q_{k_1} dada.

$w_{l+2}, w_{l+4}, \dots, w_{l+2(k_2-k_1)-2}$ serán, respectivamente, $Q_{k_1+1}, Q_{k_1+2}, \dots, Q_{k_2-1}$.

$w_{l+3}, w_{l+5}, \dots, w_{l+2(k_2-k_1)-1}$ serán, respectivamente, $Z_{k_1+1}, Z_{k_1+2}, \dots, Z_{k_2-1}$.

$w_{l+2(k_2-k_1)}$ será:

Z_{k_2} si el punto extremo aguas abajo del k -simo tramo simple es un extremo abierto con condición de contorno dada Q_{k_2} .

Q_{k_2} si el punto extremo aguas abajo es un extremo abierto con condición de contorno dada Z_{k_2} , o si el punto de discretización k_2 corresponde a una confluencia.

Ahora bien, si hay s extremos abiertos, t confluencias y m tramos simples, cada uno con n_k puntos de discretización, de modo que

$$n = \sum_{k=1}^m n_k$$

el orden de cada bloque A_{1k} es $2n_k - 2$, pues en cada extremo se da una sola incógnita, o porque se trata de un extremo abierto o porque la altura de un extremo perteneciente a una confluencia no corresponde al bloque. Por consiguiente, el orden de la submatriz A_1 es $2n - 2m$. El orden de A_1 será, por otra parte, $N - t$, pues sólo las alturas correspondientes a las confluencias no son incógnitas en A_1 . Entonces $N - t = 2n - 2m$, o sea $N = 2n - 2m + t$. Por otra parte $N = 2n - s - 2t$; en particular, $s + 2t = 2m - t$, es decir, $s + 3t = 2m$.

Las $N - t$ primeras filas de B_1^{n+1} serán entonces las correspondientes a los pares de ecuaciones consecutivas entre los puntos $(i, i+1)$, tales que $(i, i+1)$ pertenecen al mismo tramo simple.

La submatriz A_2 de N_t filas por t columnas tendrá por columnas las correspondientes a los Z_l consecutivamente, para Z_l la altura común a los tres puntos de discretización de una confluencia $\{i, j, i+1\}$, según el orden dado por la numeración general de la discretización. Habrá elementos no nulos en las siguientes filas, para cada columna:

a) El par de filas consecutivas correspondiente a un intervalo $(i+1, i+2)$ con $i+1$ punto aguas arriba perteneciente a una confluencia. Su coeficiente será $A_{2,i+1}$ o $B_{2,i+1}$ dados por $(12.i+1)$ y $(13.i+1)$, según sea la primera o segunda ecuación del par.

b) El par de filas correspondiente a un intervalo $(i-1, i)$ con i punto extremo aguas abajo. Su coeficiente será $A_{4,i-1}$ o $B_{4,i-1}$, según sea la primera o segunda ecuación del par.

c) El par de filas consecutivas correspondiente a un intervalo $(j, j+1)$ o $(j-1, j)$ según sea j extremo aguas arriba o extremo aguas abajo, respectivamente, de un

tramo simple, o sea, según sea la confluencia $\{i, j, i + 1\}$ una efluencia o una afluencia, respectivamente. Su coeficiente será A_{2j} (primera ecuación del par) y B_{2j} (segunda ecuación del par), si j es extremo aguas arriba, y A_{4j-1} y B_{4j-1} si j es extremo aguas abajo.

De estos 6 valores no nulos, 4 están en filas consecutivas ($A_{4,i-1}$, $B_{4,i-1}$, A_{2i} , B_{2i}).

Analicemos ahora la submatriz A_3 de t filas por $N - t$ columnas. A ella corresponderán las ecuaciones de conservación de la masa líquida, del tipo

$$Q_i + Q_j - Q_{i+1} = 0 \quad \text{o} \quad Q_i - Q_j - Q_{i+1} = 0$$

o sea los coeficientes distintos de 0 son 1 o -1. Además, esos coeficientes no nulos corresponden a columnas "extremas" de los bloques $A_{1,k}$, es decir, a primeras o últimas columnas de $A_{1,k}$. Si el coeficiente es 1, será última columna (punto extremo aguas abajo perteneciente a confluencia), y si es -1 será primera columna (punto extremo aguas arriba perteneciente a confluencia). Por abuso de lenguaje, estamos denominando "columna de $A_{1,j}$ " a una columna de A algunos de cuyos elementos (los $N - t$ superiores) pertenecen a $A_{1,j}$.

Finalmente, la cuarta submatriz A_4 estará compuesta exclusivamente de ceros, pues las filas de las ecuaciones de continuidad de las confluencias no tienen términos en los que figuren alturas. Y análogamente, los correspondientes términos independientes son nulos ■

RESOLUCION DEL PROBLEMA DELTAICO

Sea entonces la ecuación

$$B_1^{n+1} \cdot w^{n+1} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} w^{n+1} = d^n \quad (18)$$

donde B_1^{n+1} y d^n tienen la estructura indicada en la sección anterior, siendo N el orden de la matriz, n el número total de puntos de discretización, m el de tramos simples de la red, s el de extremos abiertos, aguas arriba o aguas abajo, y t el de confluencias.

Teorema: Mediante operaciones gaussianas de eliminación el sistema lineal (18) se puede transformar en un sistema

$$A' w^{n+1} = d' \quad (19)$$

donde la matriz A' es de la forma

$$A' = \begin{bmatrix} A'_1 & A'_s \\ A'_3 & A'_4 \end{bmatrix}$$

y las submatrices A'_1 , A'_2 , A'_3 y A'_4 , obtenidas por operaciones gaussianas a partir de A_1 , A_2 , A_3 , A_4 tienen la siguiente forma:

1) A'_1 es triangular superior, compuesta por submatrices

$$A'_1 = \begin{bmatrix} A'_{11} & & & \\ & A'_{12} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A'_{1m} \end{bmatrix}$$

tales que

$$A'_{ij} = \begin{bmatrix} x & x & & & & \\ & x & x & & & \\ & & x & x & & \\ & & & x & x & \\ & & & & x & x \\ & & & & & x & x \\ & & & & & & x & x \\ & & & & & & & x & x \\ & & & & & & & & x & x \\ & & & & & & & & & x & x \end{bmatrix}$$

2) Ninguna columna de A'_2 tiene más de $4 \cdot \max (n_k - 1) + 1$, con $1 \leq k \leq m$, elementos no nulos, y forman hasta dos sucesiones consecutivas (con lo cual basta indicar el comienzo y el tamaño de cada sucesión para tener definida A'_2). n_k es el número de puntos de discretización del k -simo tramo simple.

3) $A'_3 = 0$

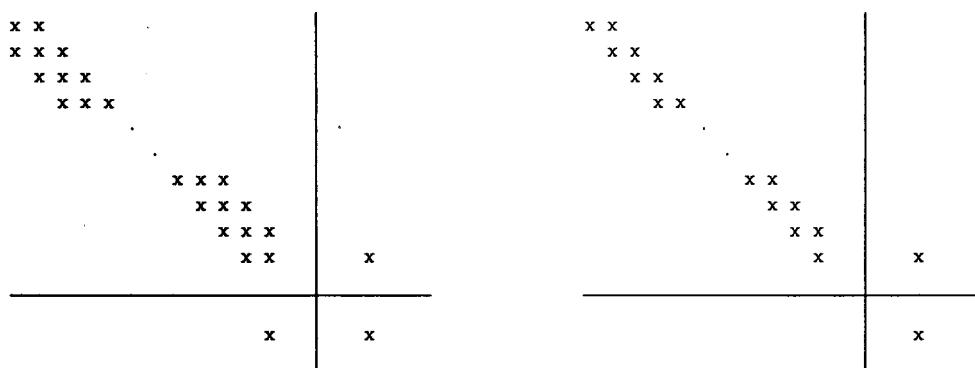
4) A'_4 es triangular superior.

Por consiguiente A' es triangular superior, y el sistema $A'w^{n+1} = d'$ se resuelve realizando un barrido ascendente.

Demostración:

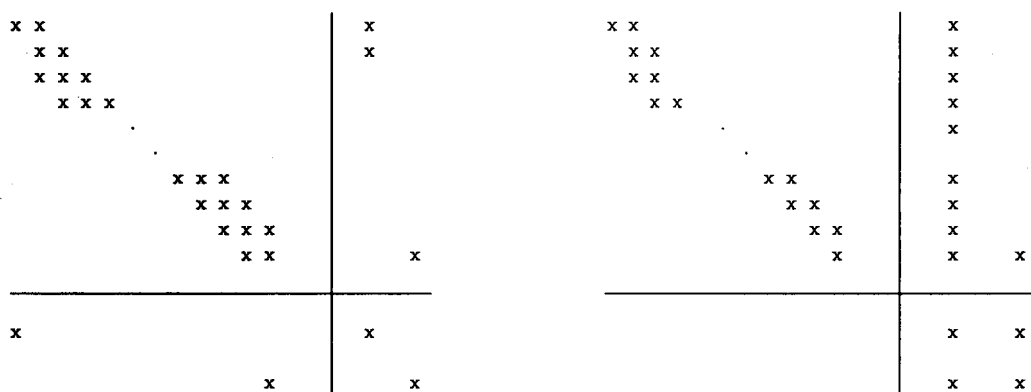
Cada bloque k de la submatriz A_1 , que comprende los puntos de discretización k_1 a k_2 , se triangulariza en la forma usual. Para cada par de ecuaciones (12), (13), la transformación en ecuaciones (14), (15) no necesita perturbar ninguna otra fila. Obtenidas las ecuaciones (14), (15), se prosigue del siguiente modo:

a) Si el extremo aguas arriba es un extremo abierto, no es necesario anular elementos en ninguna de las columnas correspondientes a la submatriz A_3 (pues son ya todos nulos) hasta llegar a la última, en donde hay una fila para la cual el elemento de dicho bloque es $1 \ 0 \ -1$, pues el extremo aguas abajo no puede ser abierto (de lo contrario se tendría un tramo simple). Digamos que el extremo aguas abajo pertenece a la v -sima confluencia. La altura aguas abajo Z_{k_2} juega, en este bloque, el papel de condición de contorno aguas abajo. Al llegar por consiguiente a la última fila y columna del bloque, se modifica también el elemento (no nulo) $A_{2,4,k_2-1}$ de la v -sima columna de la submatriz A_2 , y se anula el elemento 1 o -1 de la fila v de la submatriz A_3 ; finalmente se modifica el elemento a_{vv} de la submatriz A_4 correspondiente a la fila v de la submatriz A_3 y a la columna v de la submatriz A_2 , y el elemento b_{N-t+v} del lado derecho de la igualdad (18). La estructura de las filas y columnas relevantes en las submatrices será:



antes y después de las operaciones realizadas, respectivamente.

Si el extremo aguas arriba es un extremo cerrado perteneciente a la u -sima confluencia, la triangulación obliga a modificar cada vez la fila u de la submatriz A_3 que tiene un único elemento no nulo que se va corriendo a la derecha en cada operación gaussiana, y la columna u de la submatriz A_2 , que se va "llenando" de arriba hacia abajo. El elemento a_{uu} de la submatriz A_4 se va modificando en cada paso. Si el extremo aguas abajo es abierto, el procedimiento concluye como si fuera un tramo simple y se elimina el único elemento no nulo de la fila u de la submatriz A_3 ; de lo contrario, habrá otra fila v en la submatriz A_3 y otra columna v , en la submatriz A_2 de otra confluencia v , que será necesario modificar, al igual que los elementos a_{uu} , a_{uv} y a_{vu} de la submatriz A_4 . Este último caso se puede describir con:



Por consiguiente, al terminar este proceso hemos llegado a un sistema lineal

$$\begin{bmatrix} A'_1 & A'_2 \\ 0 & A'_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1^{n+1} \\ w_2^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

donde A'_1 es triangular superior y está formada por bloques bidiagonales. Entonces, para obtener la solución, basta resolver por el método de Gauss el sistema de

$t \times t A'_4 w_2^{n+1} = d'_2$, para lo cual se triangulariza A'_4 , y luego aplicar el barrido descendente a $A'_1 w_1^{n+1} = d'_1 - A'_2 w_2^{n+1}$, pues w_2^{n+1} ya se conoce ■

Con esto queda demostrado el teorema. Pero no es necesario almacenar A_2 (y A'_2) en $(N - t) \times t$ lugares. Son necesarios solamente $(2g + 1) \times t$, donde g es el orden de la mayor de las submatrices $A_{1,k}$, o sea $g = \max_{1 \leq k \leq m} 2(n_k - 1)$, con n_k número de puntos del k -simo tramo simple. En efecto, si la confluencia a la cual corresponde la q -sima columna de la submatriz A_2 (o sea la $N - t + q$ -sima columna de A) es una afluencia, sean A_{j_1} , A_{j_2} y A_{j_3} las submatrices de A_1 correspondientes a los tramos de los cuales los puntos de discretización de la confluencia son extremos aguas arriba o aguas abajo. Supongamos que los puntos de discretización de la confluencia son extremos aguas arriba del tramo j_1 y aguas abajo de los tramos j_2 y j_3 . Entonces la columna q de A_2 tendrá ceros en todos sus elementos excepto algunos de las filas que cortan a A_{j_1} , A_{j_2} y A_{j_3} , que analizaremos. Constatemos en primer lugar que, por la estructura de bloques diagonales de las A_{j_k} en A , las operaciones gaussianas con filas en un bloque no afectan los demás. Por consiguiente, al terminar el proceso antes descrito y llegar a las submatrices A'_1 , A'_2 , A'_3 y A'_4 , las filas de la columna q correspondientes a A_{j_2} y A_{j_3} tendrán solamente el *último* elemento no nulo, y las filas correspondientes a A_{j_1} tendrán los dos primeros elementos no nulos. Al realizar las operaciones con las filas antes indicadas, se llenarán (presumiblemente) de elementos no nulos los restantes elementos de este conjunto de filas sobre la columna q , pues se reemplazarán los ceros por los elementos de la fila de arriba divididos por el pivote y cambiados de signo. Esto da un total de $2 + g$ elementos no nulos por confluencia, a lo sumo.

Si lo que se tiene es una efluencia, habrá dos puntos de ella correspondientes a extremos aguas arriba (y por consiguiente, al realizar operaciones gaussianas, reemplazarán los ceros por elementos no nulos en el resto de las filas correspondientes a su tramo) y un punto de la confluencia corresponde a un extremo aguas abajo, que tiene solamente el último elemento no nulo, que no se altera con la modificación del sistema. O sea que finalmente habrá a lo sumo $2g + 1$ elementos no nulos de esa columna.

En suma, como $2g + 1 > g + 2$, habrá a lo sumo $(2g + 1) \times t$ elementos no nulos en la matriz transformada A'_2 .

El número total máximo de palabras necesarias para almacenar la matriz A y el vector de la derecha b será entonces:

10 para almacenar las ecuaciones de Saint-Venant discretizadas (pues para cada par (12), (13) basta usar las mismas 10 variables).

$3(N - t)$ correspondientes a los bloques triangulados (y los correspondientes términos de la derecha). Como

$$N = 2(n - t) - s$$

ese valor será $3(2(n - t) - s - t) = 6n - 9t - 3s$.

$(2g + 1)t$ correspondientes a A_2 .

1 elemento correspondiente a A_3 .

$t^2 + t$ elementos correspondientes a la submatriz cuadrada A_4 y los términos de la derecha de sus filas (no se ha hecho ningún esfuerzo por reducir esta submatriz, que será bastante mala, pues no se considera que el costo de programación lo justifica,

habiéndose ya reducido el almacenamiento necesario de $N^2 + N$ a menos de $3N + t^2 + t$, con t usualmente mucho menor que N).

Esto hace un total (*sin incluir*, vale la pena mencionar, el sistema de punteros necesario para definir los valores no nulos de la matriz) de $10 + 6n - 9t - 3s + (2g + 1)t + 1 + t^2$ que es un número del orden de $8n + t^2$.

En esencia, si suponemos una "densidad de confluencias" no mayor de $1/10$, lo cual es bastante razonable, usaremos una cantidad de memoria del orden de $8n + n^2/100$. Si se tienen 100 puntos de discretización, eso significa $800 + 100 = 900$ posiciones de memoria, en lugar de $n^2 + n = 10100$, lo cual constituye un ahorro realmente significativo.

En cuanto al número máximo de operaciones necesarias (siempre considerando pivote diagonal en todas las operaciones) es (incluimos como siempre las operaciones sobre d^n):

1) 1 división y 7 sumas y multiplicaciones para cada punto de discretización para tridiagonalizar cada bloque A_{1k} , o sea $8(n - m)$ operaciones en total.

2) Suponiendo, para simplificar, que todos los tramos tienen nodo de confluencia aguas arriba y abajo, lo cual es evidentemente absurdo, pero es la situación que más operaciones requiere, a lo sumo $2(2n_j - 2)$ divisiones y $6(2n_j - 2)$ sumas y multiplicaciones por bloque A_{1k} para triangularlo, o sea a lo sumo $4n - 4m$ divisiones y $12n - 12m$ sumas y multiplicaciones, es decir del orden de $16n$ operaciones en total como máximo.

3) Las operaciones necesarias para resolver el sistema $A'_4 x_2 = b_2$. Aquí no se ha intentado optimizar el uso de memoria ni la cantidad de operaciones. Se resuelve dicho sistema por el método de Gauss con pivoteo parcial por columnas, lo cual hace un total de $t^3/3$ operaciones (despreciando los términos de orden t^2 y t , entre ellos las divisiones).

4) Las operaciones necesarias para resolver $A'_1 x_1 = b_1 - A'_2 x_2$, que son a lo sumo n divisiones y $3n$ sumas y multiplicaciones.

Esto hace un total del orden de $6n$ divisiones y $22n + t^3/3$ sumas y multiplicaciones, o sea un total del orden de $28n + t^3/3$. Si suponemos como antes 100 puntos de discretización y 10% de nodos de confluencia, se tendrán aproximadamente $2800 + 333$ operaciones, cifra sensiblemente inferior a los 333000 necesarios usando un método de Gauss global.

ANALISIS DE CONSISTENCIA DEL MODELO DELTAICO

Antes de la implementación computacional completa del método utilizado se efectuó una validación del esquema aplicándolo a un sistema diferencial hiperbólico simplificado clásico, y comparando los resultados numéricos obtenidos con los resultados analíticos obtenidos explícitamente a partir de condiciones iniciales y de contorno dadas. El esquema simplificado utilizado es el tradicional sistema de primer orden hiperbólico

lineal homogéneo con coeficientes constantes

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} &= 0\end{aligned}\quad (20)$$

con condiciones de compatibilidad

$$h_i = h_j = h_k \quad u_i + u_j = u_k \quad (21)$$

en una confluencia (i, j, k) como la de la Figura 3. Si se supone, con las simplificaciones habituales, un canal con sección transversal rectangular de ancho unitario constante, tanto en los afluentes como a partir de la confluencia, éstas son las condiciones obtenidas a partir de las de Stoker. Esta solución analítica se comparó con la solución obtenida aplicando el algoritmo antes desarrollado con el esquema numérico de Preissmann. La programación se llevó a cabo en PASCAL en una computadora personal con procesador 80286; los resultados obtenidos para distintas corridas demuestran una buena aproximación a los resultados analíticos, similar a la obtenida para tramos unidimensionales (ver, por ejemplo, Cunge¹³).

En primer lugar, se corrió el modelo con un tramo simple, y con un tramo en Y (dos afluentes que afluyen a un cauce principal). En ambos casos se obtuvieron exactamente los resultados de utilizar el método de Preissmann usual para tramos simples, con el algoritmo de Jacovkis⁹ para estructuras arborescentes.

Luego se corrió el tramo con efluentes indicado en la Figura 7, según los datos de la Tabla I.

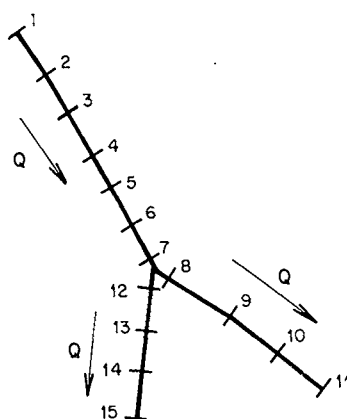


Figura 7. Red de comparación con solución teórica.

Las condiciones iniciales son las siguientes:

En el tramo 1-7:

$$\begin{aligned}u_o(x) &= 10 + \cos x \\ h_o(x) &= 7 + \sin x\end{aligned}$$

Punto	Coordenada espacial	Punto	Coordenada espacial
1	0	9	$7\Pi/6$
2	$\Pi/6$	10	$4\Pi/3$
3	$\Pi/3$	11	$3\Pi/2$
4	$\Pi/2$	12	Π
5	$2\Pi/3$	13	$7\Pi/6$
6	$5\Pi/6$	14	$4\Pi/3$
7	Π	15	$3\Pi/2$
8	Π		

Tabla I. Modelo con efuente para prueba de ecuaciones simplificadas.

En los tramos 8-11 y 12-15:

$$u_o(x) = 5 + 0,5 \cos x$$

$$h_o(x) = 7 + 0,5 \sin x$$

Las condiciones de contorno dadas serán las siguientes:

$$u(x_1, t) = 10 + \cos t - \sin t$$

$$h(x_{11}, t) = 7 - 0,5(\cos t + \sin t) = h(x_{15}, t)$$

La solución analítica del sistema diferencial planteado es

En el tramo 1-7:

$$u(x, t) = 10 + (\cos t - \sin t) \cos x$$

$$h(x, t) = 7 + (\cos t + \sin t) \sin x$$

En los tramos 8-11 y 12-15:

$$u(x, t) = 5 + 0,5(\cos t - \sin t) \cos x$$

$$h(x, t) = 7 + 0,5(\cos t + \sin t) \sin x$$

El modelo se corrió, para $e = 1/2$, con $\Delta t = \Delta x = \Pi/6$, y la solución numérica coincidió con la analítica, como corresponde a ese caso. Luego se corrió con $e = 3/4$ y $e = 1$ para $\Delta t = \Delta x = \Pi/6$, para comprobar la atenuación de la onda con e mayores. Los resultados obtenidos en $t = 2\Pi$ para los puntos de discretización 1 a 7, que se indican en la Figura 8, muestran una aproximación similar a la que se obtiene para tramos simples.

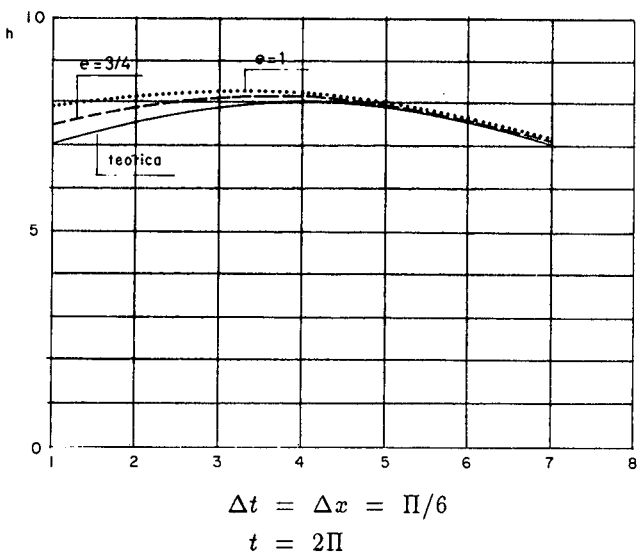


Figura 8. Alturas teóricas y calculadas en los puntos 1 a 7.

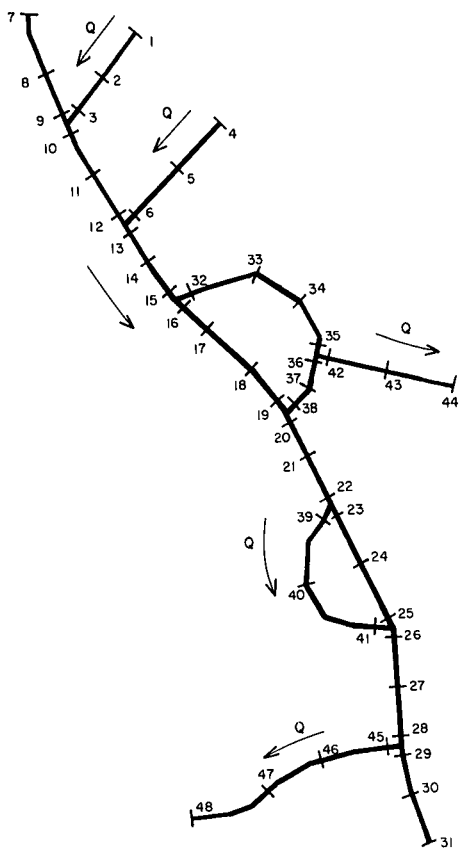


Figura 9. Red fluvial deltaica para experimentos.

Punto de disc.	1	2	3	4	5	6
Coordenada (km)	0	1	2	0	0,5	1
Nivel de fdo (m)	100,60	100,20	99,80	100,10	99,85	99,60
Ancho (m)	100	100	100	100	100	100
D (1000 m ³ /s)	41,1	41,1	41,1	41,1	41,1	41,1
Punto de disc.	7	8	9	10	11	12
Coordenada (km)	0	1	2	2	3	4
Nivel de fdo (m)	100,00	99,90	99,80	99,80	99,70	99,60
Ancho (m)	100	100	100	200	200	200
D (1000 m ³ /s)	41,1	41,1	41,1	43,6	43,6	43,6
Punto de disc.	13	14	15	16	17	18
Coordenada (km)	4	5	6	6	7	8
Nivel de fdo (m)	99,60	99,50	99,40	99,40	99,30	99,20
Ancho (m)	300	300	300	150	150	150
D (1000 m ³ /s)	44,5	44,5	44,5	42,7	42,7	42,7
Punto de disc.	19	20	21	22	23	24
Coordenada (km)	9	9	10	11	11	12
Nivel de fdo (m)	99,10	99,10	99,00	98,90	98,90	98,80
Ancho (m)	150	250	250	250	150	150
D (1000 m ³ /s)	42,7	44,1	44,1	44,1	42,7	42,7
Punto de disc.	25	26	27	28	29	30
Coordenada (km)	13	13	14	15	15	16
Nivel de fdo (m)	98,70	98,70	98,60	98,50	98,50	98,40
Ancho (m)	150	250	250	250	180	180
D (1000 m ³ /s)	42,7	44,1	44,1	44,1	43,3	43,3
Punto de disc.	31	32	33	34	35	36
Coordenada (km)	17	6	6,6	7,2	7,8	7,8
Nivel de fdo (m)	98,30	99,40	99,34	99,28	99,22	99,22
Ancho (m)	180	150	150	150	150	100
D (1000 m ³ /s)	43,3	42,7	42,7	42,7	42,7	41,1
Punto de disc.	37	38	39	40	41	42
Coordenada (km)	8,4	9	11	12	13	7,8
Nivel de fdo (m)	99,16	99,10	98,90	98,80	98,70	99,22
Ancho (m)	100	100	100	100	100	50
D (1000 m ³ /s)	41,1	41,1	41,1	41,1	41,1	37,1
Punto de disc.	43	44	45	46	47	48
Coordenada (km)	8,2	8,6	15	15,5	16	16,5
Nivel de fdo (m)	99,14	99,06	98,50	98,35	98,20	98,05
Ancho (m)	50	50	70	70	70	70
D (1000 m ³ /s)	37,1	37,1	39,3	39,3	39,3	39,3

Tabla II. Descripción del modelo de red fluvial deltaico.

EXPERIMENTOS NUMERICOS CON REDES DELTAICAS

Los experimentos numéricos que se indican en esta sección fueron realizados con el modelo de red fluvial deltaica completo indicado en la Figura 9, cuya descripción se da en la Tabla II.

El ancho de cada sección transversal es constante, es decir, las secciones transversales son rectangulares. D indica el coeficiente de conducción. Se dan, para cada punto de discretización, dos valores de coeficiente de conducción: uno a nivel del fondo, que vale siempre cero, y otro a 10 m de altura respecto del correspondiente nivel del fondo, cuyo valor se indica en la Tabla II. Los coeficientes de conducción intermedios se interpolan linealmente.

En primer lugar se llevó a cabo una corrida de estabilización, tomando como condiciones iniciales las indicadas en la Tabla III. Las condiciones de contorno se indican en la Tabla IV.

Pto	Q (m ³ /s)	Z (m)	Pto	Q (m ³ /s)	Z (m)	Pto	Q (m ³ /s)	Z (m)
1	1000	110,60	17	1500	109,30	33	1500	109,34
2	1000	110,20	18	1500	109,20	34	1500	109,28
3	1000	109,80	19	1500	109,10	35	1500	109,22
4	1000	110,10	20	2500	109,10	36	1000	109,22
5	1000	109,85	21	2500	109,00	37	1000	109,16
6	1000	109,60	22	2500	108,90	38	1000	109,10
7	1000	110,00	23	1500	108,90	39	1000	108,90
8	1000	109,90	24	1500	108,80	40	1000	108,80
9	1000	109,80	25	1500	108,70	41	1000	108,70
10	2000	109,80	26	2500	108,70	42	500	109,22
11	2000	109,70	27	2500	108,60	43	500	109,14
12	2000	109,60	28	2500	108,50	44	500	109,06
13	3000	109,60	29	1800	108,50	45	700	108,50
14	3000	109,50	30	1800	108,40	46	700	108,35
15	3000	109,40	31	1800	108,30	47	700	108,20
16	1500	109,40	32	1500	109,40	48	700	108,05

Tabla III. Condiciones para corridas de estabilización de los modelos deltaicos.

Día	Q_1 (m ³ /s)	Q_4 (m ³ /s)	Q_7 (m ³ /s)	Z_{31} (m)	Z_{44} (m)	Z_{48} (m)
0	1000	1000	1000	108,30	109,06	108,05
30	1000	1000	1000	108,30	109,06	108,05

Tabla IV. Condiciones de contorno para corrida de estabilización del modelo deltaico ($\Delta t = 1$ día).

A partir de estas condiciones iniciales y de contorno originales se realizó una corrida de estabilización. El estado estacionario obtenido se indica en la Tabla V. Se usó $e = 1$ y el tiempo de computadora para cada intervalo de tiempo de calculo es de alrededor de 1,24 segundos.

Punto	1	2	3	4	5	6	7	8
Z (m)	121,48	121,27	121,06	119,78	119,66	119,53	121,48	121,27
Q (m ³ /s)	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Punto	9	10	11	12	13	14	15	16
Z (m)	121,06	121,06	120,32	119,53	119,53	117,55	114,94	114,94
Q (m ³ /s)	1000	2000	2000	2000	3000	3000	3000	1320
Punto	17	18	19	20	21	22	23	24
Z (m)	114,30	113,60	112,85	112,85	112,14	111,36	111,36	111,12
Q (m ³ /s)	1320	1320	1320	1268	1268	1268	651	651
Punto	25	26	27	28	29	30	31	32
Z (m)	110,89	110,89	109,95	108,85	108,85	108,58	108,30	114,94
Q (m ³ /s)	651	1268	1268	1268	588	588	588	1680
Punto	33	34	35	36	37	38	39	40
Z (m)	114,30	113,61	112,84	112,84	112,84	112,85	111,36	111,12
Q (m ³ /s)	1680	1680	1680	-52	-52	-52	617	617
Punto	41	42	43	44	45	46	47	48
Z (m)	110,89	112,84	111,03	109,06	108,85	108,59	108,32	108,05
Q (m ³ /s)	617	1732	1732	1732	680	680	680	680

Tabla V. Estado estacionario del modelo deltaico.

A partir de estas condiciones estacionarias se llevaron a cabo diversos experimentos, que se detallan a continuación, y en los cuales se usó $e = 0,85$.

a) Caudal constante (igual al de la estabilización) ingresando aguas arriba y oscilaciones de altura (debidas, por ejemplo, a mareas), en los extremos aguas abajo. Las condiciones de contorno usadas se indican en la Tabla VI para un día y se repiten (tienen período de un día) durante cuatro días. El intervalo Δt es de 6 horas.

En este experimento se produce el caso interesante de que de acuerdo a la marea el caudal en el tramo 36-38 cambia de signo (cabe recordar que las condiciones iniciales indicadas en la Tabla VI tenían asignados caudales positivos para ese tramo, y los caudales se convirtieron en negativos para las condiciones estacionarias; esto es un ejemplo de que a veces en tramos interiores de un delta complicado el real sentido de flujo del caudal no se conoce, y es crucial que las ecuaciones de Saint-Venant incluyan el signo —representado por el factor $Q|Q|$ en vez de Q^2 — en el término no homogéneo para poder modelizar estos casos). En la Tabla VII se indican los valores de caudales y alturas en el punto 37 para todos los intervalos temporales de cálculo.

Tiempo (días)	Punto 1 Q (m^3/s)	Punto 4 Q (m^3/s)	Punto 7 Q (m^3/s)	Punto 31 Z (m)	Punto 44 Z (m)	Punto 48 Z (m)
0	1000	1000	1000	108,30	109,06	108,05
0,25	1000	1000	1000	110,30	111,06	110,05
0,50	1000	1000	1000	108,30	109,06	108,05
0,75	1000	1000	1000	106,30	107,06	106,05
1	1000	1000	1000	108,30	109,06	108,05

Tabla VI. Condiciones de contorno para análisis de influencia de mareas.

t	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00
Q	-52	26	-223	51	-60	40	-247	83	-82
Z	112,84	113,95	112,31	112,26	112,93	113,89	112,33	112,25	112,90
t	2,25	2,50	2,75	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00	
Q	59	-271	113	-104	77	-294	142	-123	
Z	113,90	112,30	112,27	112,86	113,92	112,27	112,28	112,81	

Tabla VII. Caudales (m^3/s) y alturas (m) en el punto 37 para corrida de mareas (tiempo en días).

b) Para testear la consistencia del cambio de condiciones de contorno con un modelo más complicado que el esquema "cauce principal con una bifurcación" usado en la sección anterior, se corrió nuevamente la situación de marea, pero ahora tomando como condiciones de contorno en los tres extremos abiertos aguas arriba las alturas calculadas por el modelo en la corrida anterior, y como condiciones de contorno en los tres extremos abiertos aguas abajo los caudales calculados por el modelo en la corrida anterior. Se tomó también $\Delta t = 6$ horas.

Los resultados reproducen los de la corrida anterior con una precisión notable: en la Tabla VIII se indican los valores complementarios obtenidos en los extremos (caudales donde se dan alturas y alturas donde se dan caudales). Comparados con los valores de la Tabla VI, que son los tomados en la corrida original como condiciones de contorno, la precisión es muy alta: en todos los casos el error no llega al 1% ni en los caudales ni en las alturas (para calcular el error en este caso hay que considerar las profundidades desde el fondo del cauce):

Tiempo (días)	Punto 1 Q (m^3/s)	Punto 4 Q (m^3/s)	Punto 7 Q (m^3/s)	Punto 31 Z (m)	Punto 44 Z (m)	Punto 48 Z (m)
0,00	1000	1000	1000	108,30	109,06	108,05
0,25	1000	1000	1000	110,30	111,07	110,05
0,50	1000	1003	998	108,30	109,07	108,05
0,75	1001	998	1001	106,30	107,06	106,05
1,00	1001	1003	998	108,30	109,06	108,05
1,25	990	1001	1008	110,30	111,06	110,05
1,50	1008	999	993	108,30	109,06	108,05
1,75	995	1001	1005	106,30	107,07	106,05
2,00	1005	1001	993	108,31	109,06	108,06
2,25	998	998	1004	110,30	111,06	110,05
2,50	1006	996	998	108,29	109,06	108,04
2,75	997	1002	1001	106,29	107,05	106,04
3,00	1005	996	999	108,29	109,05	108,04
3,25	995	1009	997	110,30	111,06	110,05
3,50	1004	996	1001	108,31	109,07	108,06
3,75	998	1003	999	106,31	107,08	106,06
4,00	1004	995	1001	108,31	109,08	108,06

Tabla VIII. Condiciones complementarias a las de contorno en los extremos.

c) El experimento siguiente consiste en cerrar los extremos 1, 4, 44 y 48, de modo que el flujo es en un tramo simple (con dos bifurcaciones alrededor de islas). Esta simulación es útil cuando se quiere analizar la posibilidad de elegir en un delta un tramo principal de río, y eventualmente rectificarlo. Las condiciones de contorno son las indicadas en la Tabla IX (puede observarse que en este experimento se usan como condiciones de contorno aguas abajo alturas y caudales). El paso de tiempo fue de 1 día.

Tiempo (días)	Punto 1 Q (m^3/s)	Punto 4 Q (m^3/s)	Punto 7 Q (m^3/s)	Punto 31 Z (m)	Punto 44 Z (m)	Punto 48 Z (m)
0	1000	1000	1000	108,30	1732	680
10	0	0	3000	111,30	0	0
20	0	0	3000	111,30	0	0

Tabla IX. Condiciones de contorno para corrida de cierre de extremos abiertos.

El modelo entra rápidamente en estado estacionario: el cierre finaliza el día 10, y ya el día 13 los resultados difieren de los indicados en la Tabla X (día 16) en a lo sumo $1 m^3/s$ o 1 cm.

Usando el estado estacionario del sistema con extremos cerrados (Tabla X) como condición inicial, se simuló entonces una operación normal de una represa aguas arriba (punto 7) con altura fija aguas abajo (debido a la existencia, por ejemplo, de otro embalse en el punto 31) y con extracción de caudal (para riego, por ejemplo) en el punto 44. Las condiciones de contorno se indican en la Tabla XI, y tienen período diario. El paso de tiempo fue de 6 horas.

Se puede ver en la Tabla XII que los cambios de caudal son absorbidos naturalmente por el modelo, notándose una gran sensibilidad de las alturas a dichos cambios. En particular, los remansos en las ramas "muertas" suben y bajan en función de la altura en las respectivas desembocaduras, manteniéndose cada remanso con altura uniforme (altura del agua horizontal, tipo efecto "lago"). La altura fija en la sección 31 implica un considerable aumento de la velocidad V , como se indica.

d) Por último, se realizó, con las mismas condiciones iniciales de antes, la simulación de una crecida importante en un sistema con control en todos los extremos, aguas arriba y aguas abajo. En las primeras doce horas el caudal aguas arriba crece linealmente de 3000 a 6000 m^3/s , para lo cual el caudal del punto 1 pasa de 0 a 3000 m^3/s , pues se considera que la capacidad de ingreso de caudal (controlable) está colmada en el punto 7 con los 3000 m^3/s que ya fluyen. En las segundas doce horas del día el caudal crece linealmente de 6000 a 9000 m^3/s , y ahora se "abre" el punto 4, pues se considera agotada también la capacidad de flujo controlable a través del punto 4. La altura en el punto 31 se mantiene constante (se supone que mantener esa altura es una consigna), y se permite el paso de caudal por el punto 44 y cuando el caudal de entrada supera los 3000 m^3/s , por el punto 48, en este caso hasta 1000 m^3/s . Con estos caudales se opera un día más. Entre el segundo y el tercer día se vuelve a la situación inicial, pero ahora decreciendo el flujo en los puntos 1 y 4 en forma simultánea, y se mantiene esta situación un día más. Esto queda indicado en la Tabla XIII (se usó $\Delta t = 6$ horas).

Los resultados de la corrida se indican en la Tabla XIV. Puede observarse lo siguiente:

- i) Durante un corto período el caudal cambia de sentido en el tramo entre los puntos 37 y 39, debido a la brusquedad de la crecida.

Punto	1	2	3	4	5	6	7	8
Z (m)	128,92	128,92	128,92	127,10	127,10	127,10	130,83	129,90
Q (m ³ /s)	0	0	0	0	0	0	3000	3000
Punto	9	10	11	12	13	14	15	16
Z (m)	128,92	128,92	128,04	127,10	127,10	126,15	125,14	125,14
Q (m ³ /s)	3000	3000	3000	3000	3000	3000	3000	1525
Punto	17	18	19	20	21	22	23	24
Z (m)	124,84	124,53	124,22	124,22	123,04	121,74	121,74	121,35
Q (m ³ /s)	1525	1525	1525	3000	3000	3000	1540	1540
Punto	25	26	27	28	29	30	31	32
Z (m)	120,95	120,95	119,39	117,56	117,56	115,12	111,30	125,14
Q (m ³ /s)	1540	3000	3000	3000	3000	3000	3000	1475
Punto	33	34	35	36	37	38	39	40
Z (m)	124,97	124,80	124,62	124,62	124,42	124,22	121,74	121,35
Q (m ³ /s)	1475	1475	1475	1475	1475	1475	1460	1460
Punto	41	42	43	44	45	46	47	48
Z (m)	120,95	124,62	124,62	124,62	117,56	117,56	117,56	117,56
Q (m ³ /s)	1460	0	0	0	0	0	0	0

Tabla X. Modelo estabilizado con sólo un extremo abierto aguas arriba y otro aguas abajo.

Tiempo (días)	Punto 1 Q (m ³ /s)	Punto 4 Q (m ³ /s)	Punto 7 Q (m ³ /s)	Punto 31 Z (m)	Punto 44 Q (m ³ /s)	Punto 48 Q (m ³ /s)
0	0	0	3000	111,30	0	0
0,25	0	0	5000	111,30	500	0
0,75	0	0	5000	111,30	500	0
1	0	0	3000	111,30	0	0

Tabla XI. Funcionamiento diario de un sistema regulado.

Tiempo (días)	Z_1 (m)	Z_4 (m)	Z_7 (m)	Q_{31} (m)	V_{31} (m)	Z_{44} (m)	Z_{48} (m)
0	128,92	127,10	130,83	3000	1,28	124,62	117,56
0,25	134,44	131,60	137,43	3731	1,59	127,76	119,13
0,50	137,89	134,75	141,19	4028	1,72	130,28	120,97
0,75	138,42	135,53	141,37	4374	1,87	131,35	121,90
1,00	133,69	131,72	135,69	3655	1,56	128,87	120,67
1,25	135,31	132,91	137,74	4220	1,80	129,51	120,69
1,50	138,58	135,49	141,86	4108	1,76	131,12	121,75
1,75	138,49	135,66	141,39	4502	1,92	131,55	122,12
2,00	133,85	131,89	135,85	3634	1,55	129,05	120,82
2,25	135,25	132,86	137,66	4269	1,82	129,48	120,69
2,50	138,63	135,54	141,91	4083	1,74	131,17	121,79
2,75	138,46	135,62	141,35	4524	1,93	131,52	122,10
3,00	133,87	131,91	135,87	3619	1,55	129,07	120,83

Tabla XII. Resultados de corrida con sistema regulado.

Tiempo (días)	Q_1 (m ³ /s)	Q_4 (m ³ /s)	Q_7 (m ³ /s)	Z_{31} (m ³ /s)	Q_{44} (m ³ /s)	Q_{48} (m ³ /s)
0	0	0	3000	111,30	0	0
0,50	3000	0	3000	111,30	3000	0
1,00	3000	3000	3000	111,30	5000	1000
2,00	3000	3000	3000	111,30	5000	1000
3,00	0	0	3000	111,30	0	0
4,00	0	0	3000	111,30	0	0

Tabla XIII. Condiciones de contorno para crecida importante.

- ii) El considerable caudal que llega a pasar por el punto 44 lleva la velocidad a valores muy altos, pero sin que por ello el régimen deje de ser subcrítico. Si ésta fuera una simulación de un caso real, debería probablemente pensarse en otro tipo de distribución de caudales aguas abajo.
- iii) Las alturas en los puntos 1 y 4 son extremadamente sensibles a los cambios de caudal: pasar de caudal nulo a 3000 m³/s cambia la altura de casi 17 m en el punto 1 y 14 en el punto 4.
- iv) El sistema se reestabiliza rápidamente: el día 4 los valores de las variables ya son muy similares a los iniciales, pese a que hace apenas un día que las condiciones de contorno no varían.

Tiempo (días)	Z_1 (m)	Z_4 (m)	Z_7 (m)	Q_{31} (m ³ /s)	V_{31} (m/s)	Q_{38} (m ³ /s)	Z_{44} (m)	V_{44} (m/s)	Z_{48} (m)
0	128,92	127,10	130,83	3000	1,28	1475	124,62	0,00	117,56
0,25	131,07	128,24	132,79	2926	1,25	992	124,15	1,20	117,40
0,50	136,68	131,09	137,05	2817	1,20	206	122,12	2,60	117,06
0,75	140,62	135,13	140,55	2687	1,15	77	120,26	3,77	116,67
1,00	143,86	139,91	143,87	2596	1,11	-178	118,99	5,02	116,04
1,25	145,14	141,68	145,13	2803	1,20	-5	118,28	5,20	116,10
1,50	145,28	141,80	145,27	2924	1,25	12	119,74	4,84	116,74
1,75	145,38	141,92	145,37	2976	1,27	51	120,62	4,64	116,95
2,00	145,38	141,93	145,37	2992	1,28	31	120,91	4,58	117,03
2,25	142,84	139,71	143,09	3156	1,35	551	123,12	3,12	117,55
2,50	138,84	136,16	139,53	3256	1,39	960	125,78	1,87	118,20
2,75	134,92	132,65	136,06	3290	1,41	1329	126,38	0,91	118,45
3,00	131,09	129,28	132,66	3293	1,41	1621	126,28	0,00	118,53
3,25	129,56	127,84	131,36	3157	1,35	1508	125,49	0,00	118,22
3,50	129,22	127,43	131,09	3073	1,31	1510	124,97	0,00	117,84
3,75	129,04	127,23	130,92	3030	1,29	1469	124,78	0,00	117,68
4,00	128,97	127,16	130,87	3014	1,29	1490	124,69	0,00	117,61

Tabla XIV. Resultados de la corrida con crecida importante ($\Delta t = 6$ horas).

CONCLUSIONES

Mediante los algoritmos descriptos en este trabajo se ha implementado un modelo hidrodinámico unidimensional para redes fluviales deltaicas complejas que, salvo constante de proporcionalidad, tiene eficiencia equivalente, en tiempo de cálculo y memoria de computadora necesarios, a un modelo sobre un único tramo fluvial que use el mismo método implícito. Su flexibilidad permite su operación en computadoras personales pequeñas. Cabe agregar que el método puede aplicarse, con leves variaciones, a conductos a presión, y en particular a redes de cañerías.

REFERENCIAS

1. J.A. Liggett, "Basic equations of unsteady flow", *Unsteady flow in open channels*, Vol. I, K. Mahmood y V. Yevjevich (eds.), Water Resources Publications, Fort Collins, pp. 29-62, (1975).
2. V.T. Chow, "Open channel hydraulics", Mc Graw-Hill, Nueva York, (1959).
3. B.L. Rozdestvenskii y N.N. Janenko, "Systems of quasilinear equations and their application to gas dynamics", *American Mathematical Society (Translations of Mathematical Monographs)*, Providence, (1980).
4. P.D. Lax, "Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves", *Society for Industrial and Applied Mathematics*, Philadelphia, (1973).
5. J.J. Stoker, "Water waves", *Interscience*, Nueva York, (1957).

6. R.J. DiPerna, "Global solutions to a class of nonlinear hyperbolic systems of conservation laws", *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. 26, pp. 1-28, (1973).
7. J.A. Liggett y J.A. Cunge, "Numerical methods of solutions of the unsteady flow equations", *Unsteady flow in open channels*, Vol. I, K. Mahmood y V. Yevjevich (eds.), Water Resources Publications, Fort Collins, pp. 89-178, (1975).
8. R.D. Richtmyer y K.W. Morton, "Difference methods for initial value problems", *Interscience*, Nueva York, (1967).
9. P.M. Jacovkis, "Modelos hidrodinámicos en cuencas fluviales", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 5, pp. 295-319, (1989).
10. Z.C. Li, L.J. Zhan y H.L. Wang, "Difference methods of flow in branch channel", *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 109, pp. 424-447, (1983).
11. P.M. Jacovkis, "Modelos numéricos para redes fluviales", *Tesis doctoral*, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, (1988).
12. P.M. Jacovkis, "Modelos hidrodinámicos unidimensionales con estructuras espaciales complejas", a ser publicado en *Revista de la Unión Matemática Argentina*, número de homenaje a D. Julio Rey Pastor.
13. J.A. Cunge, "Un schéma de différences finies pour les équations hyperboliques (une et deux dimensions spatiales)", *Tesis doctoral*, Facultad de Ciencias, Universidad de Grenoble, Grenoble, (1966).
14. D.Knuth, "*El arte de programar ordenadores: Algoritmos fundamentales*", Vol. I, Reverté, Barcelona, (1985).
15. N. Gastinel, "*Analyse numérique linéaire*", Hermann, Paris, (1966).
16. M.H. Gradowczyk y P.M. Jacovkis, "Un modelo matemático para regímenes imperantes en redes fluviales complejas", *Segundas Jornadas Latinoamericanas de Computación*, UTN, Buenos Aires, (1974).