

AMPLIFICACION SISMICA: UNA APROXIMACION POR ELEMENTOS FINITOS

RAMON ALVAREZ
M.S. GOMEZ-LERA
y
ENRIQUE ALARCON

*Universidad Politécnica de Madrid
José Gutiérrez Abascal N° 2
28006 Madrid*

RESUMEN

En las páginas que siguen se presenta el estudio de uno de los más típicos problemas de dinámica estructural, cual es la obtención de la respuesta de una estructura excitada por un movimiento de la base. Este es un caso muy frecuente en ingeniería sísmica, donde el objeto del estudio puede ser el edificio (sometido a un movimiento en la cimentación) o un estrato de terreno sobre fondo rígido. Al objeto de facilitar un soporte intuitivo a la exposición, ésta se organiza en base al segundo de los casos citados (estrato en base rígida). La aproximación escogida, elementos finitos, pone de relieve una vez más la potencia y generalidad del método en lo que respecta a la formulación del sistema de equilibrio. La discusión se centra en un aspecto concreto del método: la elección de funciones de forma.

SUMMARY

The goal of this paper is to present the analysis of one of the most typical problems in dynamics: the response of a structure excited by a rigid-base motion. This is an usual case in seismic engineering, where the structure can be a building or a soil stratum lying on a rigid bed. In both cases the model will be the same but, in order to give a physical support to exposure, the later will be treated. The choosed approach, by finite elements, points up the power and the generality of that method with respect to equilibrium formulation. Emphasis is done over the choosing of shape functions.

INTRODUCCION

Ya en la antigüedad era bien conocido en las zonas sísmicas el riesgo inherente a la cimentación en suelos.

Hoy día la influencia que sobre la magnitud de la sacudida sísmica tiene el tipo de terreno en que se produce está recogida en la mayoría de normas. La tendencia generalizada consiste en modificar la excitación de diseño (usualmente el espectro) dependiendo de las características geotécnicas del emplazamiento.

Recibido: Octubre 1987

Las evidencias experimentales acerca de esta influencia son, desgraciadamente abundantes. Quizás el ejemplo más reciente y espectacular lo ofrezca el terremoto de Ciudad de México de Septiembre de 1985. La Figura 1.a muestra las acelerogramas registrados en la UNAM, cimentada sobre roca, y la 1.b los registrados sobre la antigua laguna cerca del departamento de transporte. La distancia entre ambos sismógrafos es despreciable frente a la que los separa del epicentro del terremoto, situado en un punto próximo a la localidad de Lázaro Cárdenas, a 400 Km de distancia.

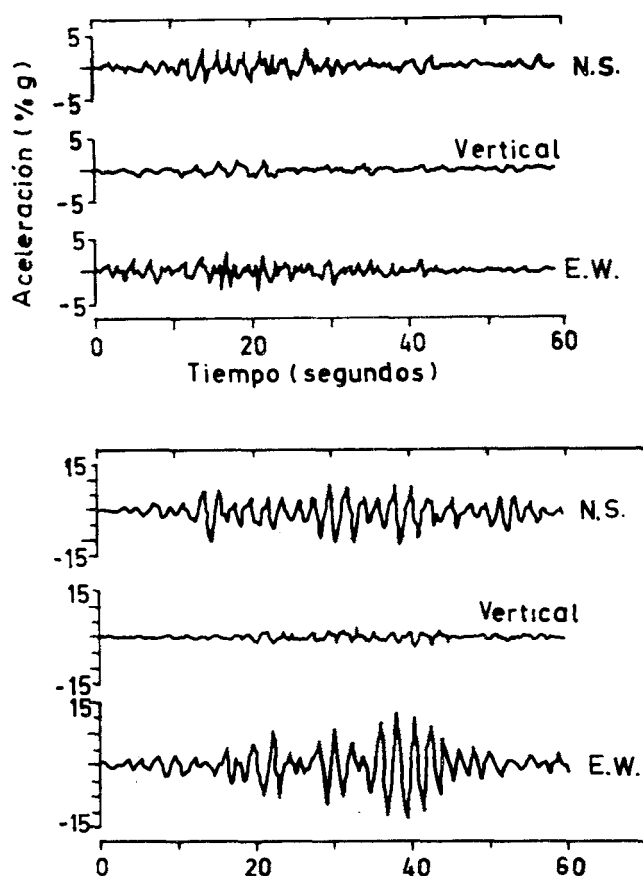


Figura 1.

Cabría por tanto esperar registros de valor similar en ambos puntos, pero, muy al contrario, las aceleraciones horizontales en la laguna triplican el valor de las obtenidas en roca.

Ejemplos similares son frecuentes en la bibliografía especializada, y, en la actualidad, el tema constituye un aspecto importante de la ingeniería sísmica al que se ha dado en llamar amplificación.

El mayor impulso para el desarrollo tecnológico en este campo fue el proporcionado por la industria nuclear en la década anterior. Concurrieron entonces todas las circunstancias favorables, ya que, a la necesidad evidente de una mejor evaluación del

riesgo sísmico en las centrales se unía la popularización del ordenador como herramienta de cálculo y, no menos importante, los grandes medios económicos puestos en juego.

En la actualidad, y desde un punto de vista cualitativo, el problema no ofrece dificultades insalvables: es posible (e incluso relativamente simple) saber qué ocurre y por qué.

Desafortunadamente ello no quiere decir que el tema sea abordable en forma cuantitativa. Efectivamente, es tal la cantidad de variables envueltas y la complejidad del problema que resulta difícil un tratamiento general en toda su extensión.

En la práctica se prefiere recurrir a análisis paramétricos sobre modelos simples, y ello porque los sistemas más completos requieren la evaluación, siempre comprometida, de gran cantidad de variables.

MODELO MECANICO

Dos son los aspectos fundamentales que se deben considerar en la formulación del modelo: el medio y la excitación.

Respecto al primero, el medio, presenta la dificultad de describir correctamente tanto el comportamiento mecánico del material que forma cada estrato como la propia geometría de este.

En cuanto a la excitación, es necesario conocer al menos los parámetros estadísticos de cada distribución de ondas en lo que atañe a su tipo, amplitud y dirección de propagación.

El simple enunciado de las variables del problema destaca la anteriormente mencionada imposibilidad práctica de formular un modelo completo.

En lo que sigue supondremos el sistema plano de la Figura 2. Se trata de un estrato, que en principio supondremos único, de suelo elástico, lineal, isótropo y homogéneo que descansa sobre un lecho de roca de rigidez infinita.

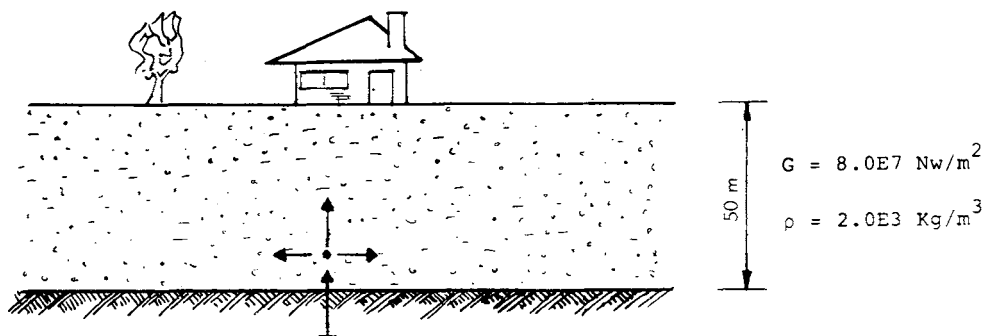


Figura 2.

La excitación consiste en una onda de corte que se propaga en dirección vertical.

Los valores numéricos (potencia del estrato y velocidad de onda) han sido escogidos de forma que, siendo posibles, den lugar a resultados numéricos de fácil comprobación.

Este modelo se puede ampliar fácilmente sin ningún problema conceptual. Es posible, por ejemplo, aumentar el número de estratos, admitir base elástica o la presencia de amortiguamiento. Todos estos aspectos acercan el modelo a la realidad.

ECUACION DE CAMPO

Como siempre, se trata de expresar mediante una ecuación diferencial la condición de equilibrio en términos de la variable de campo, en este caso los desplazamientos.

El esquema de razonamiento es el clásico: dado el carácter unidimensional del problema (el desplazamiento de cada punto queda determinado por una única variable: la coordenada vertical) se escoge una columna (Figura 3) representativa del problema y de área unidad.

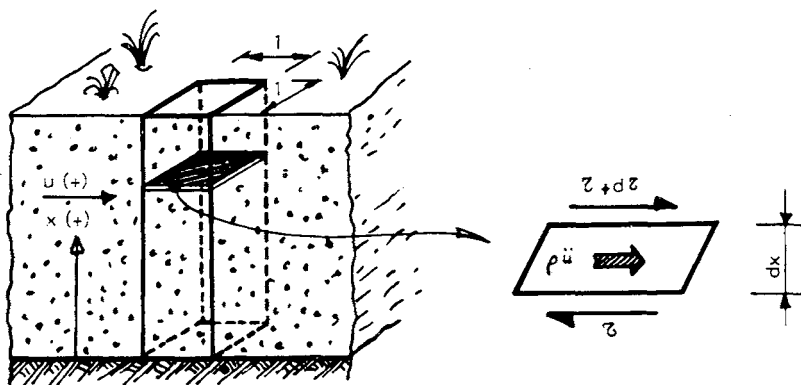


Figura 3.

Al establecer la condición de equilibrio sobre la rodaja se obtiene:

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

que, al incluir una ley lineal elástica de comportamiento:

$$\tau = G\xi$$

y la relación desplazamiento-deformación:

$$\xi = \frac{\partial u}{\partial x}$$

resulta:

$$G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

que es la ecuación de onda.

Las condiciones de contorno son:

- esenciales en $x = 0$; $u(0, t) = u_s(t)$ (movimiento conocido en la base)
- naturales en $x = H$; $G u'(H, t) = 0$ (condición de borde libre)

APROXIMACION

Aplicando una vez más el proceso usual:

- ponderación:

$$\int_0^H v G u'' dx = \int_0^H v \rho \ddot{u} dx$$

- integración por partes:

$$[v G u']_0^H - \int_0^H v' G u' dx = \int_0^H v \rho \ddot{u} dx$$

La imposición de las condiciones de contorno esenciales requieren, dado que no son homogéneas, la inclusión de funciones aproximadoras capaces de generar desplazamientos en el contorno.

El proceso habitual de discretización daría lugar, si se utilizan elementos lineales, a una familia de la forma indicada en la Figura 4.

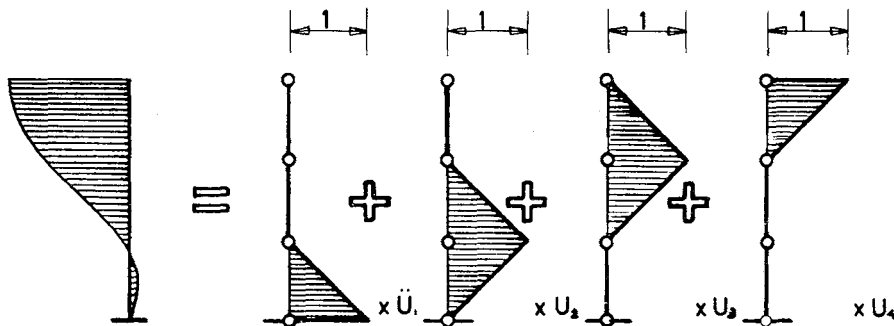


Figura 4.

Pues bien, sobre este método general se propone el cambio de la función correspondiente al movimiento del suelo.

Desde un punto de vista matemático nada ha cambiado (la nueva función es combinación lineal de todas las anteriores al hacer unidad los coeficientes).

Conceptualmente se pierde una de las ventajas fundamentales de la discretización clásica, cual es que los desplazamientos nodales coinciden con los coeficientes de las funciones correspondientes.

Esto es, según la primera discretización:

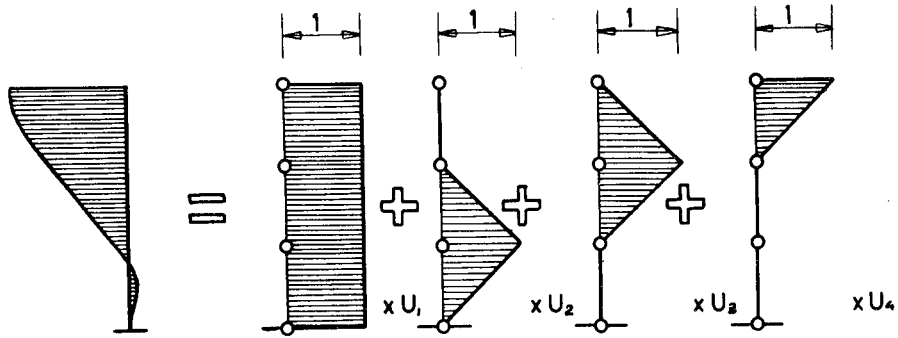


Figura 5.

$$u_{\text{nudo } i}^* = u_i$$

y según la propuesta:

$$u_{\text{nudo } i}^* = u_i + u_s$$

Esta aparente pérdida se convierte en ventaja importante al pensar que separa el movimiento de la estructura como sólido rígido siguiendo al suelo, del movimiento relativo de cada parte respecto a las demás (deformación).

Tal interpretación es familiar a todos los ingenieros sísmicos que la usan en muy distintas formas.

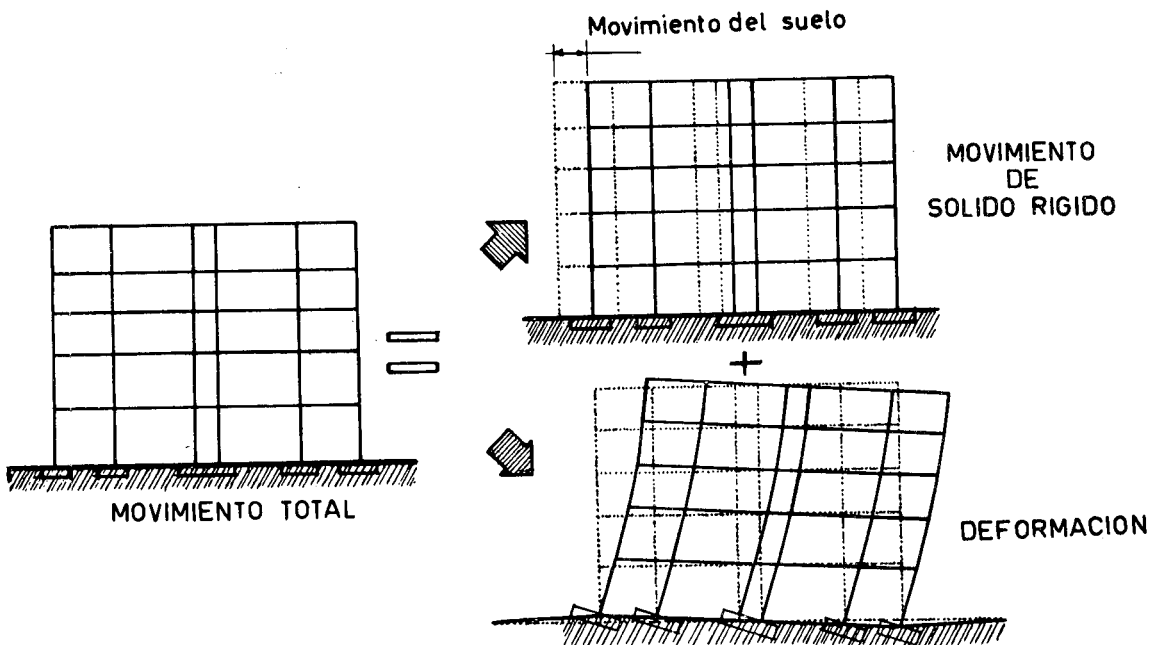


Figura 6.

La otra condición de contorno, extremo libre, se impone de forma inmediata:

$$(v G u')_H = 0$$

Se obtiene por tanto:

$$\int_0^H v \rho \ddot{u} dx + \int_0^H v' G u' dx = - (v G u')_0$$

FORMULACION DEL SISTEMA

Al sustituir el desplazamiento por su aproximación y proyectar se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} m_{ss} & \vdots & m_{si} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ & \vdots & \\ m_{is} & \vdots & \mathbf{M}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_s \\ \vdots \\ \ddot{u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{ss} & \vdots & k_{si} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ & \vdots & \\ k_{is} & \vdots & \mathbf{K}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s \\ \vdots \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G u'_s \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde los subíndices "s" en las matrices se refieren a los términos en cuya formulación interviene la función de forma unitaria (desplazamiento de sólido rígido).

Los elementos son de la forma:

$$\mathbf{M}^* = [m_{ij}] = \left[\int_0^H \psi_i \rho \psi_j dx \right]$$

$$\mathbf{K}^* = [k_{ij}] = \left[\int_0^H \psi'_i G \psi'_j dx \right]$$

Estas integrales son ya viejas conocidas en el caso de elementos lineales (cajas $\mathbf{K}^*$ y $\mathbf{M}^*$ en el anterior sistema).

Veamos ahora cómo son el resto de elementos:

$$m_{ss} = \int_0^H 1 \cdot \rho \cdot 1 dx = \rho H$$

$$m_{is} = m_{si} = \int \psi_i \cdot \rho \cdot 1 dx$$

$$k_{ss} = \int_0^H 0 \cdot G \cdot 0 = 0$$

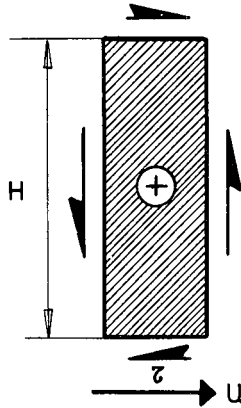
$$k_{si} = k_{is} = \int_0^H \psi'_i \cdot G \cdot 0 = 0$$

Al sustituir, la primera ecuación queda:

$$\rho H \ddot{u}_s + m_{si} \ddot{u}_i = -G u'_s$$

que no es otra cosa que la expresión del equilibrio global, dado que el segundo miembro es la fuerza aplicada en la base y el primero la fuerza de inercia de todo el estrato (esto es evidente si se piensa que es la integral extendida a todo el estrato de $\rho \ddot{u}$ ponderada por una función unidad).

El signo negativo en la carga es coherente con el hecho de que un cortante positivo, según el convenio inicialmente adoptado, induce desplazamientos negativos.



El resto de las ecuaciones del sistema se pueden escribir:

$$M^* \ddot{u} + K^* u = -J \ddot{u}_s$$

donde el vector J contiene los términos de la forma:

$$m_{is} = \int \psi_i \cdot \rho \cdot 1 \, dx$$

Conviene observar el paralelismo formal entre estos términos del vector de cargas y los que, en el caso estático, resultan de considerar carga uniforme sobre el elemento. En ambos casos el término correspondiente es el valor de la carga multiplicado por la integral de la función de ponderación para el nudo.

Cabe preguntarse acerca de la posibilidad de encontrar para este vector J una expresión que no obligue a la realización de nuevas integrales.

Para ello basta con percatarse de que, exceptuando el tramo inferior (elemento 1 de la barra ficticia) la función de forma unitaria (desplazamiento de sólido rígido) implícita en la integral del vector de cargas puede ser generada dando desplazamiento unidad al resto de grados de libertad.

Esto es:

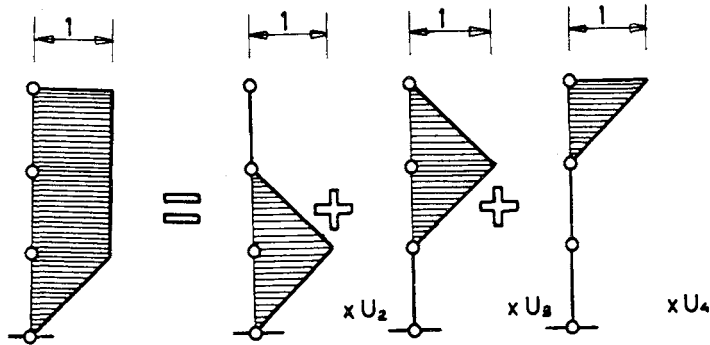


Figura 7.

y analíticamente:

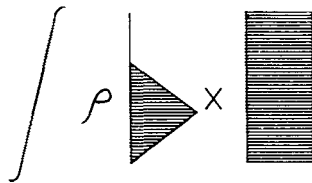
$$J_i = \int_0^H \psi_i \cdot \rho \cdot 1 = \int_0^H \psi_i \rho (\sum_j \psi_j) = \sum_j \int_0^H \psi_i \rho \psi_j = \sum_j m_{ij}$$

Esto es, el término "i" del vector **J** se puede obtener sumando todos los elementos de la fila *i* de la matriz de masa, lo cual permite escribir:

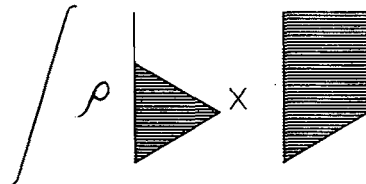
$$\mathbf{J} = \mathbf{M} \mathbf{I}$$

siendo **I** el vector unidad.

Esta igualdad es, insistimos, rigurosamente cierta para todos los grados de libertad excepto para el inmediato a la base, para el cual la integral correcta sería, expresado en una forma gráfica:



y la que realmente se realiza:



A cambio de un error que fácilmente se puede minimizar (basta con disminuir el tamaño de este primer elemento) sustituimos una integración múltiple por varias sumas de términos ya conocidos.

En la hipótesis de masa concentrada, el error cometido es, evidentemente, nulo.

Al sustituir en el sistema total:

$$\mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}^* \mathbf{u} = -\mathbf{M}^* \mathbf{I} \ddot{u}_s$$

Esta expresión es familiar para los ingenieros sísmicos, representando entonces el equilibrio del edificio. Como el modelo de éste incluye grados de libertad que no se ven influenciados por el desplazamiento del suelo (por ejemplo los verticales ante un terremoto horizontal) en este caso el vector $\mathbf{I}$ tendrá un valor unidad en los desplazamientos excitados por el terremoto y nulo en los demás.

Al conjunto así formado se le suele llamar "vector de influencia".

En la anterior relación es posible sustituir:

$$\mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{K}^* \mathbf{u} = 0$$

siendo:

$$\ddot{\mathbf{u}}_t = \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{I} \ddot{u}_s$$

Esta expresión constituye frecuentemente la base de partida en la formulación del equilibrio. Ello se justifica pensando que las fuerzas de inercia dependen del movimiento total, mientras que las elásticas son función únicamente de los movimientos que implican deformación.

En cualquier caso el precisar esta idea no resulta sencillo.

ERROR INHERENTE A LA SUSTITUCION DE $\mathbf{J}$ POR $\mathbf{M} \mathbf{I}$

En este apartado se trata de demostrar cómo, incluso en los casos más desfavorables, la sustitución del vector $\mathbf{J}$ por el producto $\mathbf{M} \mathbf{I}$ induce errores de escasa entidad desde un punto de vista práctico.

A modo de ejemplo se supone una discretización del estrato que da lugar a 5 elementos lineales de idénticas características.

Los vectores de cargas serán:

$$-\rho \ddot{u}_s \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} \qquad -\rho \ddot{u}_s \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 8.3 \end{bmatrix}$$

TEORICO ($\mathbf{J}$)

PRODUCTO $\mathbf{M} \mathbf{I}$

Esta diferencia, que en coordenadas nodales podría parecer importante, pierde significado al expresar el sistema en coordenadas modales.

La carga modal es, en este caso:

$$p_i = -R_i \ddot{u}_s$$

$$R_i = \frac{\phi_i^t \rho 1}{\phi_i^t \rho \phi_i}$$

o gráficamente:

$$\frac{\int \rho \left(\text{triangular shape} \right) \times \left(\text{rectangular shape} \right)}{\int \rho \left(\text{triangular shape} \right) \times \left(\text{triangular shape} \right)}$$

donde se ha intentado representar el factor de participación (R_i) correspondiente a la primera deformada modal.

Este factor de participación se sustituye en la práctica por:

$$\frac{\int \rho \left(\text{triangular shape} \right) \times \left(\text{rectangular shape} \right)}{\int \rho \left(\text{triangular shape} \right) \times \left(\text{triangular shape} \right)}$$

El error cometido depende tanto de la autofunción considerada como de la discretización elegida.

Para el caso descrito (cinco elementos iguales) y considerando el primer modo, el error teórico (realizando analíticamente las integrales y no a través de la proyección de las matrices) no llega entonces al 2%.

TRATAMIENTO INFORMATICO

La gran ventaja de la aproximación seguida es el no requerir la programación de ninguna rutina nueva.

Efectivamente, tanto las matrices del sistema como el vector de cargas pueden ser generados por el más sencillo de los programas de cálculo matricial (basta con que

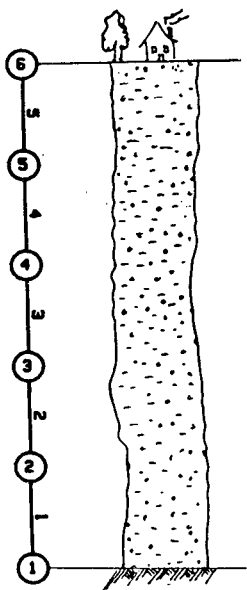
cuenta con el elemento barra plana de celosía). Ello se debe a que la ecuación de campo de nuestro problema:

$$G u'' = \rho \ddot{u}$$

es formalmente idéntica a la que rige el comportamiento de la barra en axil:

$$E u'' = \rho \ddot{u}$$

por lo que basta con establecer la analogía indicada en la tabla adjunta (Figura 8) para asimilar el análisis al de una barra.



		BARRA	ESTRATO
GEOMETRIA		LONGITUD	ALTURA
VARIABLE		DESP. AXIL	DESP. A CORTE
CONDICIONES DE CONTORNO		EXTREMO SUP. LIBRE	EXTREMO SUP. LIBRE
		EXTREMO INF. FIJO	DESP. IMPUESTO
		DESP. NORMAL NULO	-----
CARACTERISTICAS MECANICAS	AREA	1	1
	M. YOUNG	G	-----
	DENSIDAD	R ₀	R ₀

Figura 8.

En todo lo que sigue se utiliza la aproximación de masa consistente, debido a que el valor mínimo (2) del semiancho de banda en las matrices generadas, posibilita su manejo por cualquier ordenador. En cualquier caso el uso de una u otra aproximación no reviste, en este caso mayor importancia.

ALGUNOS RESULTADOS

En este apartado se pretende explotar el modelo descrito haciendo uso de las herramientas informáticas más elementales y cuya implementación requiera el mínimo de equipo informático.

Modos de vibración

Como ocurre siempre en un sistema dinámico, las magnitudes que en primer lugar se deben investigar son las frecuencias propias y los modos de vibración.

Para ello se modeló una barra uniforme con 5 y 10 grados de libertad.

Los resultados fueron, para el modelo de 5 barras los que se muestran en la Figura 9 en la que se muestra el dibujo de las formas modales y su comparación con la deformada modal teórica, fácil de obtener en este caso.

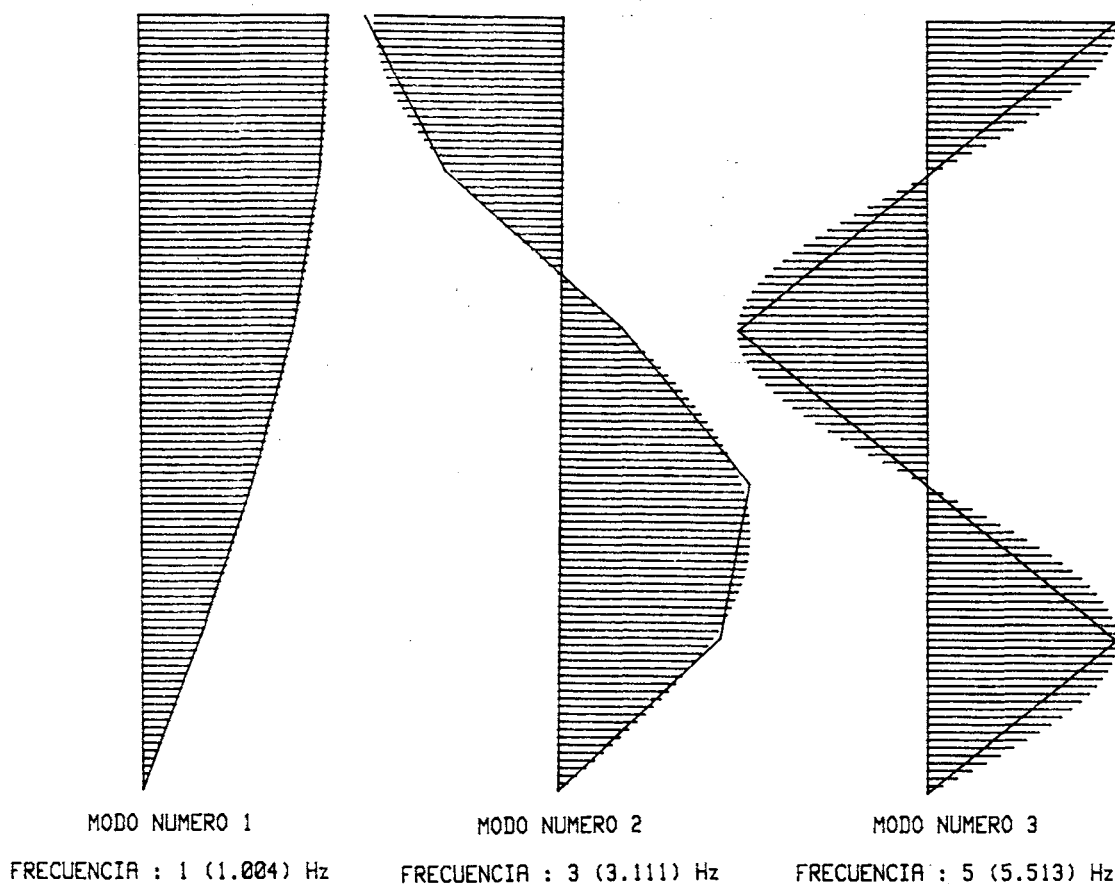


Figura 9.

Las frecuencias propias son, para este ejemplo 1, 3, 5, 7,... Hz (evidentemente, las características del estrato han sido escogidas de forma que diesen lugar a estos resultados), por lo que el error cometido en su evaluación numérica es el que se muestra en la Tabla I.

Como se puede apreciar, la precisión de estos resultados es ya importante (¡ se está jugando con un sistema de 5 grados de libertad!).

MODO	Frec. obtenida	Frec. real	ERROR %
1	1.004	1	0.4 %
2	3.112	3	3.7 %
3	5.513	5	10.3 %

Tabla I

MODO	Frec. obtenida	Frec. real	ERROR %
1	1.001	1	0.10 %
2	3.028	3	0.93 %
3	5.290	5	2.59 %

Tabla II

El modelo de 10 barras proporciona los resultados indicados en la Tabla II con sistemas de tamaño aún mínimo (matrices de 10x2 elementos).

Función de transferencia

Entenderemos aquí como tal la que relaciona el movimiento de la base del estrato (entrada) con el de la superficie (salida).

Ambos desplazamientos están relacionados, en coordenadas modales por los sistemas desacoplados:

$$\ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i = - R_i \ddot{u}_s$$

siendo

- ω_i = frecuencia natural
- R_i = factor de participación = $\frac{\phi_i^t \mathbf{J}}{\phi_i^t \mathbf{M} \phi_i}$
- $\ddot{u}_s$ = aceleración en la base

Si la entrada (movimiento en la base) es armónica:

$$u_s = e^{i\alpha t}$$

la salida también lo será. Sustituyendo en la ecuación modal:

$$-\alpha^2 \xi_i + \omega_i^2 \xi_i = + R_i \alpha^2$$

$$\xi_i = \frac{R_i \alpha^2}{\omega_i^2 - \alpha^2}$$

Automatizar este proceso en un pequeño ordenador es muy sencillo. La salida se puede dar directamente en coordenadas modales o bien en las primitivas:

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi} \boldsymbol{\xi}$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u} + \mathbf{I}u_s$$

Si se dibujan los desplazamientos para cada frecuencia se obtiene la Figura 10, de la que, al comparar con los resultados teóricos cabe resaltar:

- 1) En los puntos de resonancia del sistema la función es, lógicamente, singular. Al objeto de no tener problemas numéricos en ese sentido se le dió al sistema un pequeño amortiguamiento (1.E-5 %).

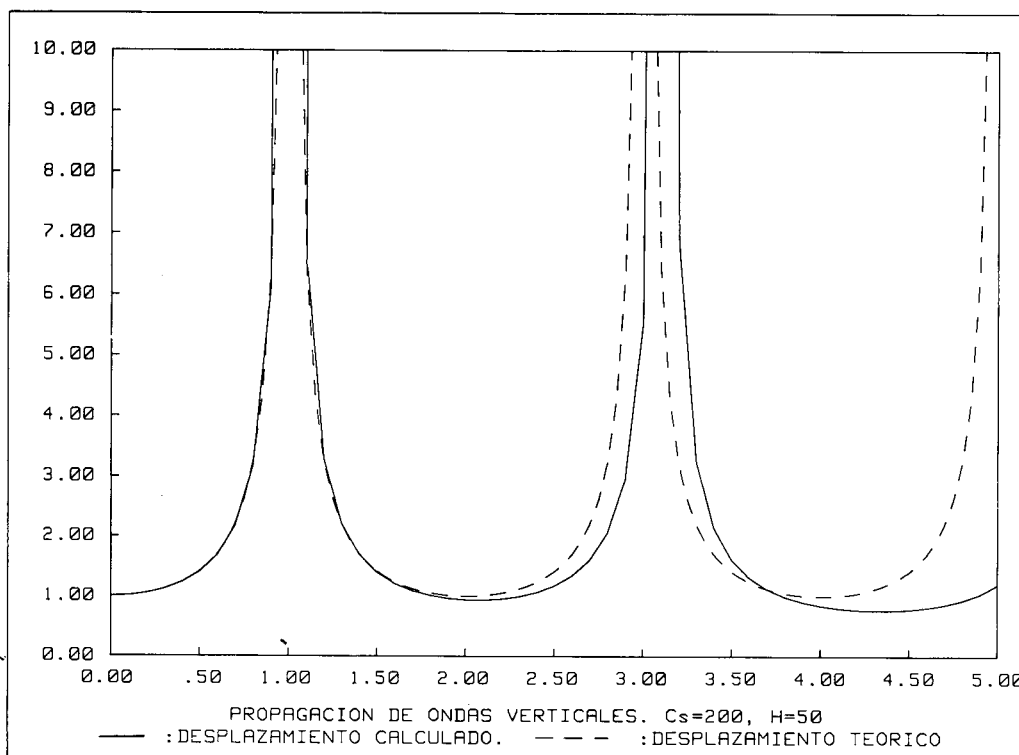


Figura 10.

- 2) Al ir creciendo el valor de las frecuencias propias también lo hace la distancia entre los puntos de singularidad, "trasladando" la forma del pico de resonancia.
- 3) Para cualquier frecuencia el valor de la función de transferencia es mayor o igual que la unidad. Ello significa que siempre existe amplificación.
- 4) Como todos los modos presentan algún desplazamiento en el extremo libre, la función de transferencia tendrá tantas singularidades como modos, esto es, infinitos.

Al aumentar el número de g.d.l. empleados, lógicamente mejora la aproximación (Figura 11).

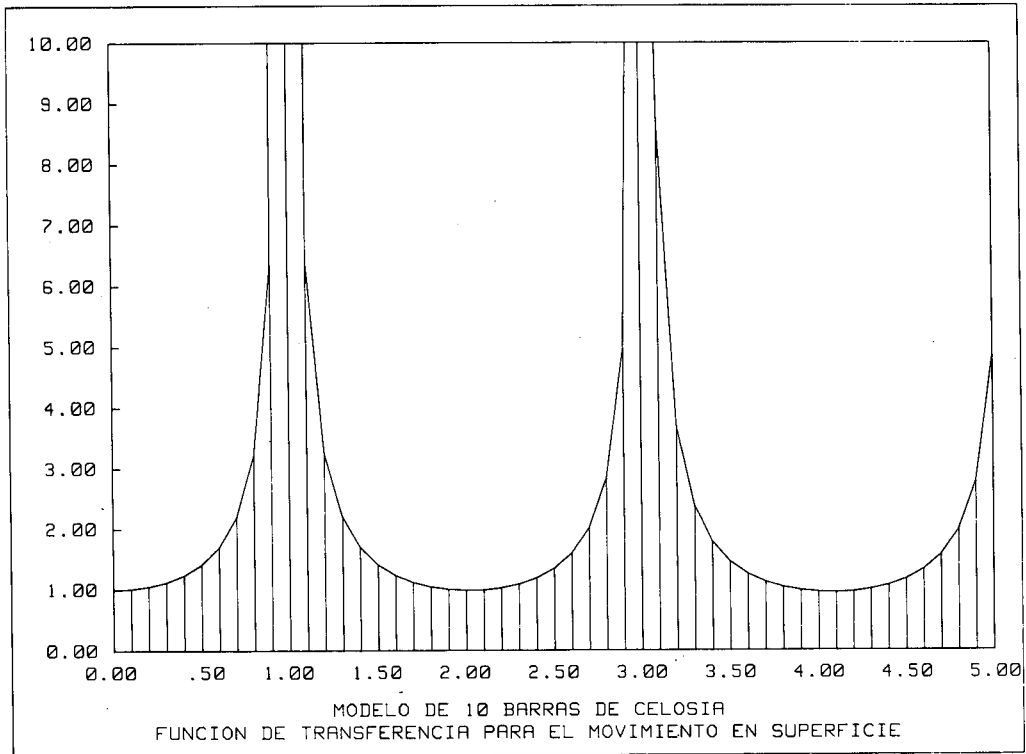


Figura 11.

Si se piensa en puntos intermedios del estrato, se presentan diferencias importantes.

- 1º) Aparecen valores inferiores a la unidad e, incluso, nulos (Figura 12).
- 2º) Al menos un modo tendrá valor nulo en cada punto intermedio. Para la frecuencia correspondiente la función de transferencia no será por tanto singular.

Ambos efectos coinciden con la experiencia existente. En efecto, se sabe de sismos que dieron lugar a importantes movimientos en superficie sin ser advertidos por mineros que trabajaban en galerías subterráneas.

La inclusión en el modelo de amortiguamiento modal de tipo viscoso es inmediata: basta con introducir en el denominador de la función de transferencia el término:

$$2 i \zeta_i w_i \alpha_i$$

propio de este tipo de amortiguamiento.

Este simple cambio da lugar a resultados más próximos a los que cabría esperar (Figura 13). Efectivamente, han desaparecido las singularidades de la función puesto que, en este caso, el denominador nunca se anula.

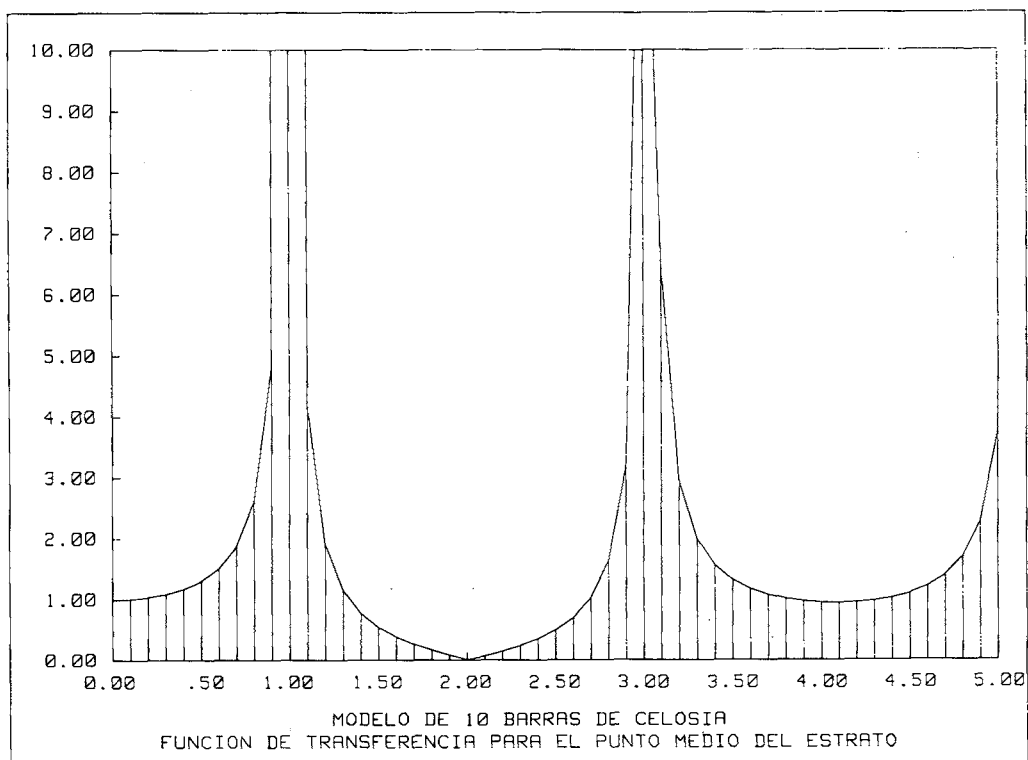


Figura 12.

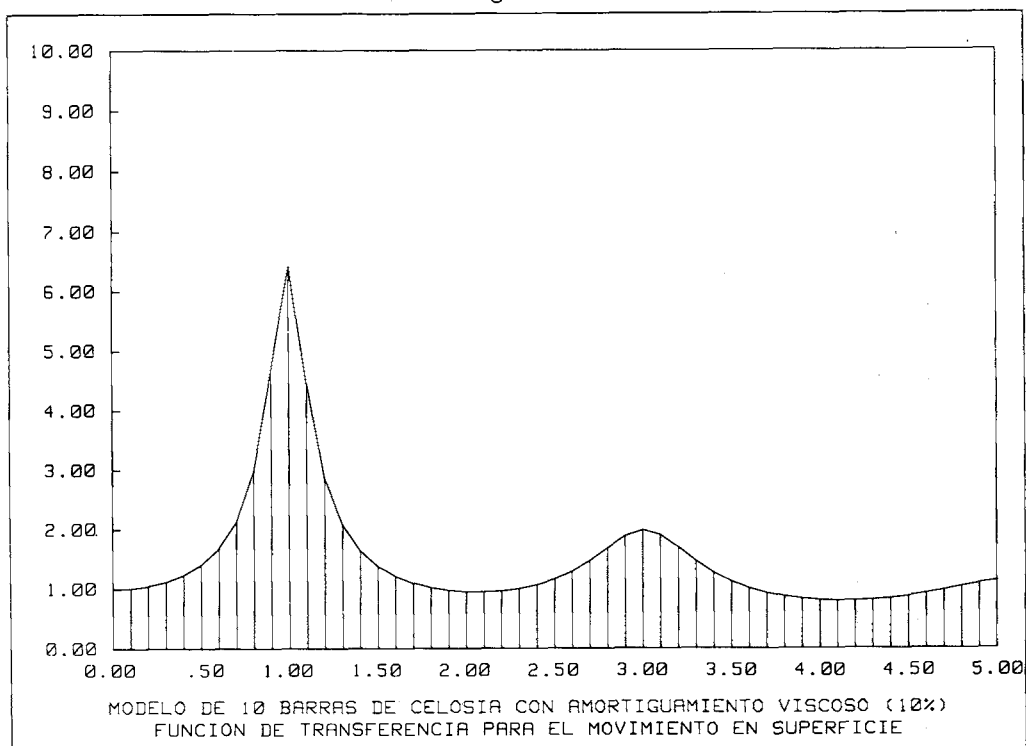


Figura 13.

CONCLUSIONES

La principal virtud del modelo analizado es su generalidad y potencia.

Generalidad porque el mismo esquema conceptual y el mismo programa que aquí nos ha servido para estudiar el desplazamiento de un estrato puede ser válido para cualquier otra estructura (barras, pantallas, ...).

Potencia, porque a un coste mínimo es capaz de suministrar información acerca del comportamiento de uno o varios estratos (basta con dar a las barras diferentes características mecánicas), con distintos amortiguamientos (e incluso de distintos tipos) y en el rango de frecuencias y en el punto del estrato deseados.

Por todo ello no es extraño que sea éste el modelo utilizado en muchos casos de la práctica en ingeniería.

Su limitación fundamental radica en el hecho de precisar conocer el movimiento del punto inferior del estrato.

Planteado desde otro punto de vista, esta misma limitación se podría expresar diciendo que, lo realmente interesante para el ingeniero no es la relación entre el movimiento en superficie y el de la base, sino la existente entre el movimiento de la superficie cuando hay estrato y cuando no.

En términos técnicos ambos casos se conocen como base rígida o base flexible.

La Figura 14 muestra esta segunda función de transferencia.

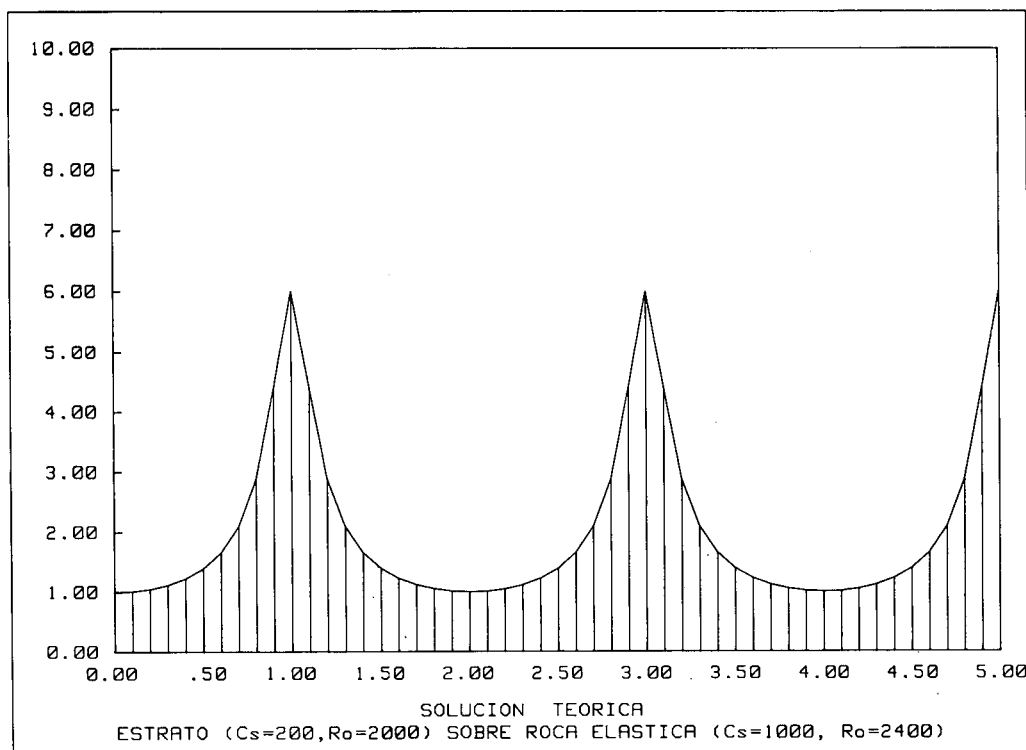


Figura 14.

Ello no invalida el modelo empleado, pero obliga a la inclusión de elementos ("contornos absorbentes" en términos técnicos) capaces de salvar esta limitación.

REFERENCIAS

1. Arya, O'Neil y Pincus, "*Design of structures and foundations for vibrating machines*", Gulf. Publishing Company.
2. Clough y Penzien, "*Dynamics of structures*", Mc. Graw-Hill.
3. J.P. Wolf, "*Dynamic soil-structure interaction*", Prentice-Hall.