ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА И ГОСУДАРСТВЕННОЙ
СЛУЖБЫ ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»
(РАНХиГС)

УДК
Рег. № НИОКТР
Рег. № ИКРБС

УТВЕРЖДАЮ
Ректор РАНХиГС
д-р экон. наук, проф.

_______________ В.А. Мау
«____» ___________2020 г.

ПРЕПРИНТ

по теме:

СЕМЕЙСТВО МЕР РИСКА VAR В ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТЕПЕНИ t >= 1. СПОСОБЫ ИХ ВЫЧИСЛЕНИЯ И ПРИМЕНЕНИЯ

Автор: В.Б. Минасян

Москва 2020

КРАТКАЯ АННОТАЦИЯ К РАБОТЕ

Препринт подготовлен по материалам итогового отчета научно-исследовательской работы, выполненной в соответствии с Государственным заданием РАНХиГС при Президенте Российской Федерации на 2020 год.

В работе предложены новые меры риска VaR в различных степенях, исследованы свойства, предложены формулы для их вычисления вычисление и применения.

Новая мера риска VaR в квадрате ($VaR^{(2)}$), является теоретическим осмыслением применяемых на практике подходов оценки стрессовой VaR (sVaR). В работе выводится формула ее вычисления для случаев равномерного, треугольного и нормального распределений денежного потока по активу (проекту). Оказывается, что $VaR^{(2)}$ намного консервативнее оценивает риски, чем мера риска VaR, во многих случаях может составить в применении конкуренцию другим мерам катастрофических рисков, например, таким, как ES.

В работе исследована мера риска VaR в квадрате и получены методы ее расчета и применения в общих предположениях о законе распределения убытков. Произведено сравнение данной меры с другими мерами риска, такими, как ES и др. Оказывается, что для вычисления $VaR^{(2)}$ достаточно рассчитать обычную меру риска VaR, с определенным образом измененной доверительной вероятностью.

Сравниваются уровни консервативности оценки рисков с помощью мер $VaR^{(2)}$ с другими мерами риска. Исследование показало, что ответ зависит от закона распределения потерь. Для одних распределений, $VaR^{(2)}$ оказывается более консервативной оценкой по сравнению с ES, для других, - наоборот. Мера риска VaR в квадрате может применяться осторожными инвесторами, которые опасаются возможных очень плохих результатов инвестиций, которые хотя и очень маловероятны, но, по их мнению, в данных обстоятельствах, вполне возможны. И наряду с VaR и ES, вероятно, в практике риск-менеджмента следует обращаться и к этой мере риска.

В работе введено новое семейство мер риска VaR в произвольной степени t ≥ 1. Предложены способы их вычисления и применения. Степень консервативности которых повышается с ростом t, и которые являются более консервативными по сравнению с известными мерами VaR и ES. Они могут применяться осторожными инвесторами, которые опасаются возможных очень плохих результатов инвестиций, которые хотя и очень маловероятны, но, по их мнению, в данных обстоятельствах, вполне возможны. Исследование и оценка таких рисков может осуществляться с помощью последовательного вычисления $VaR_p^{(t)}[X]$ с возрастающими значениями t. Путь расчета $VaR_p^{(t)}[X]$ будет зависеть от многих предпочтений инвестора, в том числе от его аппетита к риску. Получена общая формула, выражающая $VaR_p^{(t)}[X]$ через соответствующие VaR, позволяющая оценивать $VaR^{(t)}$ через все известные методы оценки VaR.

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Зав. кафедрой корпоративных финансов, инвестиционного проектирования и оценки имени М.А. Лимитовского, ВШФМ, к.ф.-м.н., доцент	________________ подпись, дата	В.Б. Минасян

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Новые меры риска «VaR в любой степени» ($VaR^{(t)}, t \geq 1$) и их вычисление.

В работе вводится семейство новых мер риска VaR в степени t, $VaR^{(t)}, t \geq 1$ и выводятся формулы для их вычисления. Оказывается, что для вычисления $VaR^{(t)}$ достаточно рассчитать обычную меру риска VaR, с определенным образом измененной доверительной вероятностью.

Мера риска VaR в настоящее время является ставшей классической мерой рыночного риска, получившей большое применение и развитие, как в теории, так и на практике (см., например, [1-3]). VaR оценивает пороговый уровень, который не преодолевается в данном (большом) проценте наблюдений в течение данного времени. Согласно решениям Базельского комитета, она вошла в качестве обязательной в применении меры риска при оценке не только рыночного риска, но и других рисков (например, кредитного риска и риска ликвидности). Меру риска VaR применяют при оценке различных рисков в корпоративном управлении (см., например, [4-5]). С конца 20-го века достаточное применение и в теории и практике риск-менеджмента нашла мера ожидаемого дефицита, условная VaR, мера ожидаемых хвостовых потерь, превышающих VaR, часто обозначаемая ES (см., например, [1-3]). В работе [6] было введено понятие новой меры VaR в квадрате $VaR^{(2)}$, которая более консервативно оценивает риски, чем VaR и даже ES, оценивая риск как некую пороговую величину, которая не преодолевается с данной вероятностью, (как VaR), а не как некоторое среднее значение из множества «плохих», хвостовых значений потерь (как ES). Для этой меры риска были получены замкнутые вычислительные формулы расчета в случаях равномерного и треугольного распределений убытка. В работе [7] было продолжено исследование меры риска VaR в квадрате, и для нее была получена общая, не зависящая от распределения убытков формула, выражающую ее через обычную меру VaR, но с измененной определенным образом доверительной вероятностью. Кроме того, были исследованы соотношения между оценками риска, дающими мерой риска $VaR^{(2)}$ и другими известными мерами риска, такими, например, как ES. Выяснилось, что исследуемое соотношение часто зависит от предположения закона распределения убытков, а иногда и от доверительных вероятностей. Но выяснилось, что чаще всего мера риска $VaR^{(2)}$ дает более консервативную оценку риска, чем ES (см. [7]). Данный раздел продолжает развивать описанную серию исследований автора. В ней вводится понятие мер риска VaR в любой степени $t \geq 1$, выводятся формулы, позволяющие свести расчет $VaR^{(t)}$ к вычислению обычной меры VaR с измененной, определенным образом, доверительной вероятностью. Обсуждаются возможности практического применения данного семейства мер риска.

Понятие о мерах риска VaR в степени n ($VaR^{(n)}$) и вывод вычислительных формул

В работе [7] была введена новая мера риска, дополняющая VaR, мера «VaR в квадрате» ($VaR_p^{(2)}$), отслеживающая хвостовые редко возникающие риски, но связанные с серьезными финансовыми потерями.

Мерой риска VaR в квадрате ($VaR_p^{(2)}$) с доверительной вероятностью p (см.[7]) называется величина, которую превысит прибыль (не превысят потери), при условии не превышения (превышения) ее пороговой величины VaR_p с доверительной вероятностью p в течение заданного времени.

В работе [7] выведена формула для вычисления данной меры риска.

Обозначим через X величину случайной прибыли по данному активу в течение заданного промежутка времени (- X, показывает величину соответствующих потерь).

В работе [7] доказана следующая формула, позволяющая вычисление меры риска $VaR_p^{(2)}$ свести к вычислению VaR с измененной определенным образом доверительной вероятностью (1):

$$VaR_p^{(2)}[X] = VaR_{1-(1-p)^2}[X] \tag{1}$$

Таким, образом, чтобы рассчитать меру риска $VaR_p^{(2)}$, надо просто сосчитать меру риска VaR с доверительной вероятностью $1-(1-p)^2$.

В частности, если известен закон распределения потерь (например, нормальный), то $VaR_p^{(2)}$ можно рассчитать с использованием формулы (1) методом Монте Карло, или воспользоваться известной формулой для VaR в этом предположении и формулой (1), что приведет к следующему результату (2):

$$VaR_p^{(2)} = Vk_{1-(1-p)^2}^{0,1} \cdot \sigma, \tag{2}$$

где V – ценность позиции в момент 0;

$k_q^{0,1}$ - квантиль стандартизированного распределения доходности с доверительной вероятностью q;

$\sigma -$ стандартное отклонение доходности на временном промежутке, на котором мы оцениваем $VaR_p^{(2)}$.

В случае если неизвестно распределение доходностей, $VaR_p^{(2)}$ можно сосчитать используя эмпирическое распределение потерь и формулу (1).

Следует отметить, что в (2) использована формула расчета относительного VaR, т.е. величины максимального отклонения в неблагоприятном направлении от ожидаемой прибыли с данной вероятностью в течение заданного (единичного) времени.

Понятие $VaR^{(2)}$ в работе [7] , было обобщено с учетом того, что доверительная вероятность p' при определении $VaR^{(2)}$, т.е. пороговой величины, которую не превысит прибыль (превысит убыток) при условии не превышения (превышения) VaR_p с вероятностью p' , может отличаться от p. Данная мера риска была обозначена $VaR_{p,p'}^{(2)}$ и получена следующая вычислительная формула (3):

$$VaR_{p,p'}^{(2)}[X] = VaR_{1-(1-p)(1-p')}[X] \tag{3}$$

Введем понятие мер риска VaR в степени n, где n – любое натуральное число и займемся последовательным выводом формул для мер риска VaR в степени n, $VaR^{(n)}$.

Начнем с того, что обычную VaR представим в виде (4):

$$VaR_p^{(1)}[X] = VaR_p[X] = VaR_{p_1}[X], \tag{4}$$

где $\mathrm{p}_1 = 1-(1-p)$.

Тогда, согласно формуле (1) имеем (5):

$$VaR_p^{(2)}[X] = VaR_{p_2}[X] \tag{5}$$

где $\mathrm{p}_2 = 1-(1-p_1)^2$.

Тогда, естественно, согласно определению, считать, что «VaR в кубе» это всего лишь $VaR_{p_2,p}^{(2)}[X]$. Таким образом, получаем, что (6):

$$VaR_p^{(3)}[X] = VaR_{p_2,p}^{(2)}[X] = VaR_{p_3}[X] \tag{6}$$

где согласно формуле (3) получаем (7):

$$\mathrm{p}_3 = 1-(1-p_2)(1-p) \tag{7}$$

но тогда, с использованием формулы (1) имеем (8):

$$\mathrm{p}_3 = 1-(1-p_2)(1-p) = 1-(1-[1-(1-p)^2])(1-p) = 1-(1-p)^3 \tag{8}$$

То что так же, определяя, «VaR в четвертой степени» как $VaR_{p_3,p}^{(2)}[X]$, мы получаем (9):

$$VaR_p^{(4)}[X] = VaR_{p_3,p}^{(2)}[X] = VaR_{p_4}[X] \tag{9}$$

где согласно формуле (3) получаем (10):

$$\mathrm{p}_4 = 1-(1-p_3)(1-p) \tag{10}$$

но тогда, с использованием формулы (1) имеем (11):

$$\mathrm{p}_4 = 1-(1-p_3)(1-p) = 1-(1-[1-(1-p)^3])(1-p) = 1-(1-p)^4 \tag{11}$$

Продолжая аналогичным образом, мы введем меру риска «VaR в степени n» для любого натурального числа n как $VaR_{p_{n-1},p}^{(2)}[X]$, где $\mathrm{p}_{\mathrm{n}\text{-}1} = 1-(1-p)^{n-1}$ мы получаем (12):

$$VaR_p^{(n)}[X] = VaR_{p_{n-1,p}}^{(2)}[X] = VaR_{p_n}[X], \tag{12}$$

где согласно формуле (3) получаем (13):

$$\mathrm{p}_{\mathrm{n}} = 1-(1-p_{n-1})(1-p) \tag{13}$$

но тогда, с использованием формулы (1) имеем (14):

$$\mathrm{p_n} = 1-(1-p_{n-1})(1-p) = 1-(1-[1-(1-p)^{n-1}])(1-p) = 1-(1-p)^n \qquad (14)$$

Таким образом, мы ввели понятие мер риска «VaR в степени n» для любого натурального числа n и получили формулу, сводящую их вычисления к расчету обычной меры риска VaR с измененной определенным образом доверительной вероятностью (15):

$$VaR_p^{(n)}[X] = VaR_{1-(1-p)^n}[X] \qquad (15)$$

Таким, образом, чтобы рассчитать меру риска $VaR_p^{(n)}$, надо просто сосчитать меру риска VaR с доверительной вероятностью $1-(1-p)^n$.

С помощью мер риска $VaR_p^{(n)}[X]$ риск-менеджер может последовательно углубляясь в исследование левого хвоста закона распределения прибылей на доверительные вероятности, кратные начальной доверительной вероятности p, получать информацию о все менее вероятных, но более катастрофических рисках.

Следствие.

Для любого значения доверительной вероятности $p \in (0,1]$, при неограниченном росте показателя степени n, значение меры риска $VaR_p^{(n)}[X]$ неограниченно приближается к левой (правой) границе носителя распределения прибыли X (убытка –X).

Доказательство.

Это следует из того, что при указанных значениях p, $1-(1-p)^n \to 1, \text{при } \mathrm{n} \to \infty.$

Ниже приведена таблица 1 для расчетных формул для $VaR_p^{(n)}$ при n = 2,3 и 4 и определенных доверительных вероятностях.

Из таблицы 1 видно, что при росте показателя степени n, доверительная вероятность у соответствующей обычной меры VaR стремится к 100% , причем тем быстрее, чем больше доверительная вероятность, с которой рассчитывается мера риска $VaR_p^{(n)}[X]$. Поэтому и значения меры риска $VaR_p^{(n)}[X]$ быстро приближается к левой (правой) границе носителя распределения прибыли X (убытка –X).

Таблица 1 - Выражение для $VaR_p^{(n)}[X]$ через обычную меру риска VaR при различных значениях n и доверительных вероятностей

	$p = 90\%$	$p = 95\%$	$p = 99\%$
$VaR_p^{(2)}[X]$	$VaR_{99\%}[X]$	$VaR_{99,75\%}[X]$	$VaR_{99,99\%}[X]$
$VaR_p^{(3)}[X]$	$VaR_{99,9\%}[X]$	$VaR_{99,9875\%}[X]$	$VaR_{99,9999\%}[X]$
$VaR_p^{(4)}[X]$	$VaR_{99,99\%}[X]$	$VaR_{99,999\%}[X]$	$VaR_{\approx 100\%}[X]$

Протестируем полученные результаты на известных распределениях убытком и соответствующих численных примерах.

Применение в случае равномерного распределения прибыли

Согласно результатам работы [8], если величина прибыли X равномерно распределена в интервале (a,b), то при любой доверительной вероятности p (16):

$$VaR_p[X] = pa + (1-p)b \tag{16}$$

Перепишем это выражение следующим образом (17):

$$VaR_p[X] = b - (b-a)p = a + (1-p)(b-a) \tag{17}$$

Тогда, согласно формуле (15) получаем (18):

$$VaR_p^{(2)}[X] = VaR_{1-(1-p)^2}[X] = b - (b-a)(1-(1-p)^2) = a + (1-p)^2(b-a) \tag{18}$$

Заметим, что выражение, естественно, совпало с выражением, полученным с помощью прямолинейного вывода из определения $VaR_p^{(2)}[X]$ (2), выведенном в работе [6]. Аналогично, получаем выражение для $VaR_p^{(n)}[X]$ (19) и (20):

$$VaR_p^{(n)}[X] = VaR_{1-(1-p)^n}[X] = b - (b-a)(1-(1-p)^n) = a + (1-p)^n(b-a) \tag{19}$$

$$VaR_p^{(n)}[X] = a + (1-p)^n(b-a) \tag{20}$$

Формулу (20) можно переписать и так (21):

$$VaR_p^{(n)}[X] = (1-(1-p)^n)a + (1-p)^n b \tag{21}$$

что означает, что величина $VaR_p^{(n)}[X]$ при равномерном распределении прибыли X, представляется в виде средневзвешенного значения между концами интервала (a,b), причем вес левого конца интервала стремительно стремится к 1 при росте показателя степени n. Поэтому и значения меры риска $VaR_p^{(n)}[X]$ быстро приближается к левой (правой) границе носителя распределения прибыли X (убытка –X).

Все это проиллюстрировано в Примере 1.

Пример 1.

Предположим, a = 100 ед., b = 200 ед. В таблице 2 приведены расчетные значения $VaR_p^{(n)}[X]$ для этого примера.

Таблица 2 – Расчетные значения для $VaR_p^{(n)}[X]$

	p = 90%	p = 95%	p =99%
$VaR_p[X]$	110	105	101
$VaR_p^{(2)}[X]$	101	100,25	100,01
$VaR_p^{(3)}[X]$	100,1	100,0125	100,0001
$VaR_p^{(4)}[X]$	100,01	100,000625	$\approx$100

Применение в случае треугольного распределения прибыли

Согласно результатам работы [8], если случайная величина X подчинена треугольному распределению с носителем, совпадающим с интервалом (a,b), и вершиной, проекция которой на носитель представляется точкой v∈(a,b) , тогда (22):

$$VaR_p[X] = \begin{cases} a + \sqrt{(1-p)(b-a)(\nu-a)}, \text{ если } \nu \ge \mathrm{pa} + (1-\mathrm{p})\mathrm{b} \\ \mathrm{b} - \sqrt{\mathrm{p}(\mathrm{b}-\mathrm{a})(\mathrm{b}-\nu)}, \text{ если } \nu \le \mathrm{pa} + (1-\mathrm{p})\mathrm{b} \end{cases} \tag{22}$$

Перепишем это выражение следующим образом (23):

$$VaR_p[X]=\begin{cases} a+\sqrt{(1-p)(b-a)(\nu-a)}, \text{если } \nu \geq \mathrm{a}+(1-\mathrm{p})(\mathrm{b}-\mathrm{a}) \\ \mathrm{b}-\sqrt{(1-(1-\mathrm{p}))(\mathrm{b}-\mathrm{a})(\mathrm{b}-\nu)}, \text{если } \nu \leq \mathrm{a}+(1-\mathrm{p})(\mathrm{b}-\mathrm{a}) \end{cases} \tag{23}$$

Тогда, т.к. согласно формуле (15) получаем (24) и (25):

$$VaR_p^{(2)}[X]=VaR_{p_2}[X], \text{где } \mathrm{p}_2=1-(1-p)^2 \tag{24}$$

$$VaR_p^{(2)}[X]=\begin{cases} a+\sqrt{(1-p_2)(b-a)(\nu-a)}, \text{если } \nu \geq \mathrm{a}+(1-\mathrm{p}_2)(\mathrm{b}-\mathrm{a}) \\ \mathrm{b}-\sqrt{(1-(1-\mathrm{p}_2))(\mathrm{b}-\mathrm{a})(\mathrm{b}-\nu)}, \text{если } \nu \leq \mathrm{a}+(1-\mathrm{p}_2)(\mathrm{b}-\mathrm{a}) \end{cases} \tag{25}$$

Или (26):

$$VaR_p^{(2)}[X]=\begin{cases} a+\sqrt{(1-p)^2(b-a)(\nu-a)}, \text{если } \nu \geq \mathrm{a}+(1-\mathrm{p})^2(\mathrm{b}-\mathrm{a}) \\ \mathrm{b}-\sqrt{(1-(1-\mathrm{p})^2)(\mathrm{b}-\mathrm{a})(\mathrm{b}-\nu)}, \text{если } \nu \leq \mathrm{a}+(1-\mathrm{p})^2(\mathrm{b}-\mathrm{a}) \end{cases} \tag{26}$$

Данное выражение можно записать и в следующем виде (27):

$$VaR_p^{(2)}[X]=\begin{cases} a+(1-p)\sqrt{(b-a)(\nu-a)}, \text{если } \nu \geq \mathrm{a}+(1-\mathrm{p})^2(\mathrm{b}-\mathrm{a}) \\ \mathrm{b}-\sqrt{\mathrm{p}(2-\mathrm{p})(\mathrm{b}-\mathrm{a})(\mathrm{b}-\nu)}, \text{если } \nu \leq \mathrm{a}+(1-\mathrm{p})^2(\mathrm{b}-\mathrm{a}) \end{cases} \tag{27}$$

Заметим, что это выражение, естественно, совпало с выражением, полученным с помощью прямолинейного вывода из определения $VaR_p^{(2)}[X]$, выведенном в работе [6].

Аналогично, получаем выражение для $VaR_p^{(n)}[X]$ (28):

$$VaR_p^{(n)}[X]=VaR_{1-(1-p)^n}[X]=\begin{cases} a+\sqrt{(1-p)^n(b-a)(\nu-a)}, \text{ если } \nu \geq \mathrm{a}+(1\text{-p})^n(\text{b-a}) \\ \text{b-}\sqrt{(1\text{-}(1\text{-p})^n)(\text{b-a})(\text{b-}\nu)}, \text{ если } \nu \leq \mathrm{a}+(1\text{-p})^n(\text{b-a}) \end{cases} \tag{28}$$

Исследуем поведение данных мер риска, в зависимости от значений моды распределения ν и доверительной вероятности в примерах 2-4.

Пример 2

Предположим, a = 100 ед., b = 200 ед. и $\nu = 105$. В таблице 3 приведены расчетные значения $VaR_p^{(n)}[X]$ для этого примера.

Таблица 3 – Расчетные значения для $VaR_p^{(n)}[X]$

	p = 90%	p = 95%	p =99%
$VaR_p[X]$	107.0711	105	102.2361
$VaR_p^{(2)}[X]$	102.2361	101.118	100.2236
$VaR_p^{(3)}[X]$	100.7071	100.25	100.0224
$VaR_p^{(4)}[X]$	100.2236	100.05559	100.0022

Пример 3

Предположим, a = 100 ед., b = 200 ед. и $\nu = 150$. В таблице 4 приведены расчетные значения $VaR_p^{(n)}[X]$ для этого примера.

Таблица 4 – Расчетные значения для $VaR_p^{(n)}[X]$

	p = 90%	p = 95%	p =99%
$VaR_p[X]$	122.3607	115.8114	107.0711
$VaR_p^{(2)}[X]$	107.0711	103.5355	100.7071
$VaR_p^{(3)}[X]$	102.2361	100.7906	100.0707
$VaR_p^{(4)}[X]$	100.7071	100.1768	100.0071

Пример 4

Предположим, a = 100 ед., b = 200 ед. и $\nu = 195$. В таблице 5 приведены расчетные значения $VaR_p^{(n)}[X]$ для этого примера.

Таблица 5 – Расчетные значения для $VaR_p^{(n)}[X]$

	p = 90%	p = 95%	p =99%
$VaR_p[X]$	130.8221	121.7945	109.7468
$VaR_p^{(2)}[X]$	109.7468	104.8734	100.9747
$VaR_p^{(3)}[X]$	103.0822	101.0897	100.0975
$VaR_p^{(4)}[X]$	100.9747	100.2437	100.0097

Мы видим в примерах 2-4, что мера риска $VaR_p^{(n)}[X]$ при росте n достаточно быстро стремится к левой границе носителя распределения прибыли, причем, чем больше доверительная вероятность p, тем быстрее это происходит. Причем, чем ближе мода распределения ν оказывается к левой границе носителя распределения прибыли, тем быстрее мера риска $VaR_p^{(n)}[X]$ стремится к левой границе носителя распределения прибыли при всех значениях доверительной вероятности p, т.е., тем более рискованной оказывается данная позиция при всех уровнях катастрофичности.

Применение в случае нормального распределения прибыли

Как известно (см., например, [1-3]), мера риска VaR (относительное VaR) в предположении нормальности распределения прибыли рассчитывается по формуле (29):

$$VaR_p[X] = V\sigma k_p^{0,1} \tag{29}$$

где V — ценность позиции в момент 0;

σ — стандартное отклонение доходности на временном промежутке, на котором мы оцениваем VaR;

$k_p^{0,1}$ — квантиль стандартизированного распределения доходности с доверительной вероятностью p.

Тогда, согласно формуле (15), мы получаем (30):

$$VaR_p^{(n)}[X] = V\sigma k_{1-(1-p)^n}^{0,1} \tag{30}$$

Исследуем поведение данных мер риска, в зависимости от доверительной вероятности p примере 5. Заметим, что т.к. от доверительной вероятности зависят только квантили, то в примере 5 приводятся именно зависимости соответствующих квантилей от доверительных вероятностей см таблицу 6.

Таблица 6 - Зависимости соответствующих квантилей от доверительных вероятностей

	p = 90%	p = 95%	p =99%
$k_p^{0,1}$ (VaR_p)	1.2816	1.6449	2.3263

Продолжение таблицы 6

$k^{0,1}_{1-(1-p)^2}$ $(VaR^{(2)}_p)$	2.3264	2.8070	3.7190
$k^{0,1}_{1-(1-p)^3}$ $(VaR^{(3)}_p)$	3.0902	3.6623	4.7534
$k^{0,1}_{1-(1-p)^4}$ $(VaR^{(4)}_p)$	3.7190	4.3687	5.6120

Меры риска «поли-VaR»

Введем в рассмотрение семейство мер, обобщающих меры $VaR^{(n)}_p[X]$, позволяя доверительным вероятностям, применяемым при построении различных степеней VaR, быть различными.

Начнем с того, что представим обычную меру риска VaR в виде (31):

$$VaR_p[X] = VaR_{\tilde{p}_1}, \text{ где } \tilde{p}_1 = p_1 = p = 1-(1-p) \quad (31)$$

Воспользовавшись формулой (3), введем понятие меры риска «поли-VaR второй степени» (32):

$$VaR^{(2)}_{p_1,p_2}[X] = VaR_{\tilde{p}_2}[X], \text{где } \tilde{p}_2 = 1-(1-p_1)(1-p_2). \quad (32)$$

Соответственно, мера риска «поли-VaR второй степени» определяется так (33):

$$VaR^{(3)}_{p_1,p_2,p_3}[X] = VaR^{(2)}_{\tilde{p}_2,p_3}[X] = VaR_{\tilde{p}_3}[X] \quad (33)$$

где $\tilde{p}_3 = 1-(1-\tilde{p}_2)(1-p_3) = 1-(1-[1-(1-p_1)(1-p_2)])(1-p_3) =$
$= 1-(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3).$

Продолжая соответственно, мера риска «поли-VaR n-ой степени» определяется так (34):

$$VaR^{(n)}_{p_1,p_2,\dots,p_n}[X] = VaR^{(2)}_{\tilde{p}_{n-1},p_n}[X] = VaR_{\tilde{p}_n}[X] \quad (34)$$

где $\tilde{p}_n = 1-(1-\tilde{p}_{n-1})(1-p_n) = 1-(1-[1-(1-p_1)(1-p_2)\ldots(1-p_{n-1})])(1-p_n) =$
$= 1-(1-p_1)\ldots(1-p_n)$.

Т.е., мы получили такую вычислительную функцию для «поли-VaR n-ой степени» (35):

$$VaR^{(n)}_{p_1,p_2,\ldots,p_n}[X] = VaR_{1-(1-p_1)(1-p_2)\ldots(1-p_n)}[X] \tag{35}$$

Выражающую ее через обычную меру риска VaR с пересчитанной определенным образом доверительной вероятностью.

Мера риска VaR в любой действительной степени $t \geq 1$**,** $VaR^{(t)}_p[X]$

Любое действительное число $t \geq 1$ можно однозначно представить в виде (36):

$$t = k + \alpha \tag{36}$$

где k – натуральное число,

α - действительное число, причем $0 \leq \alpha < 1$.

Очевидно, что k является целой частью числа t, а α является его дробной частью. Тогда, естественно определить меру риска VaR в любой действительной степени $t \geq 1$, $VaR^{(t)}_p[X]$ следующим образом (37):

$$VaR^{(t)}_p[X] = VaR^{(k+1)}_{\underbrace{p,p,\ldots,p}_{k},\alpha p} \tag{37}$$

В частности, используя (35) и (37) имеем (38):

$$VaR^{(1+\alpha)}_p[X] = VaR^{(2)}_{p,\alpha p}[X] = VaR_{1-(1-p)(1-\alpha p)}[X] \tag{38}$$

$$VaR^{(2+\alpha)}_p[X] = VaR^{(3)}_{p,p,\alpha p}[X] = VaR_{1-(1-p)^2(1-\alpha p)}[X] \tag{39}$$

и т.д (40):

$$VaR_p^{(t)}[X] = VaR_p^{(k+\alpha)}[X] = VaR_{1-(1-p)^k(1-\alpha p)}[X] \tag{40}$$

С помощью мер риска $VaR_p^{(t)}[X]$ риск-менеджер может последовательно углубляясь в исследование левого хвоста закона распределения прибылей на доверительные вероятности, кратные начальной доверительной вероятности p , а также доли этой вероятности, получать очень детальную информацию о все менее вероятных, но более катастрофических рисках.

Равномерное распределение (VaR в не целой степени)

Применяя формулы (38) и (39) в случае равномерного распределения получаем (41) и (42):

$$VaR_p^{(1+\alpha)}[X] = a + (1-p)(1-\alpha p)(b-a) \tag{41}$$

$$VaR_p^{(2+\alpha)}[X] = a + (1-p)^2(1-\alpha p)(b-a) \tag{42}$$

Пример 6.

Предположим, a = 100 ед., b = 200 ед. В таблице 7 приведены расчетные значения $VaR_p^{(1+\alpha)}[X]$ для этого примера.

Таблица 7 – Расчетные значения для $VaR_p^{(1+\alpha)}[X]$

	p = 90%	p = 95%	p =99%
$VaR_p[X]$	110	105	101
$VaR_p^{(1.1)}[X]$	109.1	104.525	100.901
$VaR_p^{(1.5)}[X]$	105.5	102.625	100.505
$VaR_p^{(1.9)}[X]$	101.9	100.725	100.109

Пример 7.

Предположим, a = 100 ед., b = 200 ед. В таблице 8 приведены расчетные значения $VaR_p^{(2+\alpha)}[X]$ для этого примера.

Таблица 8 – Расчетные значения для $VaR_p^{(2+\alpha)}[X]$

	p = 90%	p = 95%	p =99%
$VaR_p^{(2)}[X]$	101	100.25	100.01
$VaR_p^{(2.1)}[X]$	100.9	100.226	100.009
$VaR_p^{(2.5)}[X]$	100.6	100.131	100.005
$VaR_p^{(2.9)}[X]$	100.2	100.036	100.001

Из примеров 6 и 7 видно, что меры риска $VaR_p^{(1+\alpha)}[X]$ и $VaR_p^{(2+\alpha)}[X]$ при росте α стремятся к левой границе носителя распределения прибыли, причем чем больше доверительная вероятность p, тем быстрее это происходит. Однако, это происходит медленнее, чем это происходит при переходе от $VaR_p[X]$ к $VaR_p^{(2)}[X]$ и, соответственно, от $VaR_p^{(2)}[X]$ к $VaR_p^{(3)}[X]$ (сравните с примером 1). Т.е. применяя меры риска VaR в степенях $(1+\alpha)$ и $(2+\alpha)$ при различных α, риск-менеджер, в зависимости от аппетита к риску своей компании, может достаточно тонко исследовать риски, таящиеся в левом хвосте распределения прибыли.

Треугольное распределение (VaR в не целой степени)

Применяя формулы (37) и (38) в случае равномерного распределения получаем (43) и (44):

$$VaR_p^{(1+\alpha)}[X] = \begin{cases} a + \sqrt{(1-p)(1-\alpha p)(b-a)(\nu - a)}, \text{ если } \nu \geq \mathrm{a} + (1-\mathrm{p})(1-\alpha\mathrm{p})(\mathrm{b}-\mathrm{a}) \\ \mathrm{b} - \sqrt{(1-(1-\mathrm{p}))(1-\alpha\mathrm{p})(\mathrm{b}-\mathrm{a})(\mathrm{b}-\nu)}, \text{ если } \nu \leq \mathrm{a} + (1-\mathrm{p})(1-\alpha\mathrm{p})(\mathrm{b}-\mathrm{a}) \end{cases} \quad (43)$$

$$VaR_p^{(2+\alpha)}[X] = \begin{cases} a + \sqrt{(1-p)^2(1-\alpha p)(b-a)(\nu - a)}, \text{ если } \nu \geq \mathrm{a} + (1\text{-p})^2(1\text{-}\alpha\mathrm{p})(\mathrm{b\text{-}a}) \\ \mathrm{b} - \sqrt{(1\text{-}(1\text{-p})^2(1\text{-}\alpha\mathrm{p}))(\mathrm{b\text{-}a})(\mathrm{b}\text{-}\nu)}, \text{ если } \nu \leq \mathrm{a} + (1\text{-p})^2(1\text{-}\alpha\mathrm{p})(\mathrm{b\text{-}a}) \end{cases} \quad (44)$$

Пример 8а.

Предположим, a = 100 ед., b = 200 ед. и $\nu = 105$ В таблице 9 приведены расчетные значения $VaR_p^{(1+\alpha)}[X]$ для этого примера.

Таблица 9 – Расчетные значения для $VaR_p^{(1+\alpha)}[X]$

	p = 90%	p = 95%	p =99%
$VaR_p[X]$	107.5338	105	102.2361
$VaR_p^{(1.1)}[X]$	107.0726	104.7566	102.1225
$VaR_p^{(1.5)}[X]$	105.2503	103.6228	101.5890
$VaR_p^{(1.9)}[X]$	103.0822	101.9039	100.7382

Пример 8b.

Предположим, a = 100 ед., b = 200 ед. и $\nu = 150$ В таблице 10 приведены расчетные значения $VaR_p^{(1+\alpha)}[X]$ для этого примера.

Таблица 10 – Расчетные значения для $VaR_p^{(1+\alpha)}[X]$

	p = 90%	p = 95%	p =99%
$VaR_p[X]$	122.3607	115.8114	107.0711
$VaR_p^{(1.1)}[X]$	121.3007	115.0416	106.7119
$VaR_p^{(1.5)}[X]$	116.5831	111.4564	105.0249
$VaR_p^{(1.9)}[X]$	109.7468	106.0208	102.3345

Пример 8c.

Предположим, a = 100 ед., b = 200 ед. и $\nu = 195$ В таблице 11 приведены расчетные значения $VaR_p^{(1+\alpha)}[X]$ для этого примера.

Таблица 11 – Расчетные значения для $VaR_p^{(1+\alpha)}[X]$

	p = 90%	p = 95%	p =99%
$VaR_p[X]$	130.8221	121.7945	109.7468

Продолжение таблицы 11

$VaR_p^{(1.1)}[X]$	129.4024	120.7334	109.2518
$VaR_p^{(1.5)}[X]$	122.8583	115.7916	106.9264
$VaR_p^{(1.9)}[X]$	113.4350	108.2991	103.2179

Из примеров 8a,8b и 8c видно, что меры риска $VaR_p^{(1+\alpha)}[X]$ при росте α стремятся к левой границе носителя распределения прибыли, причем чем больше доверительная вероятность p, тем быстрее это происходит. Однако, это происходит медленнее, чем это происходит при переходе от $VaR_p[X]$ к $VaR_p^{(2)}[X]$. Причем, чем ближе оказывается мода распределения ν к левой границе носителя распределения прибыли, тем быстрее меры риска $VaR_p^{(1+\alpha)}[X]$ при росте α стремятся к левой границе носителя распределения прибыли при всех p. Т.е., тем более рискованной оказывается данная позиция Т.е. применяя меры риска VaR в степенях $(1+\alpha)$ при различных α, риск-менеджер, в зависимости от аппетита к риску своей компании, может достаточно тонко исследовать риски, таящиеся в левом хвосте распределения прибыли. Таким образом, применяя меры риска VaR в степенях $(1+\alpha)$ при различных α, риск-менеджер, в зависимости от аппетита к риску своей компании, может достаточно тонко исследовать риски, таящиеся в левом хвосте распределения прибыли.

Пример 9a.

Предположим, a = 100 ед., b = 200 ед. и $\nu = 105$ В таблице 12 приведены расчетные значения $VaR_p^{(2+\alpha)}[X]$ для этого примера.

Таблица 12 – Расчетные значения для $VaR_p^{(2+\alpha)}[X]$

	p = 90%	p = 95%	p =99%
$VaR_p^{(2)}[X]$	103.0206	101.1180	100.2236
$VaR_p^{(2.1)}[X]$	102.9766	101.0636	100.2125
$VaR_p^{(2.5)}[X]$	102.8005	100.8101	100.1589
$VaR_p^{(2.9)}[X]$	100.9747	100.4257	100.0738

Пример 9b.

Предположим, a = 100 ед., b = 200 ед. и $\nu = 150$ $\nu = 105$ В таблице 13 приведены расчетные значения $VaR_p^{(2+\alpha)}[X]$ для этого примера.

Таблица 13 – Расчетные значения для $VaR_p^{(2+\alpha)}[X]$

	p = 90%	p = 95%	p =99%
$VaR_p^{(2)}[X]$	107.0711	103.5355	100.7071
$VaR_p^{(2.1)}[X]$	106.7454	103.3634	100.6712
$VaR_p^{(2.5)}[X]$	105.2440	102.5617	100.5025
$VaR_p^{(2.9)}[X]$	103.0822	101.3463	100.2335

Пример 9c.

Предположим, a = 100 ед., b = 200 ед. и $\nu = 195$. В таблице 14 приведены расчетные значения $VaR_p^{(2+\alpha)}[X]$ для этого примера.

Таблица 14 – Расчетные значения для $VaR_p^{(2+\alpha)}[X]$

	p = 90%	p = 95%	p =99%
$VaR_p^{(2)}[X]$	109.7468	104.8734	100.9747
$VaR_p^{(2.1)}[X]$	109.2978	104.6361	100.9252
$VaR_p^{(2.5)}[X]$	107.2284	103.5311	100.6926
$VaR_p^{(2.9)}[X]$	104.2485	101.8557	100.3118

Нормальное распределение (VaR в не целой степени)

Применяя формулы (37) и (38) в случае равномерного распределения получаем (45) и (46):

$$VaR_p^{(1+\alpha)}[X] = V\sigma k^{0,1}_{1-(1-p)(1-\alpha p)} \tag{45}$$

$$VaR_p^{(2+\alpha)}[X] = V\sigma k^{0,1}_{1-(1-p)^2(1-\alpha p)} \tag{46}$$

Исследуем поведение данных мер риска, в зависимости от доверительной вероятности p примерах 10a и 10b. Заметим, что т.к. от доверительной вероятности зависят только квантили, то в примерах приводятся именно зависимости соответствующих квантилей от доверительных вероятностей.

Пример 10a.

Зависимость соответствующих квантилей от доверительных вероятностей для меры риска $VaR_p^{(1+\alpha)}[X]$ приведена в таблице 15.

Таблица 15 - Зависимости соответствующих квантилей от доверительных вероятностей для меры риска $VaR_p^{(1+\alpha)}[X]$

	p = 90%	p = 95%	p =99%
$k_p^{0,1}$ (VaR_p)	1.281552	1.644854	2.326348
$k_{1-(1-p)(1-0.1p)}^{0,1}$ $(VaR_p^{(1.1)})$	1.334622	1.692766	2.365207
$k_{1-(1-p)(1-0.5p)}^{0,1}$ $(VaR_p^{(1.5)})$	1.598193	1.939011	2.572387
$k_{1-(1-p)(1-0.9p)}^{0,1}$ $(VaR_p^{(1.9)})$	2.074855	2.4446632	3.064547

Пример 10b

Зависимость соответствующих квантилей от доверительных вероятностей для меры риска $VaR_p^{(2+\alpha)}[X]$ приведена в таблице 16.

Таблица 16 - Зависимости соответствующих квантилей от доверительных вероятностей для мера риска $VaR_p^{(2+\alpha)}[X]$

	p = 90%	p = 95%	p =99%
$k_{1-(1-p)^2}^{0,1}$ $(VaR_p^{(2)})$	2.326348	2.807034	3.719016

Продолжение таблицы 16

$k^{0,1}_{1-(1-p)^2(1-0.1p)}$ $(VaR_p^{(2.1)})$	2.361524	2.839036	3.74527
$k^{0,1}_{1-(1-p)^2(1-0.5p)}$ $(VaR_p^{(2.5)})$	2.542699	3.008547	3.888177
$k^{0,1}_{1-(1-p)^2(1-0.9p)}$ $(VaR_p^{(2.9)})$	2.894304	3.379946	4.24561

В примерах 10a и 10b мы видим, что для каждой доверительной вероятности p, соответствующие квантили возрастают при росте α меры риска $VaR_p^{(1+\alpha)}[X]$ и $VaR_p^{(2+\alpha)}[X]$ возрастают. Таким образом, при больших α, эти меры риска достаточно тонко оценивают все более катастрофические риски, различного уровня катастрофичности, и, чем больше доверительные вероятности p, тем больше оценки таких мер риска.

Уточняющие оценки риска с помощью меры риска «VaR в степени» с постепенным добавлением все более мелких дробных долей в степени.

Предположим, что риск-менеджер оценил риск актива с помощью меры риска $VaR_p(X)$, однако, через некоторое время обстоятельства заставили заглянуть чуть дальше в левый хвост распределения прибылей по активу, чтобы уберечься от немного менее часто наблюдаемых опасностей и он рассчитал меру риска $VaR_p^{(1+\frac{1}{2})}(X)$. Дальнейшие обстоятельства могут заставить заглянуть еще дальше в левый хвост распределения прибылей по активу, чтобы уберечься от еще менее часто наблюдаемых опасностей и он рассчитал меру риска $VaR_p^{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})}(X)$. Эта логика может привести к тому, что может представлять практический интерес вычисление и применение в риск-менеджменте мер риска такого вида: $VaR_p^{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n})}(X)$. Применяя формулу (30), мы получаем следующую формулу, позволяющую рассчитать эти меры риска, в виде обычных мер риск VaR , со специально подобранной доверительной вероятностью (47) и (48):

$$VaR_p^{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n})}(X) = VaR_{\tilde{p}_n}, \quad (47)$$

$$\tilde{p}_n = 1-(1-p)(1-\frac{1}{2}p)(1-\frac{1}{3}p)...(1-\frac{1}{n}p) \tag{48}$$

Нас интересует такой вопрос, имеющий и теоретический и практический смысл: насколько глубоко можно исследовать с помощью таких мер всевозможные риски (катастрофические), которые могут наблюдаться в левом хвосте распределения прибылей по активу? Можно ли с помощью данной последовательности мер риска принципиально покрыть на 100% все риски, возможные по данному активу?

Для этого, сначала попытаемся исследовать асимптотическое поведение доверительных вероятностей $\tilde{p}_n$ при неограниченно увеличивающееся n.

Заметим, что эти вероятности можно представить в виде (49) и (50):

$$\tilde{p}_n = 1-e^{x_n} \tag{49}$$

$$\begin{aligned} x_n &= \ln[(1-p)(1-\frac{1}{2}p)(1-\frac{1}{3}p)...(1-\frac{1}{n}p)] = \\ &= \ln(1-p)+\ln(1-\frac{1}{2}p)+\ln(1-\frac{1}{3}p)+...+\ln(1-\frac{1}{n}p) \end{aligned} \tag{50}$$

Вспомним, что функция ln(1+x) разлагается в ряд Тейлора вида (51):

$$\ln(1+x) = x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+... \tag{51}$$

сходящийся при всех $x \in (-1,1]$ и применим это разложение к каждому члену выражения для x_n (52) - (55):

$$\ln(1-p) = -p-\frac{1}{2}p^2-\frac{1}{3}p^3-\frac{1}{4}p^4-... \tag{52}$$

$$\ln(1-\frac{1}{2}p) = -\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}\frac{1}{2^2}p^2-\frac{1}{3}\frac{1}{2^3}p^3-\frac{1}{4}\frac{1}{2^4}p^4-... \tag{53}$$

$$\ln(1-\frac{1}{3}p)=-\frac{1}{3}p-\frac{1}{2}\frac{1}{3^2}p^2-\frac{1}{3}\frac{1}{3^3}p^3-\frac{1}{4}\frac{1}{3^4}p^4-\dots \quad (54)$$

и т.д

$$\ln(1-\frac{1}{n}p)=-\frac{1}{n}p-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}p^2-\frac{1}{3}\frac{1}{n^3}p^3-\frac{1}{4}\frac{1}{n^4}p^4-\dots \quad (55)$$

Подставив все эти разложения в выражение для $\mathrm{x_n}$, и сделав приведение подобных слагаемых по степеням p, получим (56):

$$\begin{aligned}\mathrm{x_n}&=-p(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n})-\frac{p^2}{2}(1+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{n^2})-\frac{p^3}{3}(1+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{n^3})-\dots\\&-\frac{p^s}{s}(1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\dots+\frac{1}{n^s})+\dots\end{aligned} \quad (56)$$

Обозначив через $\varsigma_n(\mathrm{s})=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s}$, при s = 1,2,…, выражение для $\mathrm{x_n}$ можно записать в виде (57):

$$\mathrm{x_n}=-p\varsigma_n(1)-\frac{p^2}{2}\varsigma_n(2)-\frac{p^3}{3}\varsigma_n(3)-\dots-\frac{p^s}{s}\varsigma_n(s)-\dots=-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{p^s}{s}\varsigma_n(s) \quad (57)$$

Заметим, что величины $\varsigma_n(\mathrm{s})$, являются частичными суммами ряда, определяющего значение знаменитой дзета-функции Римана: $\varsigma(\mathrm{s})=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}$, в нашем случае рассматриваемой, лишь при натуральных значениях аргумента s. Как известно (см., например, [9]), данная функция принимает конечное значение при s =2,3,…, однако ее значение бесконечно (ряд расходится) при s =1.

Это означает, что все величины $\varsigma_n(\mathrm{s})$ при s =2,3,… стремятся к конечному пределу при $n\to\infty$, однако $\varsigma_n(1)$ стремится к $+\infty$ при $n\to\infty$.

При этом (58):

$$x_n = -p\varsigma_n(1) - \sum_{s=2}^{\infty} \frac{p^s}{s} \varsigma_n(s) \tag{58}$$

и т.к. $\varsigma_n(s) < \varsigma(s)$, а $\varsigma(s) \le \varsigma(2)$, при $s \ge 2$, получаем (59):

$$\begin{aligned} &\sum_{s=2}^{\infty} \frac{p^s}{s} \varsigma_n(s) < \sum_{s=2}^{\infty} \frac{p^s}{s} \varsigma(s) \le \varsigma(2)(\sum_{s=1}^{\infty} \frac{p^s}{s} - p) < \varsigma(2)(\sum_{s=1}^{\infty} p^s - p) = \\ &= \varsigma(2)(\frac{p}{1-p} - p) = \frac{\pi^2}{6} \frac{p^2}{1-p} < \infty. \end{aligned} \tag{59}$$

Здесь мы использовали формулу для суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии, а также, знаменитое тождество Эйлера, утверждающей, что $\varsigma(2) = \frac{\pi^2}{6}$ (см., например, [9]).

Значит $x_n \to -\infty$ при $n \to \infty$, а значит, т.к. $\tilde{p}_n = 1 - e^{x_n}$, получаем, что $\tilde{p}_n \to 1$ при $n \to \infty$.

Значит, постепенное наращение доверительной вероятности с уменьшающимися вероятностями p, $\frac{1}{2}p$, …, $\frac{1}{n}p$,... при расчете мер риска $VaR_p^{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n})}(X)$ приводит к полному покрытию левого хвоста распределения прибылей актива, а значение этих мер стремится к левому концу носителя распределения вероятностей X.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе введено семейство мер $VaR_p^{(t)}[X]$, степень консервативности которых повышается с ростом t, и которые являются более консервативными по сравнению с известными мерами VaR и ES. Они могут применяться осторожными инвесторами, которые опасаются возможных очень плохих результатов инвестиций, которые хотя и очень маловероятны, но, по их мнению, в данных обстоятельствах, вполне возможны. Исследование и оценка таких рисков может осуществляться с помощью последовательного вычисления $VaR_p^{(t)}[X]$ с возрастающими значениями t. Путь расчета $VaR_p^{(t)}[X]$ будет зависеть от многих предпочтений инвестора, в том числе от его аппетита к риску. Получена общая формула, выражающая $VaR_p^{(t)}[X]$ через соответствующие VaR, позволяющая оценивать $VaR^{(t)}$ через все известные методы оценки VaR.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Кроуи М., Галай Д., Марк Р. Основы риск-менеджмента. - М.: Юрайт, 2017. - С. 390.

2 Hull J.C. Risk Management and Financial Institutions. - USA: Wiley, 2015. - P. 743.

3 Jorion P. Value at Risk. - New York: McGraw-Hill, 2007. - P. 642.

4 Лимитовский М.А., Минасян В.Б. Анализ рисков инвестиционного проекта // Управление финансовыми рисками. - 2011. - №2. - С.132 - 150.

5 Минасян В.Б. Стимулы и моральные риски во взаимоотношениях между принципалом и агентом // Управление финансовыми рисками. - 2015. - №3. - С.172 - 184.

6 Минасян В.Б. Новая мера риска VaR в квадрате и ее вычисление. Случай равномерного и треугольного распределений вероятностей убытков // Управление финансовыми рисками. - 2019. - №3. - С. 200 - 208.

7 Минасян В.Б. Новая мера риска VaR в квадрате и ее вычисление. Случай общего закона распределения убытков, сравнение с другими мерами риска // Управление финансовыми рисками. - 2019. - №4. - С. 280 - 302.

8 Минасян В.Б. Модели оценки рисков деятельности компаний, реализующих проекты с НИОКР // Финансы: теория и практика. - 2019. - №1. - С. 133 - 146.

9 Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. - М: Наука, 1968. - С. 344.