

El método de puntos finitos para problemas de la dinámica de sólidos

Franco Perazzo

Departamento de Mecánica
Universidad Técnica Federico Santa María
Avenida España 1680, Valparaíso, Chile
Tel.: 56-32-65 41 62; Fax: 56-32-797 472
e-mail: franco.perazzo@usm.cl

Juan Miquel y Eugenio Oñate

Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE)
Universidad Politécnica de Cataluña
Gran Capitán s/n, Edificio C1, Campus Norte
08034 Barcelona, España
Tel.: 34-93-205 70 16; Fax: 34-93-401 65 17
e-mail: cimne@cimne.upc.es

Resumen

En este trabajo se desarrolla la formulación del método sin malla de puntos finitos (MPF) para el análisis de problemas de la dinámica lineal de sólidos. El método utiliza una aproximación por mínimos cuadrados con una función de ponderación fija y un esquema de colocación puntual. Para resolver el sistema de ecuaciones dependientes del tiempo se ha implementado un esquema de integración temporal explícita de diferencias finitas centradas. Para mejorar la aproximación de la solución en las regiones cercanas al contorno se utiliza una técnica de estabilización basada en el procedimiento de cálculo finitesimal. Los ejemplos numéricos desarrollados muestran que con esta técnica se pueden corregir las inestabilidades típicas que introduce el procedimiento de colocación puntual, principalmente en aquellos subdominios de interpolación de formas asimétricas.

Palabras clave: *métodos sin malla, método de puntos finitos, cálculo dinámico.*

A FINITE POINTS METHOD FOR SOLIDS DYNAMIC PROBLEMS

Summary

In this paper the formulation of meshless finite points method (FPM) for the analysis of lineal dynamic solids problems is developed. The method is based on a weighted least square function approach, with collocation scheme. To solve the system of dependent equations of the time, a method of explicit temporary integration named centered finite differences has been implemented. To improve the approach of the solution in the boundary regions, a stabilization technique based on the procedure of finite calculus is used. The numeric examples developed show that with this technique, the typical problems that introduces the collocation procedure can be corrected, mainly in those sub-domains with asymmetric shapes.

Keywords: *meshless method, finite points method, dynamic problems.*

INTRODUCCIÓN

Desde sus inicios el Método de Puntos Finitos (MPF) ha demostrado ser una efectiva técnica sin malla para la resolución de problemas de la mecánica de fluidos y sólidos^{4,5,6,11}. En el MPF la aproximación local se obtiene mediante la técnica de mínimos cuadrados ponderados, utilizándose colocación puntual para obtener el sistema de ecuaciones diferenciales.

En este artículo se desarrolla la formulación de esta técnica para su utilización en problemas de la dinámica de sólidos. Un aspecto fundamental del MPF en las aplicaciones para problemas de la dinámica, consiste en la estabilización del sistema de ecuaciones diferenciales. A diferencia de lo propuesto en otros métodos sin malla para este tipo de aplicaciones^{3,16,13,15}, en el MPF la forma estable del sistema de ecuaciones diferenciales se obtiene por medio del procedimiento de cálculo finitesimal^{7,8,10}.

En los siguientes apartados se presentan los principales aspectos de la implementación del MPF para la solución de problemas en la dinámica lineal de sólidos; los ejemplos numéricos desarrollados permiten corroborar la importancia de la técnica de estabilización utilizada.

APROXIMACIÓN POR MÍNIMOS CUADRADOS CON FUNCIÓN DE PONDERACIÓN FIJA

Se presentan a continuación las principales expresiones de la técnica de interpolación por mínimos cuadrados utilizada en el MPF. Un estudio más extenso de esta técnica, sus propiedades y características respecto de las aproximaciones utilizadas en otros métodos sin malla, ha sido desarrollado por los autores en¹².

En el MPF la aproximación local de la función incógnita $u(\mathbf{x})$ en el subdominio o nube Ω_I se construye de la siguiente forma

$$u(\mathbf{x}) \cong \hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x})\alpha_i = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\alpha \quad \forall \mathbf{x}_I \in \Omega, \forall \mathbf{x} \in \Omega_I \quad (1)$$

siendo $\alpha^T = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m]$ un vector de parámetros constantes, es decir, válidos únicamente en la respectiva nube Ω_I y que no dependen de las coordenadas espaciales \mathbf{x} , y $\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$ la base de interpolación que contiene típicamente monomios. Tal como en una interpolación por mínimos cuadrados, la condición de que el número de puntos n en la nube sea mayor que el número de términos m de la base de interpolación, impide que la aproximación $\hat{u}(\mathbf{x})$ se ajuste a todos los valores nodales $u(\mathbf{x}_j) = u_j^h$ con $j = 1, \dots, n$. Para solventar esto se recurre a la minimización de la suma del error en cada punto, ponderado por una función fija como

$$J_I = \sum_{j=1}^n w(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j) \left(u_j^h - \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_j)\alpha \right)^2 \quad (2)$$

cuya forma compacta matricial es

$$J_I = \left(\mathbf{u}^h - \mathbf{P}(\mathbf{x}_I)\alpha \right)^T \mathbf{W}_I \left(\mathbf{u}^h - \mathbf{P}(\mathbf{x}_I)\alpha \right) \quad (3)$$

donde

$$\mathbf{u}^h = \left[u_1^h, u_2^h, \dots, u_n^h \right]^T, \in Vec(n)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}_I) = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & p_2(\mathbf{x}_1) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_1) \\ p_1(\mathbf{x}_2) & p_2(\mathbf{x}_2) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}_n) & p_2(\mathbf{x}_n) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}, \quad \in Mat(n \times m) \quad (4)$$

$$\mathbf{W}_I = \begin{bmatrix} w(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_n) \end{bmatrix}, \quad \in Mat(n \times n) \quad (5)$$

siendo $w(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_n)$ la función de ponderación fija de Gauss^{10,11}. La minimización estándar del funcional (2) respecto del vector α permite obtener

$$\alpha = \overline{\mathbf{C}}_I^{-1} \mathbf{u}^h, \quad \text{con } \overline{\mathbf{C}}_I^{-1} = \mathbf{A}_I^{-1} \mathbf{B}_I \quad (6)$$

con $\mathbf{A}_I = \mathbf{A}(\mathbf{x}_I)$ (matriz de momentos) y $\mathbf{B}_I = \mathbf{B}(\mathbf{x}_I)$, respectivamente

$$\mathbf{A}_I = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}_I) \mathbf{W}_I \mathbf{P}(\mathbf{x}_I) \quad (7)$$

$$[A_I]_{ij} = \sum_{k=1}^n p_i(\mathbf{x}_k) w(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_k) p_j(\mathbf{x}_k) \quad i, j = 1, \dots, m \quad (8)$$

$$\mathbf{B}_I = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}_I) \mathbf{W}_I \quad (9)$$

$$[B_I]_{ij} = p_i(\mathbf{x}_j) w(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j) \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n \quad (10)$$

La aproximación final en el MPF se consigue reemplazando la expresión (6) en (1), con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &\cong \hat{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \overline{\mathbf{C}}_I^{-1} \mathbf{u}^h \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m p_k(\mathbf{x}) [A_I]_{kj}^{-1} [B_I]_{ji} u_i^h \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_I \end{aligned} \quad (11)$$

siendo las funciones de forma

$$\begin{aligned} \phi_I^i(\mathbf{x}) &= \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \overline{\mathbf{C}}_I^{-1} = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}_I^{-1} \mathbf{B}_I \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m p_k(\mathbf{x}) [A_I]_{kj}^{-1} [B_I]_{ji}, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (12)$$

Si en (2) se elige una función de ponderación igual a la unidad, se obtiene una aproximación por mínimos cuadrados estándar. Se debe notar, de acuerdo con la expresión (1), que la aproximación se define para cada subdominio de interpolación Ω_I . En consecuencia, un punto i que pertenezca a dos nubes Ω_I y Ω_J , respectivamente, y entre las cuales exista cierto traslape, tendrá asociadas diferentes funciones de forma según si se adscribe a una u otra nube, lo que significa $\phi_I^i(\mathbf{x}) \neq \phi_J^i(\mathbf{x})$. La interpolación resulta ahora multievaluada en i , por lo que es preciso tomar alguna decisión que limite la elección a un único valor. En el MPF, por ejemplo, esta disyuntiva se resuelve utilizando un procedimiento de colocación puntual^{4,6,9,11}.

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DINÁMICO

En este apartado se desarrolla la formulación del MPF para su aplicación en ejemplos de la dinámica lineal de sólidos. Se pretende de esta manera extender el campo de utilización del MPF a problemas donde intervienen fuerzas de inercia, pero sin considerar fuerzas de amortiguamiento. Sin pérdida de generalidad, a continuación se ejemplifica la obtención del sistema de ecuaciones para el caso 2D. Igual procedimiento se puede adoptar para el caso 3D. Utilizando los conceptos del cálculo finitesimal⁷, se plantea el equilibrio de fuerzas en el interior del cuerpo para el dominio finito de espesor unitario mostrado en la Figura 1.

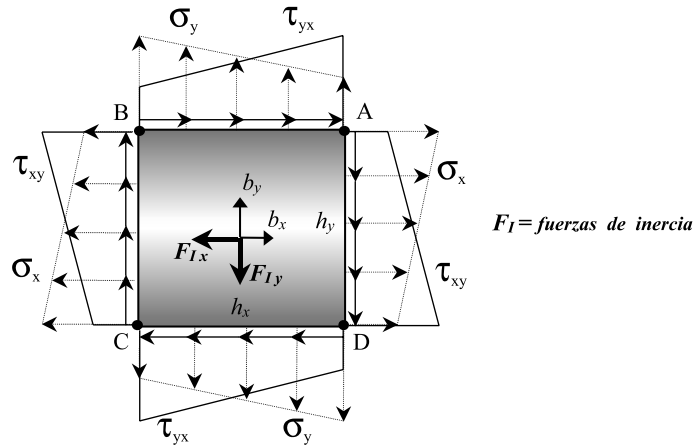


Figura 1. Dominio finito en el interior del cuerpo

El sistema de ecuaciones que se obtiene es

$$\begin{aligned} \frac{h_y}{2} [(\sigma_x)_A + (\sigma_x)_D] - \frac{h_y}{2} [(\sigma_x)_C + (\sigma_x)_B] + \frac{h_x}{2} [(\tau_{yx})_A + (\tau_{yx})_B] - \\ - \frac{h_x}{2} [(\tau_{yx})_C + (\tau_{yx})_D] + h_x h_y \rho b_x = m \ddot{u} \end{aligned} \quad (13)$$

para el eje x .

$$\begin{aligned} \frac{h_x}{2} [(\sigma_y)_B + (\sigma_y)_A] - \frac{h_x}{2} [(\sigma_y)_D + (\sigma_y)_C] + \frac{h_y}{2} [(\tau_{xy})_B + (\tau_{xy})_C] - \\ - \frac{h_y}{2} [(\tau_{xy})_D + (\tau_{xy})_A] + h_x h_y \rho b_y = m \ddot{v} \end{aligned} \quad (14)$$

para el eje y , respectivamente. Las fuerzas de inercia se han reemplazado por el producto de la masa m del dominio y la correspondiente aceleración \ddot{u} o \ddot{v} .

Utilizando una expansión en serie de Taylor de tercer orden para los esfuerzos en B, C, D en las expresiones anteriores y simplificando por el producto $(h_x h_y)$, se obtiene

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho b_x \right] - \frac{h_x}{2} \left[\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yx}}{\partial x \partial y} \right] - \frac{h_y}{2} \left[\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{yx}}{\partial y^2} \right] = \rho \ddot{u} \\ \left[\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho b_y \right] - \frac{h_x}{2} \left[\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} \right] - \frac{h_y}{2} \left[\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \right] = \rho \ddot{v} \end{aligned}$$

o en forma compacta matricial

$$\begin{aligned} r_3 - \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \cdot \nabla r_3 &= 0 \\ r_4 - \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \cdot \nabla r_4 &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

donde

$$\begin{aligned} r_3 &= \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho b_x - \rho \ddot{u} \\ r_4 &= \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho b_y - \rho \ddot{v} \end{aligned}$$

siendo ∇ el operador gradiente y el vector \mathbf{h}

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones (15) se puede particularizar para los casos que se ejemplificarán más adelante, es decir, cuando no existen fuerzas másicas y se utiliza un polinomio base de interpolación cuadrático ($m = 6$). Bajo estos supuestos, el sistema final de ecuaciones en el dominio es

$$\begin{aligned} r_3 &= \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \rho \ddot{u} = 0 \\ r_4 &= \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \rho \ddot{v} = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

Para obtener el sistema de ecuaciones estabilizado en el contorno de Neumann se plantea el equilibrio de fuerzas horizontales y verticales sobre el prisma de espesor unitario mostrado en la Figura 2.

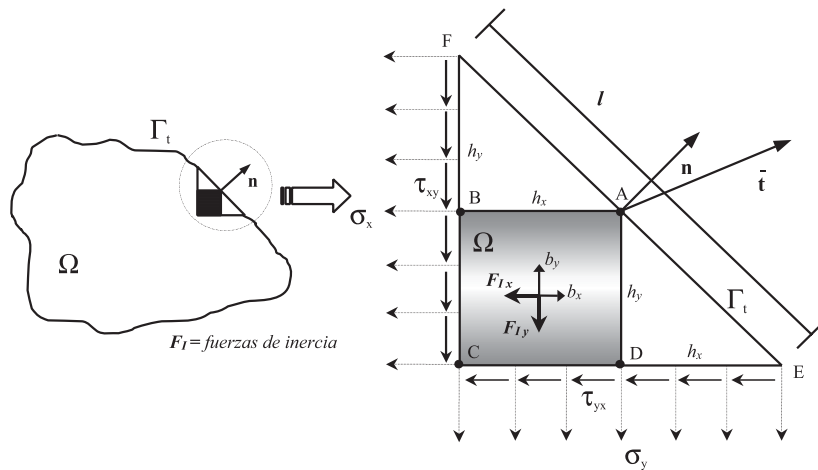


Figura 2. Dominio finito en el contorno del cuerpo

Reemplazando los términos de las fuerzas de inercia como antes, el sistema adopta la siguiente forma

$$\begin{aligned}\sum F_x &= (\sigma_x)_B 2h_y + (\tau_{yx})_D 2h_x - \frac{4}{2}h_x h_y \rho b_x - \bar{t}_x l + m \ddot{u} = 0 \\ \sum F_y &= (\sigma_y)_D 2h_x + (\tau_{xy})_B 2h_y - \frac{4}{2}h_x h_y \rho b_y - \bar{t}_y l + m \ddot{v} = 0\end{aligned}\quad (17)$$

utilizando una expansión en serie de Taylor de segundo orden para los esfuerzos en B, D se tiene en (17)

$$\begin{aligned}\sigma_x \frac{2h_y}{l} + \tau_{yx} \frac{2h_x}{l} - \bar{t}_x - \frac{2h_x h_y}{l} \left[\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho b_x - \rho \ddot{u} \right] &= 0 \\ \sigma_y \frac{2h_x}{l} + \tau_{xy} \frac{2h_y}{l} - \bar{t}_y - \frac{2h_x h_y}{l} \left[\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho b_y - \rho \ddot{v} \right] &= 0\end{aligned}\quad (18)$$

Notando que las componentes de la normal unitaria en el punto A del contorno son

$$n_x = \frac{2h_y}{l}, \quad n_y = \frac{2h_x}{l}$$

y que

$$\frac{2h_x h_y}{l} = \frac{h_x h_y}{l} + \frac{h_x h_y}{l} = \frac{h_x n_x}{2} + \frac{h_y n_y}{2} = \frac{1}{2} [h_x n_x + h_y n_y]$$

se tiene finalmente en (18), cuando no existen fuerzas de cuerpo, el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y - \bar{t}_x - \frac{1}{2} [h_x n_x + h_y n_y] \left[\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} - \rho \ddot{u} \right] &= 0 \\ \sigma_x n_y + \tau_{xy} n_x - \bar{t}_y - \frac{1}{2} [h_x n_x + h_y n_y] \left[\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} - \rho \ddot{v} \right] &= 0\end{aligned}$$

el cual puede ser expresado en forma compacta como

$$\begin{aligned}(\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y - \bar{t}_x) - \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{n} [r_3] &= 0 \\ (\sigma_x n_y + \tau_{xy} n_x - \bar{t}_y) - \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{n} [r_4] &= 0\end{aligned}\quad (19)$$

siendo el vector normal \mathbf{n}

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix}$$

Es interesante destacar cómo el sistema de ecuaciones (19) incluye el efecto de los puntos adyacentes al contorno de Neumann, términos r_3 y r_4 , respectivamente.

IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

La solución al problema dinámico se encuentra resolviendo para cada instante de tiempo el sistema que forman (16) y (19) más las condiciones de contorno de Dirichlet. Para resolver el sistema final de ecuaciones, además de reemplazar las relaciones tensión-deformación

y deformación-desplazamientos para un material elástico lineal, es necesario implementar un esquema de integración temporal para obtener los desplazamientos en un determinado paso de tiempo. Utilizando un esquema explícito de diferencias centradas, se tiene que los desplazamientos en el intervalo de tiempo $(t + \Delta t)$ se calcularán recursivamente como^{2,1}

$$\begin{aligned} u_{(t+\Delta t)} &= 2u_{(t)} - u_{(t-\Delta t)} + \Delta t^2 \ddot{u}_{(t)} \\ v_{(t+\Delta t)} &= 2v_{(t)} - v_{(t-\Delta t)} + \Delta t^2 \ddot{v}_{(t)} \end{aligned} \quad (20)$$

lo que supone conocer o calcular el desplazamiento y la aceleración actual $(u_{(t)}, \ddot{u}_{(t)})$, pero también el desplazamiento previo $u_{(t-\Delta t)}$. Para esto se utiliza la siguiente relación

$$u_{(t-\Delta t)} = u_{(t)} - \Delta t \dot{u}_{(t)} + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_{(t)} \quad (21)$$

donde la velocidad es

$$\dot{u}_{(t)} = \frac{u_{(t+\Delta t)} - u_{(t-\Delta t)}}{2\Delta t}$$

Similares relaciones se emplean para $v_{(t-\Delta t)}$. Se debe tener presente que en el inicio, es decir, en $t = 0$, es necesario calcular $u_{(-\Delta t)}$ mediante la relación (21) para que dé comienzo el algoritmo (20). Esto supone conocer como dato inicial el desplazamiento y la velocidad en $t = 0$ (u_0 y v_0). Notar en este caso que la aceleración en $t = 0$ (\ddot{u}_0) se obtiene resolviendo inicialmente el sistema que forman (16) y (19).

Por último, para encontrar la solución del problema dinámico es necesario calcular las componentes del vector \mathbf{h} . Para esto se utilizan los conceptos de las distancias mínimas características en la nube descritos en la referencia 12.

EJEMPLOS NUMÉRICOS

Propagación de una onda 1D

Como primer ejemplo se analiza el comportamiento del MPF para el problema de propagación de una onda en un medio unidimensional. La Figura 3 muestra las características geométricas del modelo, siendo las propiedades mecánicas del material: $E = 3,0 \times 10^7$ psi, $\rho = 7,35 \times 10^{-4}$ slug/in³ y el área de la barra $A = 1$ in². La barra se somete a un esfuerzo axial impulsivo, constante en el tiempo, de $\sigma_0 = 1000$ psi. Para obtener la solución numérica en el caso del MPF se ha utilizado un paso de tiempo $\Delta t = (L_{\min}/c)$, donde L_{\min} es la distancia mínima entre dos puntos y $c = (E/\rho)^{1/2}$ la velocidad de propagación de la onda en el cuerpo.

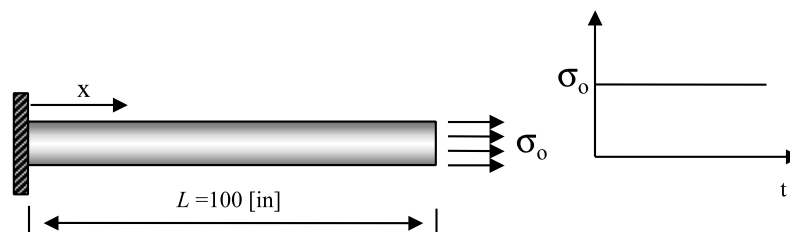


Figura 3. Barra sometida a carga impulsiva

La solución teórica para este ejemplo viene dada por la referencia 1

$$u(x, t) = \frac{8\sigma_0 L}{\pi^2 E} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \pm \left(\frac{1 - \cos \left[\left(\frac{2n-1}{2} \right) \pi \frac{ct}{L} \right]}{(2n-1)^2} \right) \sin \left[\frac{(2n-1)}{2} \pi \frac{x}{L} \right] \right\} \quad (22)$$

expresión que permite además encontrar la velocidad \dot{u} y la deformación $u_{,x}$.

Los resultados indican el correcto comportamiento del método, tanto en desplazamientos como en tensión, para las distintas discretizaciones utilizadas. En todos los casos se han utilizado nubes de $n = 5$ puntos y una base de interpolación cuadrática ($m = 3$). Por ejemplo, las Figuras 4, 5 y 6 muestran la convergencia hacia la solución teórica del desplazamiento, la velocidad y el esfuerzo para un punto ubicado en el centro de la barra ($x = 50$). En el caso de los desplazamientos se comprueba que con 33 puntos la solución numérica coincide con la expresión (22); esta buena correlación con los valores teóricos también se logra para la velocidad y el esfuerzo con tan sólo 41 puntos.

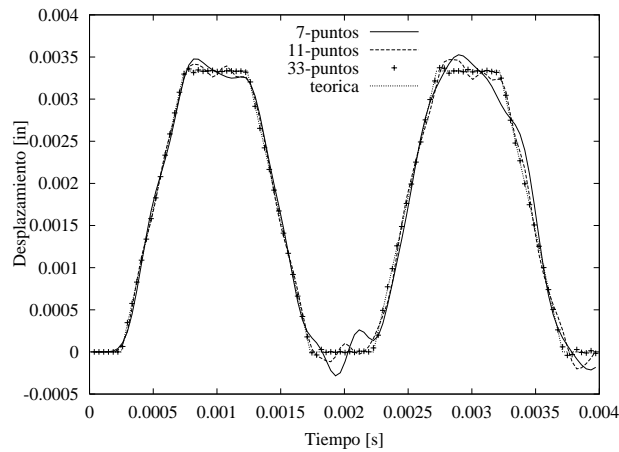


Figura 4. Desplazamiento del punto central para distintas discretizaciones

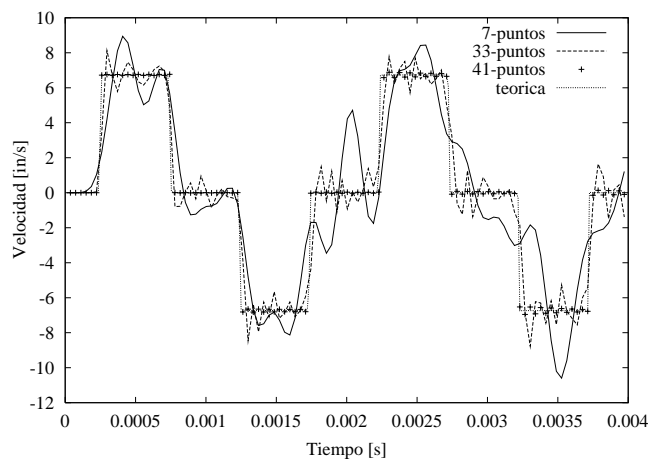


Figura 5. Velocidad del punto central para distintas discretizaciones

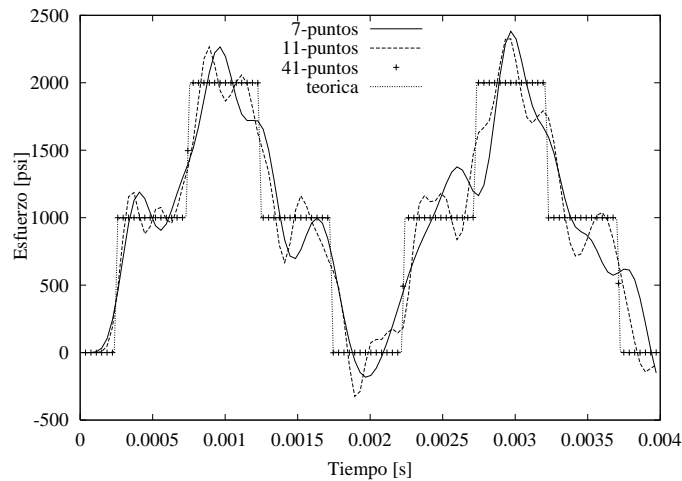


Figura 6. Esfuerzo en el punto central para distintas discretizaciones

Finalmente, la Figura 7 muestra la posición de la onda de 1000 psi en un instante de tiempo, durante su viaje de propagación a través de la barra. Se aprecia claramente cómo el perfil de la onda comienza a definirse a medida que se aumenta el número de puntos, lográndose ya con 41 puntos el perfil esperado.

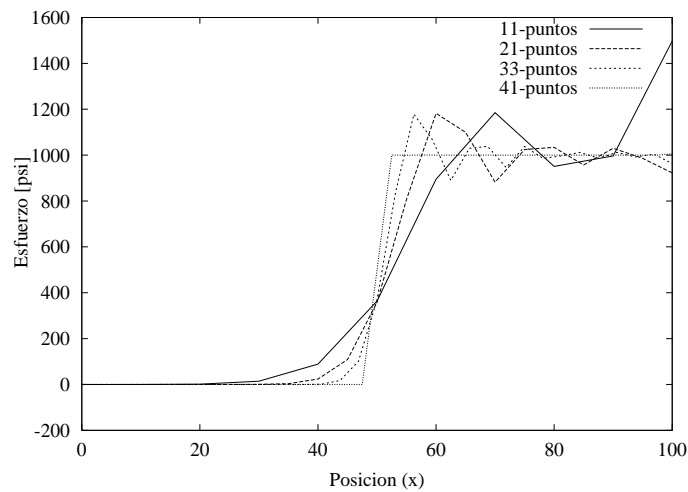


Figura 7. Distribución del esfuerzo axial en el vigésimo paso de tiempo

Ejemplo 2D. Ménsula sometida a carga impulsiva

La ménsula de la Figura 8 está sometida en su extremo libre a una carga impulsiva de magnitud $P_0 = 1000$ lb. Sobre el empotramiento se prescriben los desplazamientos de acuerdo con la solución teórica para un caso estático¹⁴, utilizándose una discretización regular de 27, 95 y 175 puntos. Para las propiedades del material se han utilizado los

siguientes valores: módulo de elasticidad $E = 2,08 \times 10^6$ psi, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ y densidad $\rho = 7,35 \times 10^{-4}$ slug/in³. El problema se ha resuelto considerando condiciones de deformación plana, una base de interpolación cuadrática y nubes de 9 puntos.

En este caso se ha efectuado una modelación mediante el método de elementos finitos (MEF) para comparar los resultados; también en la referencia 2 se analiza el comportamiento dinámico de la ménsula de este ejemplo. Los resultados que se obtienen para las tres configuraciones de puntos muestran un adecuado comportamiento respecto de la modelación con el MEF. A continuación se muestran los principales resultados para el arreglo regular de 95 puntos.

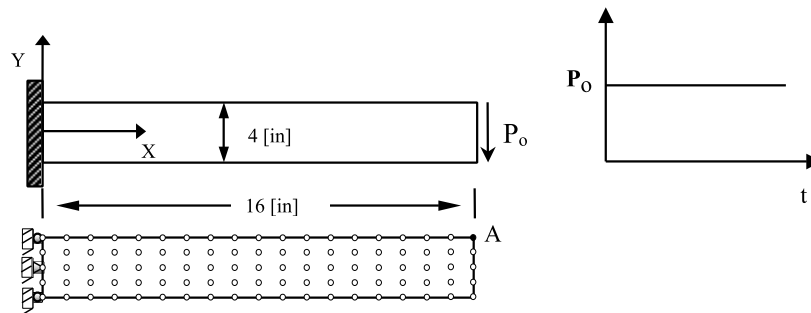


Figura 8. Ménsula sometida a carga impulsiva

Las Figuras 9 y 10 muestran la variación temporal del desplazamiento en el punto A de la ménsula, para un tiempo total de análisis de 0,025 s. Esta vez el paso de tiempo se ha calculado como $\Delta t = 0,1(L_{\min}/c)$. En ambos casos los resultados que se obtienen con el MPF se comparan favorablemente con aquéllos que entrega el código de elementos finitos, usando elementos CST.

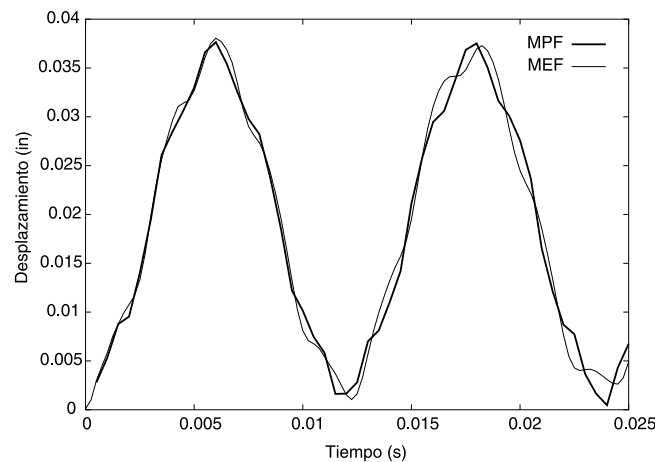


Figura 9. Variación temporal del desplazamiento horizontal para el punto A de la ménsula

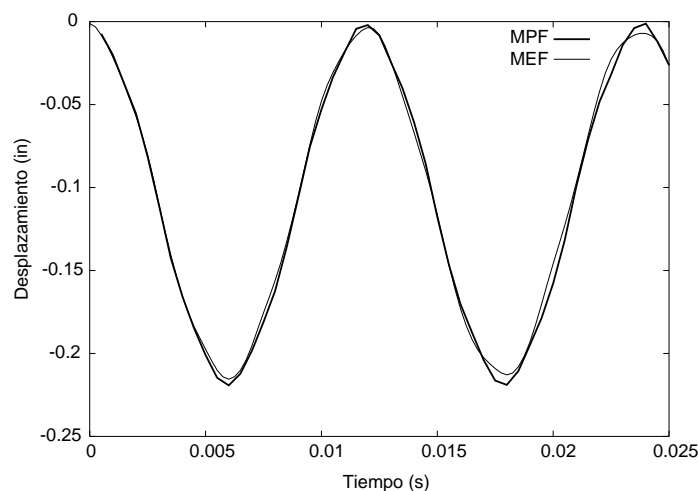


Figura 10. Variación temporal del desplazamiento vertical para el punto A de la ménsula

Finalmente, a través del análisis con el MPF se ha calculado un período fundamental de 0,0123 s para la ménsula, valor que se compara favorablemente con los 0,0124 s que se obtienen en la referencia 2.

CONCLUSIONES

Se ha desarrollado la formulación de las ecuaciones estabilizadas que rigen el comportamiento dinámico 2D, de un sólido lineal elástico, para ser implementadas numéricamente en el método sin malla de puntos finitos. Este desarrollo se puede extender sin dificultad para un caso 3D. La técnica de estabilización mediante el procedimiento del cálculo finitesimal resulta fundamental de cara a obtener resultados satisfactorios en el análisis dinámico mediante el MPF.

Los resultados de los ejemplos 1D y 2D muestran una adecuada convergencia del método y se comparan favorablemente con los que proporciona el MEF. En el caso 1D el método de puntos muestra una convergencia más rápida que el MEF para las diferentes discretizaciones analizadas. En el caso 2D el método de puntos y el MEF muestran una convergencia similar, sin embargo, el intervalo de tiempo crítico condiciona notablemente los resultados en el MPF. Como se sabe, el esquema de integración de diferencias centradas que se utilizó es condicionalmente estable; esto supone calcular un intervalo de tiempo Δt crítico para prevenir posibles problemas de estabilidad.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido auspiciado por el Programa MECESUP del Ministerio de Educación del Gobierno de Chile a través del proyecto FSM 0104, y de la Dirección General de Investigación y Postgrado de la Universidad Técnica Federico Santa María a través del proyecto de investigación USM 250301.

REFERENCIAS

- 1 R.W. Clough y J. Penzien, “*Dinamics of structures*”, 2^a ed., McGraw-Hill, (1993).
- 2 T.J.R. Hughes “*The Finite Element Method: linear static and dynamic finite element analysis*”, Prentice-Hall, (1987).
- 3 W.K. Liu, S. Jun, S. Li, J. Adee y T. Belytschko, “Reproducing kernel particle methods for structural dynamics”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **38**, pp. 1655–1679, (1995).
- 4 E. Oñate, S. Idelsohn y O.C. Zienkiewicz, “Finite point methods in computational mechanics”, *Research Report*, Vol. **67**, CIMNE, (1995).
- 5 E. Oñate, S. Idelsohn, O.C. Zienkiewicz y T. Fisher, “A finite point method for analysis of fluid flow problems”, *Proceedings of the 9th International Conference on Finite Element Methods in Fluids*, 15–21 octubre, Venecia, Italia, (1995).
- 6 E. Oñate, S. Idelsohn, O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor y C. Sacco, “A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **139**, pp. 315–346, (1996).
- 7 E. Oñate, “On the stabilization of numerical solution for advective-diffusive transport and fluid flow problems”, Publicación N^o 81, CIMNE, Barcelona, (1996).
- 8 E. Oñate, J. García y S. Idelsohn, “Computation of the stabilization parameter for the finite element solution of advective-diffusive problems”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. **25**, pp. 1385–1407, (1997).
- 9 E. Oñate y S. Idelsohn “A mesh free finite point method for advective-diffusive transport and fluid flow problems”, *Computational Mechanics*, Vol. **21**, pp. 283–292, (1998).
- 10 E. Oñate, F. Perazzo y J. Miquel, “Advances in the stabilized finite point method for structural mechanics”, Publicación N^o 164, CIMNE, Barcelona, in W. Wunderlich *et al.*, (ed.), *European Conference on Computational Mechanics (ECCM’99)*, 31 agosto–3 septiembre, Munich, Alemania, (1999).
- 11 E. Oñate, F. Perazzo y J. Miquel, “A finite point method for elasticity problems”, *Computers & Structures*, Vol. **79**, pp. 2151–2163, (2001).
- 12 F. Perazzo, E. Oñate y J. Miquel, “Una metodología numérica sin malla para la resolución de las ecuaciones de elasticidad mediante el método de puntos finitos”, Monografía CIMNE N^o 81, octubre, Barcelona, (2003).
- 13 J. Sladek, V. Sladek y R. van Keer, “Meshless local boundary integral equation method for 2D elastodynamic problems”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **57**, N^o 2, pp. 235–249, (2003).
- 14 S.P. Timoshenko y J.N. Goodier, “*Theory of elasticity*”, McGraw-Hill, New York, (1970).
- 15 F. Ureña y J.J. Benito, “Resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales dependientes del tiempo de segundo orden utilizando diferencias finitas generalizadas”, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **19**, N^o 3, pp. 331–340, (2003).
- 16 G. Yagawa y T. Furukawa, “Recent developments of free mesh method”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **47**, pp. 1419–1443, (2000).