

# UN ESTIMADOR DE ERROR RESIDUAL PARA EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

PEDRO DÍEZ,  
JUAN JOSÉ EGOZCUE  
y  
ANTONIO HUERTA

*Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos  
Departamento de Matemática Aplicada III  
Módulo C2, Campus Norte UPC, Gran Capitán s/n  
08034 Barcelona, España  
Tel: + 34-93-401 69 09 Fax: + 34-93-401 65 04  
E-mail: huerta@etseccpb.upc.es*

## RESUMEN

Los estimadores de error residuales se basan en resolver de manera aproximada la ecuación que caracteriza al error. En este artículo se presenta un estimador de error basado en la resolución de problemas locales mediante submallas que discretizan cada uno de los elementos. En cada uno de estos problemas elementales se imponen condiciones de contorno de Dirichlet. De esta manera se obtiene una primera estima que sólo tiene en cuenta información interior a los elementos. En esta primera fase no se considera la contribución al error asociada a los saltos de flujo a través de los lados de los elementos. En una segunda fase se incluye esta información. Sin embargo, a diferencia de otros estimadores, esto se lleva a cabo sin calcular los saltos y, por consiguiente, se evita tener que equilibrar los flujos de error. Esto se hace conservando la filosofía de la primera fase, es decir resolviendo problemas locales discretizados mediante submallas. Los subdominios asociados a estos problemas se solapan con los elementos y recubren sus lados. Esto último hace que esta segunda fase recoja el efecto de los saltos de flujo. En esta segunda fase, la estima se somete a restricciones adicionales que permiten que se pueda sumar al resultado de la primera fase. El estimador que se calcula a partir de la combinación de las dos fases proporciona buenos resultados en los ejemplos de aplicación, comparado con otros estimadores existentes.

## A RESIDUAL TYPE-ERROR ESTIMATOR FOR THE FINITE ELEMENT METHOD

### SUMMARY

Residual-type error estimators are based on solving the error equation. This paper presents an error estimator which solves local error problems using elementary submeshes. Each elementary problem is solved using trivial Dirichlet boundary conditions. Thus, a first estimate is obtained. This estimate accounts only for the error in the interior of the elements and, consequently, the effect of the flux jump across the element edges is not included. In a second phase the flux jumps are accounted for. However, in contrast with other residual-type error

Recibido: Julio 1997

estimators, this is done without computing the jumps. This precludes the need of balancing the jumps along the edges and obtain the error fluxes. This second phase follows the same approach of the first one: local problems are solved using submeshes. The subdomains associated with this second set of local problems overlap the elements and cover their edges. The estimate associated with this second phase is constrained to additional restrictions allowing to sum up the contributions of the two phases. The complete estimate computed from the combination of the two phases gives excellent results in the application examples compared to existing error estimators.

## INTRODUCCIÓN

El uso de los procedimientos de cálculo adaptable se ha convertido en una herramienta imprescindible para la aplicación práctica del método de los elementos finitos. Una pieza clave del cálculo adaptable es el estimador de error que se utilice. El estimador de error proporciona información sobre la calidad global de la solución y sobre la distribución del error en el dominio. Mientras que la estima global evalúa la admisibilidad de la solución aproximada, si la solución no es admisible, se crea una nueva malla a partir de un indicador de remallado que utiliza la distribución de error. Los elementos se concentran allí donde la solución es menos precisa. El objetivo es conseguir, con la nueva malla, una solución con error global por debajo de un valor prescrito y distribuido uniformemente.

Los estimadores de error a priori son una herramienta básica para el estudio del método de los elementos finitos pero no permiten obtener una evaluación práctica del error que se ha cometido. En cambio, los estimadores a posteriori, sí proporcionan resultados prácticos. Estos estimadores se pueden clasificar en dos grandes familias: estimadores de proyección de flujo y estimadores residuales.

Los estimadores de proyección de flujo se conocen también como estimadores por posproceso o suavizado. Se basan en el estimador original de Zienkiewicz y Zhu<sup>1</sup>. Este estimador fue modificado en 1992 por los mismos autores<sup>2</sup>. La idea principal de este tipo de estimadores es hallar una aproximación del error en flujos, esto es, la diferencia entre el flujo exacto, que es desconocido, y el flujo aproximado, que es discontinuo.

Los estimadores residuales aproximan el error resolviendo problemas locales, donde el residuo se introduce como un término de fuente. En general<sup>3,4,5,6,7,8</sup> se entiende por residuo la no verificación de la forma fuerte de la ecuación diferencial que se está resolviendo. La aproximación estándar por elementos finitos no tiene derivadas continuas en los lados interiores de los elementos y, así, aparece un residuo singular asociado a los saltos de flujo<sup>9</sup>.

La mayor parte de los estimadores residuales (los anteriores y algunos más<sup>10,11,12,13,14,15,16</sup>) se basan en aproximar las condiciones de contorno de los problemas locales repartiendo los saltos de flujo entre los elementos adyacentes. El criterio que se sigue en el reparto es conseguir un cierto equilibrado de cada problema elemental<sup>4,9</sup>.

En este artículo se introduce un nuevo enfoque de la estima de error residual. Las estimas se interpretan como proyecciones en espacios de funciones cuyo soporte queda localizado en un dominio concreto. Estas proyecciones se calculan resolviendo problemas locales. Se evita el cálculo del salto de flujos y todos los inconvenientes

que esto comporta a los estimadores residuales existentes. Básicamente, esto deriva de considerar el residuo en la forma débil en vez del residuo en la ecuación original.

Además, el estimador que aquí se presenta puede ser aplicado a cualquier tipo de malla, incluso mezclando distintos tipos de elementos. La programación del estimador en un programa típico no plantea mayores problemas, puesto que se pueden reutilizar las subrutinas existentes. Por otra parte, la estima que se obtiene es una cota inferior del error exacto.

El resto del artículo se estructura de la manera siguiente: en el apartado siguiente se presenta el problema modelo y la notación empleada. Los apartados a continuación se dedican a establecer cómo calcular las proyecciones del error y a indagar en sus propiedades básicas, a definir un estimador elemental interior y a completarlo añadiendo nuevas proyecciones del error sobre otros subespacios. Al final se muestran algunos ejemplos que dejan patente la eficacia del estimador.

### PROBLEMA MODELO

Se va a considerar un problema elíptico en un dominio acotado  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  con frontera suave a trozos. La frontera  $\Gamma$  se divide en dos partes  $\Gamma_n$  y  $\Gamma_d$ , donde se aplicarán distintos tipos de condiciones de contorno. El problema de contorno se define en su forma fuerte por las siguientes ecuaciones

$$-\nabla \cdot (A\nabla u) + bu = f \text{ en } \Omega \quad (1.a)$$

$$u = 0 \text{ en } \Gamma_d \quad (1.b)$$

y

$$(A\nabla u) \cdot n = g_n \text{ en } \Gamma_n \quad (1.c)$$

donde  $u$  se define en  $\Omega$  y requiere ser aproximada. La condición de contorno de Dirichlet (1.b) se toma homogénea. Debido a la linealidad de (1.a), esto no supone una pérdida de generalidad. De hecho, en los ejemplos se tratarán condiciones de Dirichlet no homogéneas. En el desarrollo teórico del estimador, a efectos de simplificar la exposición, se va considerar  $u$  como función escalar. Sin embargo, la extensión a problemas con variable vectorial es directa y en los ejemplos se tratarán problemas mecánicos.

Para estudiar la forma débil del problema, equivalente a la forma fuerte (1), es necesario introducir algunas definiciones. Sea  $H^1(\Omega)$  el espacio de Sobolev clásico de funciones con derivadas de cuadrado integrable y sea  $H_{\Gamma_d}^1(\Omega)$  tal que  $H_{\Gamma_d}^1(\Omega) = \{w \in H^1(\Omega) \mid w = 0 \text{ en } \Gamma_d\}$ . La solución  $u$  de (1) es también la solución del siguiente problema integral: encuéntrese  $u$  en  $H_{\Gamma_d}^1(\Omega)$  que verifique

$$a(u, v) = l(v) \quad (2)$$

para toda  $v$  de  $H_{\Gamma_d}^1(\Omega)$ . Las formas  $a(\cdot, \cdot)$  y  $l(\cdot)$  vienen dadas por

$$a(u, v) := \int_{\Omega} (\nabla v \cdot A \nabla u + buv) d\Omega \quad \text{y} \quad l(v) := \int_{\Omega} vf d\Omega + \int_{\Gamma_n} v g_n d\Gamma \quad (3)$$

La solución por elementos finitos de Galerkin  $u_h$  pertenece a un espacio de dimensión finita  $\mathcal{V}_h$ , contenido en  $H_{\Gamma_d}^1(\Omega)$ , y verifica (2) para todas las  $v$  del propio  $\mathcal{V}_h$ . El objetivo de la estima del error es aproximar una medida del error  $e$ , que se define por  $e := u - u_h$ .

Si  $A$  resulta ser simétrica y definida positiva y  $b$  es no negativo (véase la ecuación (1.a)), la forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$  es a su vez simétrica y definida positiva, esto es, un producto escalar. La norma  $\|\cdot\|$  inducida por  $a(\cdot, \cdot)$  se denomina norma de la energía. Se tiene así que  $\|v\| := a(v, v)^{1/2}$  para cualquier  $v$ . Si se está modelando un problema físico,  $\|v\|$  se interpreta como la energía asociada al estado del sistema que queda descrito por  $v$ . La norma de la energía se va a utilizar para medir el error  $e$ .

La solución  $u_h$  que proporciona el método de los elementos finitos se puede interpretar como la proyección de la solución exacta, que es desconocida, sobre el espacio  $\mathcal{V}_h$ . Esta proyección se ha de entender según el producto escalar  $a(\cdot, \cdot)$  y, en este sentido, el método de Galerkin se denomina óptimo.

Para describir la distribución del error en el dominio  $\Omega$  se usan restricciones locales de la norma de la energía  $\|\cdot\|$ . La norma se puede restringir a un subdominio cualquiera de  $\Omega$  pero, en general, se deseará medir el error elemento a elemento. De esta manera, los subdominios  $\Omega_k$  a los que se restringe la norma van a ser siempre los elementos de la malla de cálculo que genera el espacio de interpolación  $\mathcal{V}_h$ . La expresión de la medida elemental del error  $e$  será

$$\|e\|_k := [a_k(e, e)]^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

donde se utiliza la restricción de  $a(\cdot, \cdot)$  al subdominio  $\Omega_k$  que se define por

$$a_k(u, v) := \int_{\Omega_k} (\nabla v \cdot A \nabla u + buv) d\Omega \quad (5)$$

## PROYECCIONES DEL ERROR

Un estimador de error debe proporcionar información local para describir la distribución espacial del error. Pero además, el cálculo de la estima debe ser también local. Esto es, para calcular la restricción del error a un elemento, sólo se debe utilizar información contenida en éste o, eventualmente, en su entorno. Si no, la estima se convierte en un proceso muy costoso y resultaría más barato usar una malla refinada para calcular una solución de referencia más precisa.

En este caso, para evitar un costoso cálculo global y realizar sólo cálculos locales (y, por consiguiente, de coste muy inferior) se imponen condiciones de contorno lo más sencillas posible al problema local del error. Por lo tanto se toman condiciones

homogéneas para cada problema local. Esto permite resolver el problema en un elemento  $\Omega_k$  de forma que es independiente a los demás. Obviamente, el error no es nulo sobre el contorno de los elementos y, en consecuencia, en el penúltimo apartado se plantea una modificación que mejora la aproximación al error.

Dado que la forma débil (2) proporciona un problema bien planteado y que la forma  $a(\cdot, \cdot)$  se toma como lineal en su primer argumento, el error  $e$  es el único elemento de  $H_{\Gamma_d}^1(\Omega)$  que verifica

$$a(e, v) = \tilde{l}(v) := l(v) - a(u_h, v) \quad (6)$$

para toda  $v$  en  $H_{\Gamma_d}^1(\Omega)$ . Así, (6) resulta ser una ecuación débil global (en todo el dominio) que caracteriza el error. De esta manera, aunque no se conozca el error, utilizando (6), se puede calcular el producto escalar del error con cualquier función  $v$  dada. Esto es, la ecuación (6) permite calcular la proyección de  $e$  sobre cualquier subespacio de  $H_{\Gamma_d}^1(\Omega)$ .

Sea  $V_k$  un subespacio de  $H_{\Gamma_d}^1(\Omega)$  que contiene funciones con soporte en  $\Omega_k$ : estas funciones se anulan en el resto del dominio, y por lo tanto, dado que las funciones de  $H_{\Gamma_d}^1(\Omega)$  son continuas, se anulan también en la parte del contorno de  $\Omega_k$  interior a  $\Omega$ . El subespacio  $V_k$  se genera por una base de funciones de interpolación  $\mathcal{B} = \{N_1, \dots, N_n\}$  por simplicidad; la referencia al índice  $k$  en la designación de la base y de sus elementos se suprime. La proyección de  $e$  sobre  $V_k$  se designa por  $\varepsilon_k$ . El elemento  $\varepsilon_k$  se representa por el vector columna  $[\varepsilon_k]$  de sus componentes en la base  $\mathcal{B}$  mientras que el producto escalar  $a(\cdot, \cdot)$  queda representado por la matriz  $\mathbf{K}$ , de término genérico  $K_{ij} = a(N_i, N_j)$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) y la forma  $\tilde{l}(\cdot)$  queda representada por el vector  $[\tilde{l}]$  de término genérico  $[\tilde{l}]_j = \tilde{l}(N_j) = l(N_j) - a(u_h, N_j)$ .

Finalmente, el resultado de la proyección  $\varepsilon_k$  se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones lineales

$$\mathbf{K} [\varepsilon_k] = [\tilde{l}] \quad (7)$$

Una vez resuelto, la norma de la energía de  $\varepsilon_k$  se puede calcular de manera directa según la siguiente expresión

$$\|\varepsilon_k\|^2 = [\varepsilon_k]^T \mathbf{K} [\varepsilon_k] = [\varepsilon_k]^T [\tilde{l}] \quad (8)$$

Los subespacios  $V_k$  son ortogonales entre sí con respecto de  $a(\cdot, \cdot)$ . Esto es así ya que los subdominios  $\Omega_k$ , es decir los elementos finitos de la malla de cálculo tienen intersecciones de medida nula: a lo sumo tienen en común parte de sus contornos. De esta manera se puede aplicar la desigualdad de Bessel y se deduce que que las normas de las proyecciones  $\varepsilon_k$  verifican

$$\sum_{k=1}^M \|\varepsilon_k\|^2 = \sum_{k=1}^M a(\varepsilon_k, \varepsilon_k) \leq a(e, e) = \|e\|^2 \quad (9)$$

donde  $M$  es el número de elementos de la malla.

La cota que proporciona (9) es también válida a nivel local. En efecto, dado que  $\varepsilon_k$  es la proyección de  $e$  sobre  $V_k$  según la forma global  $a(\cdot, \cdot)$ , la diferencia  $e - \varepsilon_k$  es

ortogonal a  $\varepsilon_k$ , es decir  $a(e - \varepsilon_k, \varepsilon_k) = 0$ . Además, esta condición de ortogonalidad se verifica también al utilizar la forma local  $a_k(\cdot, \cdot)$ , es decir  $a_k(e - \varepsilon_k, \varepsilon_k) = 0$ , ya que el soporte de  $\varepsilon_k$  está incluido en  $\Omega_k$ . Así se tiene que

$$\begin{aligned} \|e\|_k^2 &= a_k(e, e) \\ &= a_k([e - \varepsilon_k] + \varepsilon_k, [e - \varepsilon_k] + \varepsilon_k) \\ &= a_k(\varepsilon_k, \varepsilon_k) + a_k(e - \varepsilon_k, e - \varepsilon_k) \\ &= \|\varepsilon_k\|_k^2 + \|e - \varepsilon_k\|_k^2 \end{aligned}$$

Esto permite acotar la medida local del error

$$\|\varepsilon_k\| = \|\varepsilon_k\|_k \leq \|e\|_k \quad (10)$$

puesto que  $\|e - \varepsilon_k\|_k^2$  es positivo.

De esta manera se deduce que una familia cualquiera de subespacios  $V_k$  de  $H_{\Gamma_d}^1(\Omega)$ , que se definen sobre subdominios disjuntos o con intersección con medida nula  $\Omega_k$  permite calcular proyecciones locales  $\varepsilon_k$  que verifican:

- la norma de cada  $\varepsilon_k$  es una cota inferior de la norma local del error exacto  $e$  (véase la ecuación (10)) y se puede tomar como una estima local del error,
- si se define  $\varepsilon$  como la suma de las  $\varepsilon_k$

$$\varepsilon := \sum_{k=1}^M \varepsilon_k \quad (11)$$

la norma global de  $\varepsilon$  se puede calcular fácilmente a partir de las proyecciones locales y resulta ser una cota inferior de la medida global del error  $\|e\|$

$$\|\varepsilon\|^2 = \sum_{k=1}^M \|\varepsilon_k\|^2 \leq \|e\|^2 \quad (12)$$

- tanto la aproximación global como la local,  $\varepsilon$  y los  $\varepsilon_k$ , serían mejores a medida que el espacio  $V$ , generado por los espacios  $V_k$ ,  $V := V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_M$ , se acerca a  $H_{\Gamma_d}^1(\Omega)$  (el comportamiento asintótico de la desigualdad de Bessel viene dado por la igualdad de Parseval). La aproximación global  $\varepsilon$  es, de hecho, la proyección de  $e$  sobre  $V$ .

Las funciones de cada subespacio  $V_k$  se anulan en la parte del contorno de  $\Omega_k$  interior a  $\Omega$ . Por lo tanto la aproximación global  $\varepsilon$  asociada a una familia de subespacios  $V_k$ , definida a partir de una partición de  $\Omega$  en subdominios  $\Omega_k$ , se anula en todos los puntos de los contornos de los subdominios  $\Omega_k$  que son interiores a  $\Omega$ . Estos puntos se denominan *puntos ocultos* de la aproximación, puesto que la aproximación  $\varepsilon$  se está forzando artificialmente a anularse en éstos. El espacio  $V$  no puede ser una buena aproximación de  $H_{\Gamma_d}^1(\Omega)$  si permanecen ocultos muchos puntos del dominio  $\Omega$ . En los apartados sucesivos se definirán nuevas familias de subespacios asociados a nuevas particiones de  $\Omega$ . De esta manera, proyectando de nuevo, se reducirá el conjunto de puntos ocultos.

## DEFINICIÓN DEL ESTIMADOR LOCAL. RESIDUOS INTERIORES

Como se ha visto en el apartado anterior, la definición de los subespacios de funciones locales  $V_k$  caracteriza las proyecciones  $\varepsilon_k$ . Cada una de las  $\varepsilon_k$  se toma como una aproximación local del error, esto es como una aproximación de error en el interior del elemento  $\Omega_k$  sobre el que se define el subespacio  $V_k$ .

Típicamente, los espacios de interpolación local que han usado los estimadores residuales se han definido a partir de refinamientos de tipo  $p$ <sup>8,17,18,19</sup> o  $h$ <sup>20</sup>. En principio, el estimador que aquí se presenta podría seguir los dos caminos pero sólo se aplicará el refinamiento tipo  $h$ : las funciones de interpolación  $N_i$  que generan  $V_k$  se definen a partir de una discretización del elemento  $\Omega_k$ .

Las funciones de interpolación  $N_i$  que generan  $V_k$  se definen a partir de una discretización del elemento  $\Omega_k$ . Las submallas que discretizan los elementos se denominan submallas elementales. Para conseguir sistematizar los cálculos, las submallas elementales se definen a partir de una discretización del elemento de referencia. Es decir, cada submalla elemental es la transformación de una malla definida sobre el elemento de referencia. Esta malla patrón se aplica sobre cada elemento  $\Omega_k$  mediante la transformación isoparamétrica (Figura 1). De esta manera las funciones de interpolación  $N_i$  quedan asociadas a nodos de la submalla elemental que discretiza  $\Omega_k$ .

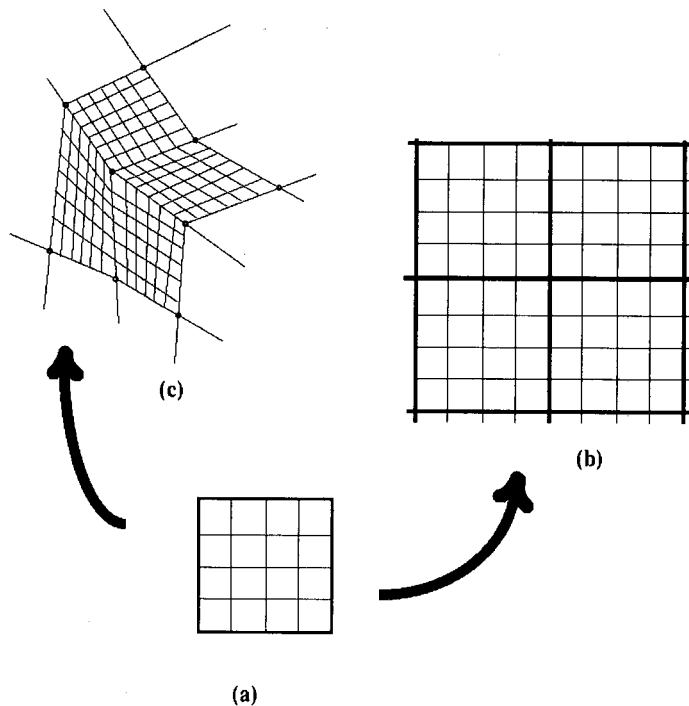


Figura 1. Submalla elemental sobre el elemento de referencia (a) y submallas elementales inducidas en una malla regular (b) y una malla arbitraria (c)

Al ensamblar todas las submallas elementales se construye una malla refinada que discretiza todo el dominio  $\Omega$ . Esta malla refinada se podría usar para calcular una solución más precisa que sirviese como referencia. El tamaño característico de esta malla se designa por  $\tilde{h}$  y la solución de referencia asociada se designa por  $u_{\tilde{h}}$ . Sin embargo, el coste de calcular esta solución de referencia sería demasiado elevado ya que en la malla de referencia se manejan un gran número de grados de libertad. Por lo tanto, la determinación directa de  $u_{\tilde{h}}$  se debe evitar.

La solución de referencia  $u_{\tilde{h}}$  permite definir lo que se va a denominar *error de referencia*,  $e_r := u_{\tilde{h}} - u_h$ . Este error  $e_r$  se puede ver como la proyección del error exacto  $e$  sobre el espacio de interpolación que genera la malla de referencia,  $\mathcal{V}_{\tilde{h}}$ . Nótese que  $e_r$  es el error de  $u_h$  respecto de la  $u_{\tilde{h}}$  y no coincide con el error de la solución de referencia,  $u - u_{\tilde{h}}$ , que ha de ser muy pequeño respecto de  $e$  o  $e_r$ . De hecho, el error total  $e$  es la suma del error de referencia  $e_r$  y el error cometido en la solución de referencia:  $e = e_r + (u - u_{\tilde{h}})$ .

Dado que la malla de referencia se construye a partir de la malla original de cálculo, se tiene que  $\mathcal{V}_h$  está incluido en  $\mathcal{V}_{\tilde{h}}$ . Además, el espacio  $\mathcal{V}_{\tilde{h}}$  incluye a todos los espacios  $V_k$  generados por las submallas elementales, y por lo tanto también a su suma  $V$  ( $V := V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_M \subset \mathcal{V}_{\tilde{h}}$ ). Esta inclusión es estricta y no puede ser una igualdad ya que  $\mathcal{V}_{\tilde{h}}$  contiene todas las funciones de interpolación  $N_i$  que generan los  $V_k$ , es decir las que están asociadas a nodos interiores, pero, además, contiene también las que corresponden a los puntos ocultos, esto es, a los nodos de la malla de referencia que están en el contorno de los elementos  $\Omega_k$ . Se tiene, por lo tanto, que  $e$  está en  $H_{\Gamma_d}^1(\Omega)$ , que  $e_r$  es la proyección de  $e$  sobre  $\mathcal{V}_{\tilde{h}} \subset H_{\Gamma_d}^1(\Omega)$  y que  $\varepsilon$  es la proyección de  $e$  sobre  $V \subset \mathcal{V}_{\tilde{h}} \subset H_{\Gamma_d}^1(\Omega)$ . Así,  $\varepsilon$  es también la proyección de  $e_r$  sobre  $V$  y, en consecuencia, su norma infravalora también la norma de  $e_r$ . Retomando (12), se tiene que  $\|\varepsilon\| \leq \|e_r\| \leq \|e\|$ .

El objetivo del estimador que aquí se presenta es aproximar las normas global y locales de  $e_r$  evitando resolver el problema global. De hecho,  $\varepsilon$ , la proyección de  $e_r$  sobre  $V$ , es ya una primera aproximación a  $e_r$ . En este caso la proyección  $\varepsilon$  resulta de ensamblar las proyecciones locales  $\varepsilon_k$  sobre cada espacio  $V_k$ . Por lo tanto, cada proyección  $\varepsilon_k$  se calcula resolviendo un problema local, con pocos grados de libertad y de coste reducido.

Este problema conduce a un sistema de ecuaciones como (7). Tal como es habitual en el método de los elementos finitos, el sistema se construye, en una primera fase, sin tener en cuenta las condiciones de contorno. En este caso, esto quiere decir que se incluyen las incógnitas asociadas a los nodos del contorno en la submalla que discretiza  $\Omega_k$ . En una segunda fase el sistema de ecuaciones se modifica para imponer las condiciones de contorno. Las condiciones de contorno del problema local que se resuelve para determinar  $\varepsilon_k$  son las siguientes:

- 1) Dirichlet homogéneas, es decir  $\varepsilon_k = 0$  en  $\Gamma_d^k$ , donde  $\Gamma_d^k$  es la parte del contorno de  $\Omega_k$  que es interior a  $\Omega$  o que está en  $\Gamma_d$ . Recuérdese que  $\Gamma_d$  es la parte del contorno de  $\Omega$  donde se han impuesto condiciones tipo Dirichlet (no importa si son homogéneas o no lo son). Las condiciones de Dirichlet se imponen directamente sobre  $u_h$ , y por lo tanto el error  $e$  es nulo en  $\Gamma_d$ .



- 2) Neumann homogéneas, de flujo nulo (condiciones naturales) en  $\Gamma_n^k$ . Se define  $\Gamma_n^k$  como la parte del contorno de  $\Omega_k$  que está en  $\Gamma_n$ , que es la parte del contorno de  $\Omega$  donde se ha prescrito el flujo (condiciones de contorno de tipo Neumann). Esto es debido a que el término independiente de la ecuación (6) incluye los residuos en el contorno (véase la definición de  $l(\cdot)$  en (3)).

Obsérvese que mientras  $\Gamma_d^k$  es no vacío en todo elemento  $\Omega_k$ ,  $\Gamma_n^k$  puede no existir. Desde el punto de vista algorítmico sólo es necesario imponer las primeras condiciones puesto que las segundas son condiciones naturales. Además, las condiciones de Dirichlet homogéneas son muy sencillas, puesto que sólo requieren exigir que los valores nodales en algunos nodos del contorno sean nulos.

El cálculo del término residual  $[\tilde{l}]$ , que se define en la ecuación (6), es sencillo, puesto que  $u_h$  pertenece al espacio de referencia  $\mathcal{V}_h$ . De esta manera,  $u_h$  se puede representar en la base de funciones interpolación asociadas a la malla de referencia. Por lo tanto la restricción de  $u_h$  a  $\Omega_k$  se representará por el vector columna  $[u_h]$  de sus valores nodales. Así, el término  $a(u_h, N_j)$ , véase la parte derecha de la ecuación (6), se calcula como el producto de la matriz  $\mathbf{K}$  y el vector  $[u_h]$ . Finalmente, se obtiene

$$[\tilde{l}] = [l] - \mathbf{K} [u_h] \quad (13)$$

Mediante esta expresión se puede determinar la parte de la derecha de la ecuación (7) en función de los objetos que aparecen en la formulación típica del método de los elementos finitos. El cálculo del residuo, esto es el término de la derecha de (7), no requiere integrar la solución aproximada  $u_h$ , puesto que las integrales necesarias ya se han calculado para determinar  $\mathbf{K}$ .

El término residual  $[\tilde{l}]$  asociado a un subespacio  $V_k$  de funciones con soporte en el elemento  $\Omega_k$  se denomina *residuo interior*. Así, consecuentemente, la estima que proporciona la ecuación (7) se denomina *estima interior*. La estima interior, teniendo en cuenta lo que se ha dicho hasta ahora, queda perfectamente caracterizada al elegir una determinada submalla elemental.

Resulta muy sencillo definir submallas para elementos cuadriláteros. Basta (Figura 1) definir una malla estructurada regular en el elemento de referencia que, en este caso, es un cuadrado. Por supuesto, aunque la submalla elemental sea estructurada la malla de cálculo que se ha empleado no tiene por qué serlo. Este tipo de submallas verifica:

- a) se definen de manera sencilla en el elemento de referencia,
- b) permiten definir fácilmente la restricción de  $u_h$  a  $\Omega_k$  y
- c) pueden ser refinadas uniformemente, tanto como desee el usuario.

El cálculo de la proyección  $\varepsilon_k$ , tal como se describe en la ecuación (7), requiere resolver un problema local en  $\Omega_k$ , con una discretización inducida por la submalla elemental correspondiente y donde se han impuesto condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogéneas en todo el contorno de  $\Omega_k$ .

La norma de  $\varepsilon_k$  aumenta con el "tamaño" del subespacio asociado  $V_k$ , esto es con el número de grados de libertad de la submalla elemental. Cuanto menor es  $\tilde{h}$ , el tamaño característico de la malla de referencia, mayor es la dimensión de los espacios  $V_k$  asociados a cada elemento y mayor es la norma de  $\varepsilon_k$ .

Una secuencia de aproximaciones basadas en submallas refinadas paulatinamente proporciona estimas de norma creciente. Además, como ya se ha dicho, todas estas normas están acotadas por la norma del error de referencia. Por lo tanto, si se refina la submalla, la norma de las proyecciones, tanto global como local, tiende a un valor que infraestima el error de referencia y, con más razón, el exacto. Esta infravaloración puede resultar importante y así la estima  $\|\varepsilon\|$  puede ser muy inferior a  $\|e\|$  e incluso a  $\|e_r\|$  (recuérdese que  $\|\varepsilon\| \leq \|e_r\| \leq \|e\|$ ). Esto es debido a que en la estima interior se está forzando al aproximante  $\varepsilon$  a anularse en los puntos ocultos.

Este problema no aparece en la mayoría de los estimadores residuales. En algunos casos<sup>3,8,19</sup> se resuelven problemas locales similares y se proporcionan también aproximaciones a las condiciones de contorno alrededor del elemento en cuestión. La idea principal de estos estimadores es utilizar la discontinuidad o salto de flujos de la solución aproximada a través de los lados del elemento para aproximar condiciones de contorno de tipo Neumann (sobre los flujos) en la ecuación del error local. Diferentes autores usan distintos criterios que permiten deducir este tipo de aproximaciones. Estas aproximaciones pueden resultar costosas desde un punto de vista computacional, puesto que requieren el cálculo de la solución y sus derivadas en puntos de la frontera de los elementos donde, en general, no se dispone de ellos.

Siguiendo el enfoque que se utiliza en este trabajo, aproximando el error por sus proyecciones sobre diferentes subespacios, es posible tener en cuenta la información que contienen los saltos de flujo sin tener que calcular directamente estos saltos. En efecto, bastará que se proyecte sobre subespacios cuyas funciones tengan soportes que recubran los lados de los elementos. En el siguiente apartado se introduce una nueva familia de proyecciones que conserva la filosofía que se enuncia en los apartados anteriores, pero que se basa en una partición del dominio  $\Omega$  distinta de la que proporcionan los elementos. De esta manera se va a calcular una estima combinando las dos familias de proyecciones de manera adecuada.

Por lo tanto, el proceso de estima se dividirá en dos fases: la estima interior, que ya se ha descrito, y un enriquecimiento posterior.

Es deseable que la estima total resultante mantenga las propiedades de acotación inferior que posee la estima interior. Así será posible seguir interpretando la estima como una proyección. De esta manera, además, se sabrá a priori que el error estimado infravalora el error exacto, esto es se conocerá el signo del sesgo sistemático del estimador. Para ello, va a ser necesario imponer condiciones de compatibilidad adecuadas entre las dos fases de la estima.

## ENRIQUECIMIENTO DE LA ESTIMA. SUBMALLAS SOLAPADAS

Hasta ahora se han calculado las proyecciones locales  $\varepsilon_k$  del error  $e$  (y del error de referencia  $e_r$ ) sobre los subespacios  $V_k$ . Se ha utilizado la partición del dominio  $\Omega$  en los elementos  $\Omega_k$ , puesto que es la partición natural en el método de los elementos finitos. Cada subespacio  $V_k$  se ha definido a partir de una submalla elemental que discretiza  $\Omega_k$ . Las normas de las proyecciones  $\varepsilon_k$ ,  $\|\varepsilon_k\|$ , se toman como aproximaciones de las normas locales del error  $\|e\|_k$ . Tanto el cálculo como el resultado obtenido son locales, esto

es, definidos elemento a elemento. Se obtiene una aproximación global sumando todas las estimas interiores locales (véase la ecuación (12)). Tanto la aproximación global como las locales resultan ser cotas inferiores del error exacto. Se ha observado que esta aproximación puede ser bastante pobre y que la infravaloración cometida puede ser importante. Por lo tanto, resultaría interesante añadir nuevos términos al estimador de manera que la estima obtenida se acerque lo más posible al error exacto, manteniendo en cualquier caso la acotación inferior, esto es acercándose por debajo.

Dado que  $\varepsilon$  es la proyección del error de referencia  $e_r$  en el espacio  $V$  ( $V := V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_M$ ),  $e_r$  se puede expresar de manera única como suma de  $\varepsilon$  y un elemento  $e_r^\perp$  ortogonal a  $\varepsilon$  y de hecho a todo  $V$ . Esto es  $e_r = \varepsilon + e_r^\perp$ . Por lo tanto utilizando el teorema de Pitágoras se puede escribir  $\|\varepsilon\|^2 = \|e_r\|^2 - \|e_r^\perp\|^2$ , es decir que la norma de  $e_r^\perp$  es la infravaloración del error de referencia asociada a la estima interior global.

El objetivo del enriquecimiento de la estima es aproximar la parte olvidada del error de referencia,  $e_r^\perp$  y añadir esta aproximación a la primera estima, la interior. El elemento  $e_r^\perp$  pertenece a  $V^\perp$ , el complemento ortogonal de  $V$  en el espacio de interpolación de referencia  $\mathcal{V}_h$ .

Dado que se quiere aproximar  $e_r^\perp$  parece conveniente proyectar  $e$  o  $e_r$  en un espacio incluido en  $V^\perp$ .

Se va a considerar una nueva partición de  $\Omega$  en una familia de subdominios  $\Lambda_l$  ( $l = 1, \dots, M'$ ). Para que quede patente la diferencia entre las dos particiones del dominio que se están barajando, los subdominios que se designan por  $\Lambda_l$  se denominan *patches* (en inglés, parcela) mientras que los originales  $\Omega_k$  son los elementos de la malla de cálculo. Cada *patch*  $\Lambda_l$  se discretiza mediante una submalla de *patch* que genera un espacio de interpolación  $U_l$  incluido en  $H_0^1(\Lambda_l)$ . Los subespacios  $U_l$  se generan siguiendo la misma estrategia que se ha utilizado para los subespacios  $V_k$ , asociados a los elementos. Para que en esta segunda fase sea posible también aproximar el error de referencia, las submallas que discretizan los *patches* se escogen como parte de la malla de referencia global, que genera  $\mathcal{V}_h$ . Así, las submallas que discretizan elementos y *patches* solapados comparten nodos y elementos. Como se verá, esto condiciona la geometría y el mallado de los *patches*.

Dado que los subdominios  $\Lambda_l$  tienen intersecciones de medida nula, los subespacios asociados  $U_l$  son mutuamente ortogonales, al igual que los subespacios elementales  $V_k$ . Las proyecciones de  $e_r$  (o  $e$ ) sobre los subespacios de *patch*  $U_l$  se han de pensar como una nueva familia de aproximaciones a  $e_r$ , partiendo de diferentes subdominios.

Se define  $\tilde{U}_l$  como la parte de  $U_l$  ortogonal a la aproximación interior global  $\varepsilon$ ;  $\tilde{U}_l := U_l \cap \text{span}\{\varepsilon\}^\perp$ . Dado que  $\tilde{U}_l$  es una restricción de  $U_l$  sujeta a una única condición lineal, la dimensión de  $\tilde{U}_l$  es igual a la de  $U_l$  menos uno (o igual a la de  $U_l$  si se verifica que  $\varepsilon$  es ortogonal a  $U_l$ ). Se va a designar por  $\eta_l$  a la proyección del error  $e_r$  en  $\tilde{U}_l$ .

Dado que  $\varepsilon$  y cada uno de las estimas de *patch*  $\eta_l$  son ortogonales, la desigualdad de Bessel se puede aplicar de nuevo

$$\|\varepsilon\|^2 + \sum_{l=1}^{M'} \|\eta_l\|^2 = \sum_{k=1}^M \|\varepsilon_k\|^2 + \sum_{l=1}^{M'} \|\eta_l\|^2 \leq \|e\|^2 \quad (14)$$

Ciertamente, la ortogonalidad a  $\varepsilon$  no fuerza a  $\tilde{U}_l$  a estar incluido en  $V^\perp$ . De hecho, si se tomase la parte de  $U_l$  ortogonal a todos los elementos de  $V$ , es posible que el subespacio resultante degenerase en el subespacio nulo. Esto es así, ya que el número de restricciones de ortogonalidad activas podría superar el número de grados de libertad (esto es, la dimensión) de  $U_l$ . En efecto, por su propia construcción, las funciones de  $U_l$  son ortogonales a todas las funciones de  $V$  que están en subespacios interiores  $V_k$  cuyo elemento soporte  $\Omega_k$  no se solapa con  $\Lambda_l$ . Sin embargo, para garantizar que  $U_l$  sea ortogonal a  $V$ , es necesario imponer que lo sea a todos los elementos de los  $V_k$  cuyo soporte se solapa con  $\Lambda_l$ . Y, en principio, cada una de estas condiciones elimina un grado de libertad en el espacio al que se está imponiendo. Si se imponen más condiciones que grados de libertad, el espacio resultante colapsa en el espacio nulo.

Además, dado que se está obteniendo una cota inferior del error exacto, es preferible imponer el mínimo número de restricciones posible. Cuanto más se restrinja el problema, menor será la estima resultante, y por lo tanto peor, puesto que es más lejana a  $\|e\|$ . Se impone pues, como ya se ha dicho, sólo la ortogonalidad a la estima interior global  $\varepsilon$ , que permite añadir las contribuciones de los *patches* a la estima interior según indica la ecuación (14).

Sin embargo, como se ha observado más arriba, se desea obtener también una estima local que permita determinar la variación espacial del error. Esta estima local ha de aproximar  $\|e_r\|_k^2$  (véase la ecuación (4)). Para ello se ha de tener en cuenta la contribución de todos los *patches*  $\Lambda_l$  que se solapan con el elemento  $\Omega_k$ . Cada *patch*  $\Lambda_l$  contribuye a enriquecer la aproximación local a  $\|e_r\|_k^2$  aportando la medida de la restricción a  $\Omega_k$  de  $\eta_l$ . Esto es, incrementando el valor de la primera aproximación en  $a_k(\eta_l, \eta_l) = \|\eta_l\|_k^2$ . Así, una aproximación a la norma local del error  $\|e\|_k^2$  se puede evaluar mediante la siguiente expresión

$$\|\varepsilon_k\|_k^2 + \sum_l \|\eta_l\|_k^2 \quad (15)$$

donde el índice  $l$  del sumatorio recorre los valores tales que  $\Lambda_l$  se solapa con  $\Omega_k$ .

Obsérvese que la norma local de  $\eta_l$  (restringida a  $\Lambda_l$ ) se calcula fácilmente utilizando una expresión similar a la de la ecuación (8). Sin embargo, el cálculo de su contribución al elemento  $\Omega_k$ , es decir  $\|\eta_l\|_k$ , requiere identificar qué elementos de la submalla que discretiza el *patch* pertenecen a  $\Omega_k$ . Esto puede ser complejo, desde el punto de vista de organización de los cálculos. Por lo tanto, para que la programación resulte más sencilla, se introduce una aproximación adicional. En vez de calcular  $\|\eta_l\|_k$ , se prefiere equidistribuir el valor de la norma (al cuadrado) de  $\eta_l$ ,  $\|\eta_l\|^2$ , entre todos los elementos que se solapan con el *patch*  $\Lambda_l$ . Esto significa que se está aproximando las cantidades locales de la ecuación (15) por

$$\|\varepsilon_k\|_k^2 + \sum_l \frac{\|\eta_l\|^2}{M_l} \quad (16)$$

donde  $M_l$  es el número de elementos que se solapan con el *patch*  $\Lambda_l$  y el índice  $l$  tiene el mismo recorrido que en la ecuación (15). Esta aproximación hace que se pueda perder la propiedad de acotación inferior, en particular cuando elementos con errores muy

distintos son colindantes. Sin embargo, la simplificación en la algorítmia es importante y en los ejemplos se comprueba que la acotación inferior se pierde sólo en un pequeño número de elementos.

La condición de ortogonalidad a la aproximación interior global es una restricción lineal que se ha de imponer como una restricción más al sistema de ecuaciones (7). Esta restricción se impone al mismo tiempo que se imponen las restricciones que provienen de las condiciones de contorno. Por supuesto, las condiciones de contorno del problema sobre cada *patch* se imponen según el mismo criterio que se ha dado para imponer las condiciones de contorno en los problemas elementales.

Es importante señalar que la condición de ortogonalidad a la aproximación interior global se puede implementar de manera sencilla, si los nodos de las submallas que discretizan *patches* y elementos coinciden. Como ya se ha dicho, esto condiciona la forma y la discretización de los *patches* a partir de la discretización que se ha escogido para los elementos. Pero si se consigue respetar esta condición, imponer la ortogonalidad se convierte en una restricción lineal al problema local que se resuelve en cada *patch*. Esta restricción se puede imponer fácilmente utilizando la técnica de los multiplicadores de Lagrange.

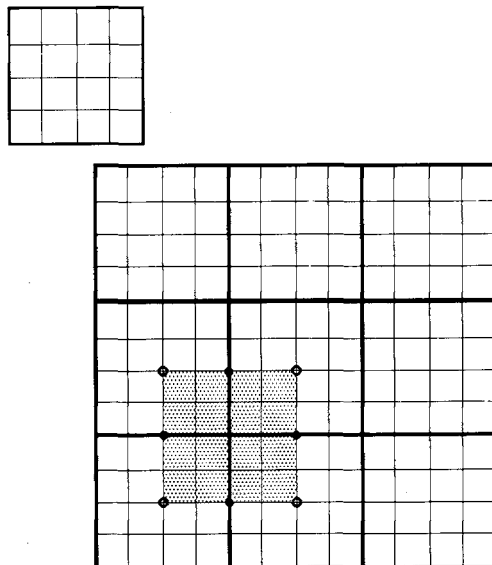


Figura 2. Submalla de *patches* nodales (sombreada) que se asocia a las submallas elementales regulares

Así, para que la definición del estimador sea completa, se requiere precisar cuál es la partición que corresponde a los *patches* y cuál es la discretización correspondiente. Si se considera un estimador interior como el que se ha presentado en el apartado anterior (Figura 1) se puede definir un conjunto de *patches* centrados en los nodos de la malla original, tal como se muestra en la Figura 2. Cada nodo tiene un *patch*

asociado, con vértices en los centros de los elementos adyacentes y en los puntos medios de los lados que concurren en él. La discretización de los *patches* queda inducida por la discretización de los elementos. Los puntos ocultos remanentes en la aproximación completa son únicamente los puntos medios de los lados interiores de los elementos de la malla original. El estimador que se define a partir de esta opción se denomina estimador de *patches* nodales.

Es posible también definir una submalla elemental y una definición de *patches* asociada que permita escoger a priori los puntos ocultos remanentes en la estima completa. Por ejemplo, estos puntos pueden ser los nodos de la malla de cálculo original. En la Figura 3 se muestra cómo se puede definir este tipo de submallas y *patches*. Conviene observar que con este tipo de definición geométrica, la proyección  $\eta_l$  incluye el efecto de los saltos de flujo a través del lado que recubre el *patch*  $\Lambda_l$ . Si se toma esta opción, el estimador resultante se denomina estimador de *patches* asociados a los lados.

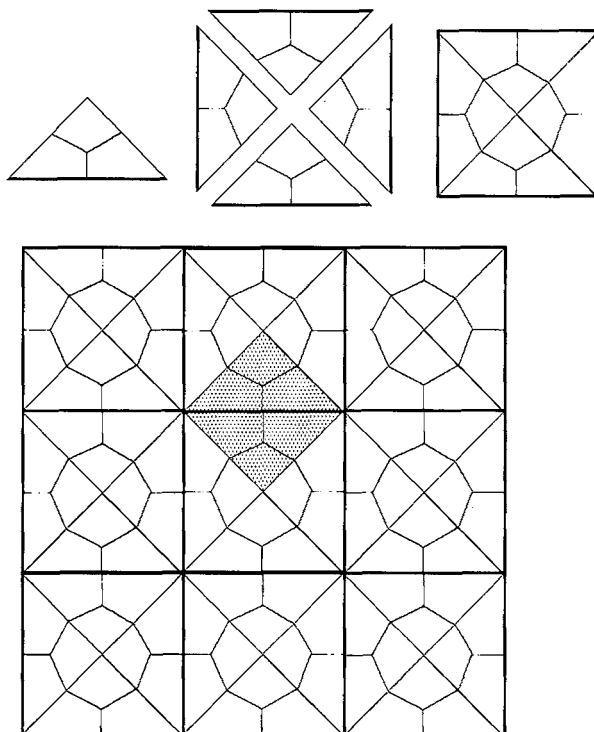


Figura 3. Submalla de *patches* asociados a los lados (sombreada). La submalla elemental asociada se define a partir del mallado en cuadriláteros de un triángulo

En la definición de este estimador se ha seguido una estrategia de proyección peculiar. En vez de obtener  $e_r$ , la proyección de  $e$  sobre  $\mathcal{V}_h$  mediante la resolución de un problema global, se resuelven problemas locales de coste abordable. Esto provoca que la aproximación propuesta se vea forzada a anularse en un conjunto de puntos que

se denominan ocultos. Sin embargo, añadiendo la segunda fase de la estima, los únicos puntos ocultos remanentes son las intersecciones de los contornos de los elementos y los contornos de los *patches*. El número de puntos ocultos se reduce así notablemente.

De esta forma, se fuerza la estima completa  $\varepsilon + \eta$ , que pretende aproximar el error de referencia  $e_r$ , a anularse en los puntos ocultos remanentes. Pero no es ésta la única aproximación que se introduce. En efecto,  $e_r$  es un elemento del espacio de referencia  $\mathcal{V}_{\tilde{h}}$ , mientras que  $\varepsilon + \eta$  está en el espacio  $W := V + U$ , incluido en  $\mathcal{V}_{\tilde{h}}$  pero más pequeño. Este espacio  $W$  es el de los interpolantes asociados a la malla de referencia, con la condición adicional de anularse en los puntos ocultos remanentes. Debido a la estrategia de cálculo que se ha seguido, la estima  $\varepsilon + \eta$  no es la proyección de  $e_r$  sobre  $W$ , que requeriría un cálculo global costoso. La diferencia entre la proyección directa sobre  $W$  y el resultado de la estrategia de proyección depende del vector que se proyecte, en este caso  $e_r$ , y de la posición relativa de los subespacios.

En el siguiente apartado se muestran algunos ejemplos y se compara el uso del estimador de *patches* nodales y el de *patches* asociados a los lados.

## EJEMPLOS

El análisis práctico de un estimador del error se basa en el estudio de su índice de efectividad. El índice de efectividad se define como el cociente de las medidas del error estimado y del error exacto. El índice de efectividad puede definirse global o localmente. Si se dispone de la solución exacta del problema el índice de efectividad se puede calcular sin problemas. Si no, que es lo que ocurre en general, la solución de referencia  $u_{\tilde{h}}$  puede sustituir a la solución exacta, es decir, el error de referencia  $e_r$  puede sustituir al error exacto  $e$ . En ambos casos la propiedad de acotación inferior hará que los índices de efectividad sean inferiores a 1. Esto sucederá indefectiblemente si se trata del índice de efectividad global y, casi siempre, salvo las excepciones que introduce la aproximación de la ecuación (16), para los índices locales.

Se presenta en primer lugar un ejemplo unidimensional sencillo, con solución analítica conocida. Se trata de resolver la ecuación diferencial ordinaria

$$-\frac{d^2u}{dx^2}(x) = 6x^2 - 3x$$

en  $\Omega = ]0, 1[$  con condiciones de Dirichlet homogéneas  $u(0) = u(1) = 0$ . La solución exacta del problema es  $u(x) = (x^3 - x^4)/2$ . Se resuelve este problema de manera aproximada usando el método de los elementos finitos con mallas uniformes. Se obtienen dos soluciones aproximadas:  $u_{h1}$  con una malla de 20 elementos lineales (de dos nodos cada uno, en total 21 nodos) y  $u_{h2}$  con una malla de 15 elementos cuadráticos (de tres nodos cada uno, en total 31 nodos). Los errores  $e_1 = u - u_{h1}$  y  $e_2 = u - u_{h2}$  son conocidos, y por lo tanto se pueden calcular las normas locales del error exacto para cada elemento, en cada una de las dos mallas. En el proceso de estima del error se calcula en primer lugar la estima interior. Para ello se utilizan submallas uniformes que discretizan cada elemento. Se hallan las estimas para diferentes números de elementos

en las submallas. Los resultados globales obtenidos se muestran en las Tablas I y II. Como se puede ver, a medida que crece el número de elementos en las submallas, la estima global converge rápidamente a la medida del error exacto.

Nodos submalla	Elementos submalla	Estima global	Índice de efectividad
2	3	0,01488	94,3 %
4	5	0,015463	98,0 %
8	9	0,015687	99,4 %
16	17	0,015758	99,8 %

Tabla I. Estima del error global e índice de efectividad asociado para el problema unidimensional con elementos lineales

Nodos submalla	Elementos submalla	Estima global	Índice de efectividad
3	2	$7,3403 \times 10^{-3}$	96,80 %
5	3	$7,5345 \times 10^{-3}$	99,40 %
11	6	$7,5799 \times 10^{-3}$	99,98 %

Tabla II. Estima del error global e índice de efectividad asociado para el problema unidimensional con elementos cuadráticos

Las distribuciones del error estimado a través de las medidas locales se pueden ver en la Figura 4. Las estimas que se presentan en la Figura 4 se han calculado con submallas elementales groseras (5 elementos lineales y 2 elementos cuadráticos, respectivamente), con submallas más finas no se distinguen en el dibujo la distribución exacta de la aproximada. Así, en este caso resulta que la estima interior es ya una aproximación muy buena del error exacto. Esto es así aunque se mantengan puntos ocultos, que son los nodos de la malla de cálculo original. No parece pues necesario enriquecer la estima interior con una estima de *patch*. Nótese que aquí los *patches* deberían recubrir los nodos (y eliminar todos los puntos ocultos). Este fenómeno aparece sólo en este caso sencillo y es debido a que se observan propiedades de superconvergencia. En efecto, en este problema la solución por elementos finitos tiene un orden de aproximación superior en los nodos<sup>20</sup>. Por lo tanto el error en los nodos, que son precisamente los puntos ocultos, es muy inferior al error en el resto del dominio. Dicho de otra manera, las condiciones de contorno de Dirichlet homogéneas que se utilizan en la estima interior son muy precisas. La contribución de los *patches* a la estima no sería en este caso significativa.



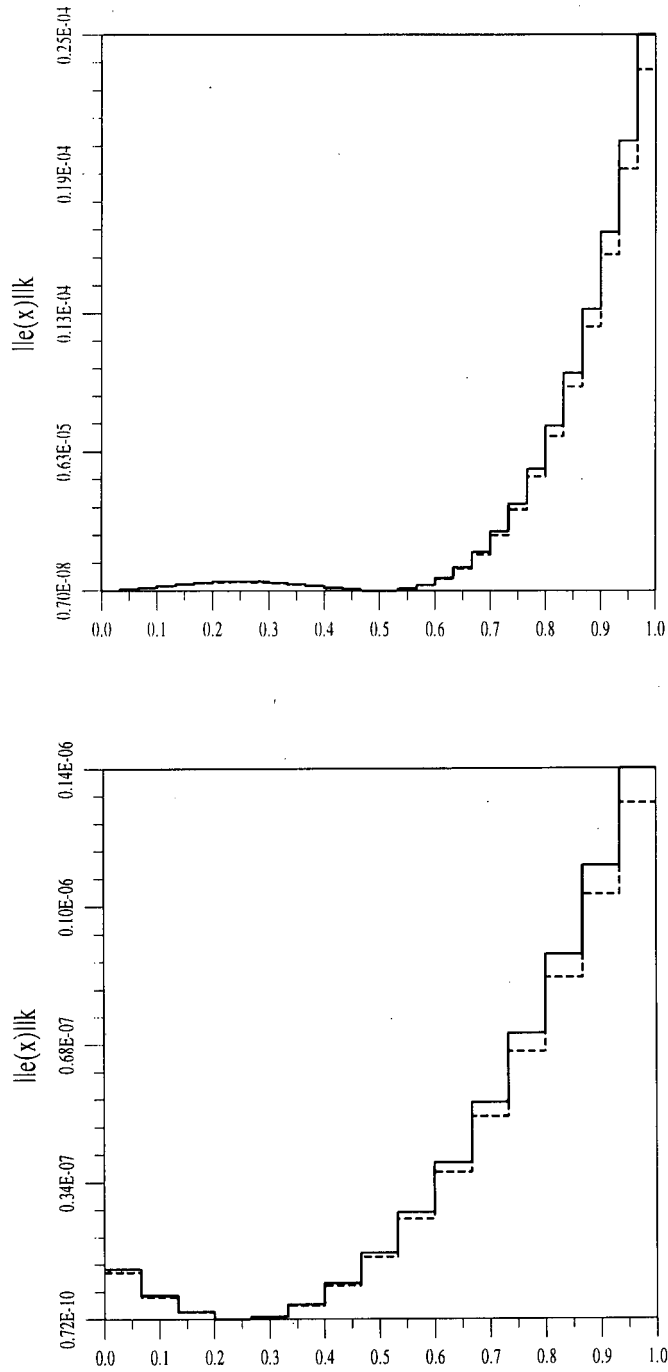


Figura 4. Distribución del error exacto (línea continua) y estimado (línea a trazos) para elementos lineales (arriba) y cuadráticos (abajo)

El segundo ejemplo es un problema plano, se resuelve la ecuación de Poisson en el dominio que se muestra en la Figura 5. Esto es, se busca  $u$  que verifique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4 \quad \text{en } \Omega$$

con condiciones de Dirichlet en todo el contorno de manera que  $u(x, y) = x^2 + y^2$  sea la solución exacta del problema. La solución aproximada se calcula usando la malla no estructurada de cuadriláteros que se puede ver en la Figura 5.

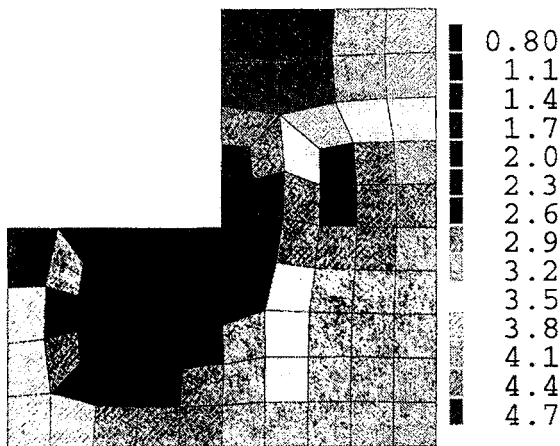


Figura 5. Distribución del error exacto en el problema escalar plano

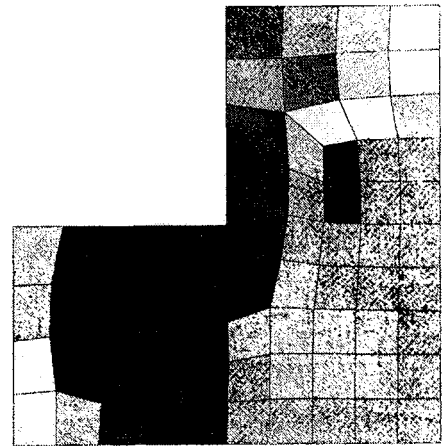


Figura 6. Distribución del error estimado en el problema escalar plano

Nodos submalla	Elementos submalla	Estima global	Índice de efectividad
9	16	0,24759	91,9 %
25	36	0,25435	94,4 %
49	64	0,25670	95,3 %
81	100	0,25780	95,7 %
361	400	0,25934	97,5 %

Tabla III. Estima del error global e índice de efectividad asociado para el problema plano con elementos cuadriláteros de cuatro nodos y submallas de *patches* nodales

Como se puede ver en las Tablas III y IV, en este caso la estima con *patches* nodales proporciona resultados ligeramente mejores que la estima con *patches* asociados a los lados. De cualquier modo, la estima local se ajusta bien a la forma de la distribución

Nodos submalla	Elementos submalla	Estima global	Índice de efectividad
9	12	0,23381	86,8 %
41	48	0,24315	90,2 %
177	92	0,24691	91,6 %

Tabla IV. Estima del error global e índice de efectividad asociado para el problema plano con elementos cuadriláteros de cuatro nodos y submallas de *patches* asociados a los lados

del error exacto. En la Figura 5 se puede ver la forma de la distribución del error exacto en el dominio. Obsérvese que esta distribución es muy similar, desde un punto de vista cualitativo, a la del error estimado que se presenta en la Figura 6 (la distribución corresponde a la estima con *patches* nodales y una submalla elemental con 16 elementos). La distribución de la Figura 6 se ha obtenido usando *patches* nodales con submallas elementales de 16 elementos.

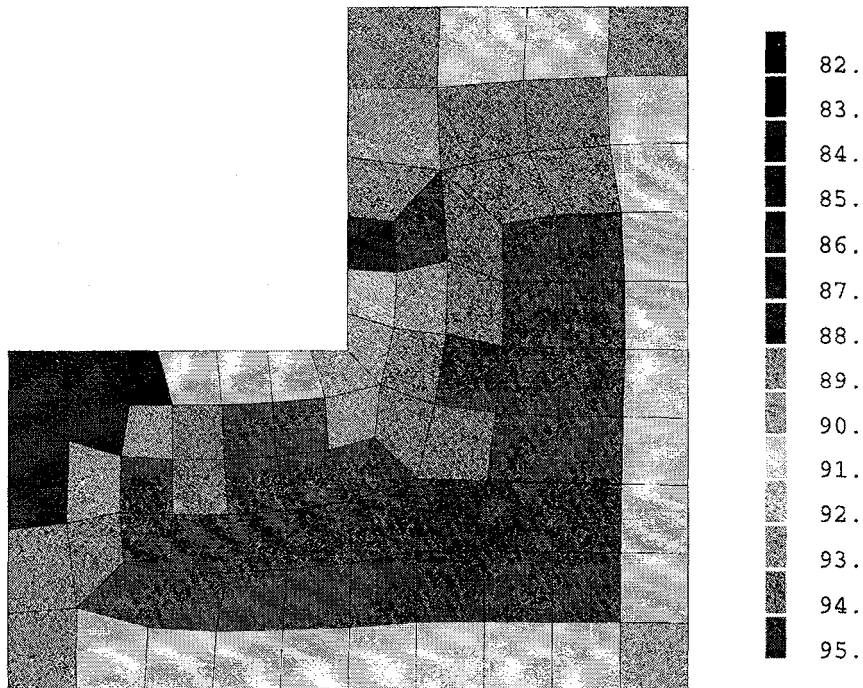


Figura 7. Distribución del índice de efectividad para el problema escalar plano. Se representa para la estima con *patches* nodales y submalla elemental de 16 elementos

En la Figura 7 se muestra la distribución del índice de efectividad en el dominio. Para examinar cuantitativamente la calidad de la estima local, se va a estudiar la distribución de los índices de efectividad local. En la Figura 8 se muestra un histograma

que representa el número de elementos con un cierto valor del índice de efectividad local, la infraestima local. Se puede ver que la distribución está bastante concentrada, todos los valores están entre 0,83 y 0,95. Por lo tanto la calidad de la estima es aproximadamente la misma en todo el dominio. Esto resulta muy importante si se va a utilizar la estima en un proceso de mallado adaptable, ya que los criterios de optimalidad requieren uniformidad del error en la malla óptima. Es conveniente recalcar, además, que aunque la estima es mejor en el interior del dominio, cerca del contorno los resultados son también aceptables (el índice de efectividad no baja del 83 %). Los resultados indican, por lo tanto, que el comportamiento del estimador es bueno cerca de los contornos de Dirichlet, donde otros estimadores suelen plantear problemas<sup>22</sup>.

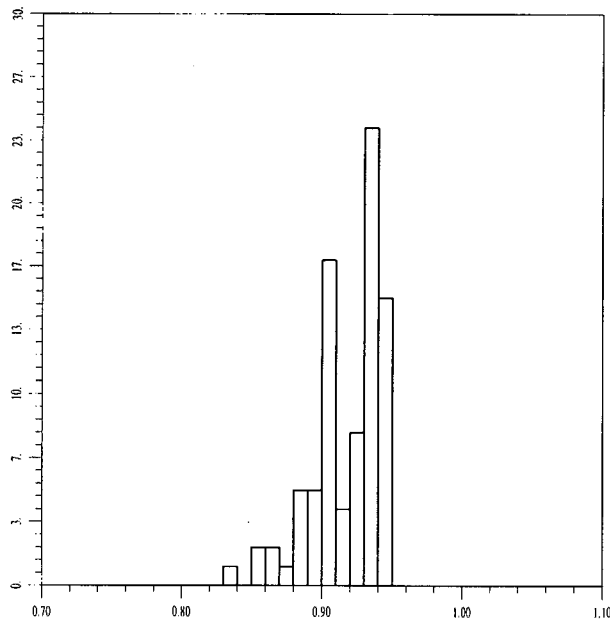


Figura 8. Histograma que representa la distribución de frecuencias de aparición de los índices de efectividad locales en el problema escalar plano. Se representa para la estima con *patches* nodales y submalla elemental de 16 elementos

El tercer ejemplo es un problema mecánico plano (en la hipótesis de deformación plana) debido a Zienkiewicz y Zhu<sup>1</sup>. Se trata de determinar el estado de una presa de gravedad bajo las cargas que proporcionan la presión hidrostática sobre el paramento mojado y su peso propio. Se prescriben los desplazamientos en la parte del contorno que corresponde al contacto con el macizo rocoso. Se calcula una aproximación  $u_h$  a los desplazamientos de la presa utilizando el método de los elementos finitos.

En este caso no se dispone de una solución analítica, y por lo tanto se validará la estima obtenida comparándola con la distribución de referencia que se obtiene al hacer un cálculo global con una malla refinada. La distribución del error de referencia y la del error estimado se pueden ver en la Figura 9. También en la Figura 9, se muestra la distribución del error estimado usando el estimador de Zienkiewicz y Zhu<sup>1</sup>. Desde

el punto de vista cualitativo las tres distribuciones son similares: en la Figura 9, se puede ver que tanto el estimador que se introduce en este trabajo como el de Zienkiewicz y Zhu proporcionan resultados satisfactorios. Sin embargo, para comparar de una

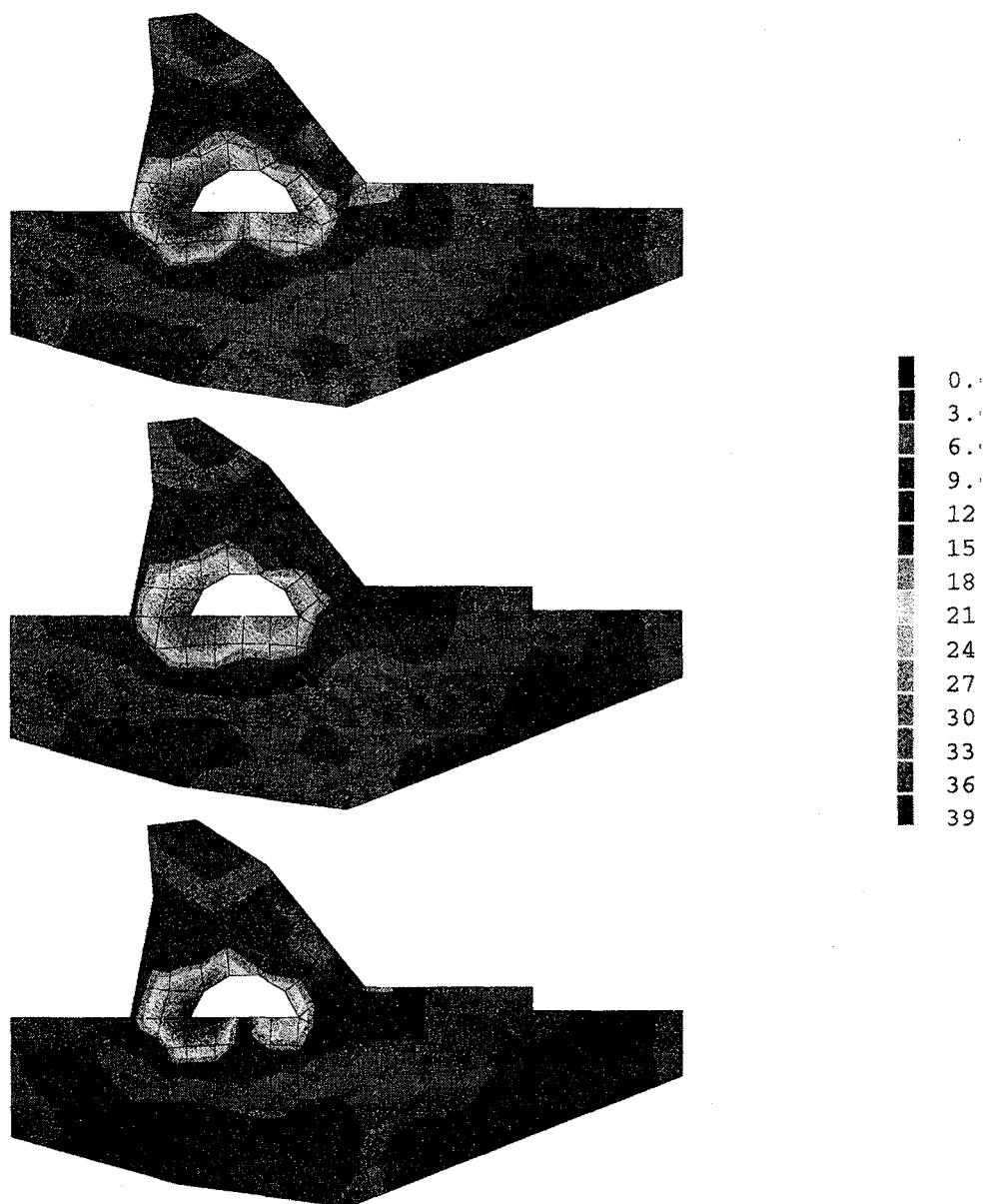


Figura 9. Distribuciones espaciales del error en el problema mecánico: error de referencia (arriba), error estimado con el presente estimador (centro) y error estimado con el estimador Zienkiewicz y Zhu, 1987 (abajo)

manera cuantitativa los resultados de las dos estimas se presentan en la Figura 10 los histogramas, análogos al de la Figura 7, que corresponden a ambas estimas. Se puede apreciar que los valores correspondientes al estimador que aquí se presenta, se concentran en una banda más estrecha. Esto se traduce en que al comparar las distribuciones espaciales del índice de efectividad para el estimador presentado y para el de Zienkiewicz y Zhu, la que corresponde al primero resulta ser más uniforme (Figura 11). De cara a su utilización en un proceso de cálculo adaptable esta uniformidad es muy deseable.

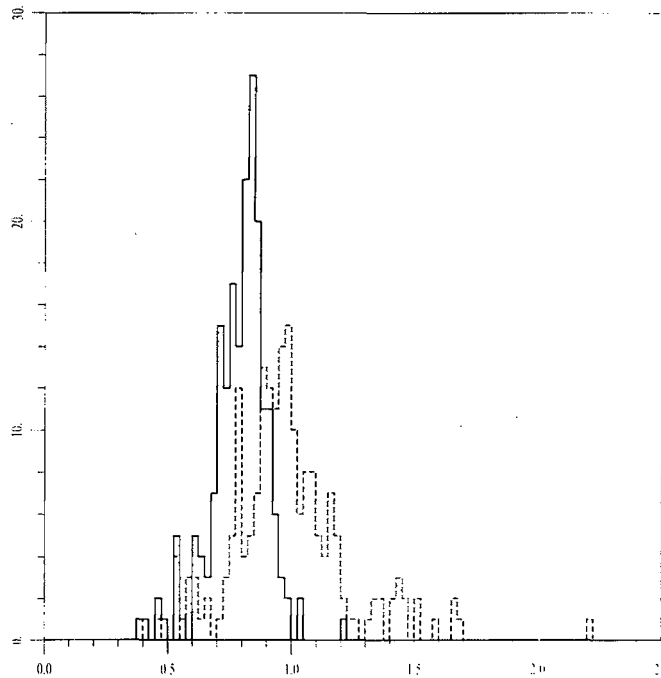


Figura 10. Histograma que representa la distribución de frecuencias de aparición de los índices de efectividad locales en el problema mecánico plano). Se representa la estima con *patches* nodales y submalla elemental de 16 elementos (línea continua) y el estimador de Zienkiewicz y Zhu, 1987 (línea a trazos)

Además, en este ejemplo la estima del error se ha utilizado en un proceso de cálculo adaptable. El objetivo que se plantea es conseguir una solución con un error relativo inferior al 5 % de la norma (de la energía) de la solución. Se sigue el criterio de remallado que introducen Zienkiewicz y Zhu<sup>1</sup> y se utiliza el generador automático de mallas cuadrangulares no estructuradas desarrollado por Sarrate<sup>23</sup>. La sucesión de mallas resultantes se muestra en la Figura 12.

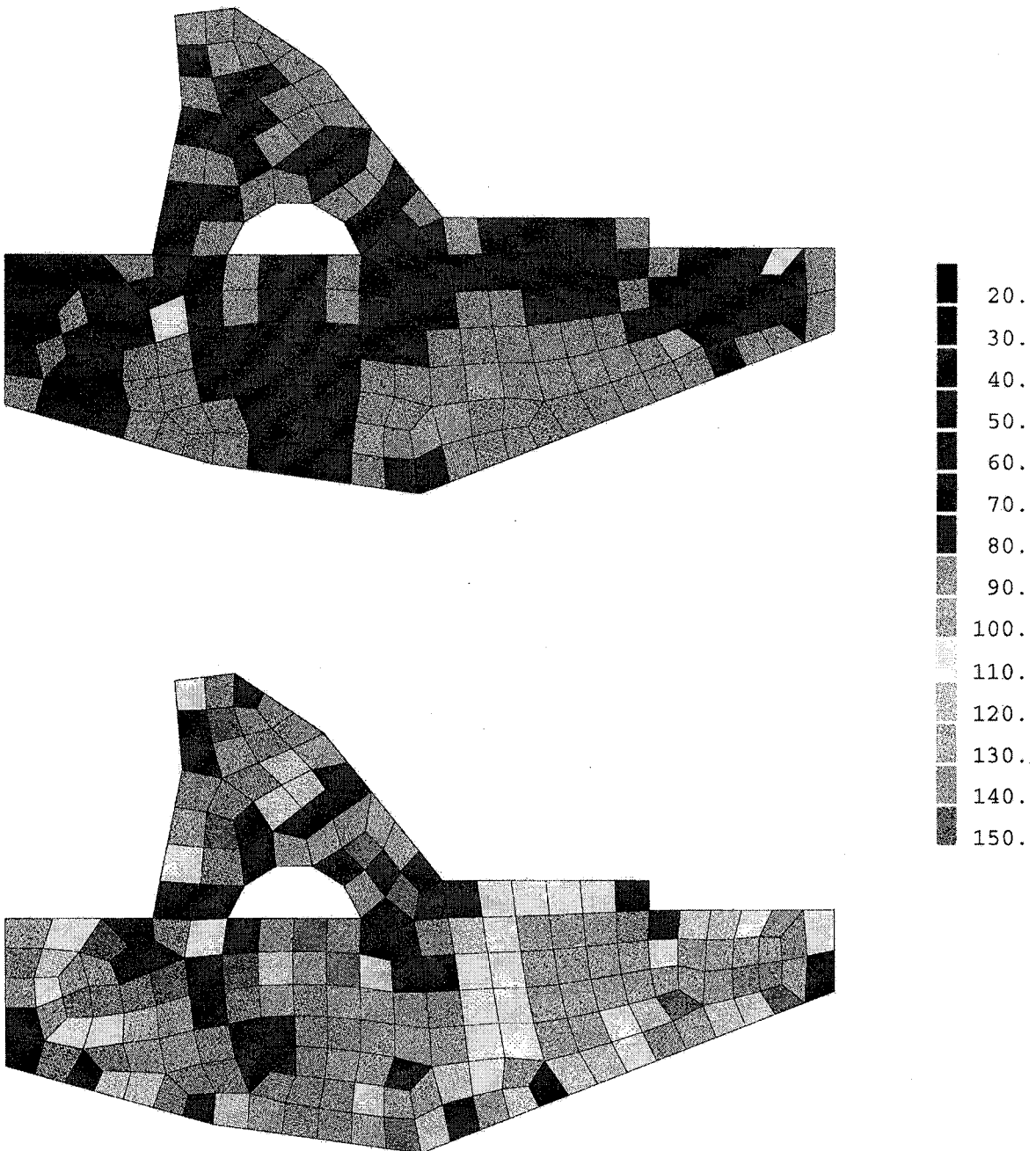


Figura 11. Distribución del índice de efectividad para el problema mecánico: usando el estimador que se presenta aquí (arriba) y el de Zienkiewicz y Zhu, 1987 (abajo)

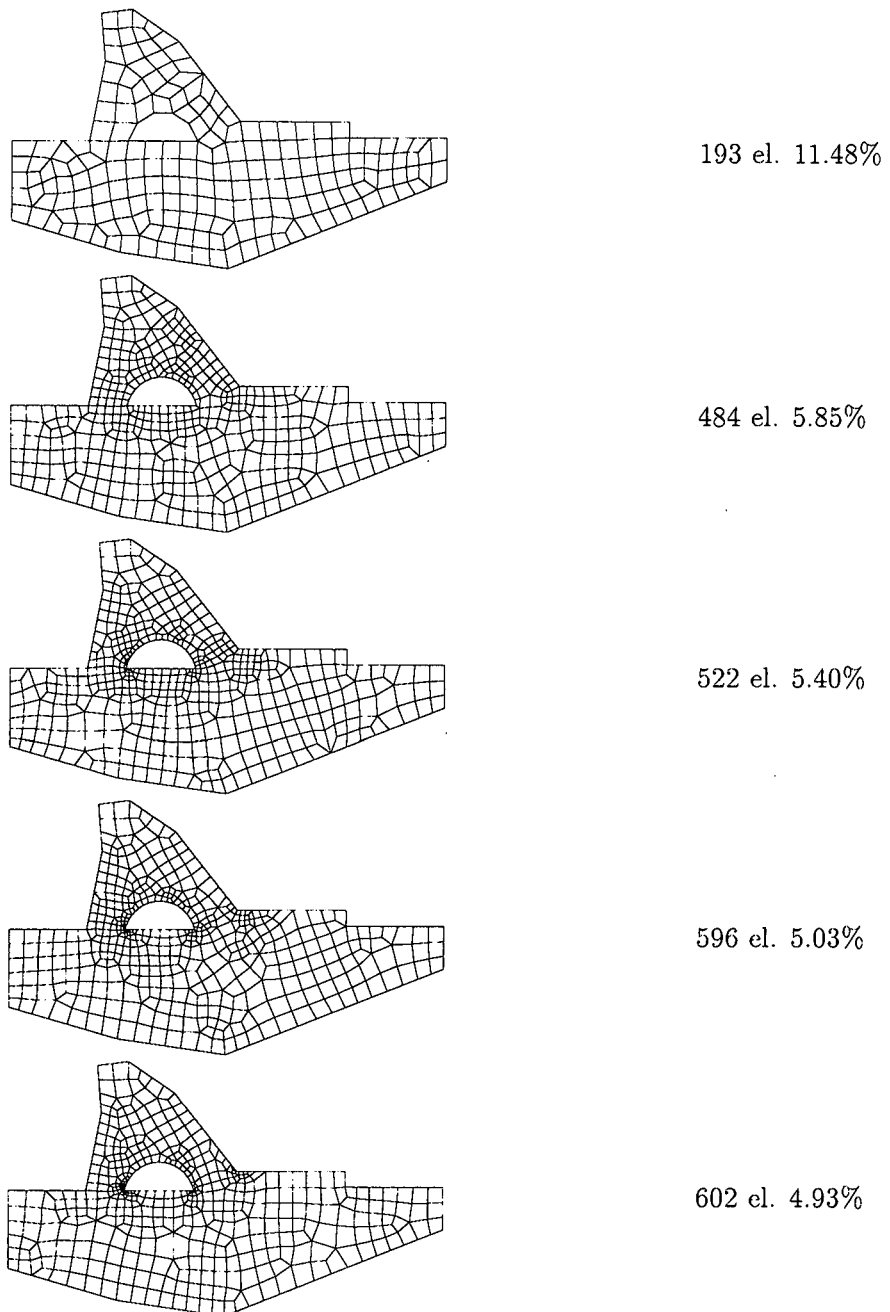


Figura 12. Sucesión de mallas que converge a una que proporciona un error inferior al 5 %



## CONCLUSIONES

Se ha introducido un método de estima del error que supone un enfoque distinto a los estimadores residuales. La idea básica es proyectar el error mediante la resolución de problemas locales sencillos.

En los ejemplos que se estudiaron, el estimador se muestra eficaz, puesto que se obtienen distribuciones de error estimado muy aproximadas a las exactas.

El estimador que se ha presentado proporciona cotas inferiores del error tanto global como local. Las estimas que se han conseguido resultan buenas aproximaciones tanto al valor global del error como a su distribución. Aún tratándose de un estimador residual, el que aquí se presenta no requiere calcular los saltos de flujo a través de los lados y distribuirlos entre los elementos según un proceso de equilibrado. Así, el error que se introduce en estos procesos, uno de los principales inconvenientes de los estimadores residuales, se elimina completamente.

Además, este estimador puede aplicarse a mallas que combinan distintos tipos de elementos. La solución de referencia se aproxima resolviendo problemas locales sujetos a condiciones de contorno de Dirichlet homogéneas. Por lo tanto en la programación del estimador se podrán reciclar las subrutinas existentes en un programa de elementos finitos.

## REFERENCIAS

1. O.C. Zienkiewicz y J.Z. Zhu, "A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **24**, pp. 337-357, (1987).
2. O.C. Zienkiewicz y J.Z. Zhu, "The Superconvergent Patch Recovery (SPR) and Adaptive Finite Element Refinement", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **101**, pp. 207-224, (1992).
3. M. Ainsworth y J.T. Oden, "A Procedure for *a posteriori* Error Estimation for *h-p* Finite Element Methods", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **101**, pp. 73-96, (1992).
4. M. Ainsworth y J.T. Oden, "A Unified Approach to *a posteriori* Error Estimation Using Element Residual Methods", *Numerische Mathematik*, Vol. **65**, pp. 23-50, (1993).
5. M. Ainsworth, J.T. Oden y C.Y. Lee, "Local *a posteriori* Error Estimators for Variational Inequalities", *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Vol. **9**, pp. 23-33, (1992).
6. I. Babuška y C. Rheinboldt, "A *a posteriori* Error Estimates for the Finite Element Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **12**, pp. 1597-1615, (1978).
7. P.L. Baehmann, M.S. Shephard y J.E. Flaherty, "A *a posteriori* Error Estimation for Triangular and Tetrahedral Quadratic Elements Using Interior Residuals", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **34**, pp. 979-996, (1992).
8. R.E. Bank y A. Weiser, "Some *a posteriori* Error Estimators for Elliptic Partial Differential Equations", *Mathematics of Computation*, Vol. **44**, pp. 283-301, (1985).
9. D.W. Kelly, "The Self-Equilibration of Residuals and Complementary *a posteriori* Error Estimates in the Finite Element Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **20**, pp. 1491-1506, (1984).

10. P. Coorevits, P. Ladevèze y J.-P. Pelle, "An Automatic Procedure with a Control of Accuracy for Finite Element Analysis in 2D Elasticity", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **121**, pp. 91-120, (1995).
11. L. Gallimard, P. Ladevèze y J.P. Pelle, "Error Estimation and Adaptivity in Elastoplasticity", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **39**, pp. 189-217, (1996).
12. P. Ladevèze, J.-P. Pelle y Ph. Rougeot, "Error Estimation and Mesh Optimization for Classical Finite Elements", *Engineering Computations*, Vol. **8**, pp. 69-80, (1991).
13. P. Ladevèze, P. Marin y J.-P. Pelle, "Accuracy and Optimal Meshes in Finite Element Computation for Nearly Incompressible Materials", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **94**, pp. 303-315, (1992).
14. H. Ohtsubo y M. Kitamura, "Element by Element *a posteriori* Error Estimation and Improvement of Stress Solutions for Two-Dimensional Elastic Problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **29**, pp. 223-244, (1990).
15. H. Ohtsubo y M. Kitamura, "Element by Element *a posteriori* Error Estimation of the Finite Element Analysis for Three-Dimensional Elastic Problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **33**, pp. 1755-1769, (1992).
16. H. Ohtsubo y M. Kitamura, "Numerical Investigation of Element-Wise *a posteriori* Error Estimation in Two and Three-Dimensional Elastic Problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **34**, pp. 969-977, (1992).
17. R. Verfürth, "A *a posteriori* Error Estimators for the Stokes Equations", *Numerische Mathematik*, Vol. **55**, pp. 309-325, (1989).
18. Verfürth, R., "A *a posteriori* Error Estimators for the Stokes Equations: II Non Conforming Discretizations" *Numerische Mathematik*, Vol. **60**, pp. 235-249, (1991).
19. J.T. Oden, L. Demkowicz, W. Rachowicz y T.A. Westermann, "Toward a Universal *h-p* Adaptive Finite Element Strategy, Part 2. A *a posteriori* Error Estimation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **77**, pp. 113-180, (1989).
20. D. Aubry y B. Tie, "A *a posteriori* Error Analysis and *h* Adaptive Refinement for the FEM in Non Linear Structural Computations", *Proc. European Conf. on New Advances in Computational Structural Mechanics*, Giens, pp. 1-8, (1991).
21. T.J.R. Hughes, "The Finite Element Method", Prentice Hall International, Stanford, (1987).
22. I. Babuška, T. Strouboulis y C.S. Upadhyay, "A Model Study of a *a posteriori* Error Estimators for Linear Elliptic Problems. Error Estimation in the Interior of Patchwise Uniform Grids of Triangles", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **114**, pp. 307-378, (1994).
23. J. Sarrate, "Modelización numérica de la interacción fluido-sólido rígido: desarrollo de algoritmos, generación de mallas y adaptabilidad", Tesis doctoral, E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, (1996).