

Desarrollo de un método semianalítico para el estudio del contacto entre los elementos de fijación y la pieza en procesos de mecanizado

Horacio T. Sánchez, Manuel Estrems, Juan J. Hernández y Félix Faura

Dpto. Ingeniería de Materiales y Fabricación
ETS Ingeniería Industrial
Universidad Politécnica de Cartagena
Doctor Fleming, s/n
30202 Cartagena, España
Tel.: 34-968-32 53 88; Fax: 34-968-32 64 45
e-mail: horacio.sanchez@upct.es

Resumen

Los sistemas de fijación en los procesos de mecanizado desempeñan un importante papel debido a sus funciones de posicionamiento, sujeción y apoyo del material de trabajo. Un inadecuado diseño de estos elementos podría causar daños sub-superficiales por indentación sobre la pieza e imprecisiones en su posicionamiento a medida que se incrementa la fuerza de apriete. Con el objeto de obtener un diseño óptimo de los elementos de fijación se ha desarrollado un método semianalítico, de mayor sencillez de implementación y menor tiempo de cálculo que otros métodos, para la determinación de la distribución de presiones de contacto entre la pieza y los elementos de fijación. A partir de la distribución de presiones, se han obtenido los mapas isotensionales en la subsuperficie de la pieza, que proporcionan la información necesaria para la mejora del diseño de los elementos de fijación.

Palabras clave: *elementos de fijación, contacto mecánico, procesos de mecanizado, método semianalítico, MEF.*

SEMIANALYTICAL METHOD DEVELOPMENT FOR THE STUDY OF CONTACT BETWEEN FIXTURES AND WORKPIECE IN MACHINING PROCESSES

Summary

Owing to their functions of locating, clamping and supporting the workpiece, the fixturing systems play an important role in machining processes. As the clamping forces increase, an inappropriate design of these elements might cause a sub-superficial damage by indentation over the workpiece, as well as positional inaccuracies. A semianalytical method, with an easier implementation and less processing time than others methods, has been developed in order to achieve an optimum design of fixtures for determining the contact pressures distribution between workpiece and fixtures. Once the pressure distribution is known, the contours of equal stresses maps within the subsurface of the workpiece have been obtained, so that provide the necessary information for improving the design of fixtures.

Keywords: *fixtures, contact mechanics, machining processes, semianalytical method, FEM.*

Nomenclatura

a	Semiancho de contacto
a_0	Semiancho de contacto de Hertz
a_k^N	Coeficientes de la función de aproximación
c_i	Coeficientes de Gauss
d_k	Coeficientes de la función de aproximación
m	Variable introducida en el cálculo integral
$p(x)$	Distribución de presiones en deformación plana
$p_{\max}$	Presión máxima
p_0	Presión máxima de Hertz
$p(\rho)$	Distribución de presiones axisimétricas
r	Radio de la región circular de contacto axisimétrica
s	Distancia de actuación de la carga sobre el semiespacio elástico
t	Variable adimensional. Relación entre w y a_0
$\bar{u}_z(x)$	Desplazamiento normal de la superficie de contacto
w	Semiancho del tramo recto del elemento de fijación
x	Variación de la posición en el eje X
x^*	Coordenada del punto de singularidad en el eje X
z	Variación de la posición en el eje Z
C_x	Coordenada X del centro del arco de redondeo
E	Módulo de Young
F, G, H, J, L	Funciones para la evaluación de la distribución de presiones
G	Módulo de cizalladura
P	Presión total
P_0	Carga total de apriete
$Q(f; c)$	Integral de Valores Principales de Cauchy
R	Radio de redondeo del perfil del elemento de fijación
$U_z(\rho)$	Variación de la geometría de la superficie axisimétrica
δ	Desplazamiento de cuerpo
λ	Variable de las funciones F, G y L
ν	Coeficiente de Poisson
ρ	Relación entre el radio r y a
$\sigma_{\max}$	Tensión equivalente máxima de von Mises
σ_0	Tensión equivalente máxima de von Mises para contacto hertziano
$\tau_{\max}$	Tensión cortante máxima
τ_0	Tensión cortante máxima para contacto hertziano

INTRODUCCIÓN

La precisión geométrica de la pieza final obtenida en un proceso de mecanizado depende de los elementos de fijación utilizados, cuyas funciones son las de posicionar, sostener y sujetar la pieza en las máquinas herramienta. La eficacia de los amarres dependerá en gran medida de su diseño y de la correcta elección de la magnitud de la fuerza de apriete necesaria para sujetar la pieza a la mesa de trabajo. En los actuales procesos de mecanizado, debido a las exigencias de productividad, las fuerzas de corte y apriete requeridas son cada vez mayores y, por lo tanto, mayor es la probabilidad de que la geometría del elemento de fijación o de apoyo ejerza un daño sobre la superficie de la pieza, además de que se produzcan imprecisiones en el posicionamiento de la pieza. En cambio, si la fuerza de apriete no es lo suficientemente grande, contribuirá a la aparición de errores geométricos por desplazamiento de la pieza. Como consecuencia de ello, habrá que adoptar una solución de compromiso en aras de satisfacer los requisitos de productividad, no daño e inmovilización.

La forma de abordar el estudio de los elementos de fijación ha tenido varios puntos de vista dependiendo de los parámetros que se hayan escogido para controlar los problemas anteriormente citados. Entre estos parámetros se encuentran el número de elementos de fijación, la geometría de la superficie de contacto fijación-pieza, la distribución de los elementos de contacto y la intensidad de actuación de los elementos de apriete.

Varias han sido las líneas de investigación desarrolladas sobre los sistemas fijación-pieza en los últimos años, pudiéndose clasificar, en función de su base teórica, en modelos de cuerpo rígido, contacto elástico, elementos finitos (MEF) y análisis de tolerancias.

Uno de los trabajos más representativos de los modelos de cuerpo rígido es el de Jeng *et al.*¹, en el que se determinó la fuerza de fijación mínima para mantener la pieza estable dentro del sistema de fijación. En un trabajo posterior, Tzen *et al.*² continuaron utilizando el mismo modelo para analizar la estabilidad de la pieza, añadiendo el estudio del efecto de las fuerzas de fricción.

En relación a los trabajos basados en modelos de contacto elástico, cabe destacar los realizados por Li y Melkote^{3,4,5}, donde se estudiaron la optimización de la distribución de los elementos de apoyo y apriete y la minimización de la fuerza de fijación. Estos trabajos se completaron posteriormente con el modelado de efectos dinámicos⁶ y con el desarrollo de algoritmos genéticos para la resolución de problemas con funciones no lineales y de mayor número de variables de diseño⁷. Además de los trabajos anteriores, cabe citar el trabajo realizado por Tao *et al.*⁸, que presentó un algoritmo para determinar las fuerzas de fijación mínimas en elementos de fijación de tipología plana, teniendo en cuenta efectos dinámicos y de fricción. Con el mismo objetivo, Gui *et al.*⁹ modelaron el contacto normal fijación-pieza mediante muelles lineales. Por otra parte, Hockenberger y De Meter¹⁰ estudiaron el contacto elástico entre pieza y elemento de fijación mediante el uso de funciones semiempíricas llamadas metafunciones.

Dentro de los trabajos basados en el MEF cabe citar el desarrollado por Yeh y Liou¹¹ donde se estudiaron las condiciones del contacto fijación-pieza caracterizadas mediante elementos-muelle virtuales. También son de destacar los trabajos llevados a cabo por De Meter¹², en los que optimizó la distribución de los elementos de apoyo, y los de Huang y Hoshi¹³ y Wang *et al.*¹⁴, en los que se analizó la deformación de la pieza mediante ensayos experimentales y se validaron los mismos mediante el uso del MEF.

Entre los estudios basados en el análisis de tolerancias de los elementos de fijación son especialmente significativos: el de Lin y Zhang¹⁵, en el que se desarrolló un análisis de tolerancias teóricas acumuladas; el de Wang¹⁶, donde se investigó el efecto de las fuentes de error de posicionamiento de la pieza; y el de Estrems *et al.*¹⁷, en el que se llevó a cabo una metodología para la estimación del valor real y la incertidumbre de las dimensiones críticas de la pieza.

El presente trabajo se centra en el desarrollo de un método semianalítico para el estudio de amarres de geometrías de contacto cilíndrica y esférica, que compatibilicen elevadas fuerzas de apriete con tensiones y deformaciones superficiales soportables sin la necesidad de tener que recurrir al MEF. De este modo se dispone de una herramienta de análisis más operativa y flexible para la realización de cálculos rápidos de optimización aplicables a una gran variedad de problemas de contacto mecánico. El método semianalítico desarrollado presenta menor complejidad que otros más generalizados, como el MEF y el Método de los Elementos del Contorno, lo que significa que es capaz de solucionar determinados problemas con una mayor agilidad de cálculo y sin necesidad de recurrir a pre-procesados y mallados previos.

El objetivo que se persigue mediante el desarrollo de este método consiste en alcanzar una mejor distribución de presiones y disminuir de este modo la deformación de la zona de contacto, consiguiendo un mayor equilibrio entre los requisitos de no daño, productividad y calidad. Para ello se modelizará el contacto pieza-apoyo para distintas geometrías de apoyo y apriete con perfil geométrico compuesto por tramos curvos y recto. Los resultados numéricos obtenidos con los métodos implementados se validarán con los analíticos del caso de contacto hertziano obtenidos por Estrems *et al.*¹⁸ y con las simulaciones realizadas por el MEF sobre los casos axisimétrico y de deformación plana estudiados por Hernández *et al.*¹⁹.

A partir de las soluciones semianalíticas se proporcionarán unas correlaciones para la obtención, de modo directo, de la tensión sub-superficial y la presión de contacto máximas, en función del valor adimensionalizado del semiancho del tramo recto del perfil de contacto. El tiempo de cálculo que conlleva la aplicación de estas correlaciones es muy bajo al obtenerse de forma directa los valores de tensión y presión de contacto, representando por lo tanto una eficiente herramienta para el diseño avanzado de la geometría de contacto entre elementos de apoyo y pieza.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En los procesos de mecanizado sobre piezas prismáticas se realizan una gran cantidad de operaciones. Para mejorar las condiciones de estabilidad, los seis grados de libertad de la pieza deben permanecer totalmente restringidos por medio de un sistema de fijación formado tanto por elementos de apoyo como por elementos de apriete (ver Figura 1 donde se representa un esquema típico de sujeción). Se asume que el material de la pieza obedece a un comportamiento linealmente elástico (acero AISI 1040 con módulo de Young de 190×10^9 Pa y coeficiente de Poisson ν de 0,3) y que los elementos de apoyo y de apriete son materiales mucho más rígidos (acero endurecido con módulo de Young de 190×10^{12} Pa y un coeficiente de Poisson ν de 0,39) con la finalidad de evitar pérdida de posicionamiento.

El problema que nos ocupa se corresponde con el de análisis casi-estático donde los elementos de fijación (apoyo y de apriete) ejercen solamente cargas normales compresivas sobre la pieza. Por otro lado, las grandes cargas de apriete con las que se va a analizar el problema de sujeción de piezas y la consiguiente aparición de grandes fuerzas normales en el contacto justifican la nula consideración de los fenómenos de fricción y deslizamiento.

Como ya se ha comentado en el apartado anterior, en el presente artículo se desarrolla un método semianalítico que permite analizar el diseño de la geometría del perfil de los elementos de fijación. El estudio de la geometría del perfil es determinante, debido a la influencia de ésta sobre la distribución de presiones de contacto y sobre el daño que se producirá en la sub-superficie del material de trabajo. Por ello, el presente trabajo se ha centrado sobre dos de los perfiles geométricos más usados, aunque evidentemente no son los únicos posibles. Estos dos perfiles geométricos se describen a continuación:

1. Elemento de fijación de perfil circular (Figura 2a, que se corresponde con el resuelto por la Teoría de Hertz. Esta teoría será utilizada como modelo de validación de los resultados obtenidos por el método semianalítico desarrollado en el presente trabajo.
2. Elemento de fijación de perfil con tramo recto y extremos redondeados (Figura 2b). Para este perfil se aplicará la metodología propuesta variando la longitud del semi-ancho del tramo recto w , siendo comparados los resultados con los obtenidos mediante el MEF.

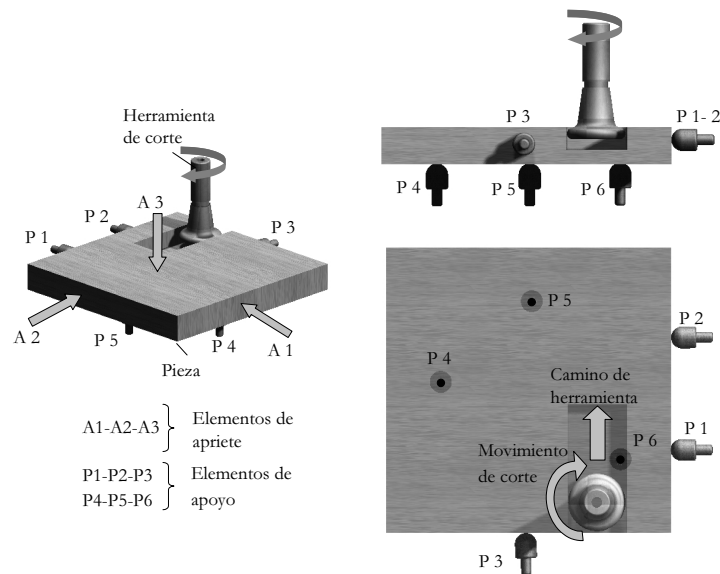


Figura 1. Esquema típico de sujeción de una pieza prismática

Figura 2. Perfiles de los elementos de fijación

Ambos perfiles aparecen tanto en elementos de apoyo de tipología de fijación cilíndrica (Figura 3a) como de tipología esférica (Figura 3b). Los primeros se estudian mediante el método semianalítico aplicable al caso de deformación plana, ya que la zona de contacto se corresponde con una banda ancha infinita cuyo semiancho de contacto a es parte proporcional del de Hertz a_0 . Y los segundos, mediante el método semianalítico bajo las condiciones de contacto axisimétrico, debido a que la zona de contacto es circular de radio igual al semiancho de contacto a y además aparece cargada con tensiones superficiales simétricas respecto del eje Z .

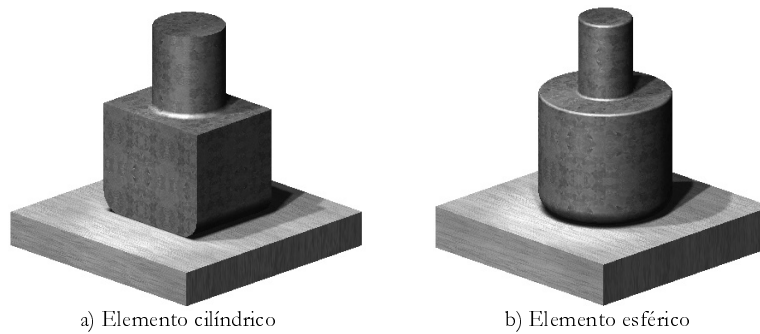


Figura 3. Geometrías de los elementos de fijación

Se han establecido 9 casos de estudio con objeto de realizar un análisis representativo de situaciones posibles de los elementos de fijación. El primero corresponde a un elemento de fijación de perfil circular (caso hertziano, donde $a_0 = 0,0025$ m), utilizado para validar los resultados obtenidos por el método semianalítico; y los siguientes casos (2–9) corresponden al elemento de fijación de tramo recto con extremos redondeados, donde se modifica el valor de w , el cual puede ser debido a un cambio premeditado en el diseño o al desgaste producido en condiciones reales del proceso. Con la finalidad de mantener constante la carga total P_0 , el semiancho de contacto a debe ir aumentando progresivamente al aumentar w .

En la Tabla I aparecen los valores de las distintas variables geométricas para cada uno de los 9 casos estudiados, donde la variable t es una variable adimensional que representa la relación entre los semianchos w y a_0 .

Casos	Radio R (m)	Semiancho w ($\times 10^{-3}$ m)	$t = w/a_0$
1 Hertz	0,1	0	0
2	0,1	0,25	0,1
3	0,1	0,5	0,2
4	0,1	0,75	0,3
5	0,1	1	0,4
6	0,1	1,25	0,5
7	0,1	1,5	0,6
8	0,1	1,75	0,7
9	0,1	2	0,8

Tabla I. Características de los perfiles de contacto analizados

Como consecuencia de la variación de w para cada uno de los casos de la Tabla I se obtendrán distintas distribuciones de la presión de contacto, manteniendo constante la carga total de apriete P_0 , con valores de 1×10^7 N/m para el estudio de la tipología del elemento de fijación cilíndrica y de 43 000 N para el estudio de la tipología del elemento de fijación esférica. El método semianalítico que se va a describir a continuación se ha desarrollado tanto para solucionar problemas de mecánica de contacto bajo condiciones de deformación plana (caso de tipología cilíndrica), como problemas bajo condiciones de comportamiento tensional axisimétrico (caso de tipología esférica).

MÉTODO DESARROLLADO

El método desarrollado se estructura siguiendo la secuencia que se expone a continuación. En primer lugar, se parte de la expresión conocida de distribución de presiones para el contacto mecánico entre dos cuerpos dentro del semiespacio elástico, siendo la formulación diferente dependiendo del elemento de fijación que se esté estudiando (cilíndrico o esférico). Esta expresión es convenientemente tratada para obtener una ecuación general que tenga en cuenta las condiciones de contorno del problema planteado. A continuación, una vez detectados los problemas de singularidad, se propone la resolución de las ecuaciones integrales de la expresión de distribución de presiones mediante la utilización de polinomios de aproximación de Chebyshev. Una vez resueltas las integrales de las expresiones de la distribución de presiones, se aplicará el método de cuadratura gaussiana para obtener el valor de la presión total P que ejerce el elemento de fijación sobre la pieza. Por último, mediante la utilización del método de la secante, se ha determinado el valor del semiancho de contacto a , que depende de la carga de apriete P_0 y de la geometría del elemento de apoyo. Esta estructura se utiliza de forma análoga tanto para el estudio de elementos de tipo cilíndrico (deformación plana), como para elementos de fijación de tipo esférico (comportamiento tensional axisimétrico).

Elemento de fijación de tipo cilíndrico

Distribución de presiones

El estudio del contacto mecánico está basado en el cálculo de la distribución de presiones normales debidas a la indentación de un cuerpo supuestamente rígido (elemento de fijación cilíndrico en el que se apoya el material de trabajo). Para ello se asumen las condiciones de contorno iniciales de clase II²⁰:

- No existe fricción ni deslizamiento entre pieza y elemento de apoyo o apriete.
- Se especifican los desplazamientos normales $\bar{u}_z(x)$ que siguen la geometría del perfil del elemento de apoyo o apriete.

En el problema de mecánica del contacto planteado son conocidos los desplazamientos superficiales $(\bar{u}_x)$ y $(\bar{u}_z)$ y la incógnita $p(x)$ se determina a partir de las ecuaciones acopladas²⁰.

Al aplicar las condiciones de contorno de clase II sobre estas ecuaciones integrales, y teniendo en cuenta la suposición de que no existe fricción, se obtiene la siguiente expresión

$$\int_a^{-a} \frac{p(s)}{x-s} ds = -\frac{\pi E}{2(1-\nu^2)} \bar{u}'_z(x) \quad (1)$$

Dentro de los límites de integración de estas ecuaciones acopladas aparece un punto de singularidad cuando $s = x$, hecho por el que se denominan *ecuaciones integrales singulares*²⁰.

La ecuación (1) es una ecuación de Valores Principales de Cauchy de primera clase y tomando como origen el centro de la región cargada, tiene una solución general de la forma (Söhngen, 1954 o Mikhlin, 1948)²⁰

$$p(x) = \frac{-\frac{\pi E}{2(1-\nu^2)}}{\pi^2 (a^2 - x^2)^{1/2}} \int_{-a}^a \frac{(a^2 - s^2)^{1/2} \bar{u}'_z(x)}{x - s} ds + \frac{C}{\pi^2 (a^2 - x^2)^{1/2}} \quad (2)$$

Si se realiza el cambio de variable $s = am$ y se calcula la constante C aplicando la condición de Boussinesq²⁰, que establece que fuera de un área cerrada de la superficie ($z = 0$) la carga normal $p(x)$ es nula, se obtiene la ecuación integral de distribución de presiones

$$p(x) = \frac{aE^*}{2\pi (a^2 - x^2)^{1/2}} \left[\int_{-1}^1 \frac{(1 - m^2)^{1/2} \bar{u}'_z(m)}{m - \frac{x}{a}} dm - \int_{-1}^1 \frac{(1 - m^2)^{1/2} \bar{u}'_z(m)}{m - 1} dm \right] \quad (3)$$

donde

$$E^* = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \quad (4)$$

La ecuación (3) está expresada en función de la derivada del desplazamiento $\bar{u}'(z)$ y, por lo tanto, depende de la variación de la geometría del perfil del elemento de fijación.

Como ya se comentó en el apartado anterior, las geometrías que se consideran para la superficie del elemento de fijación-apoyo son dos: superficie de perfil circular (Figura 2a) y superficie de perfil circular con tramo recto intermedio (Figura 2b). La primera consiste en el caso más simple y conocido de contacto hertziano con solución analítica conocida. La segunda geometría considerada responde al supuesto donde el perfil del elemento de fijación circular se modifica añadiendo un tramo recto de semiancho w y los extremos aparecen redondeados. Debido a que este tramo plano tiene menor orden de magnitud que el radio R , se puede suponer que la derivada del desplazamiento normal, $\bar{u}'_z(x)$, es continua en todo el área de contacto, para lo cual debe presentar continuidad entre el tramo recto y los curvos de los extremos. De este modo, al ser tangentes el tramo recto y los curvos, se evitan picos en el perfil de tensiones. La expresión para la derivada del desplazamiento $\bar{u}'_z(x)$ es la siguiente

$$\bar{u}'_z(x) = \begin{cases} -\frac{x-C_x}{\sqrt{R^2-(x-C_x)^2}} & x \in [-a, -w] \\ 0 & x \in (-w, w) \\ -\frac{x+C_x}{\sqrt{R^2-(x+C_x)^2}} & x \in [w, a] \end{cases} \quad (5)$$

Obtención numérica de la distribución de presiones

La aplicación de la Teoría del Contacto Mecánico²⁰ presenta importantes dificultades debido a que el desplazamiento en cualquier punto de la superficie de contacto depende de la distribución de presiones, siendo necesario por lo tanto encontrar los valores de la presión en cualquier punto del contacto entre sólidos de un perfil geométrico dado a través de la resolución de ecuaciones integrales. El cálculo de la ecuación integral (2) se complica al aparecer un punto de singularidad en $s = x^*$. Este problema se puede solucionar si se utiliza un método numérico adecuado para el caso estudiado, que a la vez presente un coste computacional reducido. Para abordar este problema se ha utilizado un método de integración basado en la cuadratura automática para los Valores Principales de Cauchy.

El método de Hasegawa y Torii²¹ es aplicable a las integrales de Valores Principales de Cauchy, que aparecen en la ecuación (3) y que se corresponden con el siguiente tipo

$$Q(f; c) = \int_{-1}^1 \frac{f(m)}{m - c} dm; \quad -1 < c < 1 \quad (6)$$

Una vez se ha eliminado la singularidad, el proceso de cuadratura automática comienza aproximando la función $f(m)$ mediante suma de polinomios de Chebyshev $T_k(m)$, cuyos coeficientes se calculan usando la transformada rápida de Fourier. De esta forma, el cálculo de c en (a, b) se realiza de una forma eficiente con el mismo número de evaluaciones de la función y con un error estimado independiente del valor de c para funciones continuas. De este modo e integrando término a término, se obtiene la siguiente fórmula de integración

$$Q(f; c) \approx Q_N(f; c) = 2 \sum_{k=0}^{N/2-1} 'd_{2k} / (1 - 4k^2) + f(c) \log \left(\frac{1-c}{1+c} \right) \quad (7)$$

donde ' indica que el primer término del sumatorio está dividido por dos. Los coeficientes d_k se calculan usando la siguiente relación recurrente

$$d_{k+1} - 2cd_k + d_{k-1} = 2a_k^N, \quad k = N, N-1, \dots, 1 \quad (8)$$

en dirección hacia atrás con los valores iniciales de $d_N = d_{N+1} = 0$, donde se toma $a_N^N/2$ en lugar de a_N^N .

Los coeficientes a_k^N de los polinomios de Chebyshev se calculan mediante la siguiente fórmula

$$a_k^N = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^N '' f(\cos \pi j/N) \cos(\pi k j/N), \quad 0 \leq k \leq N \quad (9)$$

El método de cuadratura de Hasegawa²¹ ha sido validado con ejemplos de integrales para distintos valores de c donde los errores son del orden de 10^{-10} a 10^{-14} .

Cuadratura gaussiana

A partir de la distribución de presiones calculada en el apartado anterior se determina el valor de la presión total P que ejerce el elemento de fijación sobre la pieza; para ello se utilizará la cuadratura gaussiana.

Para la determinación de la presión total P a partir de la función de distribución de presiones $p(x)$ se han utilizado 40 puntos de integración x_i

$$P = \int_a^b p(x) dx \simeq \sum_{i=1}^n c_i p(x_i) \quad (10)$$

Método de la secante

Para la resolución de la ecuación (3) es necesario conocer el valor de a y la derivada del desplazamiento de la superficie del elemento de fijación $\bar{u}'_z(x)$. Dado el valor de la carga de apriete P_0 (que viene impuesta por las condiciones de fabricación), el semiancho de contacto a (que depende de P_0 y de la geometría del elemento de apoyo) se calcula mediante el método de la secante ajustando la siguiente expresión

$$\int_{-a}^a p(x, a) dx - P_0 = 0 \quad (11)$$

Elemento de fijación de tipo esférico

Distribución de presiones

En el estudio del contacto entre elementos de fijación de tipo esférico y la pieza, el semiespacio elástico está cargado según una región circular de tensiones superficiales, que son rotacionalmente simétricas respecto al eje normal a la superficie. De este modo, si no se consideran los efectos de fricción y se utiliza la formulación propuesta por Noble y Spence²⁰, la distribución de presiones viene determinada del siguiente modo

$$p(\rho) = \frac{-4G}{\pi\rho} \frac{d}{d\rho} \int_{\rho}^1 \frac{\lambda L(\lambda)}{(\lambda^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}} d\lambda \quad (12)$$

donde la función $L(\lambda)$ depende del desplazamiento normal de la superficie de contacto $\bar{u}_z(\rho)$ y del semiancho de contacto a

$$L(\lambda) = \frac{1}{2(1-\nu)a} \frac{d}{d\lambda} \int_0^{\lambda} \frac{\rho \bar{u}_z(\rho) d\rho}{(\lambda^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (13)$$

El desplazamiento normal del semiespacio elástico $\bar{u}_z(\rho)$, como se puede observar en la Figura 4, se compone de un desplazamiento de cuerpo δ y de la función $U_z(\rho)$, que representa la geometría de la superficie. $U_z(\rho)$ toma los siguientes valores dependiendo de la zona de la geometría que se esté evaluando

Figura 4. Variación de la geometría del perfil axisimétrico

$$U_z(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho \leq t \frac{a_0}{a} \\ -\frac{(\rho - t \frac{a_0}{a})^2 a^2}{2R} & \text{si } \rho > t \frac{a_0}{a} \end{cases} \quad (14)$$

A los términos integrales de las ecuaciones (12) y (13) se les denominará a partir de ahora como $H(\rho)$ y $F(\lambda)$, respectivamente, siendo sus expresiones las siguientes

$$H(\rho) = 2(1-\nu)a \int_{\rho}^1 \frac{\lambda L(\lambda)}{(\lambda^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}} d\lambda \quad (15)$$

$$F(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{\rho \bar{u}_z(\rho) d\rho}{(\lambda^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (16)$$

Si se introduce el valor de la variación del desplazamiento normal del semiespacio elástico $\bar{u}_z(\rho)$, expresado en función del desplazamiento de cuerpo δ y de la geometría rectificadora U_z , dentro de la ecuación (16)

$$F(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{\rho \bar{u}_z(\rho)}{(\lambda^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}} d\rho = \delta \int_0^\lambda \frac{\rho d\rho}{(\lambda^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}} + \int_0^\lambda \frac{\rho U_z}{(\lambda^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}} d\rho = -\delta\lambda + G(\lambda) \quad (17)$$

El término integral $G(\lambda)$ de la ecuación anterior presenta una singularidad que se elimina realizando el cambio de variable $\rho = (\lambda - m^2)$.

A continuación, si se desarrolla la ecuación (15), se observa que es dependiente de la derivada de $G(\lambda)$, de modo que

$$H(\rho) = -\delta \int_\rho^1 \frac{\lambda d\lambda}{(\lambda^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}} + \int_\rho^1 \frac{\lambda G'(\lambda)}{(\lambda^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}} d\lambda = \delta \sqrt{1 - \rho^2} + J(\rho) \quad (18)$$

Al igual que la función $G(\lambda)$, la función $J(\rho)$ presenta una singularidad que se elimina mediante el cambio de variable $\lambda = (\rho + m^2)$.

La presión se obtendrá a partir de la derivada de la función $H(\rho)$, que sustituida en la ecuación (12) dará lugar a la siguiente expresión para la distribución de presiones

$$p(\rho) = \frac{-2G}{\pi(1-\nu)a} \left(\frac{-\delta}{\sqrt{1-\rho^2}} + \frac{J'(\rho)}{\rho} \right) \quad (19)$$

Además, $p(\rho)$ debe cumplir la condición de Boussinesq, por lo tanto, en la ecuación (19) se debe establecer que $p(\rho \rightarrow 1) = 0$

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{\delta \rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = J'(1) \quad (20)$$

De la ecuación anterior se deduce que $\delta = G'(1)$, de modo que la presión quedará definida finalmente de la siguiente forma

$$p(\rho) = \frac{-2G}{\pi(1-\nu)a} \left(\frac{-G'(1)}{\sqrt{1-\rho^2}} + \frac{J'(\rho)}{\rho} \right) \quad (21)$$

Obtención numérica de la distribución de presiones

Como se puede observar en la ecuación (21), la presión depende de la determinación de las funciones $G'(\lambda)$ y $J'(\rho)$, por lo que es necesario seguir el siguiente proceso de cálculo: en primer lugar, se realiza la integración de la función $G(\lambda)$ en los ceros del polinomio de Chebyshev (de grado 20), mediante el cálculo de su integral gaussiana; a partir de estos valores se obtienen los coeficientes correspondientes a la factorización, con los que se determina la función aproximada de la derivada $G'(\lambda)$; por último, y de igual modo, se obtiene $J(\rho)$ y su derivada $J'(\rho)$.

Al realizar dos veces la integración y derivación aparecen imprecisiones debidas a la acumulación de errores en la resolución numérica. Por lo tanto, para evitar estos errores y que las operaciones resulten computacionalmente rentables, se ha afinado mucho más en el primer proceso de integración (utilizándose 96 puntos de integración para la cuadratura gaussiana de $G(\lambda)$), mientras que el resto de cuadraturas se han realizado con 10 puntos de integración.

Cuadratura gaussiana

Al igual que para el estudio del elemento de tipo cilíndrico, la presión total se determina aplicando cuadratura gaussiana en la distribución de presiones, siendo calculada del siguiente modo

$$P = \int_0^a p(r) 2\pi r dr \simeq \sum_{i=1}^n c_i p(r_i) \quad (22)$$

donde $p(r) = p(\rho a)$.

Método de la secante

Para resolver la ecuación (12) es necesario conocer el semiancho de contacto a , así como la variación de geometría de la superficie U_z . Debido a que la carga de apriete P_0 viene predeterminada por las condiciones de fabricación, el semiancho de contacto a se calcula a partir de ésta mediante el método de la secante, de modo que

$$\int_0^a 2\pi r p(r, a) dr - P_0 = 0 \quad (23)$$

VALIDACIÓN DEL MÉTODO

Como se ha comentado anteriormente, previamente a la obtención de los resultados de distribución de presiones para los casos de perfil de tramos rectos, se ha considerado adecuado utilizar la teoría de Hertz y el MEF aplicados al caso del perfil circular (caso 1 de la Tabla I) como modelos de validación del método semianalítico desarrollado en el presente artículo. En las Figuras 5 y 6 se representan los resultados de distribución de presiones, para el estudio bajo las hipótesis anteriores, respecto a la variación de la zona de contacto, según se realice mediante el método analítico de Hertz, el método semianalítico (implementando las ecuaciones con el programa Matlab 5.3.) y el MEF (este último utilizando los resultados obtenidos en Ansys 5.4.¹⁸).

Figura 5. Distribución de presiones para perfil circular. Tipología cilíndrica

Como se puede apreciar, el grado de exactitud con el que se aproximan las tres curvas en las dos gráficas es bastante alto, siendo el error, referido a la carga en cada punto, del orden del 1 % y del 0,5 %, para deformación plana y estado tensional axisimétrico, respectivamente. Esto permite considerar el método propuesto en el presente trabajo como suficientemente preciso para la resolución de problemas de cálculo de la distribución de presiones para las geometrías de contacto de elementos de fijación analizadas.

Figura 6. Distribución de presiones para perfil circular. Tipología esférica

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Una vez que se ha utilizado tanto la teoría de Hertz como el MEF para resolver el caso más sencillo de contacto y de este modo validar el modelo desarrollado, se ha resuelto el resto de casos mediante el método semianalítico donde varía el semiancho del tramo recto w , tanto para el estudio de deformación plana (aplicado a elementos de fijación cilíndricos) como para el estudio axisimétrico (aplicado a elementos de fijación esféricos). Los resultados de distribución de presiones se contrastarán con los obtenidos mediante el MEF para comprobar el grado de exactitud de los cálculos realizados. Posteriormente se determinarán los mapas iso-tensionales en la sub-superficie de la pieza estudiándose el efecto del daño por indentación ejercido por el elemento de fijación sobre la pieza. Conocidos los mapas iso-tensionales y la distribución de presiones para cada tipo de elemento de fijación y para cada caso estudiado de la modificación del perfil, se podrán determinar las correlaciones que expresen la variación de tensión y presión máximas con respecto a $t = w/a_0$. Estas correlaciones serán de utilidad para la realización de un diseño optimizado de los elementos de fijación con el objeto de que éstos ejerzan el menor daño superficial posible sobre la pieza. Finalmente, a modo de resumen, se compararán los métodos utilizados (analítico de Hertz, semianalítico, MEF y correlaciones) para analizar el problema de contacto planteado.

Distribución de presiones

- Elemento cilíndrico: En la Figura 7 se representa la variable adimensionalizada $p(x)/p_0$ (presión de contacto en cada punto dividida por la máxima presión alcanzada en el método de Hertz, que es $p_0 = 2,575 \times 10^9 \text{ N/m}^2$) frente a x/a_0 , para cada uno de los casos expuestos en la Tabla I. Se observa que la mayor presión de contacto sobre un punto se alcanza para el caso 1 (Hertz) justo en la mitad del semiancho de contacto ($x = 0$), mientras que para los demás casos (2-9) el máximo se produce en dos puntos, siendo su valor cada vez menor a medida que aumenta el valor del tramo recto w . También se puede observar el desplazamiento de la posición de los valores máximos hacia los extremos de la zona de contacto según aumenta el ancho de contacto. En la Figura 8 se muestran los resultados de distribución de presión adimensional para el mismo planteamiento de la Figura 7, pero resolviendo mediante el MEF, donde la pieza se malló con 9760 elementos de cuatro nodos y 9963 nodos, el elemento de apoyo con 520 elementos de cuatro nodos y 594 nodos; y además se utilizaron 4875 elementos de contacto del tipo nodo a superficie. Con el propósito

de comparar ambos resultados obtenidos se representan de manera conjunta las dos gráficas de las Figuras 7 y 8 en la Figura 9, donde se observa que no hay apenas diferencias significativas, aunque se puede apreciar un mayor error (del orden del 5 %) en los casos donde la carga máxima es menor. El tiempo de computación correspondiente a los casos de elemento cilíndrico resueltos por el MEF fue aproximadamente de 1,5 horas en un servidor de cálculo Silicon Graphics modelo Origin 200 y de 30 segundos en la resolución por el método semianalítico en un ordenador Pentium III a 800 MHz.

Figura 7. Distribución de presiones obtenida por el método semianalítico para perfil cilíndrico con tramos rectos

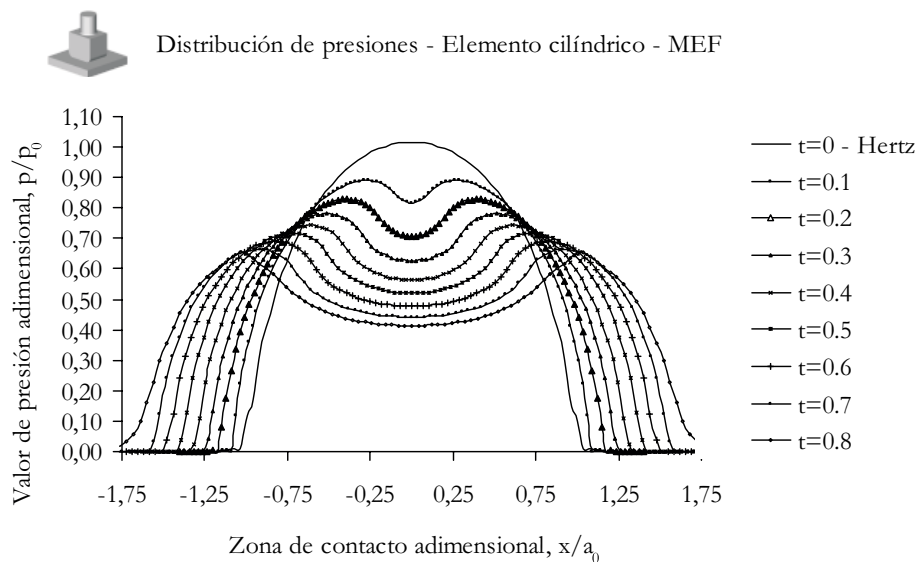


Figura 8. Distribución de presiones obtenida por el MEF para perfil cilíndrico con tramos rectos

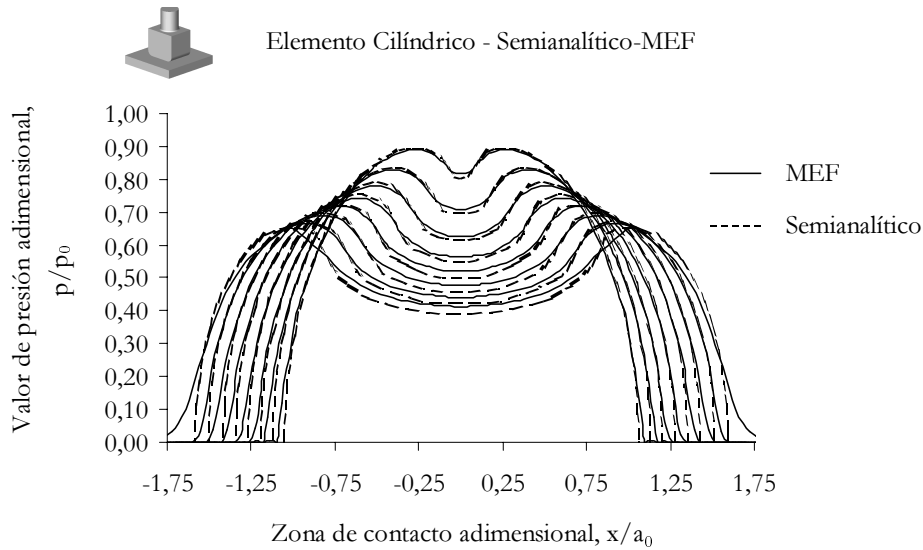


Figura 9. Distribución de presiones obtenida por el método semianalítico y por MEF para perfil cilíndrico con tramos rectos.

- **Elemento esférico:** En la gráfica de la Figura 10 se observa la distribución de presiones adimensionalizada (p/p_0) frente a x/a_0 , donde la presión de contacto máxima de Hertz alcanza el valor $p_0 = 3,4 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ y el valor para el semiancho de contacto hertziano a_0 sigue siendo 0,0025 m. Al igual que para el estudio de deformación plana, se observa la misma tendencia al aumentar w , es decir, crecimiento del semiancho de contacto a para mantener constante la carga de fijación y mejor reparto de la distribución de presiones, lo que implica que el máximo daño local por indentación se atenúe considerablemente al mismo tiempo que se desplaza hacia los extremos.

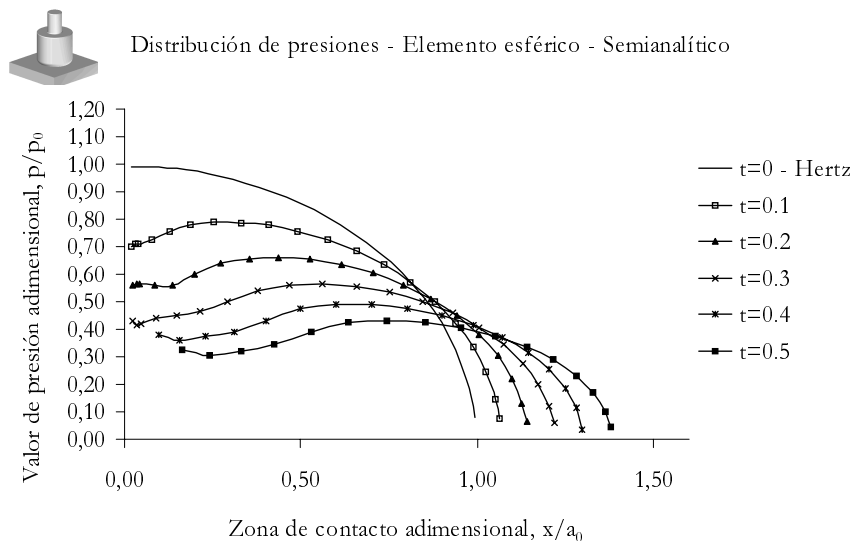


Figura 10. Distribución de presiones obtenida por el método semianalítico para perfil esférico con tramos rectos

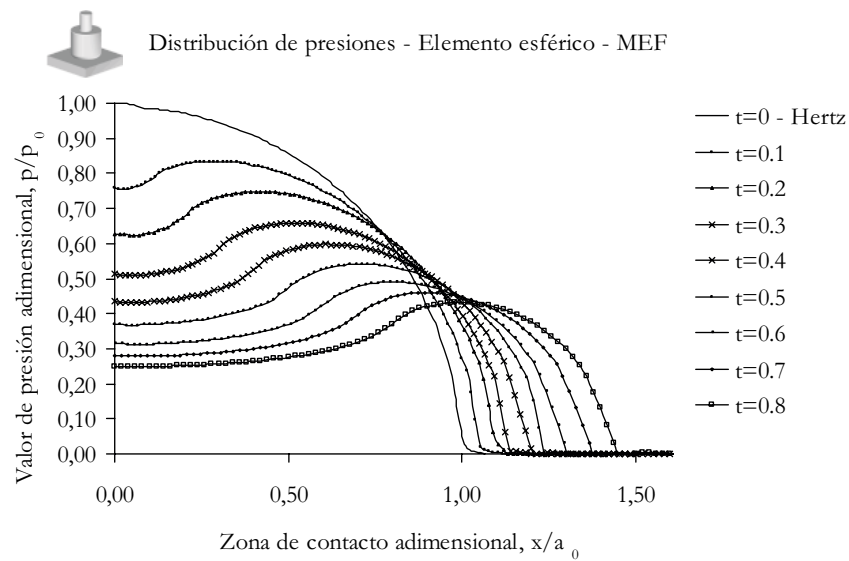


Figura 11. Distribución de presiones obtenida por el MEF para perfil esférico con tramos rectos

Figura 12. Distribución de presiones obtenida por el método semianalítico y por el MEF para perfil esférico con tramos rectos

Al igual que lo realizado para el estudio de deformación plana se han comparado los resultados de distribución de presión obtenidos mediante el método semianalítico con los resueltos mediante el MEF, donde la pieza se malló con 3824 elementos de cuatro nodos y 3951 nodos, el elemento de apoyo con 256 elementos de cuatro nodos y 297 nodos; y además se utilizaron 1216 elementos de contacto del tipo nodo a superficie. De este modo se representa en la Figura 11 la distribución de presiones obtenida mediante el MEF. En la Figura 12 se comparan estos resultados con los

obtenidos con el método semianalítico, observándose que si bien la tendencia de las curvas sigue un mismo patrón, la aproximación entre las mismas es menos buena que la obtenida mediante el estudio de deformación plana, estando el error comprendido entre el 10 % y el 15 % dependiendo de qué zona de la curva se esté evaluando. El tiempo de computación correspondiente a los casos de elemento esférico resueltos por el MEF fue aproximadamente de 5 horas en un servidor de cálculo Silicon Graphics modelo Origin 200 y de 45 segundos en la resolución por el método semianalítico en un ordenador Pentium III a 800 MHz.

Mapas tensionales

- Elemento cilíndrico: Para obtener el mapa tensional en la sub-superficie debido al contacto entre la herramienta y la pieza se ha utilizado el algoritmo desarrollado por Estrems *et al.*²², basado en la discretización de una distribución de presiones como superposición de distribuciones triangulares. De este modo, en la Figura 13 se observan los mapas tensionales correspondientes a los casos 1, 4, 6 y 9. Se observa que la tensión cortante máxima se representa según curvas isotensionales que varían en posición y magnitud con respecto a w . Así, para el caso 1 (contacto hertziano) aparece un único máximo posicionado en el centro de la gráfica y para el resto de los casos (4, 6 y 9) se observa que aparecen dos máximos, cuyo valor es cada vez menor y con mayor tendencia a aproximarse hacia los extremos, conforme aumenta el valor de w . El porcentaje de reducción de la tensión cortante máxima entre los casos 1 y 9 es de un 40 %.

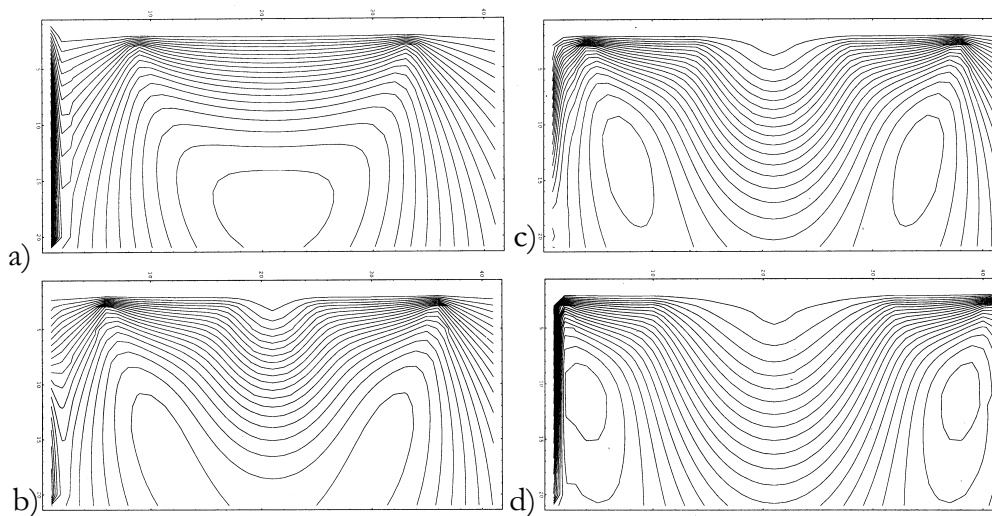


Figura 13. Mapas tensionales para elemento cilíndrico: a) Caso 1, b) Caso 4, c) Caso 6, d) Caso 9

- Elemento esférico: En la Figura 14, obtenida en esta ocasión a partir de los resultados de las simulaciones realizadas con Ansys 5.4., se muestra la variación de la tensión equivalente de von Mises para el caso 1 (Hertz) y el caso 9 ($w = 2 \times 10^{-3}$ m). Se puede apreciar el mismo patrón de comportamiento que para el estudio de deformación plana del elemento de fijación-apoyo cilíndrico, es decir, al aumentar w , la máxima tensión disminuye su valor (hasta un 60 %) desde el caso hertziano (más desfavorable) hasta el caso que presenta mayor valor de tramo desgastado, desplazándose también hacia los extremos de la región de contacto.

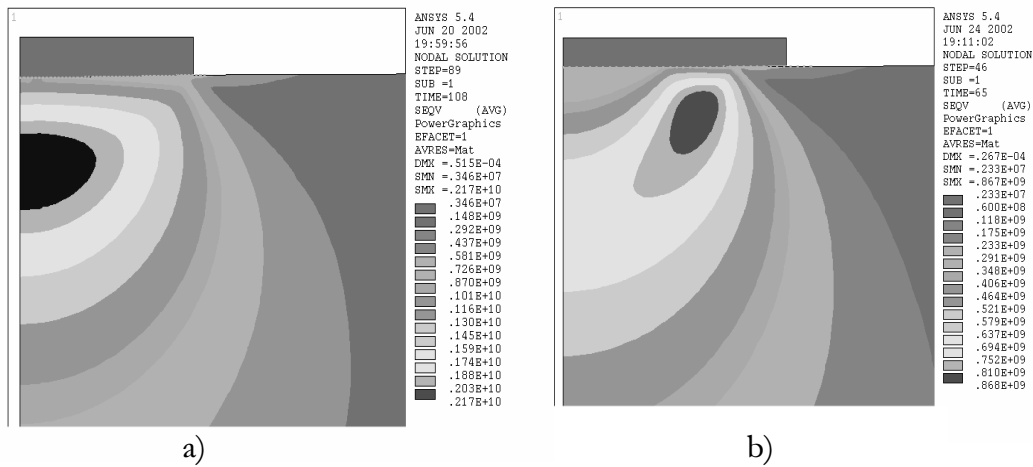


Figura 14. Mapas tensionales para elemento esférico: a) Caso 1-Hertz, b) Caso 9

Correlaciones para diseño óptimo

- Elemento cilíndrico: En la Figura 15 se puede observar la variación de los valores adimensionales (respecto del caso hertziano) de la tensión cortante máxima y de la presión máxima en función de la variación de $t = w/a_0$. Tanto la presión como la tensión cortante máximas correspondientes al caso más favorable ($t = 0,8$) presentan una reducción de un 35 % y un 40 %, respectivamente, en relación al caso más desfavorable (hertziano). A partir de los valores representados en las curvas de la Figura 16, y en función de t , se obtienen mediante correlación, las siguientes expresiones para la presión y la tensión cortante máximas, respectivamente

$$\frac{p_{\max}}{p_0} = -0,8361t^3 + 1,4834t^2 - 1,0927t + 1 \quad (24)$$

$$\frac{\tau_{\max}}{\tau_0} = -0,8117t^3 + 1,6282t^2 - 1,2827t + 1 \quad (25)$$

- Elemento esférico: En la Figura 16 se puede observar la variación de los valores adimensionales (respecto del caso hertziano) de la tensión máxima equivalente de von Mises y de la presión máxima en función de la variación de $t = w/a_0$. Se puede observar que tanto la presión como la tensión correspondientes al caso 9 se reducen en un 60 % con respecto al caso hertziano. Al igual que se realizó para el elemento cilíndrico, a partir de las curvas de la Figura 16, y en función de t , se obtienen mediante correlación las siguientes expresiones para la presión y la tensión de von Mises, respectivamente

$$\frac{p_{\max}}{p_0} = -1,0637t^3 + 1,9898t^2 - 1,6269t + 1 \quad (26)$$

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0} = -0,5601t^3 + 1,3835t^2 - 1,4963t + 1 \quad (27)$$

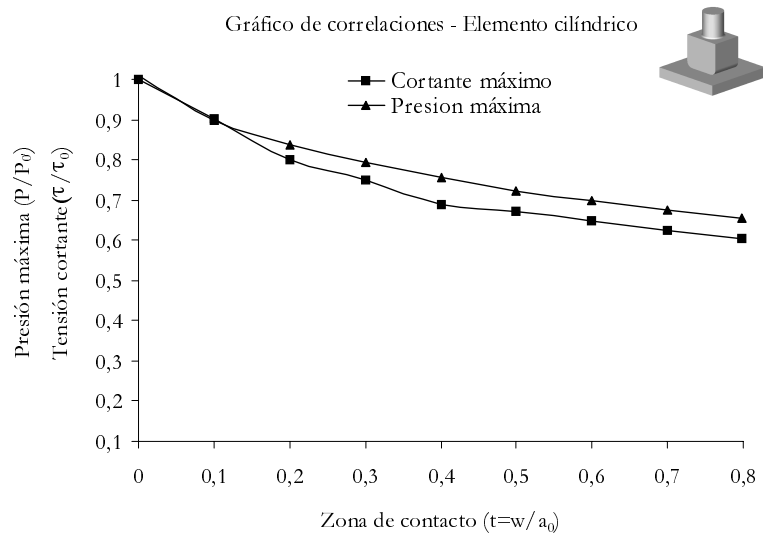


Figura 15. Variaciones del cortante máximo y de la presión máxima

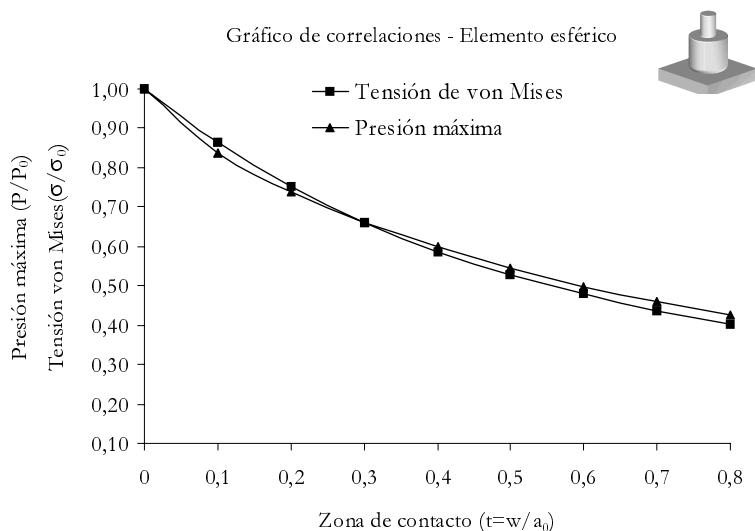


Figura 16. Variación de la tensión de von Mises y de la presión máximas

Comparación de los métodos estudiados

En la Tabla II aparecen clasificados los métodos que pueden ser utilizados para alcanzar las soluciones de los problemas de contacto planteados. Como resumen, cabe mencionar que el MEF es el método de mayor aplicación a problemas de contacto en general, sin embargo, tiene como desventajas el tiempo de preproceso y un mayor tiempo de cálculo, debido a las no linealidades de los elementos de contacto utilizados y la posible aparición de puntos de singularidad por problemas de enlace entre los puntos de contacto con las superficies objetivo. El método de Hertz es el menos complejo y el de menor tiempo

de cálculo al tratarse de un método directo, sin embargo, sólo es aplicable a casos muy concretos (caso de perfil circular). El método semianalítico, aún siendo aplicable bajo determinadas suposiciones iniciales, dándose todas en la sujeción de piezas prismáticas en máquinas herramientas (p.ej.: condición de Boussinesq, deformación plana y estado tensional axisimétrico, condiciones de no fricción, etc.), presenta un menor tiempo de cálculo al tener menor número de iteraciones y menor complejidad en comparación con el MEF y además no precisa de preproceso. Una vez que se han obtenido los resultados mediante la aplicación del método semianalítico, se pueden deducir unas correlaciones para expresar de forma directa la variación de las presiones y tensiones en función del valor adimensionalizado del semiancho del tramo recto (w).

Tabla II. Comparación entre los distintos métodos estudiados

CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha desarrollado un método de relativa sencillez de implementación y agilidad de cálculo, capaz de resolver determinados problemas de contacto entre elementos de fijación y pieza en máquinas herramienta. En comparación con el MEF, este método semianalítico (aplicable bajo las hipótesis expuestas) no precisa de preprocesado y mallado previos y además presenta un menor tiempo de cálculo debido al menor número de iteraciones y complejidad.

A la vista de los resultados de distribución de presión y los mapas tensionales obtenidos para los diferentes casos y elementos de fijación-apoyo estudiados, se establecen las siguientes conclusiones:

- A medida que se modifica el perfil geométrico del elemento de fijación mediante la inclusión de tramos rectos de mayor longitud, se obtienen valores de presión máxima de contacto y tensiones menores con mejor reparto entre los puntos, en los que se subdivide el ancho de contacto, originando un menor daño por indentación sobre la superficie de la pieza mecanizada.
- Modificando el valor del tramo recto, también se produce un desplazamiento de la presión máxima superficial y de las tensiones sub-superficiales máximas hacia los extremos de la zona de contacto. Además, las tensiones sub-superficiales máximas tienden a aparecer cada vez más cerca de la superficie de contacto.

REFERENCIAS

- 1 S.L. Jeng, L.G. Chen y W.H. Chieng, "Analysis of minimum clamping force", *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Vol. **35**, N° 9, pp. 1213–1224, (1995).
- 2 J.J. Tzen, S.L. Jeng y W.H. Chieng, "Analysis of two-dimensional fixture clamping with friction", *JSME International Journal, Series C*, Vol. **42**, N° 2, pp. 451–460, (1999).
- 3 B. Li y S.N. Melkote, "An elastic contact model for the prediction of workpiece-fixture contact forces in clamping", *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, Vol. **121**, N° 3, pp. 485–493, (1999).
- 4 B. Li y S.N. Melkote, "Improved workpiece location accuracy through fixture layout optimization", *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Vol. **39**, N° 6, pp. 871–883, (1999).
- 5 B. Li y S.N. Melkote, "Fixture clamping force optimisation and its impact on workpiece location accuracy", *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. **17**, N° 2, pp. 104–113, (2001).
- 6 B. Li y S.N. Melkote, "Optimal Fixture design accounting for the effect of workpiece dynamics", *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. **18**, N° 10, pp. 701–707, (2001).
- 7 K. Kulankara, S. Satyanarayana y S.N. Melkote, "Iterative fixture layout and clamping force optimization using the genetic algorithm", *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, Vol. **124**, N° 1, pp. 119–125, (2002).
- 8 Z.J. Tao, A.S. Kumar y A.Y.C. Nee, "Automatic generation of dynamic clamping forces for machining fixtures", *International Journal of Production Research*, Vol. **37**, N° 12, pp. 2755–2776, (1999).

- 9 X.W. Gui, J.Y.H. Fuh y A.Y.C. Nee, "Modelling of frictional elastic fixture-workpiece system for improving location accuracy", *IIE Transactions*, Vol. **28**, N° 10, pp. 821–827, (1996).
- 10 M.J. Hockenberger y E.C. De Meter, "The application of meta functions to the quasi-static analysis of workpiece displacement within a machining fixture", *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, Vol. **118**, N° 3, pp. 325–331, (1996).
- 11 J.H. Yeh y F.W. Liou, "Contact condition modelling for machining fixture setup processes", *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Vol. **39**, N° 5, pp. 787–803, (1999).
- 12 E.C. De Meter, "Fast support layout optimization", *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Vol. **38**, N° 10, 11, pp. 1221–1239, (1998).
- 13 Y. Huang y T. Hoshi, "Improvement of flatness error in milling plate-shaped workpiece by application of side-clamping force", *Precision Engineering*, Vol. **24**, N° 4, pp. 364–370, (2000).
- 14 Y.F. Wang, Y.S. Wong y J.Y.H. Fuh, "Off-line modelling and planning of optimal clamping forces for an intelligent fixturing system", *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Vol. **39**, N° 2, pp. 253–271, (1999).
- 15 E.E. Lin y H.C. Zhang, "Theoretical tolerance stackup analysis based on tolerance zone analysis", *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. **17**, N° 4, pp. 257–262, (2001).
- 16 M.Y. Wang, "Tolerance analysis for fixture layout design", *Assembly Automation*, Vol. **22**, N° 2, pp. 153–162, (2002).
- 17 M. Estrems, H.T. Sánchez y F. Faura, "Influence of fixtures on dimensional accuracy in machining processes", *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. **21**, N° 5, pp. 384–390, (2003).
- 18 M. Estrems, J.J. Hernández y F. Faura, "Análisis numérico de geometrías de contacto entre pieza y apoyo en máquinas herramienta", *Métodos Numéricos en Ingeniería y Ciencias Aplicadas, Proc. II Congreso CIMNE-CIMAT*, Guanajuato (México), Vol. **2**, pp. 1141–1150, (2002).
- 19 J.J. Hernández, P. Franco, M. Estrems y F. Faura, "Análisis del comportamiento de diversas geometrías de contacto entre piezas y apoyos en máquinas-herramienta mediante elementos finitos", *XV Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica*, Cádiz (España), (2002).
- 20 Johnson, K. L., "Contact Mechanics", *Cambridge University Press*, Cambridge, (1985).
- 21 T. Hasegawa y T. Torii, "An automatic quadrature for Cauchy Principal Values Integrals", *Mathematics of Computation*, Vol. **56**, N° 194, pp. 741–754, (1991).
- 22 M. Estrems, F. Faura y J.I. Pedrero, "Desarrollo de un método numérico para la determinación del mapa tensional en la zona de contacto entre dos cuerpos", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **16**, N° 4, pp. 455–470, (2000).