

Análisis de puentes mediante el método de la banda finita

Por Eugenio Oñate
Ing. de Caminos, M. Sc.

RESUMEN

Se presenta el análisis general de estructuras formadas por un ensamblaje de placas y vigas y con sección transversal constante, mediante una combinación de elementos finitos transversalmente y series de Fourier en dirección longitudinal.

Se ha tenido en cuenta en el análisis el efecto de la deformación transversal debida al esfuerzo cortante, que puede ser importante si los espesores de los componentes que forman la estructura son considerables.

Debido a la generalidad del análisis se evita la dificultad de tener que establecer hipótesis simplificadoras para idealizar la estructura, a veces lejos de la realidad, como ocurre en el análisis clásico mediante las teorías de Guyon-Massonet o la de la losa ortótropa. Asimismo permite el estudio de estructuras complejas, como puentes con sección transversal tipo cajón, etc., resultando ser uno de los métodos más versátiles y económicos para el análisis de puentes de los más diversos tipos.

Al final del estudio se analizan diversas estructuras tipo puente, comparándose los resultados obtenidos aplicando el método de la banda finita, el método de los elementos finitos y el método del prisma finito.

LAMINAS PLEGADAS

1.1. Introducción

El análisis de estructuras formadas por un ensamblaje de placas y vigas ha sido el centro de atención de numerosos investigadores, pudiendo encontrarse una excelente recopilación sobre este tema en una publicación del ASCE (1) y en un artículo de Samartín y Martínez (2). El método elástico desarrollado por Goldberg y Leve (3) y más tarde programado y aplicado por De Fries y Scordelis (4) ha sido bastante popular y muy usado como "método de rigideces" dando excelentes resultados. Sin embargo, tiene la desventaja de ser muy complejo y difícil de aplicar a estructuras plegadas ortótropas y en análisis dinámico. Scordelis, Chu y Dudnik (5), (7), lo han usado para estudiar puentes con sección transversal en cajón simplemente apoyados.

Usando la teoría de láminas junto con elementos finitos se han desarrollado diversos programas para el análisis de puentes (6). La estructura se divide en un ensamblaje de elementos laminares como se muestra en la figura 1(a). Debido a que se necesitan muchos elementos, el número de ecuaciones que hay que resolver es grande y, por consiguiente, el método de los elementos finitos es caro en tiempo de computación.

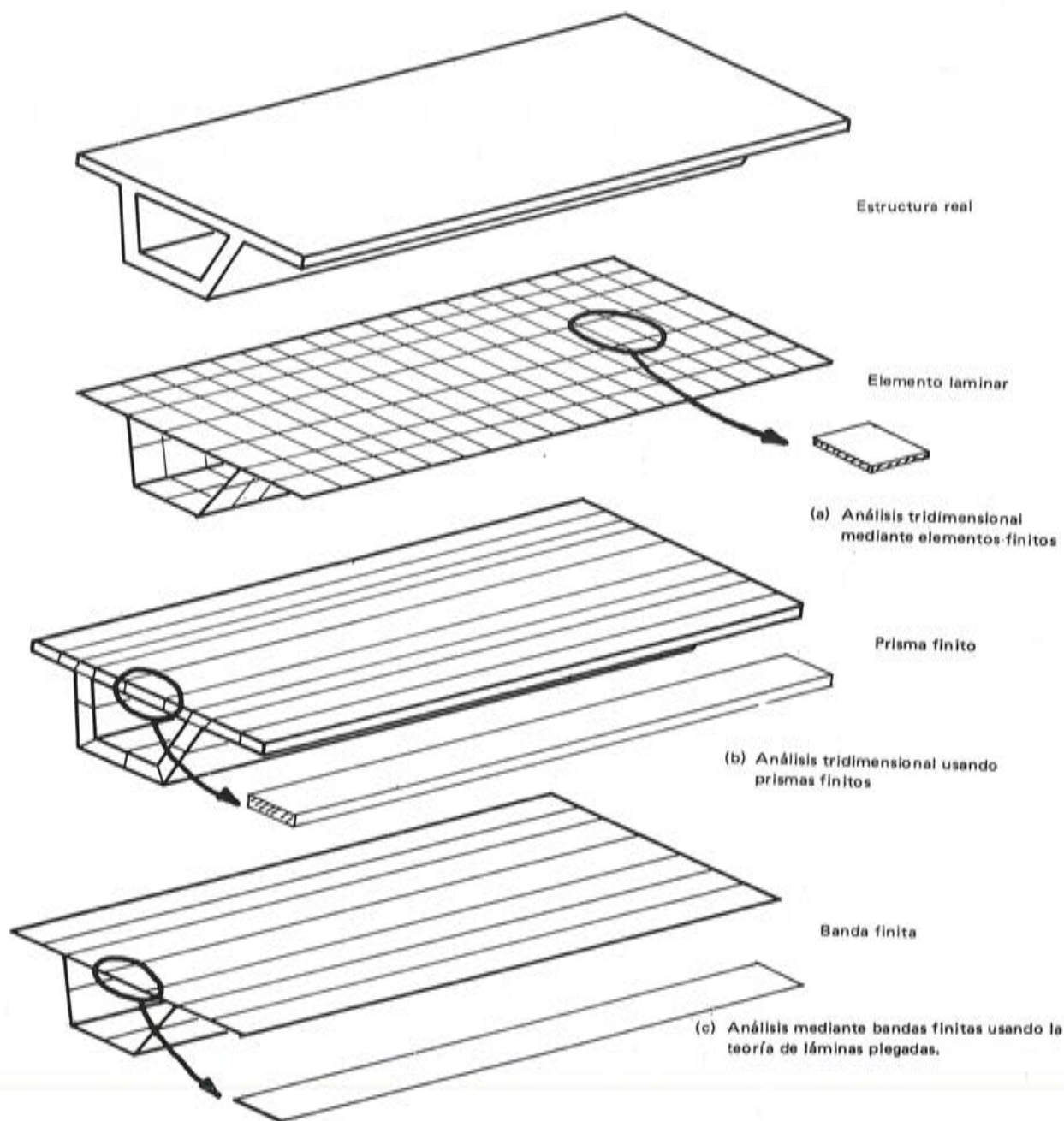
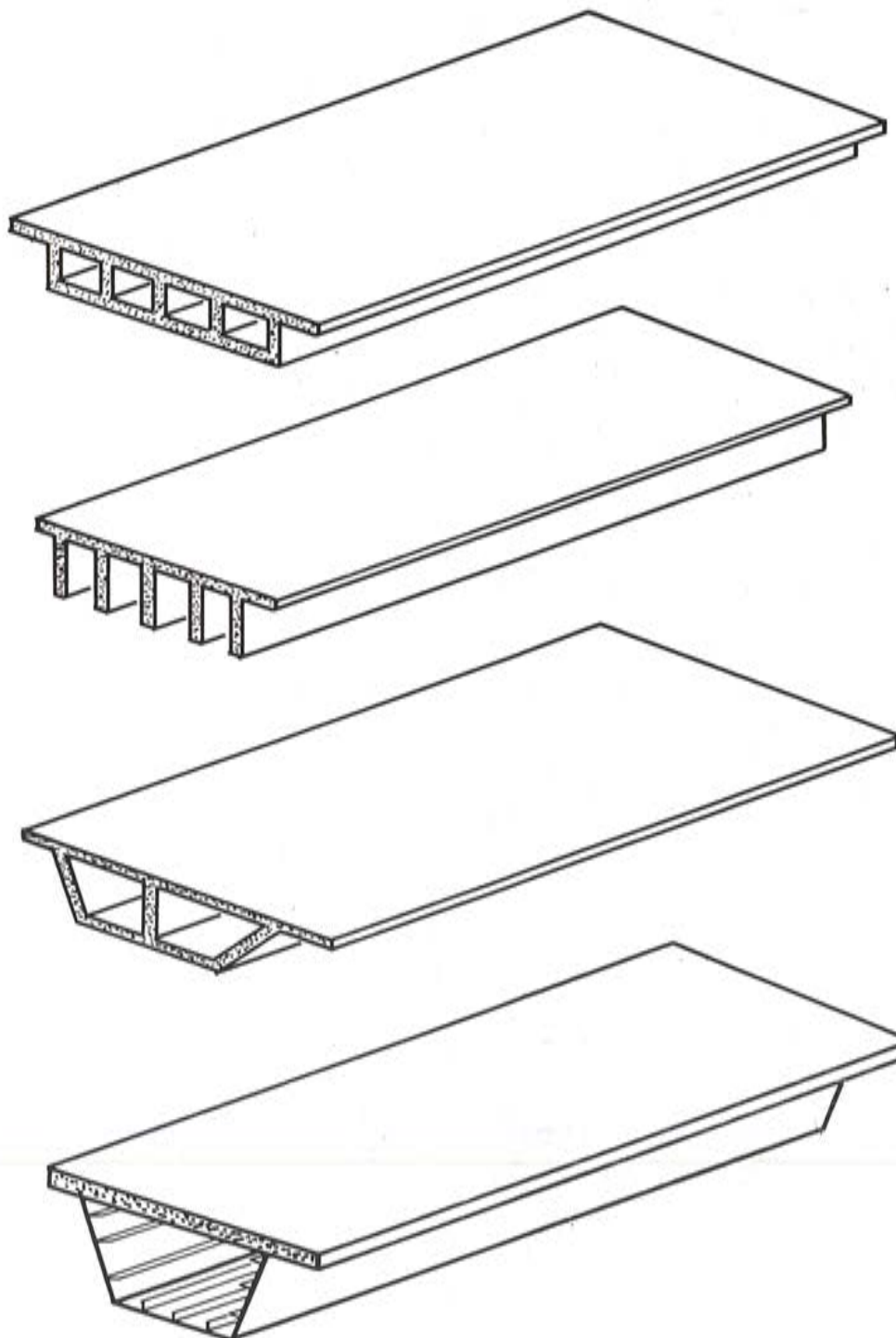


Fig. 1.—Diferentes métodos para analizar estructuras celulares

Si una estructura plegada tiene una sección transversal constante y extremos apoyados, se puede efectuar un análisis mucho más económico, considerando la estructura como un ensamblaje de prismas o de bandas. Usando prismas (Método del prisma finito) (10) la estructura es analizada como un sólido tridimensional a partir de las ecuaciones generales

de la elasticidad para el sólido en tres dimensiones. Si en vez de prismas consideramos bandas, tenemos el Método de la banda finita, basado en la teoría de láminas plegadas. En ambos casos, los desplazamientos dentro de cada prisma o banda se expresan en función de desplazamientos nodales, funciones polinómicas en dirección transversal y desarrollos de Fourier longitudinalmente. En general, el método de la banda finita es mucho más económico al necesitar menos nudos para definir la sección transversal; y en él concentraremos nuestro estudio.

El método de la banda finita fue introducido originalmente por Cheung (8) (9), para analizar puentes del tipo de los que se muestran en la figura 2 y cualquier otra estructura formada por un ensamblaje de placas y vigas. Sin embargo Cheung, en su análisis, no considera



Nota: No se muestran los rigidizadores en las secciones extremas

Fig. 2.—Diferentes tipos de puentes que se pueden analizar con el método de la banda finita

los efectos de la deformación transversal debida al esfuerzo cortante, que puede ser de gran importancia si los componentes que forman la estructura tienen un espesor considerable, como ocurre en el caso de puentes en cajón de hormigón pre o postensado. Con objeto de hacer el estudio lo más general posible, se ha tenido en cuenta dicha deformación; siendo válido el procedimiento cualquiera que sea el espesor de los componentes de la estructura.

1.2. Teoría general de láminas plegadas

Expondremos brevemente las bases de la teoría seguida en el análisis.

Seguiremos las hipótesis de Mindlin para la flexión de placas:

- a) Los desplazamientos perpendiculares al plano medio de la placa son pequeños.
- b) Las líneas originalmente perpendiculares al plano medio de la placa, se mantienen rectas después de la deformación, pero no necesariamente normales al plano medio.
- c) Las tensiones en la dirección perpendicular al plano medio de la placa son cero, independientemente del tipo de carga.

Según esto, el campo de desplazamientos totales de la lámina se puede expresar como:

$$\begin{aligned}\bar{u}(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \theta_x(x, y) \\ \bar{v}(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \theta_y(x, y) \\ \bar{\omega}(x, y, z) &= \omega(x, y)\end{aligned}\quad [1]$$

en donde: $\begin{cases} u_0(x, y) \\ v_0(x, y) \end{cases}$ son los desplazamientos en el plano, y θ_x, θ_y se pueden considerar como el valor medio de las rotaciones.

Debido a la hipótesis b) se produce cierta distorsión en la sección y hemos de efectuar una corrección para permitir una distribución no uniforme del esfuerzo cortante. En la figura 3 el ángulo ϕ denota la deformación media debida al cortante, teniendo que, para ambas direcciones x e y (véase figura 3):

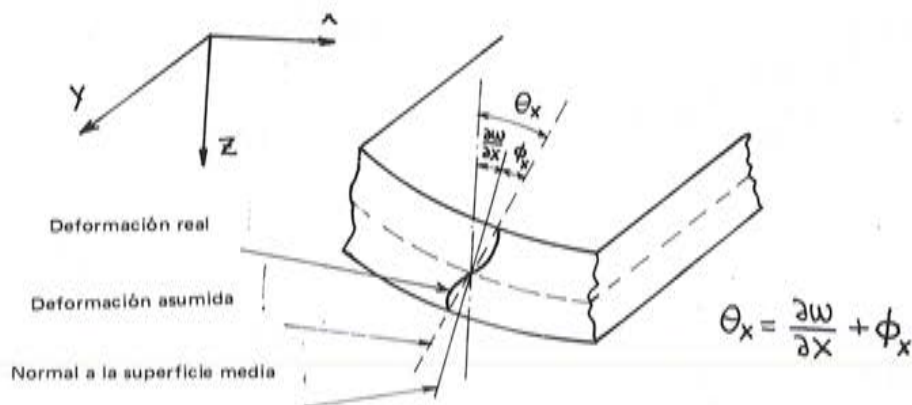


Fig. 3.—Teoría de Mindlin para flexión de placas

$$\begin{aligned}\theta_x &= \frac{\partial \omega}{\partial x} + \phi_x \\ \theta_y &= \frac{\partial \omega}{\partial y} + \phi_y\end{aligned}\quad [2]$$

Seguindo la hipótesis c) $\sigma_z = 0$ y usando las relaciones generales de la elasticidad entre tensiones y deformaciones se obtiene la siguiente expresión:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{e}} \quad [3]$$

donde para materiales ortótropos:

$$\begin{aligned} C_{13} &= C_{23} = C_{45} = 0 \\ C_{11} &= E'_x & C_{22} &= E'_y \\ C_{12} &= \nu_y E'_x & C_{33} &= G_{xy} \\ C_{44} &= G_{xz} & C_{55} &= G_{yz} \end{aligned} \quad [4]$$

$$y \quad (E'_x, E'_y) = \frac{1}{1 - \nu_x \nu_y} (E_x, E_y)$$

Sustituyendo en el vector de deformaciones $\underline{\underline{e}}$ las expresiones de los desplazamientos obtenemos:

$$\underline{\underline{e}} = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \\ \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \omega}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial \omega}{\partial y} - \theta_y \end{pmatrix} = \underline{\underline{\bar{e}}}_m + \underline{\underline{\bar{e}}}_b \quad [5]$$

La expresión para la energía total de la lámina es:

$$W = \frac{1}{2} \iiint_u [\underline{\underline{e}}]^T \underline{\underline{C}} \underline{\underline{e}} dv - \iiint_v [\underline{\underline{P}}]^T \underline{\underline{\delta}} dv - \iint_s [\underline{\underline{S}}]^T \underline{\underline{\delta}} ds - [\underline{\underline{F}}]^T \underline{\underline{\delta}} \quad [6]$$

siendo $\underline{\underline{\delta}}$ el vector de desplazamientos de la estructura.

En esta expresión la primera integral representa la energía de deformación y los términos 2, 3 y 4 representan el trabajo efectuado por las fuerzas de volumen, superficie y puntuales, respectivamente.

Considerando solo la energía de deformación de la lámina podemos escribir:

$$\begin{aligned}
 ED &= \frac{1}{2} \iiint_V [\underline{\epsilon}]^T \underline{C} \underline{\epsilon} \, dv = \frac{1}{2} \iiint_V (\underline{\bar{\epsilon}}_m + \underline{\bar{\epsilon}}_b)^T \underline{C} (\underline{\bar{\epsilon}}_m + \underline{\bar{\epsilon}}_b) \, dv = \\
 &= \iiint_V [\underline{\bar{\epsilon}}_m]^T \underline{C} \underline{\bar{\epsilon}}_m \, dv + \iiint_V [\underline{\bar{\epsilon}}_b]^T \underline{C} \underline{\bar{\epsilon}}_b \, dv + \iiint_V [\underline{\bar{\epsilon}}_m]^T \underline{C} \underline{\bar{\epsilon}}_m \, dv + \\
 &\quad + \iiint_V [\underline{\bar{\epsilon}}_b]^T \underline{C} \underline{\bar{\epsilon}}_b \, dv
 \end{aligned} \tag{7}$$

Efectuando las integrales anteriores se obtiene que:

$$\begin{aligned}
 &\iiint_V [\underline{\bar{\epsilon}}_b]^T \underline{C} \underline{\bar{\epsilon}}_m \, dv = 0 \\
 &\iiint_V [\underline{\bar{\epsilon}}_m]^T \underline{C} \underline{\bar{\epsilon}}_b \, dv = 0 \\
 \text{y} \quad &\iiint_V [\underline{\bar{\epsilon}}_m]^T \underline{C} \underline{\bar{\epsilon}}_m \, dv = \iiint_V [\underline{\epsilon}_m]^T \underline{D}_m \underline{\epsilon}_m \, dv
 \end{aligned} \tag{8}$$

donde:

$$\underline{\epsilon}_m = \begin{pmatrix} \partial u_0 / \partial x \\ \partial v_0 / \partial y \\ \partial u_0 / \partial y + \partial v_0 / \partial x \end{pmatrix} \tag{9}$$

es el vector de deformaciones en el plano y

$$\underline{D}_m = t \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} \tag{10}$$

siendo t el espesor del elemento.

Procediendo de la misma manera se obtiene:

$$\iiint_V [\underline{\bar{\epsilon}}_b]^T \underline{C} \underline{\bar{\epsilon}}_b \, dv = \iiint_V [\underline{\epsilon}_b]^T \underline{D}_b \underline{\epsilon}_b \, dv \tag{11}$$

donde:

$$\underline{\epsilon}_b = \begin{Bmatrix} -\partial\theta_x/\partial x \\ -\partial\theta_y/\partial y \\ -(\partial\theta_x/\partial y + \partial\theta_y/\partial x) \\ -(\theta_x - \partial\omega/\partial x) \\ -(\theta_y - \partial\omega/\partial y) \end{Bmatrix} \quad [12]$$

es el vector de deformaciones en la flexión; y para materiales ortótropos:

$$\underline{D}_b = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} \end{bmatrix} \quad [13]$$

donde:

$$\begin{aligned} (D_{11}, D_{12}, D_{22}, D_{33}) &= (E'_x, \nu_y E'_x, E'_y, G_{xy}) t^{3/12} \\ (D_{44}, D_{55}) &= k^2 t (G_{xz}, G_{yz}) \\ (E'_x, E'_y) &= (E_x, E_y) \frac{1}{1 - \nu_x \nu_y} \end{aligned} \quad [14]$$

Siendo k un coeficiente para incluir los efectos de distorsión en la sección; en nuestro caso hemos tomado $k = 5/6$.

Con esto se puede reescribir la energía de deformación como:

$$ED = \frac{1}{2} \iiint_V [\underline{\epsilon}_m]^T \underline{D}_m \underline{\epsilon}_m dv + \frac{1}{2} \iiint_V [\underline{\epsilon}_b]^T \underline{D}_b \underline{\epsilon}_b dv \quad [15]$$

Vemos que los términos debidos a las fuerzas en el plano y a la flexión, actúan independientemente.

En vez de trabajar en función de las tensiones, operaremos en función de las tensiones resultantes definidas como:

$$\underline{g}^R = [N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y]^T = [\underline{g}_m^R, \underline{g}_b^R]^T \quad [16]$$

donde:

$$\underline{g}_m^R = [N_x, N_y, N_{xy}]^T = \int_{-t/2}^{+t/2} [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T dz$$

$$\underline{\sigma}_b^R = \begin{cases} [M_x, M_y, M_{xy}]^T = \int_{-t/2}^{+t/2} [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T z \, dz \\ [Q_x, Q_y]^T = \int_{-t/2}^{+t/2} [\tau_{xy}, \tau_{xz}]^T dz \end{cases} \quad [17]$$

y observando que:

$$\begin{aligned} \int_{-t/2}^{+t/2} [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T dz &= \underline{D}_m \underline{\epsilon}_m \\ \int_{-t/2}^{+t/2} [(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) z, \tau_{xy}, \tau_{xz}]^T dz &= \underline{D}_b \underline{\epsilon}_b \end{aligned} \quad [18]$$

tenemos que:

$$\underline{\sigma}^R = [\underline{\sigma}_m^R, \underline{\sigma}_b^R]^T = [\underline{D}_m \underline{\epsilon}_m, \underline{D}_b \underline{\epsilon}_b]^T = \begin{bmatrix} \underline{D}_m & 0 \\ 0 & \underline{D}_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\epsilon}_m \\ \underline{\epsilon}_b \end{Bmatrix} \quad [19]$$

ó:

$$\underline{\sigma}^R = \underline{\bar{D}} \underline{\bar{\epsilon}} \quad [20]$$

Por consiguiente, tras sustituir [15] en [7] se obtiene, para la energía potencial total:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \iiint_v [\underline{\epsilon}_m]^T \underline{D}_m \underline{\epsilon}_m \, dv + \frac{1}{2} \iiint_v [\underline{\epsilon}_b]^T \underline{D}_b \underline{\epsilon}_b \, dv - \\ &- \iiint_v [\underline{P}]^T \underline{\delta} \, dv - \iint_s [\underline{S}]^T \underline{\delta} \, ds - [\underline{F}]^T \underline{\delta} \end{aligned} \quad [21]$$

y usando [19] y [20]:

$$W = \frac{1}{2} \iiint_v [\underline{\bar{\epsilon}}]^T \underline{\bar{D}} \underline{\bar{\epsilon}} \, dv - \iiint_v [\underline{P}]^T \underline{\delta} \, dv - \iint_s [\underline{S}]^T \underline{\delta} \, ds - [\underline{F}]^T \underline{\delta} \quad [22]$$

1.3. Análisis semianalítico mediante el método de la banda finita

Se divide la estructura en bandas longitudinales del tipo de la que se muestra en la figura 4.

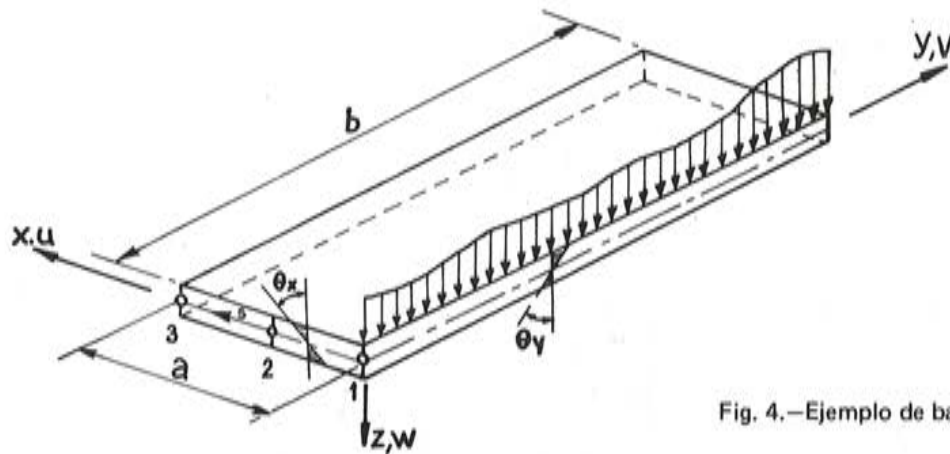


Fig. 4.—Ejemplo de banda finita

Usando simples funciones polinómicas en la dirección transversal y desarrollos de Fourier en dirección longitudinal, los desplazamientos de un punto cualquiera se pueden expresar en función de los corrimientos nodales como:

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n N_i u_i^{\ell} \sin \left(\frac{\ell \pi y}{b} \right) \\
 v &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n N_i v_i^{\ell} \cos \left(\frac{\ell \pi y}{b} \right) \\
 w &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n N_i w_i^{\ell} \sin \left(\frac{\ell \pi y}{b} \right) \\
 \theta_x &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n N_i \theta_{xi}^{\ell} \sin \left(\frac{\ell \pi y}{b} \right) \\
 \theta_y &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n N_i \theta_{yi}^{\ell} \cos \left(\frac{\ell \pi y}{b} \right)
 \end{aligned} \tag{23}$$

donde N_i representa la función de forma para el nodo i , n es el número de nodos de la estructura y ℓ indica el número de términos en el desarrollo de Fourier.

Estas expresiones describen totalmente los corrimientos de un punto cualquiera de la estructura. Sin embargo, las funciones armónicas escogidas implican siempre unas determinadas condiciones en los apoyos, que en este caso son:

$$u = v = \theta_x = \frac{\partial \theta_x}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{para} \quad \begin{cases} y = 0 \\ y = b \end{cases} \tag{24}$$

que equivale a extremos simplemente apoyados con corrimiento vertical nulo en todos los puntos de la sección del apoyo (equivale a que la sección está rigidizada en su plano).

Usando dichas expresiones para los desplazamientos, la matriz de deformaciones $\bar{\epsilon}$

definida en [20] se puede expresar como:

$$\bar{\epsilon} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n B_i^{\ell} \delta_i^{\ell} \quad [25]$$

donde:

$$\delta_i^{\ell} = \begin{pmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ (\partial u / \partial y + \partial v / \partial x) \\ -\partial \theta_x / \partial x \\ -\partial \theta_y / \partial y \\ -(\partial \theta_x / \partial y + \partial \theta_y / \partial x) \\ -(\theta_x - \partial \omega / \partial x) \\ -(\theta_y - \partial \omega / \partial y) \end{pmatrix} \quad [26]$$

$$B_i^{\ell} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right) S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -N_i \frac{\ell \pi}{b} S & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\ell \pi C}{b} N_i \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right) C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right) S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\ell \pi S}{b} N_i \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\ell \pi S}{b} N_i & \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right) C \\ 0 & 0 & \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right) C & -N_i S & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\ell \pi C}{b} N_i & 0 & -N_i C \end{bmatrix} ; \delta_i^{\ell} = \begin{pmatrix} u_i^{\ell} \\ v_i^{\ell} \\ \omega_i^{\ell} \\ \theta_{xi}^{\ell} \\ \theta_{yi}^{\ell} \end{pmatrix} \quad [26]$$

siendo:

$$S = \sin\left(\frac{\ell \pi y}{b}\right) ; \quad C = \cos\left(\frac{\ell \pi y}{b}\right)$$

Para un número finito de armónicos r :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = [\underline{\underline{B}}^1, \underline{\underline{B}}^2, \dots, \underline{\underline{B}}^\ell, \dots, \underline{\underline{B}}^r] \begin{Bmatrix} \underline{\underline{\delta}}^1 \\ \underline{\underline{\delta}}^2 \\ \vdots \\ \underline{\underline{\delta}}^\ell \\ \vdots \\ \underline{\underline{\delta}}^r \end{Bmatrix} = \underline{\underline{B}}^* \underline{\underline{\delta}}^* \quad [27]$$

donde $\underline{\underline{B}}^\ell$ y $\underline{\underline{\delta}}^\ell$ representan respectivamente la matriz de deformaciones y el vector de corrientes, para toda la estructura, para el armónico ℓ .

Expresando igualmente las fuerzas que actúan en la estructura en función de desarrollos en series de Fourier, tenemos que un vector de fuerzas cualquiera se puede expresar como:

$$\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{P}}^1 y_1 + \underline{\underline{P}}^2 y_2 + \dots + \underline{\underline{P}}^\ell y_\ell + \dots + \underline{\underline{P}}^r y_r = \sum_{\ell=1}^r \underline{\underline{P}}^\ell y_\ell \quad [28]$$

siendo y_ℓ una función armónica del tipo $\frac{\ell \pi}{b} y$, ó $\cos \frac{\ell \pi}{b} y$ y $\underline{\underline{P}}^\ell$ el vector de amplitudes de la fuerza de intensidad $\underline{\underline{P}}$ para el ℓ -ésimo armónico y que viene dado por la expresión:

$$\underline{\underline{P}}^\ell = \frac{\int_0^b \underline{\underline{P}} y_\ell dy}{\int_0^b y_\ell^2 dy} \quad [28']$$

Advirtiéndose que se puede escribir:

$$\underline{\underline{P}} = [\underline{\underline{I}} y_1, \dots, \underline{\underline{I}} y_r] \begin{Bmatrix} \underline{\underline{P}}^1 \\ \vdots \\ \underline{\underline{P}}^r \end{Bmatrix} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{P}}^* \quad [29]$$

$$\underline{\underline{\delta}}^* = \sum_{\ell=1}^r y_\ell [\underline{\underline{I}} N_1 \dots \underline{\underline{I}} N_n] \begin{Bmatrix} \underline{\underline{\delta}}_1^\ell \\ \vdots \\ \underline{\underline{\delta}}_n^\ell \end{Bmatrix} = \sum_{\ell=1}^r y_\ell \underline{\underline{N}}^* \underline{\underline{\delta}}^\ell$$

$\underline{\underline{I}}$ = Matriz unidad

podemos expresar la energía potencial total como:

$$\begin{aligned}
 W = & \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b [\underline{\delta}^*]^T [\underline{B}^*]^T \underline{\bar{D}} \underline{B}^* \underline{\delta}^* dx dy - \\
 & - \int_{-t/2}^{+t/2} \int_0^a \int_0^b [\underline{R} \underline{P}^*]^T \sum_{\ell=1}^r y_{\ell} \underline{N}^* \underline{\delta}^{\ell} dx dy dz - \\
 & - \int_0^b \int_0^a [\underline{R} \underline{S}^*]^T \sum_{\ell=1}^r y_{\ell} \underline{N}^* \underline{\delta}^{\ell} dx dy - \int_0^b [\underline{R} \underline{F}^*]^T \sum_{\ell=1}^r y_{\ell} \underline{N}^* \underline{\delta}^{\ell} dy \quad [30]
 \end{aligned}$$

Usando del principio de la energía potencial mínima que establece que:

$$\left\{ \frac{\partial W}{\partial \underline{\delta}^*} \right\} = 0 \quad [31]$$

y de las propiedades ortogonales de las series de Fourier:

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^b \sin \frac{\ell \pi y}{b} \sin \frac{m \pi y}{b} dy \\ & \int_0^b \cos \frac{\ell \pi y}{b} \cos \frac{m \pi y}{b} dy \end{aligned} \right\} = 0 \quad \text{si } \ell \neq m \quad [32]$$

$$\left(\text{o} \quad \int_0^b y_{\ell} y_m dy = 0 \quad \text{si } \ell \neq m \right)$$

se obtiene, tras efectuar la derivación parcial de W con respecto a todos los $\underline{\delta}^{\ell}$, una expresión de la forma:

$$\begin{pmatrix} \underline{f}^1 \\ \underline{f}^2 \\ \vdots \\ \underline{f}^{\ell} \\ \vdots \\ \underline{f}^r \end{pmatrix} = \underline{K} \begin{pmatrix} \underline{\delta}^1 \\ \vdots \\ \underline{\delta}^{\ell} \\ \vdots \\ \underline{\delta}^r \end{pmatrix} \quad [33]$$

donde $\underline{f}^{\ell}$ representa el vector de fuerzas nodales de toda la estructura para el armónico ℓ , siendo una contribución típica para un nodo i de la forma:

$$\underline{f}_i^{\ell} = \int_{-t/2}^{+t/2} \int_0^a \int_0^b N_i \underline{P}^{\ell} y_{\ell}^2 dx dy dz + \int_0^a \int_0^b N_i \underline{S}^{\ell} y_{\ell}^2 dx dy + \int_0^b \underline{F}_i^{\ell} y_{\ell}^2 dy \quad [34]$$

Asimismo en la expresión [33] $\underline{\delta}^{\ell}$ representa el vector de desplazamientos nodales incógnita para el armónico ℓ , y $\underline{K}$ es la matriz de rigidez de toda la estructura, que se puede escribir como:

$$\underline{K} = \int_0^b \int_0^a [\underline{B}^1, \underline{B}^2, \dots, \underline{B}^{\ell}, \dots, \underline{B}^r]^T \underline{\bar{D}} [\underline{B}^1, \underline{B}^2, \dots, \underline{B}^{\ell}, \dots, \underline{B}^r] dx dy \quad [35]$$

en la que una contribución típica para los nodos i y j sería:

$$\underline{K}_{ij}^{\ell m} = \int_0^b \int_0^a [\underline{B}_i^{\ell}]^T \underline{\bar{D}} \underline{B}_j^m dx dy \quad [36]$$

Asimismo, de la ecuación [26] podemos expresar $\underline{B}_i^{\ell}$ como:

$$\underline{B}_i^{\ell} = \underline{\bar{B}}_i^{\ell} \sin \frac{\ell \pi y}{b} + \underline{\bar{\bar{B}}}_i^{\ell} \cos \frac{\ell \pi y}{b} \quad [37]$$

y tras sustituir la expresión anterior en la ecuación [36] se obtiene:

$$\underline{K}_{ij}^{\ell m} = \int_0^b \int_0^a \left[[\underline{\bar{B}}_i^{\ell}]^T \sin \frac{\ell \pi y}{b}, [\underline{\bar{\bar{B}}}_i^{\ell}]^T \cos \frac{\ell \pi y}{b} \right] \underline{\bar{D}} \begin{bmatrix} \underline{B}_j^m \sin \frac{m \pi y}{b} \\ \underline{\bar{\bar{B}}}_j^m \cos \frac{m \pi y}{b} \end{bmatrix} dx dy \quad [38]$$

siendo:

$$\underline{\bar{D}} = \begin{bmatrix} \underline{\bar{D}} & 0 \\ 0 & \underline{\bar{\bar{D}}} \end{bmatrix} \quad \text{y:}$$

$$\bar{\underline{\underline{B}}}_i^\ell = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -N_i \frac{\ell \pi}{b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \frac{\ell \pi}{b} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [39]$$

$$\bar{\underline{\underline{B}}}_i^\ell = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\ell \pi}{b} N_i & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\ell \pi}{a} N_i & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\ell \pi}{b} N_i & 0 & -N_i \end{bmatrix} \quad [40]$$

Teniendo en cuenta que las integrales en las que aparecen productos de senos y cosenos se anulan, se obtiene:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{K}}_{ij}^{\ell m} = & \int_0^b \int_0^a [\bar{\underline{\underline{B}}}_i^\ell]^T \bar{\underline{\underline{D}}} \bar{\underline{\underline{B}}}_j^m \sin \frac{\ell \pi y}{b} \sin \frac{m \pi y}{b} dx dy + \\ & + \int_0^b \int_0^a [\bar{\underline{\underline{B}}}_i^\ell]^T \bar{\underline{\underline{D}}} \bar{\underline{\underline{B}}}_j^m \cos \frac{\ell \pi y}{b} \cos \frac{m \pi y}{b} dx dy \end{aligned} \quad [41]$$

siendo (véase [10] y [13]):

$$\bar{\underline{D}} = \begin{bmatrix} \underline{D}_m & 0 \\ 0 & \underline{D}_b \end{bmatrix} \quad [42]$$

Debido de nuevo a la ortogonalidad de las series de Fourier se obtiene:

$$\underline{K}_{ij}^{\ell m} = 0 \quad \text{si } \ell \neq m \quad [43]$$

Por consiguiente la matriz de rigidez global resulta ser diagonal y cada término correspondiente a cada armónico se desdobra independientemente de los otros, en la forma:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \underline{K}^{11} & & & 0 \\ & \underline{K}^{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underline{K}^{\ell\ell} \\ 0 & & & & \underline{K}^{rr} \end{bmatrix} \quad [44]$$

donde una submatriz $\underline{K}_{ij}^{\ell\ell}$, uniendo los nudos i y j , viene dada por:

$$\underline{K}_{ij}^{\ell\ell} = \frac{b}{2} \int_0^a ([\underline{B}_i^\ell]^\top \bar{\underline{D}} \underline{B}_j^\ell + [\underline{B}_j^\ell]^\top \bar{\underline{D}} \underline{B}_i^\ell) dx \quad [45]$$

o bien:

$$\underline{K}_{ij}^{\ell\ell} = \frac{b}{2} \int_0^a [\underline{B}_i^\ell]^\top \bar{\underline{D}} \underline{B}_j^\ell dx \quad [46]$$

Así pues, el sistema final de ecuaciones tiene la forma de:

$$\begin{Bmatrix} \underline{f}^1 \\ \underline{f}^2 \\ \vdots \\ \underline{f}^\ell \\ \vdots \\ \underline{f}^r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}^{11} & & & 0 \\ & \underline{K}^{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underline{K}^{\ell\ell} \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & \underline{K}^{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\delta}^1 \\ \underline{\delta}^2 \\ \vdots \\ \underline{\delta}^\ell \\ \vdots \\ \underline{\delta}^r \end{Bmatrix} \quad [47]$$

Podemos pues, claramente, separar la expresión anterior, en r diferentes sistemas de ecuaciones. Para cada armónico de carga solo hemos de resolver un sistema de ecuaciones para obtener el valor de $\underline{\delta}^\ell$. Los desplazamientos totales se obtienen como suma de las r amplitudes individuales.

Una vez calculado el vector de desplazamientos para un armónico ℓ , se pueden obtener fácilmente las tensiones para dicho armónico mediante:

$$\underline{\sigma}^{\ell} = \underline{\bar{D}} \underline{B}^{\ell} \underline{\delta}^{\ell} = \underline{\bar{D}} \sum_{i=1}^n \underline{B}_i^{\ell} \underline{\delta}_i^{\ell} \quad [48]$$

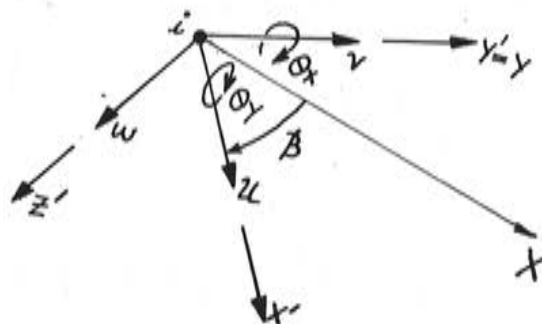
Ver [20] y [25]

Finalmente las tensiones totales se obtienen como suma de las obtenidas para cada armónico.

1.4. Ensamblaje de elementos. Transformación de coordenadas

Para ensamblar la matriz de rigidez total de una estructura plegada a partir de las matrices de rigidez individuales de cada elemento, es necesario transformar las matrices de rigidez de elementos adyacentes de manera que en cada nodo común los desplazamientos nodales y las fuerzas estén definidos en el mismo sistema de coordenadas. Se observará, sin embargo, que los desplazamientos nodales expresados en el sistema de coordenadas del elemento, solo contienen dos componentes de giro θ_x y θ_y (véase figura 5). La tercera componente θ_z (giro alrededor del eje z) no aparece en la formulación empleada. En la teoría de

Fig. 5.—Desplazamientos en el sistema de coordenadas local



láminas plegadas, no se necesita de esta rotación para describir el comportamiento de la estructura. Sin embargo, al transformar las propiedades de elementos que teniendo un nodo común se encuentran en diferentes planos, a un sistema general de coordenadas (figura 6), necesitamos tener en cuenta dicha rotación.

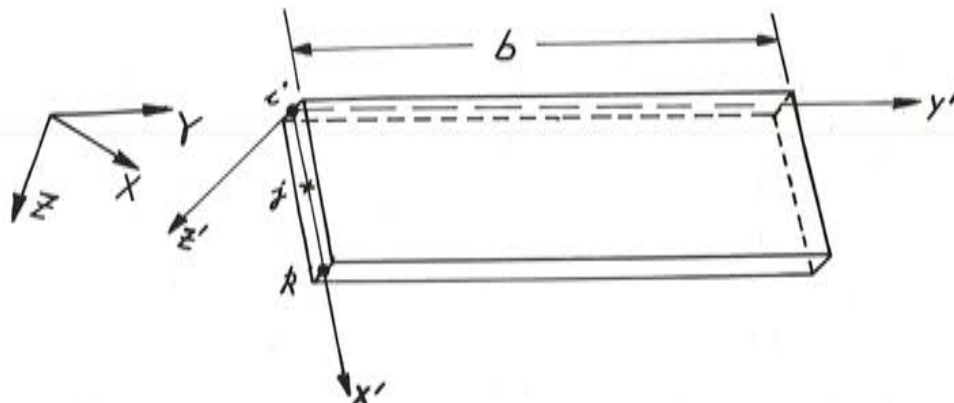


Fig. 6.—Sistemas de coordenadas general y local

Así pues, los desplazamientos y fuerzas nodales se reescriben como:*

$$\underline{\delta}_i' = \begin{Bmatrix} u_i' \\ v_i' \\ \omega_i' \\ \theta_{xi}' \\ \theta_{yi}' \\ \theta_{zi}' \end{Bmatrix} \quad \underline{f}_i' = \begin{Bmatrix} f_{xi}' \\ f_{yi}' \\ f_{zi}' \\ M_{xi}' \\ M_{yi}' \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [49]$$

y la nueva matriz de rigidez que conecta los nodos i y j es:

$$\underline{K}_{ij}^{\ell\ell'} (6 \times 6) = \begin{bmatrix} K_{ij}^{\ell\ell'} (5 \times 5) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [50]$$

Las sextas fila y columna de ceros se añaden solo para facilitar la transformación al sistema de coordenadas general x, y, z.

La relación entre las matrices de rigidez en los sistemas de coordenadas local y general es la conocida:

$$\underline{K}_{ij}^{\ell\ell} = \underline{T}_{ij} \underline{K}_{ij}^{\ell\ell'} [\underline{T}_{ij}]^T \quad [51]$$

siendo $\underline{T}_{ij}$ tal, que para el nodo i del elemento que contiene a los nodos i y j, se cumple:

$$\underline{\delta}_i = \underline{T}_{ij} \underline{\delta}_i' \quad [52]$$

y

$$\underline{T}_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \quad [53]$$

En general, la matriz $\underline{K}_{ij}^{\ell\ell}$ (en el sistema de coordenadas general) no presenta ninguna particularidad y, por consiguiente, θ_z será un grado de libertad independiente. Surge sin embargo un problema cuando todos los elementos asociados con un nodo particular están en el mismo plano (nodo co-planar) (figura 7), ya que los coeficientes de la matriz de rigidez correspondientes a θ_z , son todos nulos. Esta singularidad de la matriz de rigidez, se ha evitado ensamblando las ecuaciones correspondientes a los tres giros en el sistema local de coorde-

* El superíndice ' denota sistema local de coordenadas.

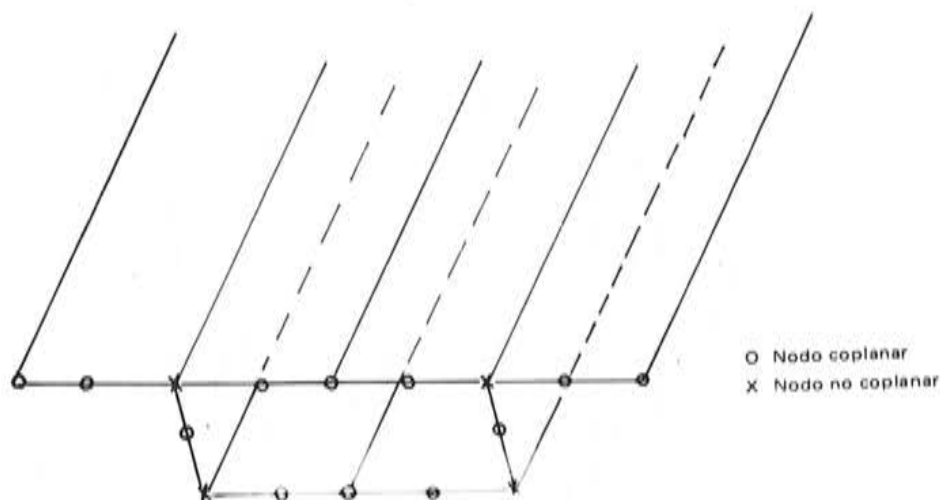


Fig. 7.—Ejemplos de nodos coplanares y no coplanares

nadas si el nodo es co-planar, colocando a continuación un número cualquiera en el sexto coeficiente de la diagonal de $\underline{K}_{ij}^{xx}$. Con esto la sexta ecuación es una pseudo-ecuación, pero no afectará a la solución ya que no está conectada con las ecuaciones de equilibrio expresadas por la matriz de rigidez.

Este artificio, sugerido por Clough y Wilson (11), tiene la ventaja de que todos los nodos (tanto co-planares como no co-planares) tienen los mismos grados de libertad (6 en cada), siendo esto necesario si el proceso para encontrar la solución no permite distinto número de grados de libertad en nodos diferentes. La desventaja obvia es que envuelve una mayor computación. Sin embargo este costo extra no es significativo ya que los nodos co-planares serán relativamente pocos.

1.5. Elemento usado y funciones de forma

Se ha empleado un elemento parabólico como el de la figura 8. Las funciones de forma

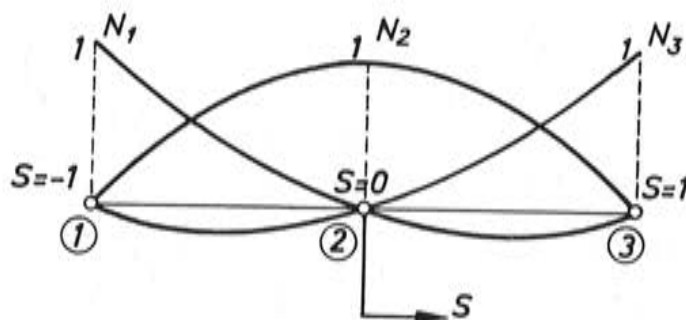


Fig. 8.—Funciones de forma para el elemento parabólico

para dicho elemento son:

$$\begin{cases} N_1 = S^2 - S \\ N_2 = 1 - S^2 \\ N_3 = S + \frac{S^2}{2} \end{cases} \quad [54]$$

1.6. El programa M-FIST (12) (13)

El método de análisis apuntado se ha recogido en un programa de ordenador desarrollado en Swansea (país de Gales) por el autor de este trabajo.

El lenguaje empleado en el programa M-FIST ha sido el standard Fortran - IV.

Se ha incorporado en el programa un esquema de flexibilidades para analizar estructuras de tramos continuos.

A continuación se muestran diversos ejemplos de aplicación del método para análisis de estructuras celulares.

Todos los cálculos se han efectuado en el computador ICL 1904S del Centro de Computación de la Universidad de Swansea.

EJEMPLO 1. PUENTE ISOSTATICO DE HORMIGON CON SECCION EN CAJON

Las dimensiones del puente que se muestra en la figura 9 han sido escogidas a partir de un estudio estadístico de puentes de hormigón en cajón (14), siendo muy similares a las de muchos puentes ya construidos. Las propiedades elásticas del material son las representativas del hormigón: $E = 25 \text{ Newton/mm}^2$ y $\nu = 0,15$. La longitud del vano es de 30 metros y los extremos se suponen apoyados.

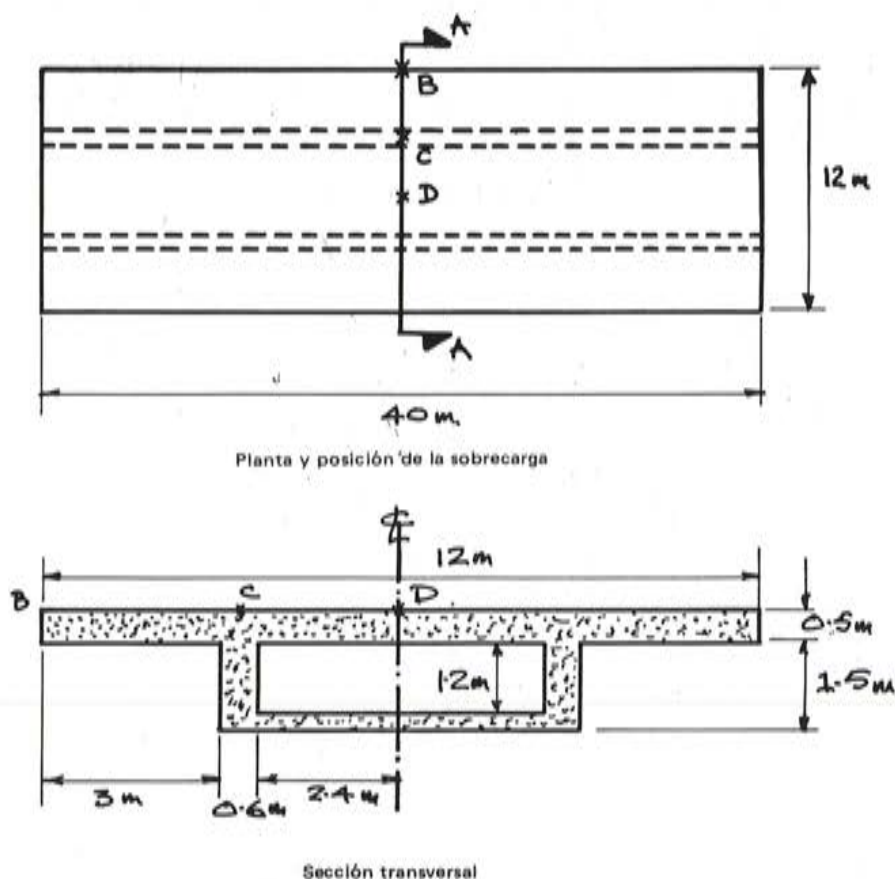


Fig. 9.—Puente de hormigón con sección en cajón

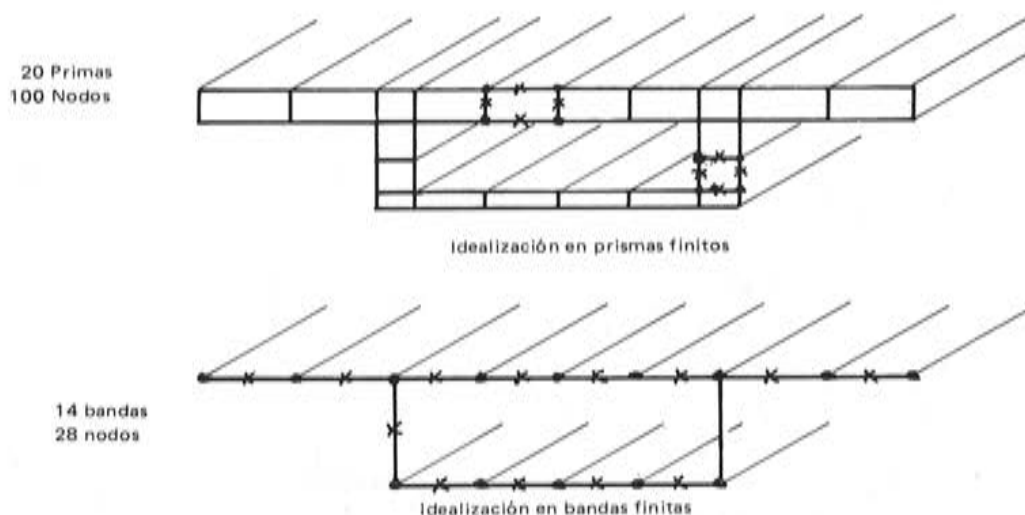


Fig. 9.—Puente de hormigón con sección en cajón

Se analizan tres casos diferentes de carga con una fuerza puntual de 1.000 kg. actuando alternativamente en las posiciones B, C y D, a la mitad del vano.

En la citada figura 9 se muestra la idealización de la estructura en bandas. La sección transversal se ha dividido en 14 elementos.

Se comparan los resultados obtenidos usando el programa M-FIST con los obtenidos con el programa de elementos finitos QUEST (6), y el programa basado en el prisma finito PRIS (15).

A título de comparación, se muestra también en la figura 9 la idealización del puente para el análisis mediante el prisma finito.

Los corrimientos verticales se muestran en la figura 10 para cada estado de carga. La comparación de los resultados obtenidos con M-FIST y los obtenidos con QUEST y PRIS es excelente.

En las figuras 11 y 12 se puede apreciar la distribución transversal de las tensiones longitudinales N_y , a la mitad del vano, para las distintas posiciones de la carga; y la distribución transversal de las tensiones transversales, en dicha sección, para la carga en la posición B.

EJEMPLO 2. PUENTE ISOSTATICO CON SECCION EN CAJON COMPUESTA DE HORMIGON Y ACERO

Se analiza en este ejemplo un modelo de un típico puente en cajón con la sección transversal compuesta por una losa relativamente gruesa de hormigón, sustentada por un cajón de acero. Nótese la diferencia de espesores de la losa con las paredes de la caja, siendo esto característico de este tipo de estructuras.

La carga consiste en un par de fuerzas puntuales, de 0,5 kg, actuando en la mitad del vano.

En la figura 13 se muestran las dimensiones del modelo junto con la disposición de la carga. Para dividir la estructura en bandas, se ha simplificado la sección tomándose las dimensiones a partir de la línea media. Se han omitido, para facilitar el análisis, las placas de unión entre hormigón y acero.

Se comparan los resultados obtenidos con M-FIST con los obtenidos usando el programa CURDI escrito en Berkeley (California) (16) para el análisis de puentes de planta recta o curva.

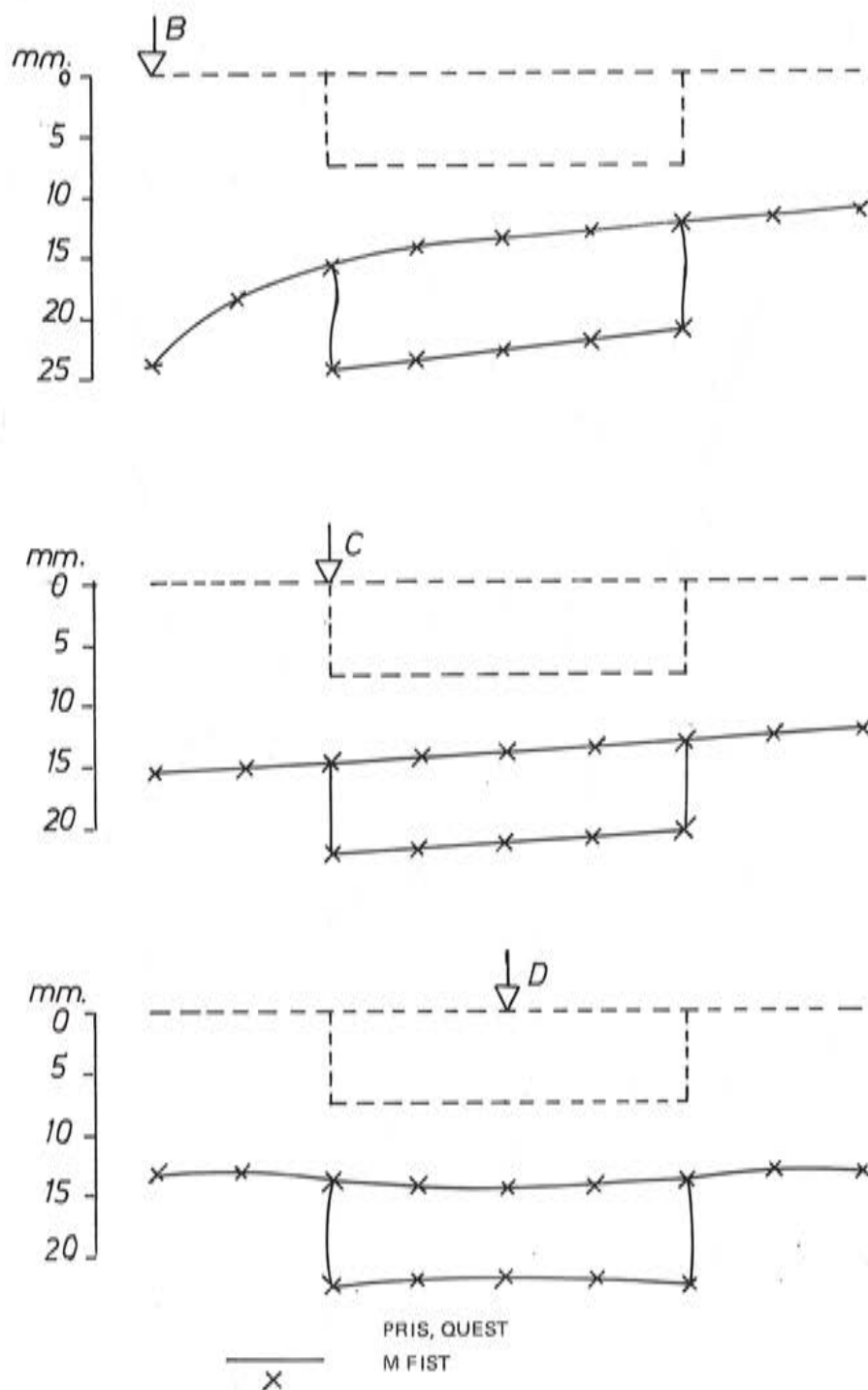


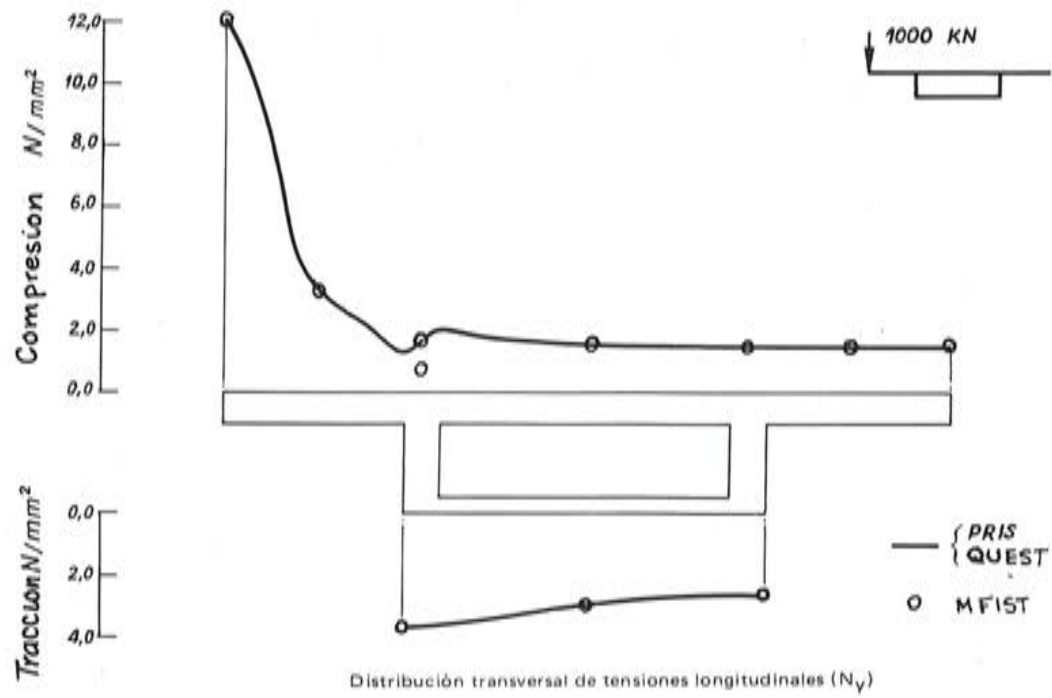
Fig. 10.—Corrimientos verticales de la línea media de la sección, sobrecarga actuando en la mitad del vano

En la figura 14 se muestran los resultados obtenidos con ambos programas para los corrimientos verticales y tensiones longitudinales en la mitad del vano. Se aprecia la gran similitud entre los resultados obtenidos con los dos programas.

EJEMPLO 3. PUENTE CONTINUO DE DOS VANOS CON SECCION CELULAR

Para demostrar la aplicación del método al análisis de estructuras de tramos continuos se ha analizado un puente continuo de dos vanos. La sección transversal está formada por tres células rectangulares. En la figura 15 se puede ver un esquema, de las dimensiones de la

Resultados en la sección central



Resultados en la sección central

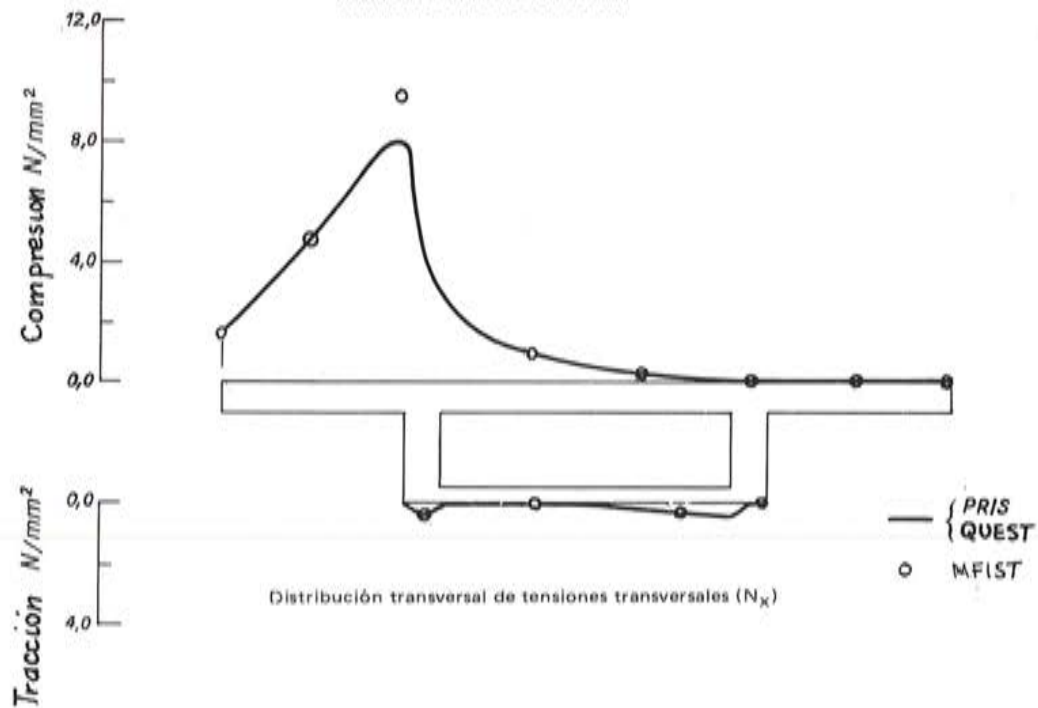


Fig. 11

Distribución transversal de tensiones N_y

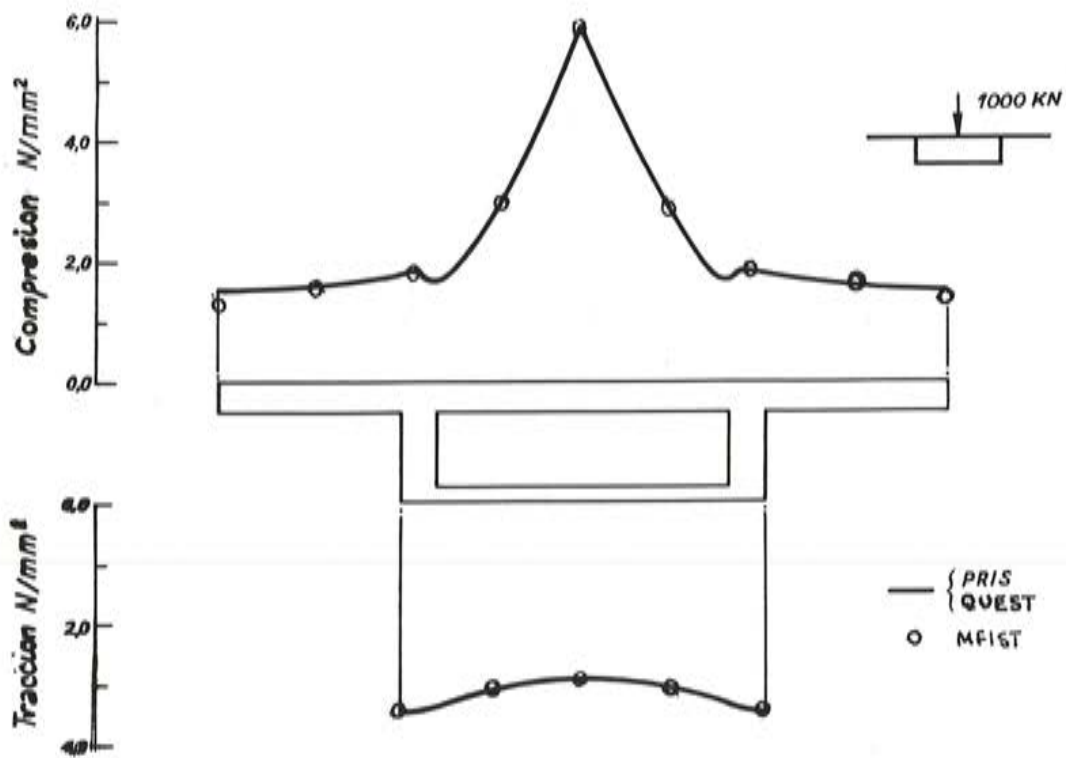
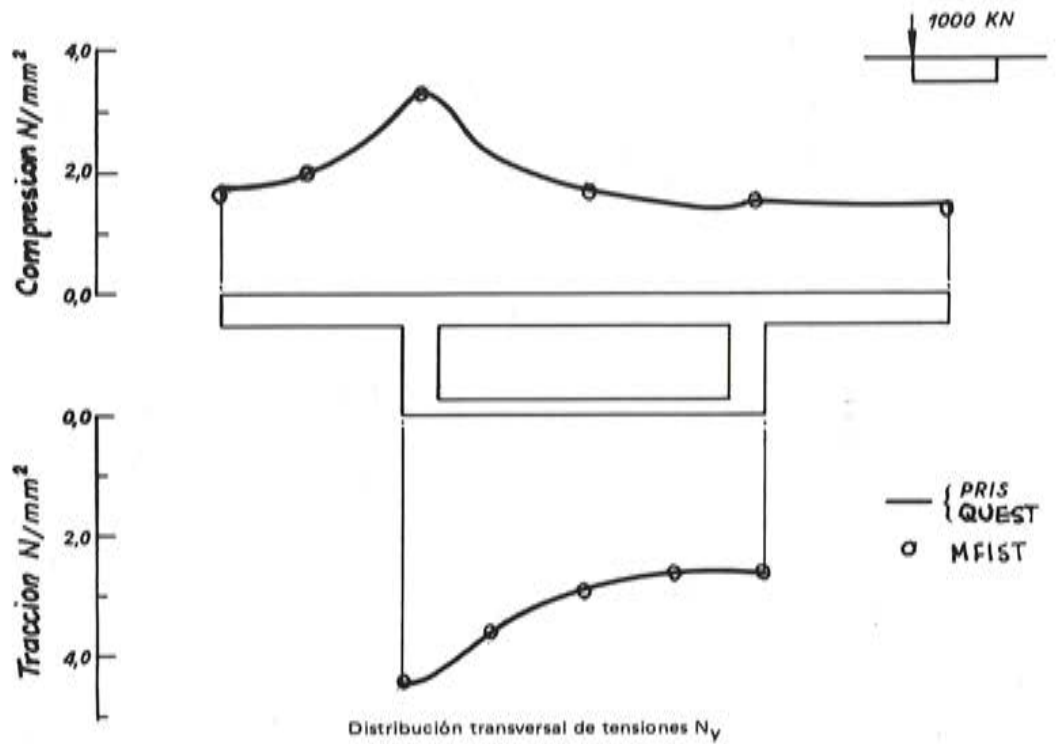
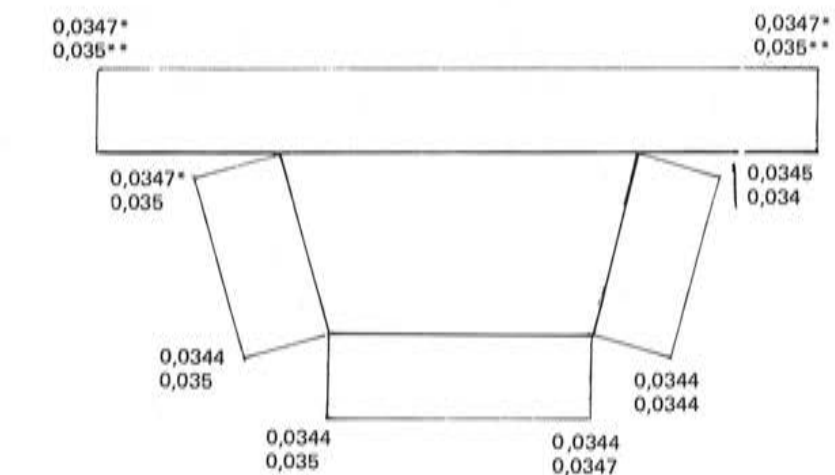
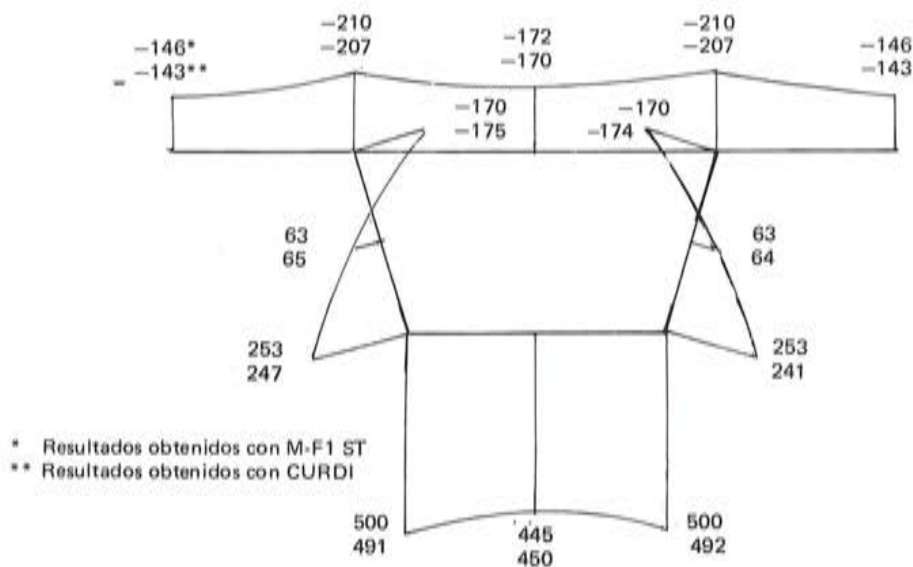


Fig. 12



a) Distribución transversal de corrimientos verticales (pulgadas), sección central



b) Distribución transversal de tensiones resultantes N_y (libras/pulg.²) en la sección central.

Fig. 14

estructura y disposición de la carga.

La sección central sobre el soporte está rigidizada en su plano. Para simular soportes intermedios y secciones rigidizadas, se ha adoptado el procedimiento de restringir los movimientos convenientemente, en un cierto número de puntos de la sección. Para el cálculo de las reacciones que aparecen en los puntos coaccionados, se ha seguido un esquema de flexibilidades, aplicando fuerzas unidad en la dirección de los movimientos restringidos. Para este caso particular se han restringido los corrimientos verticales de 8 puntos, como se muestra en la citada figura 15.

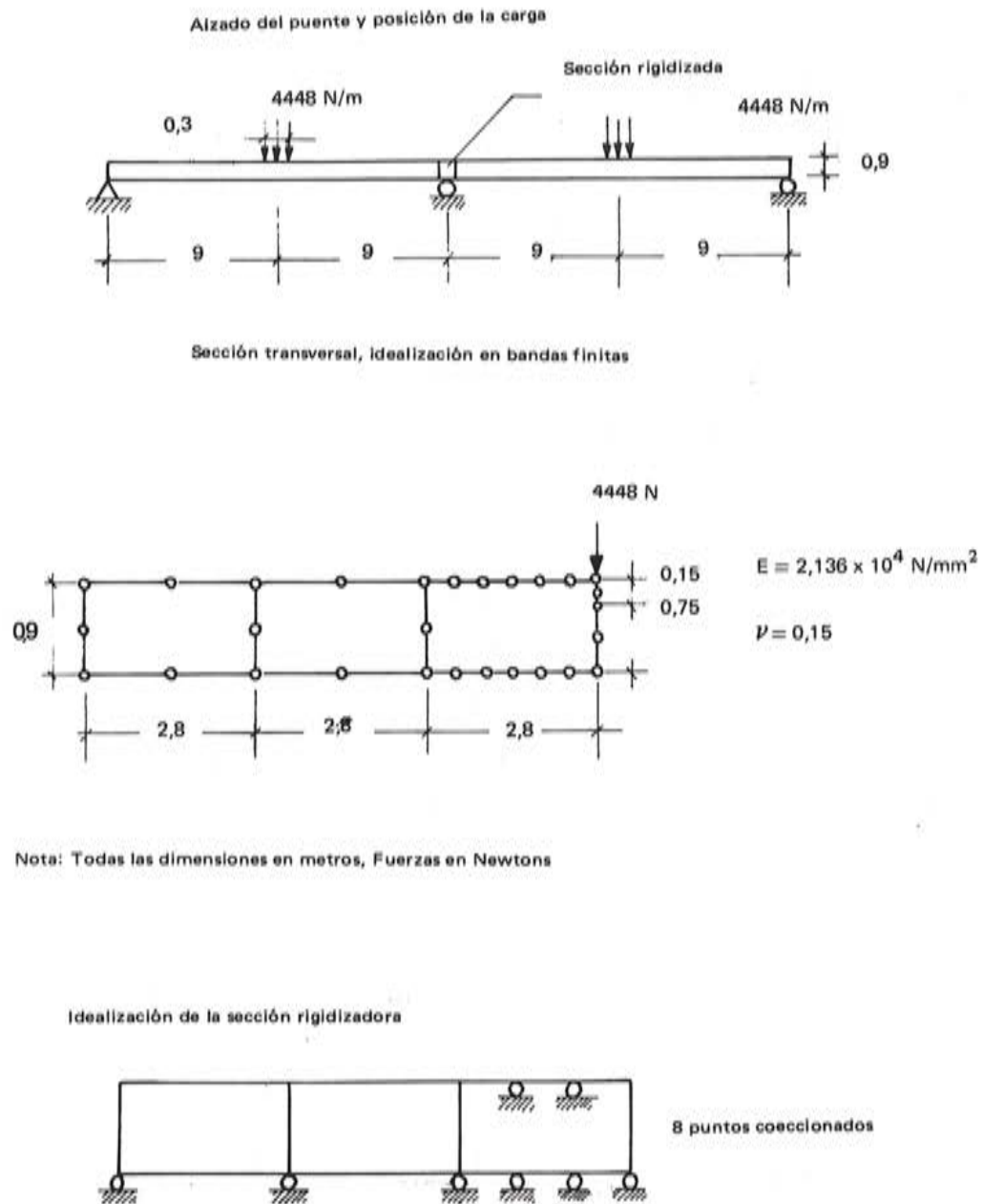


Fig. 15.—Puente continuo con sección celular

Los resultados se comparan con los obtenidos con el programa MUDPI (17), basado en un análisis elástico de estructuras celulares junto con un esquema de flexibilidad, muy elaborado, para simular soportes intermedios y secciones rigidizadas (véase figura 16).

Se puede apreciar que, para simular secciones rigidizadas sobre soportes intermedios, nos basta con restringir los corrimientos verticales de un cierto número de puntos. Esto es debido principalmente a que, para puentes de sección celular, las traslaciones horizontales y las rotaciones no tienen casi efecto en la distribución de las tensiones longitudinales. Asimismo, debido a la naturaleza concentrada de la carga y al hecho de que está aplicada en el punto más excéntrico, es de esperar que, para estados de carga standard, el número necesario de puntos en los que hay que restringir el corrimiento vertical, sea siempre pequeño.

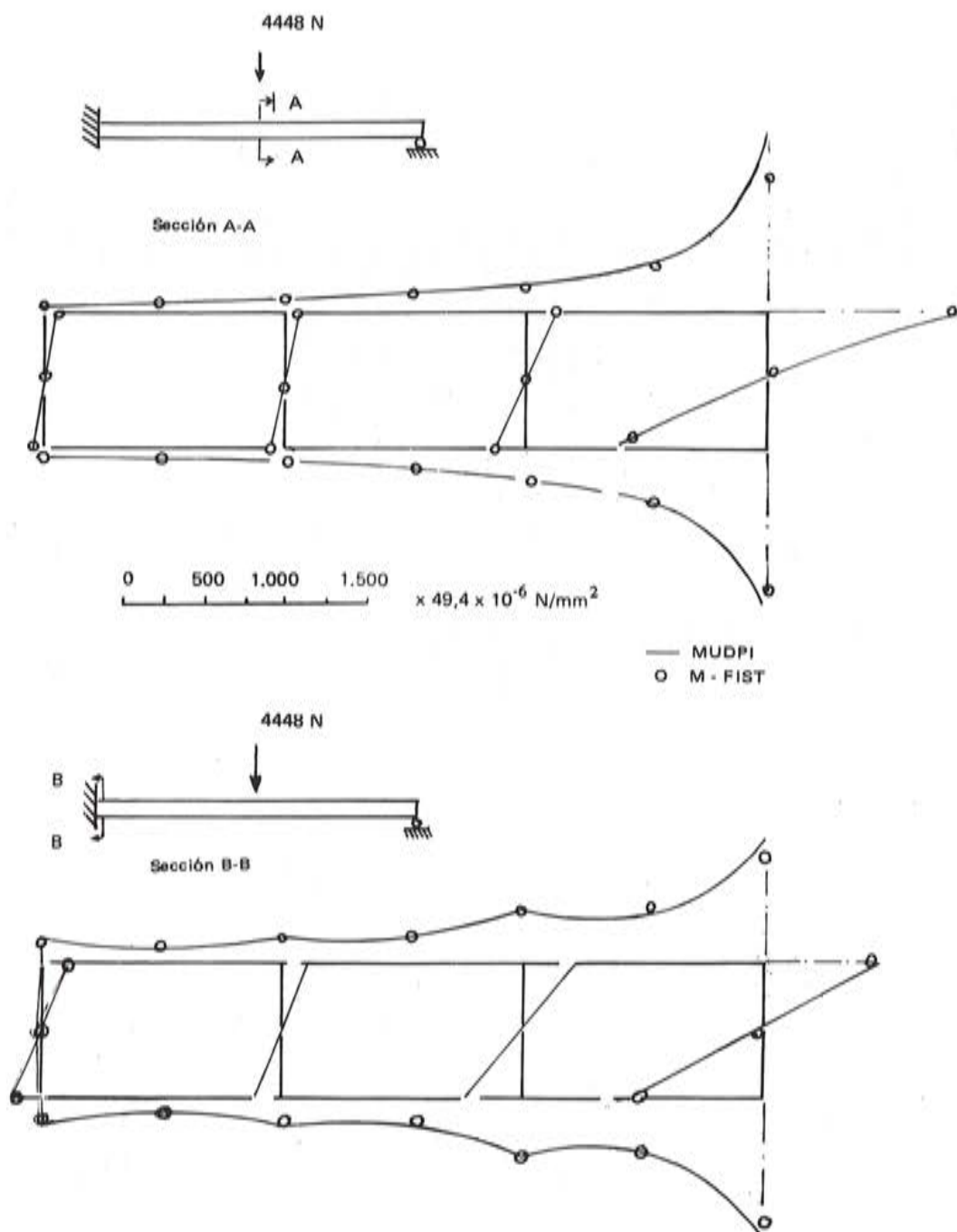


Fig. 16.—Distribución transversal de tensiones longitudinales N_v

EJEMPLO 4. PUENTE DEL VIADUCTO DE QUEEN'S DRIVE

Un ejemplo de uno de los muchos puentes que se han calculado usando el método de la banda finita es el viaducto de Queen's Drive en la autopista Lancashire-Yorkshire M-6 (Inglaterra). El puente es de sección en cajón y consta de seis vanos continuos. Fue calculado por la North Western Road Construction Unit, Lancashire County Council Sub-Unit. La construcción del mismo se efectuó por tramos sucesivos postensados y en la figura 17 (a) y (b) se muestra la sección transversal y el alzado del mismo.

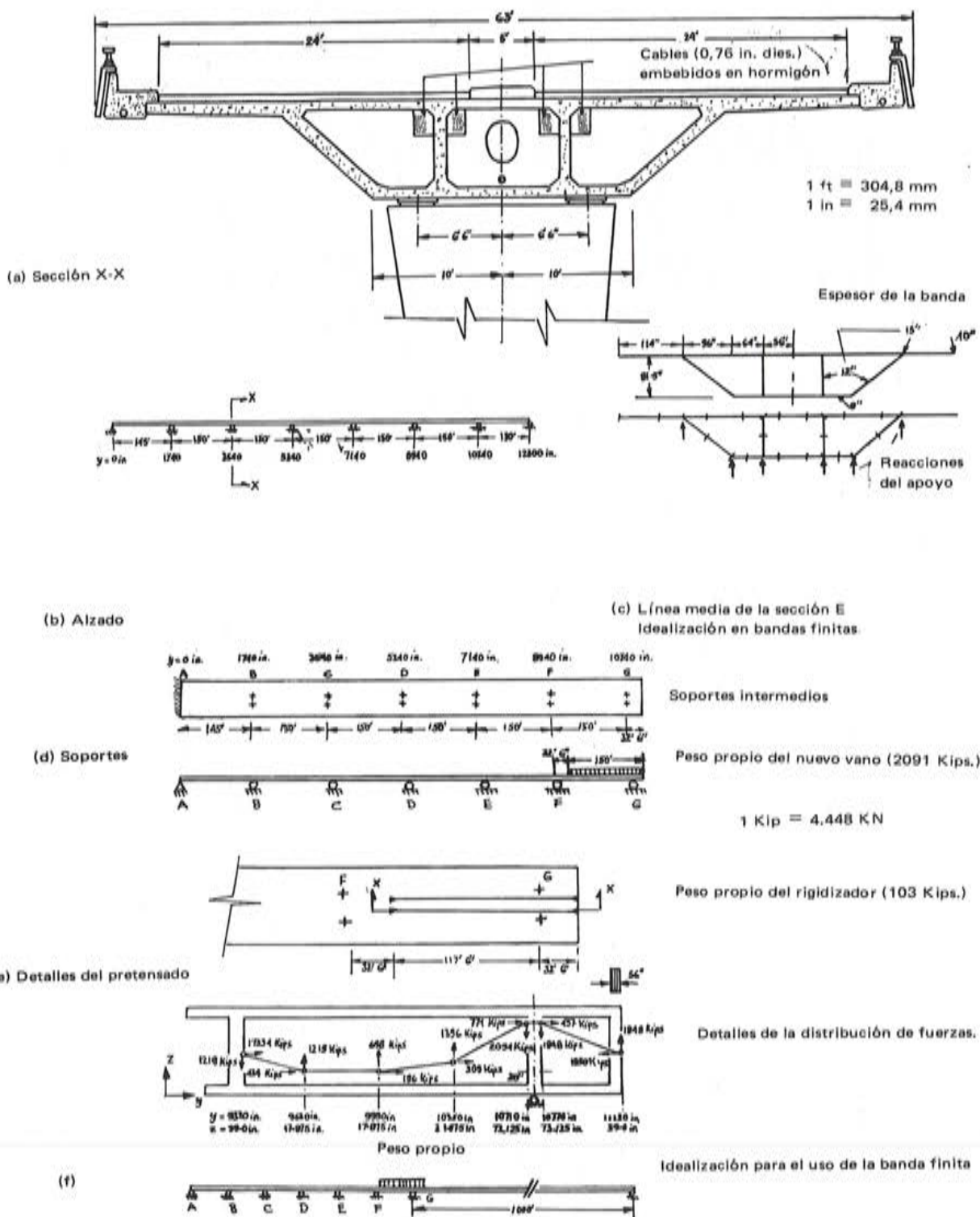


Fig. 17.—Viaducto de Queen's Drive

Además del análisis de las tensiones internas producidas por el peso propio y diversos trenes de carga, se estudió el efecto de las fuerzas de pretensado en las diversas fases de la construcción. Para incluir el efecto del pretensado, en el análisis se sustituyó el efecto continuo del cable, por un sistema de fuerzas equivalente (figura 17-e).

Debido a su construcción por tramos sucesivos era importante predecir las tensiones inducidas en las secciones de los apoyos, al añadir el peso adicional de un nuevo vano, combinadas con las debidas al pretensado.

Estrictamente, la estructura, en un estado intermedio, cae fuera del campo de aplicación del método de la banda finita, debido al voladizo del nuevo tramo sobre el apoyo anterior. Para paliar esta dificultad se usó el artificio de simular la estructura reemplazando el voladizo por una estructura muy larga, (como se muestra en la figura 17 (f)). La estructura simulada se analizó mediante el método de la banda finita y, al mismo tiempo, el puente se analizó como una viga continua para el mismo estado de carga (peso propio del nuevo vano). Comparando los resultados se vió que, en cuanto al equilibrio estático de las tensiones longitudinales N_y en las secciones sobre los apoyos F y G, los errores inherentes a la aproximación caían dentro de la tolerancia admitida en el cálculo.

En las figuras 18 (a) y (b) se muestran los perfiles de las tensiones longitudinales debidas al peso propio y al pretensado. Vemos como el efecto del peso propio reduce ligeramente el efecto del pretensado en la sección G. Asimismo se observa, en la figura 18 (b), que aparecen ligeras tracciones en la cara inferior de la sección sobre el apoyo F. Dichas tensiones se eliminan, de hecho, por las tensiones de compresión inducidas durante la construcción del tramo anterior, como se puede deducir de la figura 18 (a).

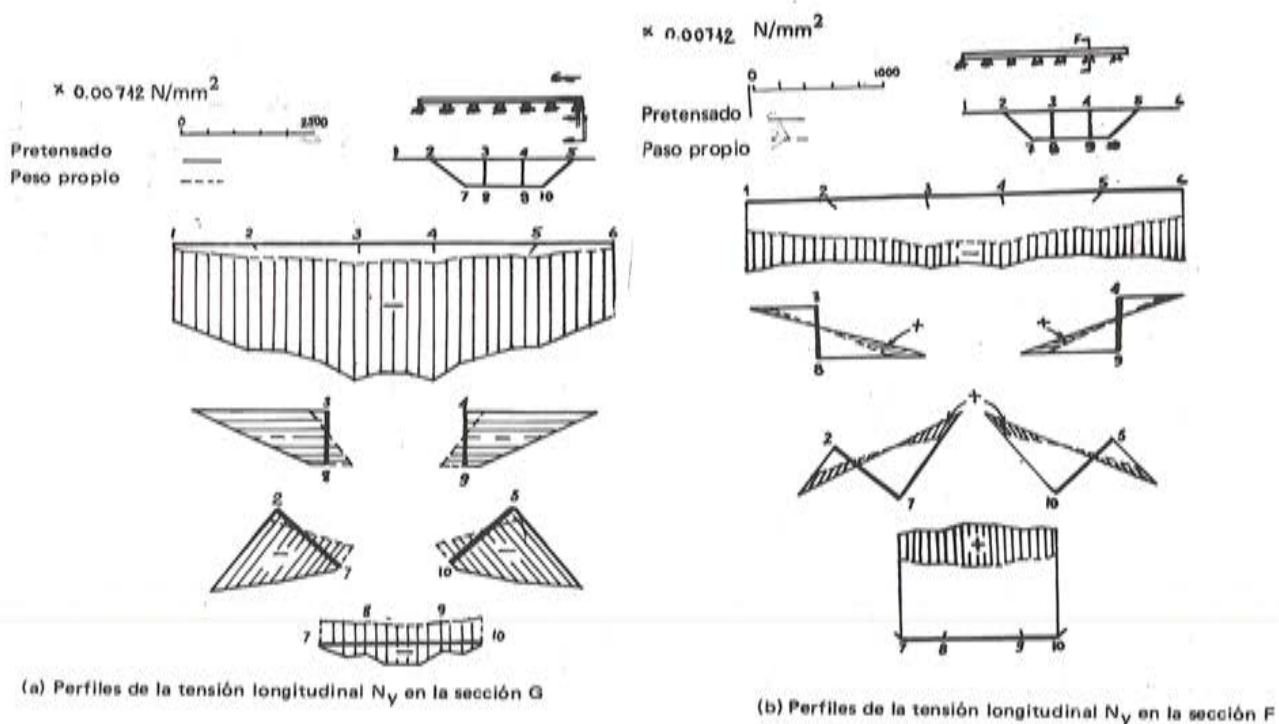


Fig. 18.—Distribución de las tensiones longitudinales N_y

CONCLUSIONES

La principal característica del método presentado estriba en que debido a la naturaleza del análisis usando expresiones polinómicas en dirección transversal y desarrollos de Fourier en dirección longitudinal, se reduce el estudio de estructuras formadas por placas de forjado y vigas, al análisis de estructuras formadas por unión de elementos tipo viga, reduciéndose un problema originalmente bi-dimensional a uno uni-bidimensional, con la subsecuente economía en el número de variables necesario para definir el problema.

Se ha incluido, en el análisis, el efecto de la deformación transversal debida al esfuerzo cortante; lo cual permite analizar con exactitud estructuras cuyos componentes tengan un espesor considerable. Se ha comprobado (13) que, en general, las tensiones obtenidas incluyendo el efecto de la deformación transversal debida al esfuerzo cortante son menores que las que se obtienen prescindiendo de dicho efecto; por lo cual el procedimiento presentado conduce a un dimensionamiento más económico de la estructura.

La naturaleza del desarrollo de Fourier empleado, implica que la estructura tenga sus extremos simplemente apoyados. Soportes intermedios y secciones rigidizadas, se pueden incluir en el análisis mediante un esquema de flexibilidades apropiado. De esta manera se preservan las características ortogonales de las funciones de desplazamientos asumidas, y la forma de la solución es la misma.

Los desplazamientos convergen más rápidamente que las tensiones. Para una carga puntual aislada, la convergencia es muy lenta; mientras que para una carga uniformemente repartida es muy rápida.

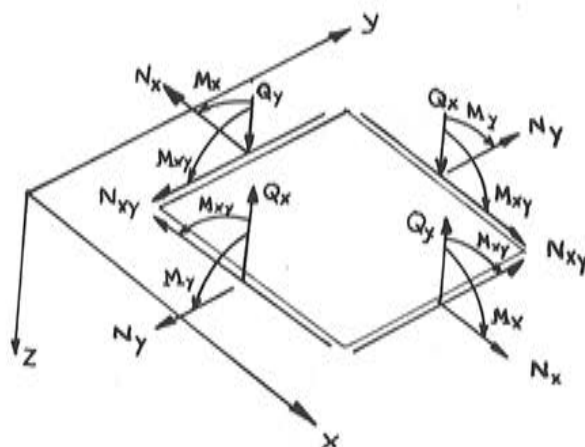


Fig. 19.—Convenio para la dirección positiva de las tensiones resultantes

Escogiendo el suficiente número de bandas, la solución será siempre convergente al aumentar el número de armónicos. El número de bandas necesario para cada componente de la estructura debe escogerse de acuerdo con las proporciones geométricas de la misma. Generalmente, se necesita mayor número de bandas en el tablero, para una buena representación de la distribución transversal de tensiones resultantes longitudinales N_y . En el alma de las vigas o en las paredes de la caja, si se trata de una sección tipo cajón, el número de bandas no es esencial, obteniéndose buenos resultados con una sola banda.

En zonas donde se espere un brusco cambio en la distribución de tensiones, se debe usar un número mayor de bandas y de armónicos. Por el contrario, para puntos lejos de soportes aislados y cargas concentradas, se obtienen buenos resultados usando pocas bandas y un número pequeño de armónicos.

Para puentes de un solo vano, sin soportes intermedios, basta con 15 armónicos para obtener una satisfactoria distribución de tensiones longitudinales.

Para puentes con soportes intermedios, se necesita un número mayor de armónicos para obtener el perfil discontinuo de tensiones longitudinales sobre los soportes.

Puesto que bajo cargas concentradas las tensiones son matemáticamente infinitas, no es económico tratar de alcanzar convergencia en esa región.

El tiempo de computación es directamente proporcional al número de armónicos. Así pues, una solución que use 20 armónicos empleará doble tiempo que una que use 10.

No obstante, el número de ecuaciones que es preciso resolver para cada armónico es pequeño, teniendo el sistema de ecuaciones forma de banda, lo que acelera su solución. Por tanto, el método de la banda finita resulta muy económico, siendo adecuado para su empleo en un ordenador de mediana capacidad de memoria.

Debido a la naturaleza del análisis, los resultados solo se obtienen en aquellas secciones que se especifique a priori; a diferencia del método de los elementos finitos que proporciona una información completa, a veces innecesaria, del comportamiento de toda la estructura.

Finalmente, remarcaremos que el análisis permite el manejo de distintos tipos de secciones no homogéneas, y que sus resultados describen con detalle situaciones locales, como flexiones locales o diferenciación entre esfuerzos sobre alma de vigas o losas.

El método de la banda finita parece particularmente adecuado para el análisis de puentes con sección en cajón, cuyo estudio no puede efectuarse de una manera sencilla por ninguno de los métodos clásicos.

* * *

Los comentarios a este artículo, deberán enviarse a la secretaría de la A.T.E.P. antes del día 30 del próximo mes de noviembre.

REFERENCIAS

- 1.— Report of the Task Committee on Folded Plate Construction, "Phase I report on folded plate construction". Am. Soc. Civ. Engrs., 89, ST, 365-405, 1963 (Diciembre).
- 2.— A. Samartín and J. Martínez, "A survey on Folded Plate Structures" I.A.S.S. Colloquium of Madrid, setiembre-octubre 1969.
- 3.— J.E. Goldberg and H.L. Leve, "Theory of prismatic folded plate structures", IABSE Publications, Zurich, Switzerland, vol. 17, 59-86, 1957.
- 4.— A. de Fries-Skene and A.C. Scordelis, "Direct Stiffness solution for folded plates". Am. Soc. Civ. Engrs. 50 ST, 15-47, 1964.
- 5.— A.C. Scordelis, "Analysis of simply supported box girder bridges", Structural Engineering and Structural Mechanics Report Núm. SESM 66-17, Univ. of California, Berkeley, 1966 (Octubre).
- 6.— Hinton, E. and Hewitt, A.M. "QUEST (HECB/B/14) Finite Element Analysis of Box Girder Bridges", Highway Engineering Computer Brand. D.O.E.
- 7.— K.H. Chu and E. Dudnik, "Concrete box girders bridges analysed as folded plates", Concrete bridge design. ACI Publications, SP-23, 221-246, 1969.
- 8.— Y.K. Cheung, "Folded plate structures by finite strip method", Am. Soc. Civ. Engrs. Vol. 95, núm. St. 12, 2963-79, 1969 (Diciembre).
- 9.— Y.K. Cheung, "Analysis of box girder bridges by finite strip method", Concrete Bridge design. ACI Publications SP-26, 357-378, 1971.

- 10.— Zienkiewicz, O.C. and Too, J.J.M. "The finite prism in analysis of thick simply supported bridges boxes". Proc. I.C.E., vol. 53, Paper núm. 7450, pp. 147-152. Setiembre 1972.
- 11.— Clough, R.W. and Wilson, E.L. "Dynamic finite element analysis of arbitrary thin shells". Nato Advanced study Institute on Finite Element methods in Continuum Mechanics. Lisbon, setiembre 1971.
- 12.— Hinton, E., Wood, R.E., Oñate, E. "Preliminary Report on Bridge DECK Analysis Using a Finite Strip Solution", Internal report, BDAR/1/76. Department of Civil Engineering, U.C. Swansea, (País de Gales), mayo 1976.
- 13.— Oñate, E. "A comparison of Finite Strip Methods for the analysis of box girder bridges". M. Sc. Thesis. Civil Eng. Dept. University College of Swansea. 1976.
- 14.— Maisel, B.F. Rowe and Swann, R.A. "Concrete box girder bridges", Struct. Eng. vol. 51, núm. 10 pp. 363-376, octubre 1973.
- 15.— DUNCAN, B. "A finite prism program (A report and user's manual for program PRIS)". Report núm. CR/228/74, noviembre 1974. Centre for Numerical Methods in Engineering, Dept. Civil Engineering. University College of Swansea, Wales.
- 16.— Kabir, A.F. and Scordelis, A.C. CURDI "Computer program for curved bridges on flexible bents". Dept. of Civil Eng. University of California, Berkeley.
- 17.— Scordelis, A.C. "Analysis of continuous box girder bridges", Structural Engineering and Structural Mechanics. Report núm. SESM 67-25, University of California, Berkeley, noviembre 1967.

NOTACION

$\sim$	Referido a una mayúscula indica matriz; en caso contrario indica vector columna.
,	Significa que la cantidad está referida al sistema de coordenadas local.
$\tilde{B}_i^{\ell}$	Matriz de deformación del nodo i para el armónico 1. Relaciona las deformaciones con los desplazamientos nodales.
$\tilde{D} = \begin{bmatrix} \tilde{D}_m & 0 \\ 0 & \tilde{D}_b \end{bmatrix}$	Matriz elástica.
$\tilde{P}, \tilde{S}, \tilde{F}$	Vectores de fuerzas de volumen, de superficie y puntuales, respectivamente.
$K_{ij}^{\ell\ell}$	Matriz de rigidez conectando nodos i y j para el armónico 1.
N_x, N_y, N_{xy} $M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y$	Tensiones resultantes (figura 19).
u, v, w	Desplazamientos en las direcciones x, y, z.
t	Espesor de la banda.
x, y, z	Sistema de coordenadas general (figura 6).
x', y', z'	Sistema de coordenadas local (figura 6).
E_x, E_y, ν_x, ν_y	Módulos de elasticidad y coeficientes de Poisson.

$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	Rotaciones alrededor de los ejes x, y, z.
$\underline{\delta}_i^l, \underline{\epsilon}_i^l, \underline{\sigma}_i^l$	Vectores de desplazamientos, deformaciones y tensión del nodo i para el armónico l.
$\underline{T}_{ij}$	Matriz de transformación de coordenadas del elemento de dirección i-j.
m, b	Indices indicando efectos en el plano o efectos de flexión.
N_i	Función de forma, para el nodo i.