

RECIPROCIDADE DUAL NO MEC: COMPARAÇÃO DE FUNÇÕES LOCAIS E GLOBAIS DE APROXIMAÇÃO PARA PROBLEMAS DE CONVECÇÃO, DE DIFUSÃO E SIMILARES

P. W. PARTRIDGE

*Departamento de Engenharia Civil
Universidade de Brasília
70910-900 Brasília - DF, Brasil*

SUMÁRIO

O uso das funções globais de aproximação , (Elementos do Triângulo de Pascal, funções trigonométricas e outras) no Método de Reciprocidade Dual é comparado com o das funções locais, (potências de r) que são mais conhecidas, para problemas de convecção , difusão e outros para os quais as integrais de domínio encontradas contenham primeiras e segundas derivadas de espaço, derivadas de tempo, somatórios e produtos de funções , incluindo termos não lineares. Será mostrado que, enquanto boas soluções aos problemas considerados possam ser encontradas com o emprego das funções globais, tais soluções dependem muito da função escolhida, entre outros fatores.

SUMMARY

The use of global approximation functions (elements of Pascal's triangle, trigonometric functions and others) in the Dual Reciprocity Method is compared to the use of local functions (r powers), which are better known, for convection, diffusion and other problems for which the relevant domain integrals contain first and second spatial derivatives, time derivatives, function summations and products, including non-linear terms. It will be shown that, while good solutions to the considered problems can be reached with the use of global functions, these solutions rely on the choice of the function, among other factors.

INTRODUÇÃO

O Método de Reciprocidade Dual (DRM) é uma técnica para levar integrais de domínio ao contorno em problemas de Elementos de Contorno, e é empregado em casos onde não existe uma solução fundamental para o problema completo, ou em casos onde esta solução não é conveniente para programação , como ocorre nas soluções em forma

Recibido: Enero 1995

não fechada, por exemplo. O método também pode ser empregado para tratar termos não lineares, incluindo os devido a condições de contorno.

O método foi proposto por Nardini e Brebbia⁵ e um livro coletando aplicações foi publicado por Partridge et al.⁷ DRM é o método que mais alcançou êxito entre as técnicas disponíveis para tratar de integrais de domínio, e é o único método geral além da discretização do domínio do problema em células internas⁵. Empregando as funções locais, $f = 1 + r + r^2 + \dots$, o método é de fácil implementação. A convergência destas funções tem sido demonstrada por Yamada et al.¹⁰.

O método não limita a escolha das funções de aproximação a serem empregadas. No trabalho original sobre o método⁵ a possibilidade do uso das funções globais (Elementos do Triângulo de Pascal, funções trigonométricas e outras) é mencionada, no entanto o uso destas funções tem sido restrito devido à natureza singular ou quase singular das matrizes geradas. Tem sido mostrado recentemente portanto⁵ que estas matrizes possam ser tratadas através de um algoritmo de Decomposição de Valores Singulares, (SVD).

As funções r são chamadas "locais" devido à sua interpolação somente na vizinhança de um ponto enquanto as "globais" interpolam na geometria total do problema.

Cheng et al.⁴ aplicam as funções globais a uma série de problemas nos quais as integrais de domínio são funções de posição e a dois casos nos quais esta integral é uma função não derivada das variáveis do problema. Mostram-se que para estes casos as funções globais produzem resultados precisos e que a convergência delas é melhor do que a das funções locais. Neste trabalho, as funções globais serão aplicadas a (i) difusão, no qual a integral de domínio é uma função de $\partial u / \partial t$; (ii) convecção, na qual a integral de domínio é uma função de $\partial u / \partial x$, e (iii) um problema não linear no qual a integral de domínio é um produto de funções incluindo segundas derivadas das variáveis do problema.

O MÉTODO DE RECIPROCIDADE DUAL

Integrais de domínio em Elementos de Contorno são geradas devido a uma série de efeitos incluindo forças de corpo, condições de contorno, termos não lineares e outros. No que segue, um operador de Laplace será considerado, porém os mesmos argumentos se aplicam a qualquer operador para o qual uma solução fundamental esteja disponível.

Considere-se

$$\nabla^2 u = b \quad (1)$$

sujeito a condições de contorno $u = \bar{u}$ em Γ_1 e $q = \partial u / \partial n = \bar{q}$ em Γ_2 , onde $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$ é o contorno total e n é a normal ao contorno.

O termo b será considerado geral e pode ser uma função de posição, de tempo ou das incógnitas do problema, u , ou de qualquer derivada e pode conter somatórios ou produtos de termos, incluindo termos não lineares. Uma formulação de resíduos ponderados é aplicada para conduzir à equação integral básica

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u - b) u^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) q^* d\Gamma \quad (2)$$

onde Ω é o domínio da solução . u^* é a solução fundamental tal que

$$\nabla^2 u^* = -\Delta \quad (3)$$

onde Δ é a função delta de Dirac. No caso do operador de Laplace $q^* = \partial u^* / \partial n$ e $u^* = 1/(2\pi) \ln(1/r)$ em duas dimensões , r tem o significado usual em Elementos de Contorno.

A equação (2) é integrada duas vezes por partes. Após levar em consideração (3) e agrupando os termos de contorno, obtém-se por um ponto i , chamado de ponto fonte

$$c_i u_i + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma = - \int_{\Omega} b u^* d\Omega \quad (4)$$

onde a constante c_i , que depende da geometria no ponto i , será calculada posteriormente.

A integral de domínio no lado direito será levada ao contorno usando-se o método de Reciprocidade Dual. b é aproximado como segue

$$b \simeq \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j f_j \quad (5)$$

onde $N + L$ é o número total de nós, (contorno mais interior), α_j são uma série de coeficientes incôgnitas, e f_j são um conjunto de funções de aproximação . A chave do método é a existência de um conjunto correspondente de soluções particulares, $\hat{u}$, que no caso do operador de Laplace satisfaçam

$$\nabla^2 \hat{u}_j = f_j \quad (6)$$

O método em si não limita a escolha de f . Na maior parte dos trabalhos publicados até hoje, as funções locais

$$f = 1 + r + r^2 + \dots \quad (7)$$

tem sido empregadas. Estas funções tem-se mostrado fáceis de implementar e bons resultados tem sido obtidos para uma gama considerável de problemas. Cheng et al.⁴ empregam as funções globais

$$\begin{aligned} f &= 1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots \\ f &= 1, \text{sen}(x), \text{sen}(y), \text{sen}(2x), \text{sen}(x)\text{sen}(y), \dots \end{aligned} \quad (8)$$

entre outras. O primeiro conjunto são elementos do triângulo de Pascal, o segundo conjunto consiste de funções trigonométricas. Observa-se que não há somatório nas equações (8).

Substituindo (6) em (5) obtêm-se

$$b = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j (\nabla^2 \hat{u}_j) \quad (9)$$

de tal maneira que

$$\nabla^2 u = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j (\nabla^2 \hat{u}_j) \quad (10)$$

Multiplicando pela solução fundamental e integrando sobre o domínio obtêm-se

$$\int (\nabla^2 u) u^* d\Omega = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \int (\nabla^2 \hat{u}_j) u^* d\Omega \quad (11)$$

integrando duas vezes por partes para cada ponto fonte, i

$$c_i u_i + \int q_i^* u d\Gamma - \int u_i^* q d\Gamma = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j (c_i \hat{u}_{ij} + \int q_i^* \hat{u}_j d\Gamma - \int u_i^* \hat{q}_j d\Gamma) \quad (12)$$

comparando (12) com (4) se pode ver que a integral de domínio tem sido levado ao contorno. Na equação (12) $\hat{q}$ é analógico a q^* , no caso do operador de Laplace, $\hat{q} = \partial \hat{u} / \partial n$.

Discretizando, e empregando um somatório sobre os elementos de contorno, k , em substituição às integrais, obtêm-se para o ponto i

$$c_i u_i + \sum_{k=1}^N H_{ik} u_k - \sum_{k=1}^N G_{ik} q_k = \sum_{j=1}^{N+L} \{ \alpha_j (c_i \hat{u}_{ij} + \sum_{k=1}^N H_{ik} \hat{u}_{kj} - \sum_{k=1}^N G_{ik} \hat{q}_{kj}) \} \quad (13)$$

Após aplicação a todos os nós, a expressão (13) pode ser escrita em forma matricial como

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j (\mathbf{H}\hat{\mathbf{u}}_j - \mathbf{G}\hat{\mathbf{q}}_j) \quad (14)$$

onde $\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$ têm o significado usual do MEC. Observa-se que os termos c_i têm sido colocados no diagonal principal de $\mathbf{H}$ usando $H_{ii} = \sum_{j=1}^N H_{ij}$. Os vetores $\hat{\mathbf{u}}_j$ e $\hat{\mathbf{q}}_j$ são reunidos em matrizes em (14).

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = (\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}})\boldsymbol{\alpha} \quad (15)$$

Se b em (1) for uma função conhecida, $\boldsymbol{\alpha}$ é calculada usando (5), que, em forma matricial fica

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{b} \quad (16)$$

O problema é de dimensão $N \times N$ e soluções em pontos internos são obtidas em separado⁷. Se b for uma função desconhecida de u então (15) é escrita

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = (\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}})\mathbf{F}^{-1}\mathbf{b} \quad (17)$$

e os valores nodais de $\mathbf{b}$ serão consideradas para cada caso, (derivadas de tempo, derivadas de espaço, etc). O problema agora tem dimensão $(N + L) \times (N + L)$ e a solução inclui tanto nós internos quanto de contorno.

No caso das funções globais, as matrizes são obtidas de forma ligeiramente diferente; as fileiras de $\hat{\mathbf{U}}$, $\hat{\mathbf{Q}}$ e $\mathbf{F}$ em (17) dependem das coordenadas dos pontos de campo k mas as colunas são independentes das coordenadas dos pontos de colocação j ; cada coluna destas matrizes é obtida considerando um termo novo da expansão global (8). Então $\hat{\mathbf{U}}$, $\hat{\mathbf{Q}}$ e $\mathbf{F}$ são todas matrizes não simétricas, se funções globais forem empregadas. As funções locais são baseadas em r_{kj} de tal maneira que cada termo das matrizes depende explicitamente das coordenadas de ambos os pontos⁴.

IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Considerando uma função global que consiste em um conjunto de funções de cosseno, cada f_j será dada por

$$f_j = \cos(mx)\cos(ny) \quad (18)$$

as respectivas $\hat{u}_j$ então são

$$\hat{u}_j = -\frac{\cos(mx)\cos(ny)}{m^2 + n^2} \quad (19)$$

Expressões similares valem para conjuntos de seno, e as funções hiperbólicas. Fórmulas para $\hat{u}$ no caso dos termos do Triângulo de Pascal, (8), foram dadas por Cheng et al⁴.

A matriz $\mathbf{F}$ será singular ou quase singular se as funções globais são empregadas em quase todos os casos. Para inverter $\mathbf{F}$ a rotina SVDCMP de Press et al.⁹ pode ser empregada como sugerido por Cheng et al⁴. A técnica SVD é baseado no fato de que qualquer matriz pode ser expressa como

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{V} \quad (20)$$

onde $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ são ortogonais e $\mathbf{W}$ é diagonal, de tal forma que

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{V}^T\mathbf{W}^{-1}\mathbf{U}^T \quad (21)$$

$\mathbf{W}^{-1}$ é fácil de ser determinada devido à natureza diagonal de $\mathbf{W}$. Entretanto, antes de usar (21), na matriz $\mathbf{W}$, armazenada como vetor, deve-se igualar a zero seus elementos que tenham valores menores que a precisão do computador em uso⁹. $\mathbf{W}$ também permite o cálculo do número de condicionamento da matriz sendo invertida.

Não é necessário usar SVD para resolver as equações do sistema, que não serão singulares.

Resultados para as funções $f = 1 + r$, $f = 1 + r^3$ e $f = 1$, x , y , x^2 , xy , y^2 , ... são dados na Tabela I. Os resultados obtidos empregando-se as funções globais estão na coluna "P. Δ ".

	x	y	P. Δ	$f = 1 + r$	$f = 1 + r^3$	Eqn.(4.5)
u_{17}	1.5	0.0	0.223	0.229	0.222	0.223
u_{18}	1.2	-0.35	0.302	0.307	0.299	0.301
u_{19}	0.6	-0.45	0.549	0.555	0.547	0.549
u_{20}	0.0	-0.45	1.001	1.003	1.001	1.000
u_{21}	-0.6	-0.45	1.823	1.819	1.828	1.822
u_{22}	-1.2	-0.35	3.324	3.323	3.330	3.320
u_{23}	-1.5	0.0	4.474	4.489	4.473	4.482
u_{29}	0.9	0.0	0.407	0.411	0.405	0.406
u_{30}	0.3	0.0	0.741	0.745	0.740	0.741
u_{31}	0.0	0.0	1.001	1.002	1.001	1.000
u_{32}	-0.3	0.0	1.351	1.348	1.352	1.350
u_{33}	-0.9	0.0	2.461	2.448	2.465	2.460

TABELA I. Resultados para $\nabla^2 u = -\partial u / \partial x$

Deve ser notado que, enquanto os resultados fornecidos pelas funções globais são mais precisos que os das funções locais, $1 + r^3$ é somente ligeiramente inferior: todos os resultados estão dentro dos padrões de precisão normalmente aceitos na engenharia.

Para este caso, o número de condicionamento da matriz $\mathbf{F}$ para as funções globais foi da ordem 10^{10} , sendo necessário zerar apenas dois termos em $\mathbf{W}$ usando-se precisão simples.

Um conjunto de funções de cosseno

$$f = 1, \cos(x), \cos(y), \cos(2x), \cos(x)\cos(y), .. \quad (27)$$

foi tentado em seguida. O número de condicionamento da matriz fica agora 10^{28} e é necessário zerar todos os termos de $\mathbf{W}$ menos 12. Os resultados obtidos serão omitidos: erros de até 50% foram observados.

Difusão

Considera-se a equação isotrópica

$$\nabla^2 u = \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (28)$$

para a qual a equação DRM (17) fica

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = (\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}})\mathbf{F}^{-1} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \quad (29)$$

Os valores nodais da derivada de tempo são computados com uma aproximação simples de diferenças finitas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t}(u_{t+\Delta t} - u_t) \quad (30)$$

onde Δt é o passo de tempo. Colocando $\mathbf{C} = (\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}})\mathbf{F}^{-1}$, $u = (u_{t+\Delta t} + u_t)/2$ e $q = q_{t+\Delta t}$ a equação final obtida é

$$\left(\frac{2}{\Delta t}\mathbf{C} + \mathbf{H}\right)\mathbf{u}_{t+\Delta t} - 2\mathbf{G}\mathbf{q}_{t+\Delta t} = \left(\frac{2}{\Delta t}\mathbf{C} - \mathbf{H}\right)\mathbf{u}_t \quad (31)$$

da qual se pode obter $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$. Colocando $\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_{t+\Delta t}$ pode-se prosseguir para um novo passo de tempo. Este processo pode ser repetido tantas vezes quanto desejado.

O problema considerado é de uma placa quadrada a 30° esfriada pela aplicação de um choque térmico, ($u = 0$ no contorno). Este problema foi proposto por Bruch e Zyvoloski³. A geometria é mostrada na Figura 2.

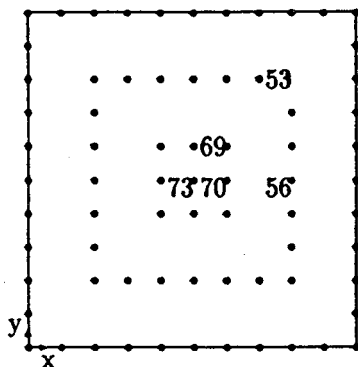


Figura 2. Discretização para o problema de difusão

Os valores numéricos adotados foram $L_x = L_y = 3$, $K_x = K_y = 1.25$ e $u_0 = 30$.

O problema foi resolvido com $\Delta t = 0.05$. Os resultados usando uma função local $f = 1 + r^3$ são comparados com os obtidos empregando uma expansão global de funções de seno na Tabela II no tempo $t = 1.2$ para os nós numerados na Figura 2. A solução exata é de Bruch e Zyvoloski³.

	x	y	$f = 1 + r^3$	seno glob.	Exact
u_{56}	2.4	1.5	1.054	1.047	1.065
u_{53}	2.4	2.4	0.614	0.623	0.626
u_{70}	1.8	1.5	1.714	1.710	1.723
u_{69}	1.8	1.8	71.628	1.642	1.639
u_{73}	1.5	1.5	1.804	1.800	1.812

TABELA II. Difusão : Resultados em $t = 1.2$

Neste caso as funções globais e locais se mostram igualmente precisas.

No caso das funções globais, o número de condicionamento da matrix $\mathbf{F}$ é 10^9 de tal maneira que somente três termos de $\mathbf{W}$ foram zerados. Empregou-se precisão simples.

Em seguida testou-se uma expansão global baseada nos termos do triângulo de Pascal para o mesmo problema. No caso da discretização mostrada acima, ($N = 40$, $L = 33$), o algoritmo SVD não alcançou convergência. Eliminaram-se portanto 20 nós internos numa tentativa de melhorar o condicionamento. Apesar de um número de condicionamento de apenas 10^9 na matriz $\mathbf{F}$ resultante, um erro médio de 15% nos resultados em $t = 1.2$ foi observado.

Problema material não linear

Este tipo de problema em transferência de calor costuma ser resolvido empregando a transformada de Kirchhoff¹. Esta transformada elimina as integrais de domínio tornando o problema linear. Entretanto, se uma condição de contorno do “terceiro tipo” estiver presente, mesmo usando a transformada de Kirchhoff, a solução precisa ser iterativa. Com DRM, a solução sempre é iterativa para quaisquer condições de contorno. O estudo deste problema foi importante para o desenvolvimento de DRM porque conduziu a uma técnica de representação das segundas derivadas, depois empregada na solução de outros problemas importantes tais como as equações de Navier-Stokes tridimensionais⁸. A primeira solução usando DRM a este problema foi de Partridge⁶.

A equação considerada é

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ k(u) \frac{\partial u}{\partial y} \right\} = 0 \quad (32)$$

sujeita a

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} \quad \text{em } \Gamma_1 \\ q &= k \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} \quad \text{em } \Gamma_2 \\ q &= h(u_f - u) \quad \text{em } \Gamma_3 \end{aligned} \quad (33)$$

Nas equações acima, k é uma função conhecida de temperatura, u ; h é um coeficiente de transferência de calor e u_f é a temperatura de um fluido em contato com Γ_3 .

Considere-se o caso de $k = k_0(1 + \beta u)$ em (32).

Para obter uma expressão que possa ser tratada com DRM é necessário isolar no lado esquerdo o operador de Laplace e quaisquer outras expressões no lado direito. Há muitas maneiras de fazer isto no presente caso; uma possibilidade é

$$\nabla^2 u = -\frac{1}{\beta u} \nabla^2 u - \frac{1}{u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (34)$$

A aproximação DRM para segundas derivadas pode ser obtida diferenciando (23)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial x^2} \beta \quad (35)$$

uma vez que $\beta = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{u}$ então

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial x^2} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u} \quad (36)$$

O vetor $\mathbf{b}$ em (17) fica

$$\mathbf{b} = - \left\{ \mathbf{U} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial y^2} \right) \mathbf{F}^{-1} + \left(\mathbf{U}_x \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \mathbf{U}_y \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \right) \mathbf{F}^{-1} \right\} \mathbf{u} \quad (37)$$

onde $\mathbf{U}$ é uma matriz diagonal contendo valores nodais de $1/\beta u$, $\mathbf{U}_x$ é uma matriz diagonal contendo valores nodais de $\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial x}$. Uma definição similar vale para $\mathbf{U}_y$. Todos os valores de u empregados para calcular $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}_x$ e $\mathbf{U}_y$ são obtidos de uma iteração anterior.

Colocando-se

$$\mathbf{S} = -(\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}})\mathbf{F}^{-1} \left\{ \mathbf{U} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial y^2} \right) \mathbf{F}^{-1} + \left(\mathbf{U}_x \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \mathbf{U}_y \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \right) \mathbf{F}^{-1} \right\} \quad (38)$$

a equação matricial final fica

$$(\mathbf{H} - \mathbf{S})\mathbf{u} = \mathbf{G} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \right) \quad (39)$$

O processo começa com $\mathbf{S} = 0$, é a equação de Laplace é resolvida. Em cada iteração subsequente, a matriz $\mathbf{S}$ é calculada empregando valores de u da iteração anterior.

Uma condição de contorno do terceiro tipo pode ser levada em conta, observando-se que

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{h}{k}(u_f - u) \quad (40)$$

Substituindo-se (40) em (39) obtém-se

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{e} + \mathbf{G}\mathbf{E}\mathbf{u} = \mathbf{S}\mathbf{u} \quad (41)$$

Em (41) $\mathbf{e}$ é um vetor contendo valores nodais de hu_f/k e $\mathbf{E}$ é uma matriz diagonal contendo valores nodais de h/k . A expressão $k = (1 + \beta u)$, é obtida usando-se valores de u da iteração anterior. (41) é empregada somente em Γ_3 , (39) é usada nos demais contornos.

O problema estudado é mostrado na Figura 3.

Para este problema, $k = k_0(1 + \beta u)$, $k_0 = 1$ e $\beta = 0.3$. Para a condição de contorno do terceiro tipo $h = 10$ e $u_f = 500$, as condições de contorno restantes são mostradas em Figura 3. A função local $f = 1 + r^3$ foi empregada com 25 nós internos com espaçamento igual. Elementos constantes foram empregados. A solução convergiu em 5 iterações e é mostrada na Tabela III, junto com uma solução obtida com a transformada de Kirchhoff que será considerada exata, porque usou-se uma técnica "pura" de MEC

sem aproximações adicionais. Uma solução usando a função global baseada em senos também é mostrada.

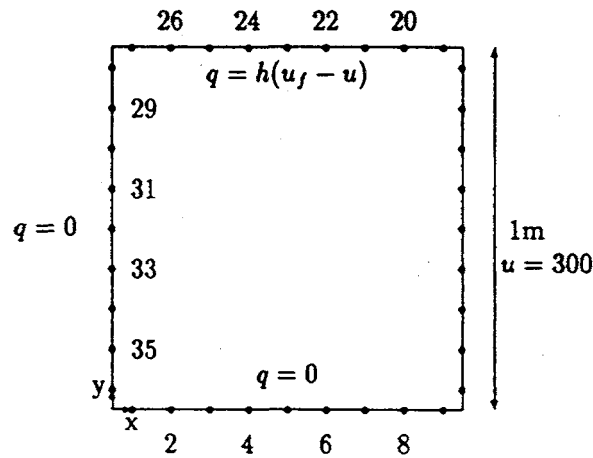


Figura 3. Problema material não linear

Nó	Local $f = 1 + r^3$	Global seno	Transformada de Kirchhoff
2	306.76	308.52	306.79
4	305.79	306.70	305.79
6	304.10	304.66	304.08
8	301.89	302.35	301.84
20	307.00	306.85	306.93
22	311.71	311.75	311.61
24	314.47	314.60	314.33
26	315.93	316.12	315.71
29	313.30	313.64	313.14
31	310.31	310.86	310.22
33	308.31	309.23	308.28
35	307.18	308.80	307.25

TABELA III. Resultados para u : Problema material não linear

O número de condicionamento da matriz $\mathbf{F}$ para a solução com funções globais é 10^{21} ; 16 termos de $\mathbf{W}$ foram zerados. Dificuldades consideráveis foram encontradas para se obter uma solução com estas funções. Uma técnica de relaxação foi empregada, a qual não é necessária com as funções locais. A solução levou 21 iterações para convergir. Expansões globais baseadas no triângulo de Pascal e em cossenos com várias densidades de nós internos foram tentadas sem êxito.

Neste caso, a função local $f = 1 + r^3$ é mais precisa: o erro maior na solução local é de 0.06% e o erro maior na solução global sendo de 0.5%, é 10 vezes maior. Ambas as soluções estão portanto bem dentro da precisão usual aceita na engenharia.

CONCLUSÕES

Neste trabalho o uso das funções de aproximação $f = 1 + r + r^2 + \dots$ chamadas locais foi comparado com o uso das funções globais baseadas em elementos do triângulo de Pascal, senos e outros. Casos com integrais de domínio incluindo primeiras e segundas derivadas, derivadas de tempo, somatórios e produtos de funções e termos não lineares foram considerados. Pode-se concluir que:

- (i) Para casos onde se pode encontrar uma solução empregando as funções globais, aquela solução pode ser mais precisa que as soluções obtidas usando-se as funções r , porém deve se lembrar que é possível melhorar as soluções com funções locais, escolhendo diferentes termos: em alguns casos $f = 1 + r^3$ tem se mostrado melhor que $f = 1 + r$, por exemplo.
- (ii) A existência de uma solução aceitável através de funções globais para um determinado problema depende de várias fatores, principalmente (a) a função escolhida e (b) o tamanho e a geometria do problema.

O número de condicionamento em $\mathbf{F}$ não depende das *equações do problema*. A existência de uma solução aceitável parece depender no número de elementos de $\mathbf{W}$ a serem zerados, se este número for grande comparado à ordem da matriz, sucesso é improvável. Este fato significa que uma dada função global pode funcionar para uma geometria e não para outra, para a mesma equação de problema.

- (iii) Dificuldades em obter convergência foram encontradas no caso do problema de material não linear empregando as funções globais: neste caso, a função local $f = 1 + r^3$ se mostrou superior.

Este autor sugere que, enfrentando um novo problema com DRM, que se tentem primeiro as funções locais. Com estas funções se tem resolvido um grande número de problemas de engenharia e elas são muito mais fáceis de implementar. Se a solução assim obtida se mostra insatisfatória, as funções globais podem ser tentadas, porém será necessário fazer testes para determinar qual é a mais apropriada por um caso determinado; em geral será aquela que produz a matriz $\mathbf{F}$ com o menor número de condicionamento.

REFERÊNCIAS

1. R. Bialecki e A.J. Nowak, "Boundary value problems for non-linear material and non-linear boundary conditions", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 5, pp. 417-421, (1981).
2. C.A. Brebbia, "The Boundary Element Method for Engineers", Pentech Press, London, (1978).
3. J.C. Bruch e G. Zyzolowski, "Transient Two Dimensional Heat Conduction Problems solved by the Finite Element Method", *IJNME*, Vol. 8, 3, pp. 481-494, (1974).
4. A.H.D. Cheng, O. Lafe e S. Grilli, "Dual Reciprocity Boundary Element Method based on Global Interpolation Functions", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, no prelo, (1994).

5. D. Nardini e C.A. Brebbia, "A New Approach for Free Vibration Analysis using Boundary Elements", *Boundary Element Methods in Engineering*, (Ed. C. A. Brebbia), Springer-Verlag, Berlin e N. York, pp. 312-326, (1982).
6. P.W. Partridge, "Non-linear Material Problems with BEM: Dual Reciprocity v. the Kirchhoff Transformation", *BEM XIII*, Tucson, Arizona, EUA, pp. 31-42, (1991).
7. P.W. Partridge, C.A. Brebbia e L.C. Wrobel, "The Dual Reciprocity Boundary Element Method", *Computational Mechanics Publications e Elsevier*, Southampton e Boston, (1992).
8. H. Power e P.W. Partridge, "The use of Stokes' Fundamental Solution for the Boundary Only Element Formulation of the 3D Navier Stokes Equations for Moderate Reynolds Numbers", *IJNME*, Vol. **37**, pp. 1825-1840, (1994).
9. W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky e W.T. Vetterling, "Numerical Recipes", Cambridge University Press, (1989).
10. T. Yamada, L.C. Wrobel e H. Power, "On the Convergence of the Dual Reciprocity Boundary Element Method", *Eng. Analysis with Boundary Elements*, Vol. **13**, pp. 291-298, (1994).