

CONSIDERACIONES SOBRE LOS MODELOS NUMERICOS DE DISTRIBUCION PARA EL ANALISIS DE LA FISURACION DEL HORMIGON

JAVIER OLIVER
y
JOSE R. FERNANDEZ ROURE

*E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Jordi Girona Salgado, 31
08034 BARCELONA
ESPAÑA*

RESUMEN

Se analizan los modelos de distribución para el análisis de la fisuración del hormigón por el Método de los Elementos Finitos profundizando en el significado del concepto de distribución y en sus implicaciones numéricas. Se establece una longitud característica, consistente con la disipación correcta de la energía de fractura, que permite el paso de ecuaciones constitutivas del tipo tensión-desplazamiento al tipo tensión-deformación. Se presentan diversos ejemplos numéricos de aplicación del modelo propuesto en los que se analizan la convergencia con el tamaño y deformación de la malla, la influencia del orden de integración y se comparan los resultados con otras formulaciones.

SUMMARY

In this paper, smeared models for cracking analysis of concrete are analyzed emphasizing on the smeared concept and its numerical implications. A characteristic length, consistent with the correct fracture energy dissipation is derived. That allows for passing from stress-displacement type to stress-strain type constitutive equations. Several numerical examples of the application of the proposed model are presented, in which convergency with size and mesh deformation, influence of the numerical integration order, and comparation with other formulations are studied.

INTRODUCCION

En los últimos años se ha dedicado un creciente esfuerzo al desarrollo de modelos numéricos para simular el comportamiento de materiales friccionales como son los suelos o el hormigón¹⁻⁹. En este último caso, un área de estudio de gran interés es la relativa a los fenomenos de daño como son la fisuración o el aplastamiento. La experiencia demuestra que ambos tipos de daño aparecen en

Recibido: Septiembre 1987

la realidad en una forma discreta o localizada dentro del dominio del sólido en el que se producen, concentrándose en una zona infinitesimal, al menos desde una observación macroscópica del fenómeno, y produciéndose discontinuidades en la zona de localización.

En lo que sigue nos referiremos fundamentalmente a los modelos que pretenden simular la fisuración del hormigón, aunque posiblemente gran parte de ello sea aplicable a cualquier modelo de daño localizado con carácter direccional. Existen en la actualidad dos grandes grupos de técnicas para el análisis de la fisuración del hormigón: las basadas en la Mecánica de Fractura clásica y las que utilizan el concepto de distribución del daño. En general ambas técnicas utilizan como herramienta de cálculo el Método de los Elementos Finitos, circunstancia que supondremos en el resto de este trabajo.

A grandes rasgos, en las técnicas de Mecánica de Fractura la aparición de una fisura se introduce mediante singularidades en la malla de elementos finitos. El modelo numérico detecta la situación de la fisura, y la malla va acomodándose a la misma incorporando sus labios al contorno exterior del sólido discretizado. La progresión de la fisura va modificando las "condiciones de contorno" del sólido analizado y no su ecuación constitutiva que se mantiene constante en todos los puntos⁸.

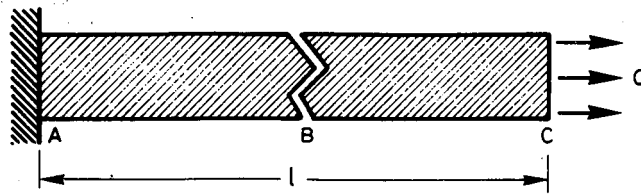
Nuestro interés se centra en el segundo grupo de técnicas citado (técnicas de distribución) que pueden constituir una alternativa a los métodos de Mecánica de Fractura aunque presentan una problemática específica que vamos a estudiar en las siguientes apartados.

EL CONCEPTO DE DISTRIBUCION DE LA FISURACION

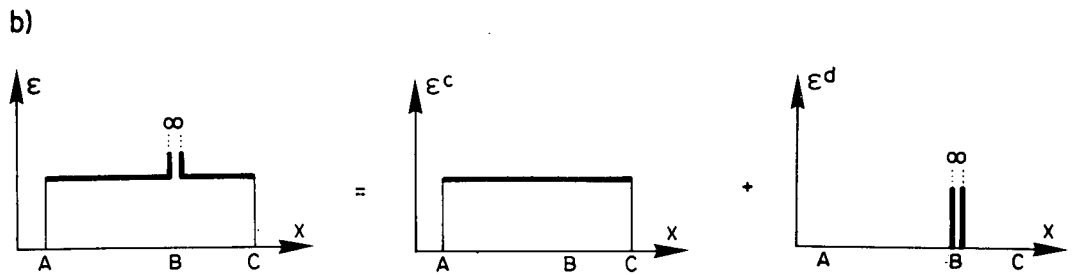
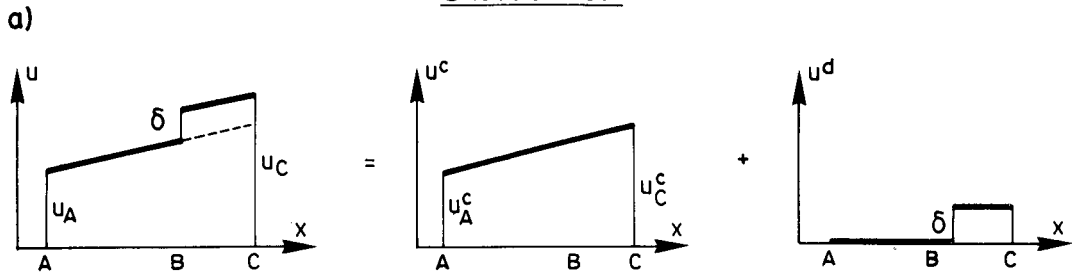
A diferencia de la Mecánica de Fractura, en las técnicas de distribución se intenta simular una discontinuidad física como es una fisura (con discontinuidad de los desplazamientos en los labios de la misma) mediante una malla de elementos finitos que permanece inalterada durante el análisis (aunque susceptible de ser refinada en análisis posteriores más precisos). Además, se desea utilizar para ello elementos con continuidad C_0 que proporcionan campos de desplazamientos continuos, y por consiguiente valores finitos de la deformación, en el interior de cada elemento. La contradicción existente entre modelar la deformación infinita producida por el desplazamiento discontinuo entre los dos labios de la fisura, y hacerlo con elementos de deformación finita, queda resuelta por:

- a) la "distribución" del desplazamiento discontinuo de la fisura sobre todo el elemento y
- b) el concepto de refinamiento al límite de la malla.

El esquema de la Figura 1 puede resultar ilustrativo al respecto. Imaginemos una barra de longitud l , sometida a un estado uniaxial de tensiones, en la que aparece una fisura cuyos labios se desplazan una cantidad δ . Admitamos que, salvo



Situación real



Situación distribuida

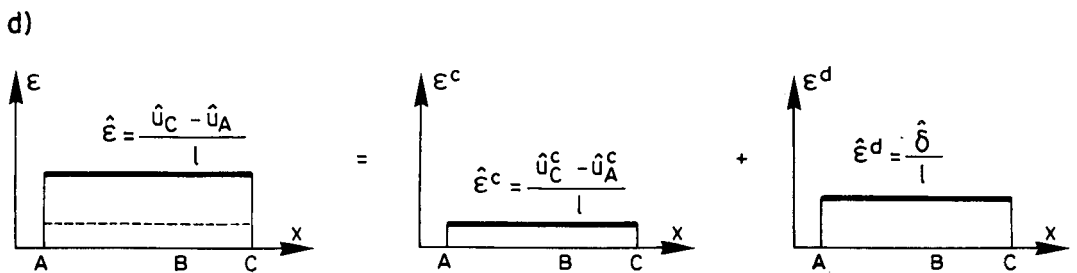
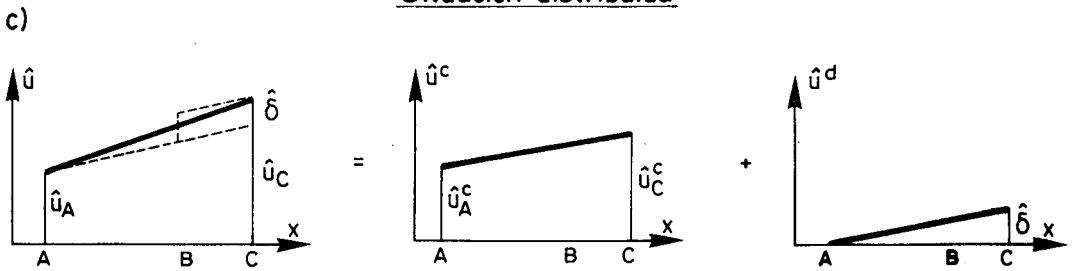


Figura 1. Esquematización de los campos de desplazamientos y de deformaciones para una barra a tracción.

en la zona de la fisura, el comportamiento del material es elástico. En la Figura 1.a, podemos observar el campo de desplazamientos producido en el que hay una discontinuidad de valor δ . Este campo de desplazamientos se puede descomponer de la forma:

$$u = u^c + u^d \quad (1)$$

donde u^c es el desplazamiento continuo que se produciría si no existiese la fisura y u^d es el desplazamiento discontinuo producido por la fisura. El campo de deformaciones real ($\varepsilon = \frac{du}{dx}$) tiene una singularidad en la fisura y, de nuevo, puede descomponerse en el campo de deformación correspondiente a u^c ($\varepsilon^c = \frac{du^c}{dx}$) y el correspondiente a u^d ($\varepsilon^d = \frac{du^d}{dx}$) (Figura 1.b).

Consideremos ahora el análisis de la barra por el Método de los Elementos Finitos y un elemento lineal, de extremos en A y C, que pretende representar el comportamiento de la fisura. Sea \hat{u} el campo de desplazamientos que proporciona dicho elemento (Figura 1.c).

Los desplazamientos \hat{u}_A y \hat{u}_C en los nodos podrán ajustarse a los de los correspondientes puntos de la barra, pero no así en el interior del elemento debido a la continuidad del campo de desplazamientos que proporciona el M.E.F. Podemos establecer de nuevo una descomposición del campo de desplazamientos como suma del que se tendría si no hubiese fisuración (\hat{u}^c) y de otro asociado a la fisuración \hat{u}^d ($\hat{u}^d = \hat{u} - \hat{u}^c$).

Obsérvese que ahora tanto los campos de desplazamientos como los de deformaciones (Figura 1.d) son continuos y finitos en el interior del elemento, y que el desplazamiento discontinuo se "distribuye" en el mismo asignándose a cada punto del interior del elemento una cierta parte del desplazamiento de los labios de la fisura $\hat{\delta}$.

Si introducimos los mecanismos necesarios, podemos esperar que, con el refinamiento de la malla, a medida que los puntos A y C tienden al B y $l \rightarrow 0$, el campo de desplazamientos \hat{u}^c tienda a un valor constante ($\hat{u}_A^c \rightarrow \hat{u}_C^c$), mientras que los desplazamientos de los nodos extremos \hat{u}_A y \hat{u}_C tiendan a valores distintos:

$$(\hat{u}_C - \hat{u}_A) \rightarrow \hat{\delta}$$

Naturalmente ésto obligará a que el campo de deformaciones total continuo ($\hat{\varepsilon}^c$) tienda a cero:

$$\lim_{l \rightarrow 0} \hat{\varepsilon}^c = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\hat{u}_C^c - \hat{u}_A^c}{l} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{0}{l} = 0$$

y que el campo de deformaciones total tienda a infinito:

$$\lim_{l \rightarrow 0} \hat{\epsilon} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\hat{u}_C - \hat{u}_A}{l} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\hat{\delta}}{l} = \infty$$

$$\lim_{l \rightarrow 0} \hat{\epsilon} = \lim_{l \rightarrow 0} \epsilon^d = \infty$$

En estas condiciones, y en el límite, el elemento finito podrá modelar un campo de deformaciones infinitas como correspondería a una fisura discreta.

Obsérvese finalmente que, en el esquema propuesto, no tiene ninguna relevancia la situación de la fisura dentro del elemento.

A la vista de lo expuesto, parece evidente que, para representar correctamente el comportamiento de la fisura, debe introducirse en el modelo una ecuación constitutiva que produzca en el elemento fisurado deformaciones infinitas (o que sean al menos muy grandes con un nivel de tensiones finito). Tradicionalmente, ésto se consigue considerando una relación tensión-deformación con ablandamiento como la de la Figura 2²⁻⁷ donde f'_t es la resistencia máxima a tracción del hormigón que determina el umbral de fisuración.

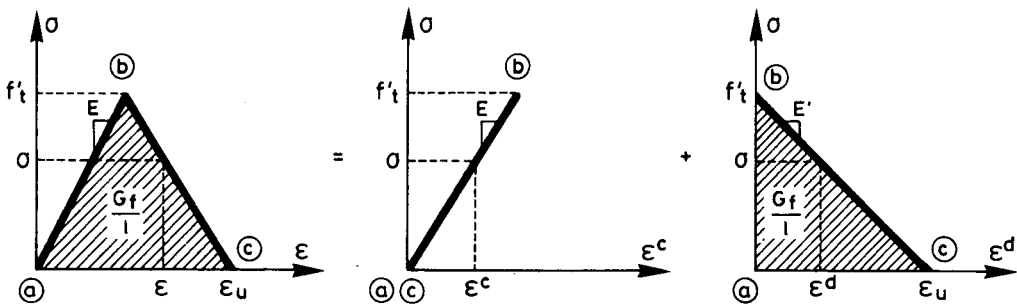


Figura 2. Descomposición de la fisuración en los modelos de distribución.

De acuerdo con los razonamientos expuestos anteriormente, la deformación en el interior del elemento, más allá del umbral de fisuración, suele descomponerse en una deformación continua, que tiene asociada un comportamiento elástico, y una deformación discontinua asociada a la fisuración del elemento:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{para } \epsilon < \frac{f'_t}{E}$$

$$\epsilon = \epsilon^c + \epsilon^d \quad \epsilon^c = \frac{\sigma}{E} \quad \text{para } \epsilon > \frac{f'_t}{E}$$

ENERGIA DE FRACTURA. OBJETIVIDAD DE LOS RESULTADOS RESPECTO A LA MALLA DE ELEMENTOS FINITOS

En Mecánica de Fractura se define el parámetro “energía de fractura” G_f como una propiedad del material consistente en la energía disipada al crear una fisura, por unidad de área de la misma. Siguiendo con un esquema unidimensional, con deformación constante dentro de un elemento, la energía disipada por el elemento que representa a la fisura, una vez que ésta se ha producido en su totalidad (más allá del punto c en los diagramas de la Figura 2), puede expresarse como:

$$W = A \int_0^l \left(\int_a^c \sigma d\varepsilon \right) \cdot dx = A \cdot l \int_a^c \sigma d\varepsilon^d = A \cdot G_f \quad (2)$$

donde A es el área de la sección transversal del elemento, y “ l ” la longitud del mismo; en consecuencia:

$$\int_a^c \sigma d\varepsilon = \int_a^c \sigma d\varepsilon^d = \frac{G_f}{l} \quad (3)$$

lo que manifiesta que el área encerrada por la curva $\sigma - \varepsilon$ o $\sigma - \varepsilon^d$ toma el valor $\frac{G_f}{l}$. Si admitimos que la tensión de fisuración f'_t , la energía de fractura G_f y la forma de la curva de relajación son propiedades del material, la deformación última ε_u (ver Figura 2) queda perfectamente determinada como:

$$\varepsilon_u = \frac{2 \cdot G_f}{l \cdot f'_t} \quad (4)$$

Tal circunstancia conduce a la paradoja de que la ecuación constitutiva depende del tamaño del elemento l y que, a medida que se produce el refinamiento de la malla ($l \rightarrow 0$), la rama descendente del diagrama tensión deformación tiende a ponerse horizontal. Si suponemos que hay convergencia con el refinamiento hacia la situación real, llegamos a la conclusión de que, en el límite, no existe ablandamiento en la ecuación constitutiva tensión-deformación de la zona dañada (Figura 3). Tal circunstancia ha sido puesta de manifiesto tanto por razonamientos físicos como termodinámicos¹¹. La dependencia de la ecuación constitutiva con el tamaño de la malla aparece entonces como un concepto que tiende a desaparecer con el refinamiento de la malla, pero que es necesario introducir para garantizar la disipación correcta de energía para discretizaciones finitas. En efecto, la no introducción de este concepto en un modelo numérico como el explicado, produce resultados no objetivos respecto a la discretización en el sentido de que no hay convergencia con el refinamiento de la malla y de que la diferencia de resultados obtenidos con mallas distintas es mucho mayor que la esperada por el simple error de discretización^{2,3,4}.

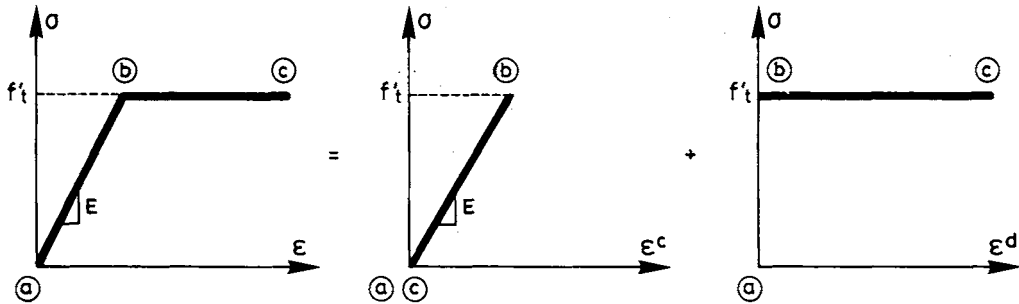


Figura 3. Descomposición de la deformación en el límite de la discretización.

LONGITUD CARACTERISTICA

La necesidad de resolver problemas más complejos que el unidimensional, hasta aquí considerado, ha llevado al desarrollo de diversos modelos numéricos para el tratamiento de la fisuración del hormigón en dos y tres dimensiones²⁻⁷. Aunque el tratamiento matemático puede ser distinto, en general se encuentran ciertas características comunes a todos ellos como son:

- a) Definición de un dominio elástico para las relaciones tensión-deformación en un punto determinado del sólido.
- b) Definición de un umbral de fisuración. En los modelos puramente plásticos⁶ éste coincide con una superficie de fluencia plástica.
- c) Identificación de las direcciones de fisuración. Los modelos anisótropos las identifican con la dirección de aquella tensión principal que alcanza el umbral de fisuración^{4,7}. En otros modelos plásticos las direcciones de fisuración vienen asociadas a las deformaciones plásticas principales⁶.
- d) Establecimiento de una ecuación constitutiva para el material fisurado. Esta ecuación contempla la descomposición de la deformación en una componente "elástica" y una componente de "fisuración" o "plástica".

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^f \tag{5}$$

La ecuación constitutiva viene gobernada en último extremo por una relación tensión-deformación uniaxial como la indicada en la Figura 2.

La introducción de la energía de fractura no resulta tan evidente como en los casos unidimensionales. De alguna manera se introduce en la ecuación constitutiva el tamaño del elemento con lo que se denomina "longitud característica" parámetro que se determina muchas veces de una forma "mágica" o heurística. Así, nos encontramos en la literatura con definiciones de dicha longitud característica como:

- La longitud de los lados de un elemento (con algún factor que toma en cuenta la inclinación de la fisura)².

- La raíz cuadrada (o cúbica en problemas tridimensionales) del área (o volumen) de influencia de un punto de integración^{5,6,7}.
- La intersección de la tensión principal máxima con una elipse asociada a cada punto de integración¹⁰.

En los siguientes apartados se presenta una metodología que pretende unificar el tratamiento en problemas bi y tridimensionales desde una perspectiva más global.

ECUACION CONSTITUTIVA TENSION-DESPLAZAMIENTO

Este concepto fue introducido por Hillerborg¹ en el llamado modelo de la "fisura ficticia". El punto de partida consiste en establecer dos tipos de ecuaciones constitutivas. Una, para los puntos del sólido que no fisuran, según una relación tensión-deformación elástica, elastoplástica etc. A partir del instante en que se alcanza el umbral de fisuración en un punto, se establece para el mismo otra ecuación constitutiva que relaciona las tensiones en los labios de la fisura con los desplazamientos relativos de los mismos. En este trabajo sólo atenderemos a la relación entre la tensión normal a la fisura y la apertura de la misma (modo de fractura I) según se indica en la Figura 4. Una vez alcanzado el umbral de fisuración f'_t la tensión decrece con la apertura de la fisura hasta relajarse totalmente. De nuevo se establece que el área delimitada por la curva $\sigma - w$ sea la energía de fractura G_f .

$$G_f = \int_0^{\infty} \sigma dw$$

Hay diversos argumentos a favor y en contra de la utilización de una ecuación constitutiva tensión-desplazamiento como la indicada. Por una parte, esta relación puede ser obtenida de forma directa y fiable de un ensayo. Por el contrario, la interpretación de un ensayo para la obtención de una ecuación constitutiva tensión-deformación pasa por la traducción de una medida objetiva, como es el desplazamiento, a una medida subjetiva como es la deformación. La localización produce valores infinitos de esta deformación en la zona de la fisura y discontinuidad de los desplazamientos en la misma, y además el tamaño finito de las galgas extensométricas hace que, en el mejor de los casos, la información obtenida con ellas incluya un promedio entre la deformación de las zonas fisuradas y no fisuradas en las que se asienta la galga.

Por otra parte, una ecuación constitutiva tensión-desplazamiento no encaja muy bien en el contexto de la Mecánica de Sólidos y de la teoría matemática desarrollada para ecuaciones constitutivas, y, en nuestra opinión, queda todavía un importante trabajo por hacer en este aspecto. En todo caso, la verdadera ecuación constitutiva que subyace detrás del modelo no afecta demasiado al tema de este artículo. Como se verá a continuación puede partirse de una ecuación constitutiva en desplazamientos y obtener, a través de un esquema de distribución, una ecuación constitutiva en deformaciones.

FUNCION DE DISTRIBUCION

Consideremos un estado bidimensional de tensiones y un elemento que pretende reproducir el comportamiento de la fisura (ver Figura 4). Establecemos las siguientes hipótesis:

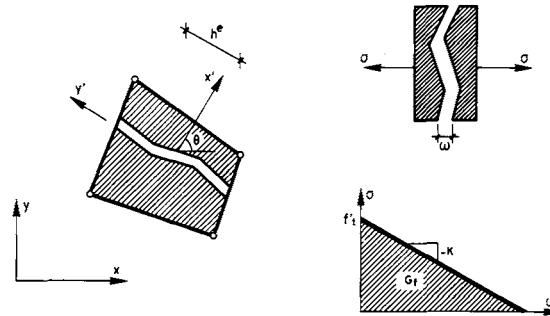


Figura 4. Modelo bidimensional de fisuración.

a.- Descomposición del campo de desplazamientos aproximado que proporciona el M.E.F. en el interior del elemento en su parte continua (elástica) y discontinua, así como la correspondiente descomposición de las deformaciones.

$$u = u^c + u^d$$

$$\epsilon = \epsilon^c + \epsilon^d$$

o, en forma incremental:

$$du = du^c + du^d$$

$$d\epsilon = d\epsilon^c + d\epsilon^d \tag{6}$$

El vector u^c corresponde a los desplazamientos que proporcionaría el elemento de no existir la fisura y u^d representa el campo de desplazamientos "discontinuo" que se halla distribuido en forma continua sobre todo el elemento.

Consideremos las direcciones locales x', y' normal y tangencial a la fisura. El desplazamiento en la dirección x' es:

$$u_{x'} = u_{x'}^c + u_{x'}^d \tag{7}$$

y la deformación:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x'} &= \frac{\partial u_{x'}}{\partial x'} = \varepsilon_{x'}^c + \varepsilon_{x'}^d \\ \varepsilon_{x'}^c &= \frac{\partial u_{x'}^c}{\partial x'} \\ \varepsilon_{x'}^d &= \frac{\partial u_{x'}^d}{\partial x'} \end{aligned} \tag{8}$$

Al campo de desplazamientos $u_{x'}^d$, al representar la apertura de la fisura (considerada como una magnitud positiva), le exigimos además que sea positivo en todos los puntos del elemento.

b.- Una ecuación constitutiva “standard” (elástica , elastoplástica etc.) entre las tensiones y las deformaciones “continuas”:

$$d\sigma = D^c \cdot d\varepsilon^c \tag{9}$$

c.- Una ecuación constitutiva tensión-desplazamiento, entre la tensión normal a la fisura $\sigma_{x'}$ y el correspondiente desplazamiento discontinuo en cada punto $u_{x'}^d$, similar a la establecida en el modelo de la “fisura ficticia”¹ (ver Figura 5):

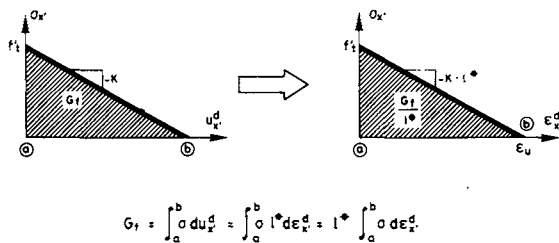


Figura 5. Ecuación constitutiva tensión-desplazamiento y tensión-deformación.

$$d\sigma_{x'} = -K \cdot du_{x'}^d \tag{10}$$

d.- Hipótesis de distribución. El desplazamiento $u_{x'}^d$ será función de la posición del punto considerado y del valor de las incógnitas nodales del elemento \mathbf{a} . La hipótesis de distribución establece que esta dependencia sea a través de dos funciones desacopladas: una función de distribución $\Phi(x', y')$ y un parámetro indicativo de la apertura de la fisura $w(\mathbf{a})$:

$$u_{x'}^d(x', y', \mathbf{a}) = \Phi(x', y') \cdot w(\mathbf{a}) \tag{11}$$

donde la función Φ debe ser adimensional y positiva en todos los puntos.

De las ecuaciones (8) y (11):

$$\varepsilon_{x'}^d = \frac{\partial u_{x'}^d}{\partial x'} = \frac{\partial \Phi(x', y')}{\partial x'} \cdot w(\mathbf{a}) \quad (12)$$

$$w(\mathbf{a}) = \frac{\varepsilon_{x'}^d}{\frac{\partial \Phi(x', y')}{\partial x'}} \quad (13)$$

y sustituyendo (13) en (11)

$$u_{x'}^d = \frac{\Phi}{\frac{\partial \Phi}{\partial x'} \cdot \varepsilon_{x'}^d} \quad (14)$$

Denominamos "longitud característica" l^* a:

$$l^*(x', y') = \frac{\Phi}{\frac{\partial \Phi}{\partial x'}} \quad (15)$$

con lo que la ecuación (14) queda:

$$u_{x'}^d = l^*(x', y') \cdot \varepsilon_{x'}^d \quad (16)$$

o de forma incremental:

$$du_{x'}^d = l^*(x', y') \cdot d\varepsilon_{x'}^d \quad (17)$$

Finalmente, sustituyendo (17) en (10):

$$d\sigma_{x'} = -K \cdot l^*(x', y') \cdot d\varepsilon_{x'}^d \quad (18)$$

de la que una transformación a los ejes globales permite obtener una relación incremental entre los vectores de tensiones y deformaciones "discontinuas" de la forma:

$$d\sigma = D^d \cdot d\varepsilon^d \quad (19)$$

Las ecuaciones (6), (9) y (19) permiten recuperar el tratamiento clásico de la fisuración en los modelos de distribución comentados con anterioridad.

Sobre la hipótesis de distribución conviene destacar los siguientes aspectos:

- 1.- La hipótesis fundamental es el desacoplamiento entre la dependencia espacial y de las incógnitas nodales establecida para el campo de desplazamientos

“discontinuo” en la ecuación (11). Las demás expresiones se deducen de mera manipulación matemática.

- 2.- La longitud característica de la ecuación (15) constituye una “longitud de promedio” que permite pasar de desplazamientos a deformaciones en la ecuación (16).
- 3.- El valor de la longitud característica es propio de cada punto del elemento y varía con la orientación de la fisura (derivada respecto a x' en la ecuación (15)).
- 4.- La hipótesis de distribución permite pasar de una ecuación constitutiva tensión-desplazamiento (10), a una ecuación tensión-deformación como la de las ecuaciones (18) y (19) (ver Figura 5). Atendiendo a la forma de las ecuaciones (10) y (18) la curva $\sigma_{x'} - \varepsilon_{x'}^d$, encerrará un área $\frac{G_f}{l}$ (ver Figura 5). En relación con los modelos de fisuración distribuida existentes hasta la fecha la única diferencia estriba en la obtención de la longitud característica l^* (que aquí viene dada por la ecuación (15)), siendo idéntico el resto del tratamiento numérico.

PROPIEDADES DE LA FUNCION DE DISTRIBUCION

Es evidente que la función de distribución Φ de la ecuación (11) no puede determinarse arbitrariamente y tiene que cumplir ciertos requisitos. Estos son:

- 1.- Ser definida positiva en todo el elemento. Para garantizar tal circunstancia reduciremos las funciones posibles a aquellas de la forma:

$$\Phi = e^{\mu(x', y')} \quad (20)$$

- 2.- Ser adimensional. Para ello, y pensando en la utilización de elementos isoparamétricos, definiremos la función μ en el dominio isoparamétrico normalizado:

$$\mu = \mu(\xi, \eta) \quad (21)$$

donde ξ y η son las coordenadas isoparamétricas normalizadas.

Teniendo en cuenta (15), (20) y (21) la longitud característica tomará la forma:

$$l^* = \frac{\Phi}{\frac{\partial \Phi}{\partial x'}} = \frac{1}{\frac{\partial \mu(\xi, \eta)}{\partial x'}} \quad (22)$$

- 3.- La ecuación (16) debe conducir, en el límite del refinamiento de la malla, a una deformación $\varepsilon_{x'}^d$, infinita para valores de $u_{x'}^d$, finitos. En consecuencia, en el límite, la longitud característica debe ser nula. De la ecuación (22) se desprende que, en estas circunstancias, $\frac{\partial \mu}{\partial x'}$ debe ser infinita lo cual queda garantizado con la definición de μ en el dominio isoparamétrico (la derivada espacial de μ tenderá a infinito con la discretización).

4.- Disipación correcta de la energía de fractura. Durante el proceso de deformación, los distintos puntos del elemento recorren la curva tensión-deformación de la Figura 5. A medida que la fisuración progresa las deformaciones en todos los puntos del elemento tenderán a superar la deformación última ϵ_u y por lo tanto en cada uno de ellos se disipará una energía $\frac{G_f}{l^*} dx dy$. Si admitimos que el elemento está representando el comportamiento de una determinada porción de la fisura que pasa por el mismo, de longitud h^e , la energía disipada por todo el elemento (de área Ω^e) debe ser:

$$W = \int_{\Omega^e} \frac{G_f}{l^*} dx dy = G_f \cdot h^e$$

ecuación que se traduce (teniendo en cuenta (22)) en:

$$\int_{\Omega^e} \frac{1}{l^*} dx dy = \int_{\Omega^e} \frac{\partial \mu}{\partial x'} dx dy = h^e \tag{23}$$

Sin embargo, no es correcto, a nuestro entender, el plantear la disipación de la energía de fractura en estos términos; en primer lugar porque esta disipación, como integrante de una ecuación global de conservación de energía, debe plantearse sobre un dominio finito independiente del nivel de discretización y, además, porque la longitud equivalente de fisura h^e es un parámetro que no es fácilmente interpretable a nivel de un elemento (ver Figura 4). Parece más adecuado plantear esta condición para una fisura de longitud determinada y obligar a que el conjunto de elementos que la representen disipen, en el límite de la discretización, la energía de fractura correcta.

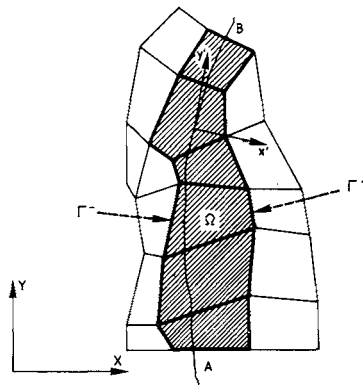


Figura 6. Representación de una fisura por la malla de elementos finitos.

Consideremos una fisura que se extiende entre los puntos A y B del dominio discretizado (ver Figura 6). Sea Ω el dominio constituido por todos los elementos

a través de los cuales discurre la fisura. La condición a imponer es que, cuando la discretización tienda a ser infinita, la energía disipada por todos estos elementos sea la correcta. Es decir (a partir de la ecuación (23)):

$$\sum^e \int_{\Omega^e} \frac{\partial \mu}{\partial x'} d\Omega^e = l_{AB} \quad (24)$$

donde l_{AB} es la longitud (finita) de la fisura.

Establecemos ahora para la función μ los siguientes requisitos:

- a) Ser una función continua C_0 dentro de cada elemento y también entre elementos del dominio Ω . En consecuencia $\frac{\partial \mu}{\partial x'}$ es una función integrable en dicho dominio. Sea Γ el contorno de Ω , que podemos dividir en Γ^+ y Γ^- que corresponden a las partes de dicho contorno situadas a ambos lados de la fisura ($\Gamma^+ \rightarrow x'$ positivo y $\Gamma^- \rightarrow x'$ negativo). Partiendo de la ecuación (24), la disipación correcta de la energía de fractura se expresará como :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mu}{\partial x'} d\Omega = l_{AB} \quad (25)$$

y aplicando el Teorema de Green a la ecuación (25) se obtiene :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mu}{\partial x'} d\Omega = \int_{\Gamma} \mu dy' = l_{AB} \quad (26)$$

- b) La función μ toma los siguientes valores en el contorno:

$$\begin{aligned} \mu &= +1/2 \quad \text{en } \Gamma^+ \\ \mu &= -1/2 \quad \text{en } \Gamma^- \end{aligned} \quad (27)$$

x De la ecuación (26)

$$\int_{\Gamma} \mu dy' = \int_{\Gamma^+} (1/2) dy' - \int_{\Gamma^-} (1/2) dy' \quad (28)$$

donde:

$$\int_{\Gamma^+} (1/2) dy' = (1/2) \cdot l_{AB}^+ \quad (29)$$

$$\int_{\Gamma^-} (1/2) dy' = (-1/2) \cdot l_{AB}^- \quad (30)$$

siendo:

l_{AB}^+ = proyección sobre y' del camino recorrido al avanzar sobre la curva Γ^+ desde A hasta B.

l_{AB}^- = proyección sobre y' del camino recorrido al avanzar sobre la curva Γ^- desde A hasta B.

Es evidente que, con el refinamiento al límite, se cumple:

$$l_{AB}^+ \rightarrow l_{AB}$$

$$l_{AB}^- \rightarrow l_{AB}$$

con lo cual de la ecuación (28) se llega a:

$$\int_{\Gamma} \mu dy' \rightarrow (1/2) \cdot l_{AB} + (1/2) \cdot l_{AB} = l_{AB} \tag{31}$$

La ecuación (31) pone de manifiesto que la definición de la longitud característica dada por (22), donde μ cumple las condiciones de (27), garantiza una disipación correcta de energía cuando se refina la malla suficientemente.

DETERMINACION DE LA FUNCION μ

Consideremos la función

$$\mu(\xi, \eta) = \sum_1^{n_i^e} N_i^*(\xi, \eta) \cdot \mu_i \tag{32}$$

Donde

n_i^e = número de lados del elemento.

N_i^* = funciones de interpolación correspondientes al elemento lineal del mismo número de lados (para elementos cuadrilaterales \rightarrow funciones de interpolación del elemento lineal de cuatro nodos, para elementos triangulares \rightarrow funciones de interpolación del elemento lineal de tres nodos).

$\mu_i = \frac{1}{2} \cdot \text{signo}(x'_i)$. Donde $\text{signo}(x'_i)$ es el signo de la coordenada x' del vertice "i" del elemento que dependerá de la posición de la fisura dentro del elemento (ver Figura 7).

La función μ así definida reúne los requisitos de:

- Continuidad sobre los elementos (puesto que las funciones $N_i^*(\xi, \eta)$ son continuas dentro de los mismos).

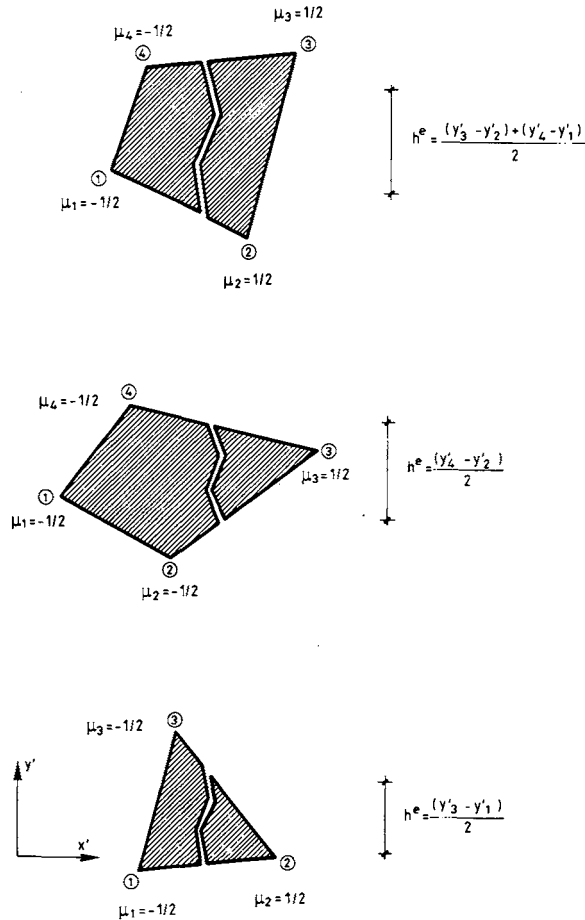


Figura 7. Valores de los parámetros μ_i para elementos cuadrilaterales y triangulares.

- Continuidad entre elementos (puesto que μ toma el mismo valor en los vértices comunes entre dos elementos y se interpola entre ellos mediante funciones N_i^* , lineales y continuas, de variables ξ y η definidas de forma continua entre elementos mediante la transformación isoparamétrica).
- Toma los valores $+\frac{1}{2}$ en Γ^+ y $-\frac{1}{2}$ en Γ^- (ver Figuras 6 y 7).

En consecuencia, cumple las condiciones establecidas previamente para la función μ .

Sustituyendo la ecuación (32) en la definición de la longitud característica dada en la ecuación (22) se obtiene:

$$l^*(\xi, \eta) = \frac{1}{\sum_1^{n_i^e} \frac{\partial N_i^*(\xi, \eta)}{\partial x'} \cdot \mu_i} = \frac{1}{\sum_1^{n_i^e} \left(\frac{\partial N_i^*}{\partial x} \cdot \cos\theta + \frac{\partial N_i^*}{\partial y} \cdot \text{sen}\theta \right) \cdot \mu_i} \quad (33)$$

donde θ es el ángulo de inclinación de la normal a la fisura con respecto al eje x global (ver Figura 4). La expresión (33) puede ser fácilmente implementada en cualquier modelo numérico de fisura distribuida. Una vez conocida la longitud característica en cada punto del elemento, puede obtenerse la longitud equivalente de fisura asociada al mismo mediante la aplicación de la ecuación (23) y el Teorema de Green:

$$h^e = \int_{\Omega^e} \frac{1}{l^*} d\Omega^e = \int_{\Omega^e} \frac{\partial \mu}{\partial x'} d\Omega^e = \int_{\Gamma^e} \mu dy' \quad (34)$$

donde Γ^e es el contorno del elemento. En la Figura 7 se presentan los valores explícitos de h^e resultantes de la aplicación de la ecuación (34) a elementos lineales de tres y cuatro nodos y para distintas situaciones de la fisura con respecto a los lados.

Un último aspecto a resaltar es que los modelos de fisura distribuida, si bien proporcionan información sobre qué elementos sobrepasan el umbral de fisuración y cuál es la orientación de ésta, no permiten conocer la posición de la fisura dentro del elemento. En los ejemplos numéricos presentados más adelante se ha determinado el valor de μ_i en la ecuación (32), considerando que la fisura pasa por un cierto punto del interior del elemento que coincide con (ver Figura 8):

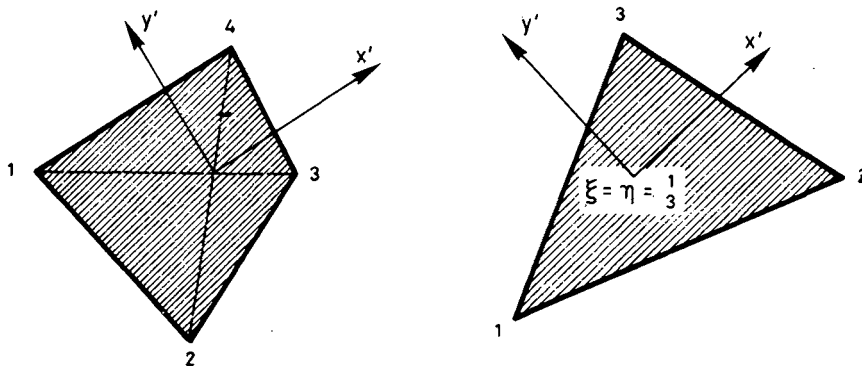


Figura 8. Situación de la fisura dentro de un elemento.

- a) La intersección de las diagonales que unen los vértices opuestos (en elementos cuadrilaterales).

- b) El baricentro del elemento en el dominio isoparamétrico (para elementos triangulares).

Son posibles otras alternativas en la elección de dicho punto, como sería, por ejemplo para elementos cuadrilaterales, el transformado del punto $\xi = 0$, $\eta = 0$ del dominio isoparamétrico, que permite una directa generalización del método a los casos tridimensionales.

EXPERIMENTACION NUMERICA

El esquema de distribución y la consiguiente longitud característica hasta aquí descritos, se han implementado en un modelo de fisuración bidimensional similar al desarrollado por De Borst y otros^{4,12}. Con el mismo se ha llevado a cabo cierta experimentación numérica cuyos resultados se comentan a continuación.

EJEMPLO 1.- CAMPO DE TENSION CONSTANTE.

El primer ejemplo analizado corresponde a un estado de tensión constante bidimensional (barra a tracción). Las características geométricas y propiedades del material aparecen en la Figura 9.a. Al tratarse de un caso de tensión constante la solución por el M.E.F. es exacta para cualquier tamaño de la malla. Sin embargo, un estado de tensión constante no proporciona localización de la fisura que debe ser, por consiguiente, estimulada artificialmente. En las mallas de la Figura 9.b aparecen sombreados los elementos en los cuales se ha estimulado la localización mediante una pequeña reducción de la resistencia a tracción f'_t .

La secuencia de mallas A1 a A5, en la Figura 9.b, corresponde a elementos cuadrilaterales de cuatro u ocho nodos y a la progresiva deformación de las mallas. La secuencia A6 a A8 corresponde a elementos triangulares con distinta irregularidad en las mallas. En la Figura 9.c puede observarse la curva carga total-desplazamiento del extremo y la curva energía disipada-desplazamiento del extremo. Los resultados para las distintas mallas A1 a A8 coinciden exactamente entre sí y con los resultados teóricos hasta hacerse indistinguibles en los gráficos.

EJEMPLO 2.- PROBETA A TRACCION.

Este ejemplo pretende simular un caso en el que se produce localización de la fisuración debido a un estado de tensión no uniforme. Para ello se analiza la probeta de la Figura 10.a con un estrangulamiento en el centro de la misma que induce la localización en la zona de menor sección transversal. En la Figura 10.b aparecen las distintas mallas de elementos regulares de cuatro nodos (B1, B2 y B3) y las correspondientes irregulares (B4, B5 y B6). Finalmente, la malla B7 contiene una última fila de elementos muy delgados en la zona de localización.

En todas las mallas aparecen sombreados los elementos en los que se produce la localización que, en este caso, no necesita ser estimulada artificialmente. Sobre estas

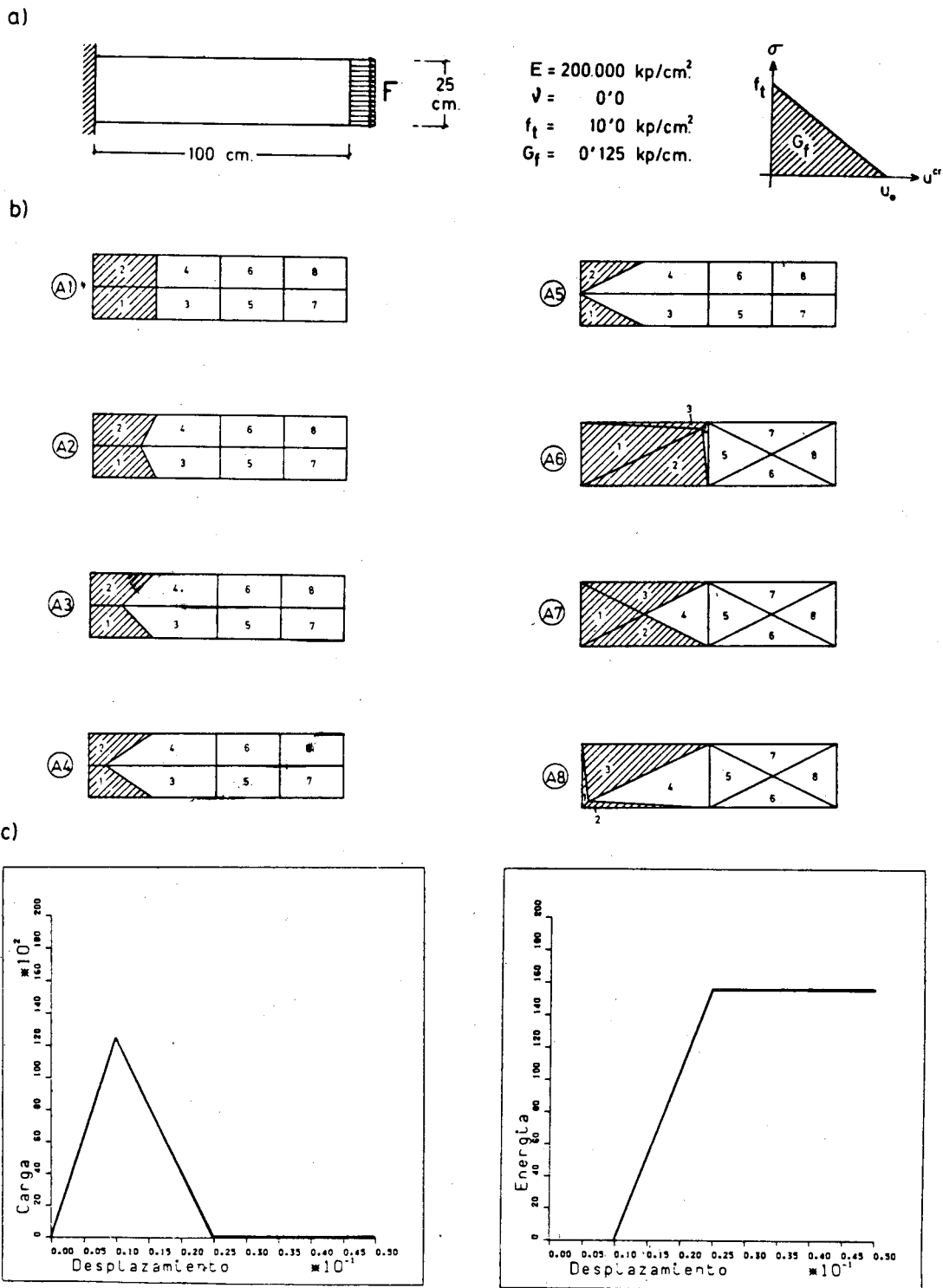
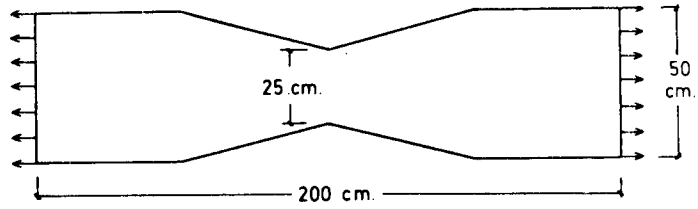
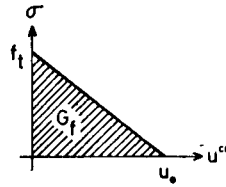


Figura 9. Ejemplo 1. Campo de tensión constante. a) Características geométricas y mecánicas. b) Mallas de elementos finitos. c) Curvas carga-desplazamiento y energía disipada-desplazamiento.

a)



$E = 200.000 \text{ kp/cm}^2$
 $\nu = 0'2$
 $f_t = 10'0 \text{ kp/cm}^2$
 $G_f = 0'125 \text{ kp/cm}$



b)

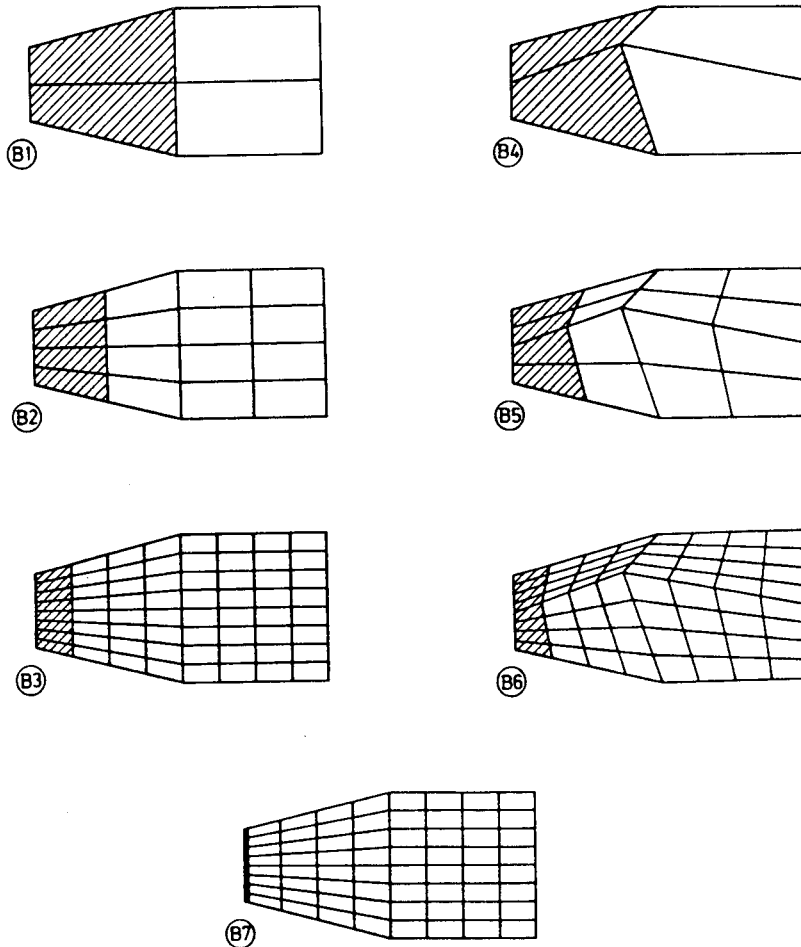


Figura 10. Ejemplo 2. Probeta a tracción. a) Características geométricas y mecánicas. b) Mallas de elementos finitos.

mallas se ha realizado un cierto número de “tests” numéricos para analizar distintos fenómenos, a saber: la convergencia del esquema de distribución presentado, la influencia sobre los resultados del orden de integración de Gauss-Legendre, y la problemática relacionada con los elementos de alto orden y dicho tipo de integración.

a) Convergencia con el tamaño y deformación de la malla

En la Figura 11.a se presentan las curvas carga total-desplazamiento y energía disipada-desplazamiento. En dichas curvas puede observarse:

- 1.- La convergencia con el refinamiento de la malla a la solución teórica.
- 2.- La pequeña influencia que tiene la deformación de la malla. Al comparar los resultados obtenidos con una malla regular y su homóloga deformada, se obtienen pequeñas diferencias que deben achacarse no tanto al esquema de distribución como a los errores de discretización.

b) Influencia del orden de integración

En la Figura 11.b se presentan los resultados en fuerza-desplazamiento y energía-desplazamiento para dos esquemas distintos de distribución:

- I) El utilizado en otros trabajos en los que la longitud característica se toma como la raíz cuadrada del área de influencia de un punto de Gauss. Detrás de éstos se encuentra la idea de que un punto de Gauss es una unidad de información sobre una fisura. Siguiendo este esquema se desprende que un elemento puede representar múltiples fisuras (según el número de puntos de Gauss “fisurados”) así como que un elemento puede estar parcialmente fisurado si aparecen puntos de Gauss en los que no se ha rebasado la tensión de fisuración.
- II) El que se propone aquí, utilizando la longitud característica definida en la ecuación (33). Detrás de este esquema subyacen las ideas básicas de que el elemento es la unidad mínima de representación de una fisura y de información sobre la misma, así como que los puntos de integración numérica no son más que una herramienta para la evaluación de las integrales que aparecen en la formulación.

Utilizando elementos de cuatro nodos y para la malla B7 de la Figura 10.b, se efectúan tres tipos de integración (1x1, 2x2 y 3x3 puntos de Gauss) con los dos modelos. De la observación de las curvas carga-desplazamiento y energía-desplazamiento obtenidas (Figura 11.b) pueden extraerse las siguientes conclusiones:

- El esquema propuesto es insensible al orden de integración numérica.
- El esquema “Gaussiano” es tremendamente sensible al orden de integración. El ablandamiento de la curva carga-desplazamiento es mucho menor con órdenes de integración elevados, mientras que la energía desprendida aumenta con el orden de integración. Extrapolando los resultados, una integración teóricamente

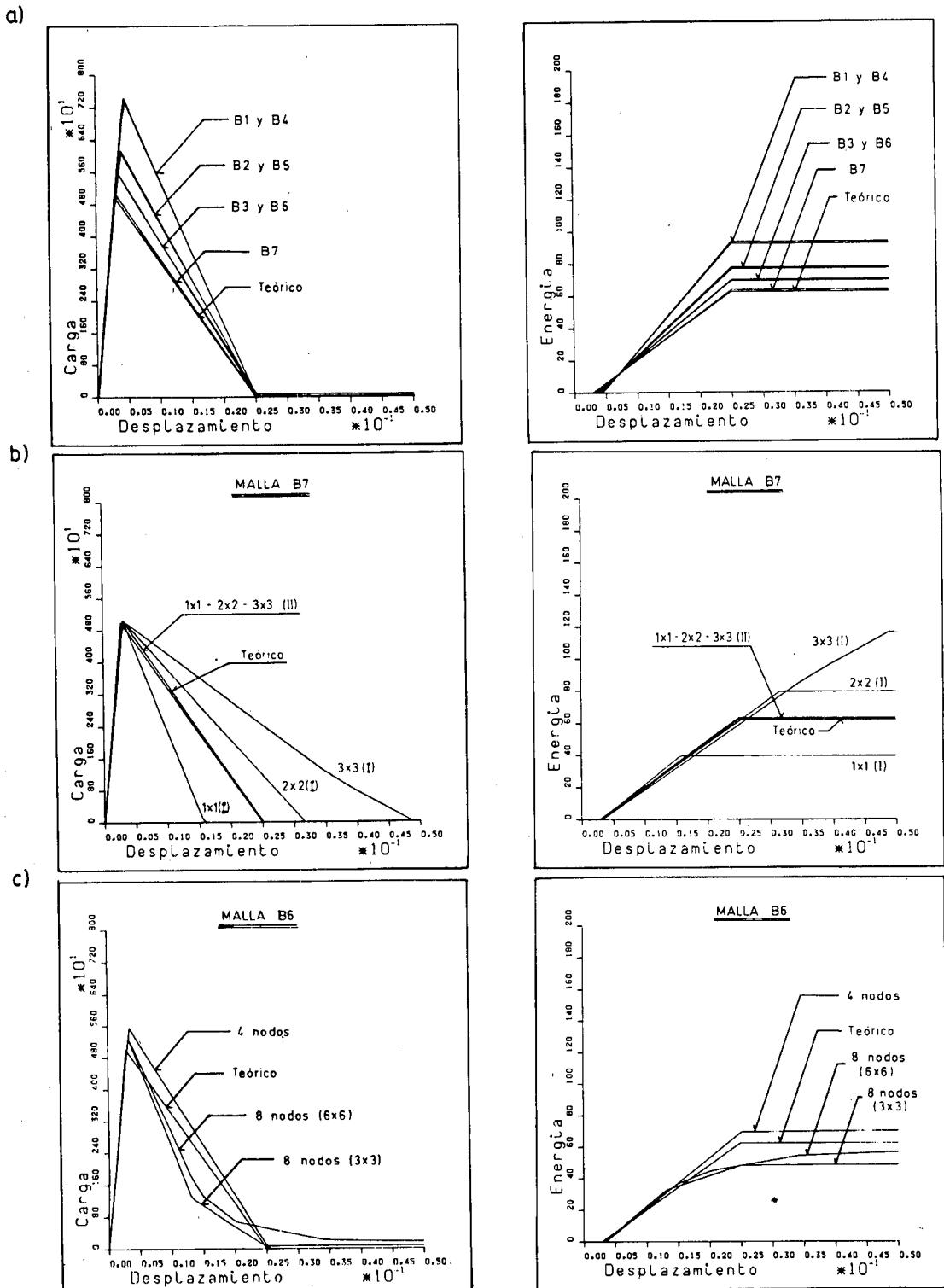


Figura 11. Ejemplo 2. Probeta a tracción (continuación). a) Influencia del orden de integración en el esquema propuesto. b) Comparación entre el esquema Gaussiano (I) y el propuesto (II). c) Análisis con elementos de cuatro y ocho nodos.

exacta (infinitos puntos de integración) produciría una disipación de energía infinita y ningún ablandamiento en el modelo.

- Estos resultados permiten cuestionar la idoneidad del esquema "Gaussiano" y argumentar que, en realidad, el orden de un elemento determina la variación del campo de tensiones y de deformaciones que puede representar, sin que pueda ajustarse a campos muy complicados como los producidos por distintas fisuras. Siguiendo el esquema "Gaussiano", un elemento lineal (campo de tensiones constante) daría lugar, erróneamente, a mayor número de fisuras a medida que aumentase el orden de integración utilizado, disipando mayor energía.

c) Problemática de los elementos no-lineales y la integración de Gauss.

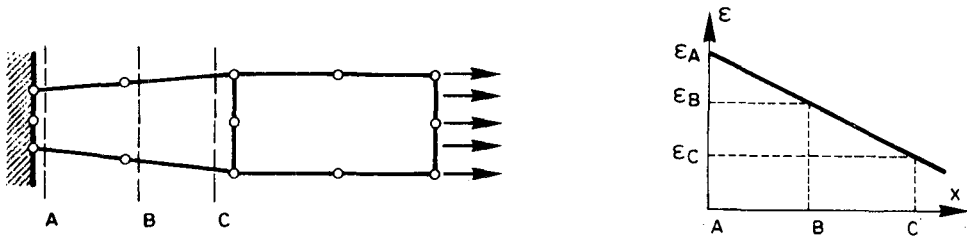
En la Figura 11.c se presentan los resultados del análisis del problema con la malla B6 (con elementos de ocho nodos e integraciones de 3x3 y 6x6) utilizando la formulación propuesta. Estos resultados se comparan con los obtenidos para la misma malla y elementos de 4 nodos. Se observa que los resultados obtenidos son mejores con elementos de cuatro nodos que con los de ocho aunque, en este último caso, a medida que se aumenta el orden de integración se obtiene una mejor evaluación de la energía disipada a costa de una extraña curvatura del tramo final de la curva tensión-desplazamiento. Una posible interpretación de este fenómeno podría explicarlo como "ruido de integración", relacionado con las dificultades del esquema de Gauss-Legendre para integrar los estados tensionales que se producen en los elementos de deformación no constante. En la Figura 12 se comparan los estados tensionales, sobre un elemento de deformación lineal (Figura 12.a), producidos por ecuaciones constitutivas con endurecimiento (Figura 12.b) o con ablandamiento y la consiguiente localización (Figura 12.c). Con la integración de Gauss-Legendre pueden integrarse exactamente polinomios de cualquier grado sin más que aumentar el orden de integración. El efecto combinado del refinamiento de la malla y del orden de integración adecuado permite la integración exacta de un problema con endurecimiento y sin localización. Por el contrario, en el análisis con localización, un estado tensional como el indicado en la Figura 12.c, y que es el que se produce para estados avanzados de la fisuración, no puede ser integrado exactamente con dicho esquema numérico al no tener derivadas continuas y por tanto no ser fácilmente aproximable mediante polinomios (Figura 12.d).

CONCLUSIONES

A lo largo de este trabajo se ha propuesto un esquema de distribución, para los modelos de análisis de la fisuración del hormigón por el Método de los Elementos Finitos, cuyas características fundamentales son las siguientes:

- La distribución se interpreta como un mecanismo a nivel de elemento que permite, con el refinamiento al límite de la malla, modelar un campo de desplazamientos discontinuo mediante elementos de continuidad C_0 .
- Se plantea una función de distribución que desacopla la dependencia nodal

a) Geometría y estado de deformación



b) Ecuación constitutiva con endurecimiento



c) Ecuación constitutiva con ablandamiento



d) Integración de Gauss-Legendre



Figura 12. Análisis de la integración de Gauss-Legendre en problemas con endurecimiento y ablandamiento. a) Geometría y estado de deformación. b) Ecuación constitutiva con endurecimiento. c) Ecuación constitutiva con ablandamiento. d) Integración de Gauss-Legendre.

y espacial del campo de desplazamientos discontinuo. A partir de esta función emerge el concepto de "longitud característica" (una función espacial y direccional) como una herramienta matemática, sin significado geométrico inmediato, que relaciona el desplazamiento discontinuo distribuido con las deformaciones asociadas al mismo. Esta longitud permite, asimismo, interpretar ecuaciones constitutivas tensión-desplazamiento como relaciones tensión-deformación dentro de cada elemento.

- La expresión matemática de la longitud característica se deduce a partir de la condición de disipación de la energía de fractura. Esta disipación se plantea a nivel global, para todos los elementos que representan la fisura, y no a nivel local de cada elemento.
- La experimentación numérica realizada indica que, con los modelos de distribución de la fisuración, hay que prestar especial atención a la idoneidad del tipo de elemento, del tipo de integración y del esquema de distribución adoptados.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a D. Enrique Bendito, del Departamento de Matemática Aplicada de E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona sus interesantes sugerencias y comentarios sobre el tema objeto de este artículo.

REFERENCIAS

- 1 A. Hillerborg, Modéer y P.E. Peterson, "Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements", *Cement and Concrete Research*, Vol. 6, p.p. 773-782, (1976).
- 2 Z.P. Bazant y B.H. Oh, "Crack band theory for fracture of concrete". *Materiaux et Constructions*, Vol. 16, no. 93, p.p. 155-177, (1983).
- 3 R. Glemberg, "Dynamic Analysis of Concrete Structures", *Tesis Doctoral*, Chalmers University of Technology - Publicación 84:1, U.S.A, (1984).
- 4 R. De Borst, "Non linear analysis of frictional materials". *Tesis Doctoral* en Technische Hogeschool Delft, Holanda, (1986).
- 5 J. Oliver y J.R. Fernandez Roure, "Análisis no-lineal de estructuras bidimensionales de hormigón por el método de los elementos finitos", *Aplicaciones del Método de los Elementos Finitos en Ingeniería*. Eds. Oñate E., Suarez B., Miquel J., Barcelona, España, (1986).
- 6 E. Oñate, S. Oller, J. Oliver y J. Lubliner. "A constitutive model for cracking of concrete based on incremental theory of plasticity", *Computational Plasticity.- Models, Software and Applications*. Eds. Owen D.R.J, Hinton E. Oñate E., p.p. 1311-1330, (1987).
- 7 M. Cervera, E. Hinton y O. Hassan, "Non linear analysis of reinforced concrete plate and shell structures using 20-noded isoparametric brick elements". *Computers and Structures*, Vol. 25, no. 6, pp. 845-870, (1987).

- 8 J. Llorca, M. Elices y A.R. Ingraffea, "Propagación de fisuras en estructuras de hormigón", *Aplicaciones del Método de los Elementos Finitos en Ingeniería*, Eds. Oñate E., Suarez B., Miquel J., p.p. 25-40, Barcelona, España, (1986).
- 9 Z.P. Bazant, "Mechanics of distributed cracking", *Appl. Mech. Rev.*, ASME, Vol. **39**, no. 5, p.p. 675-705, (1986).
- 10 M.A. Crisfield, "Difficulties with current numerical models for reinforced concrete and some tentative solutions", *Proc. Int. Cont. on Computer-Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, Eds. Damjanic F., Hinton E., Owen D.R.J., Bicanic N., Simovic V., p.p. 331-358, Split, Yugoslavia, (1984).
- 11 N.S. Ottosen, "Thermodynamic Consequences of Strain Softening in Tension", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. **112**, no. 11, p.p. 1152-1164 (1986).
- 12 I.G. Rots y R. de Borst, "Analysis of Mixed-Mode fracture in concrete", Aceptado para publicarse en el *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE.