

EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS ADAPTABLE ESTIMACIONES DE ERROR

CASTOR GONZÁLEZ G.*
RAUL MANZANILLA**

y
RAUL FEIJOO***

**Universidad Centrooccidental Lisandro Alvarado,
Departamento de Procesos Agroindustriales,
Apdo. 400, Barquisimeto, Edo. Lara,
Barquisimeto, Venezuela*

***Intevep, S.A.
Análisis Matemático y Estadístico,
Apdo. 76343, Caracas 1070-A,
Los Teques, Venezuela*

****L.N.C.C.
Rua Lauro Muller, 455-Caixa Postal 56018-22290,
Río de Janeiro, Brasil*

RESUMEN

Actualmente el desarrollo de software para el análisis de sistemas de ingeniería a través del método de los elementos finitos está notablemente influenciado por la solución al problema "EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS ADAPTABLE". Una estimación confiable del error es el punto central en el planteamiento de la solución a este problema. A partir de 1987 con la publicación de Zienkiewicz y Zhu¹, numerosos trabajos han sido publicados tratando de proponer estimadores de error y estrategias de refinamiento que sean computacionalmente aceptables para resolver este problema. En esta publicación se presenta una solución al método de los elementos finitos adaptable, basada en un nuevo tipo de estimador de error, obtenido de los trabajos de Johnson y Hansbo². Este nuevo estimador constituye una generalización al propuesto por Zienkiewicz y Zhu y la idea central es comparar ambos estimadores.

SUMMARY

At the present time, the development of software for analysis of engineering systems, through the finite elements method, is notably influenced by the solution of the problem of "ADAPTABLE FINITE ELEMENT METHOD". A trustly estimation of the error is the central point in getting a solution to this problem. After the publication of Zienkiewicz and

Recibido: Abril 1993

Zhu¹, in 1987, many publication have been made trying to propose estimators of the error and computational strategies of refinement that are acceptable to resolve this problem. In this work is presented a solution to the problem of adaptable finite element method, which is based on a new type of error estimator, obtained from the work of Johnson and Hansbo² and that is a generalization of the one propose by Zienkiewicz and Zhu. Additionally a comparison among both is presented.

INTRODUCCIÓN

El método de los elementos finitos adaptable, además de dar respuesta numérica a un problema específico pretende resolver uno de los aspectos más dificultosos del modelaje numérico, como lo es la validación de los resultados y en consecuencia la confiabilidad de la solución. Dentro de este panorama, la evaluación del error cometido en la solución aproximada juega un papel fundamental.

Las estimaciones de error clásicas, tanto por diferencias finitas como para elementos finitos, se basan en cotas superiores de error que tienen convergencia asintótica cuando el tamaño de malla tiende a cero. Desafortunadamente, estas estimaciones dan poca información sobre la magnitud del error para un tamaño de malla fijo.

Los primeros trabajos para establecer un error a-posteriori (obtenido de la solución aproximada), fueron publicados por Babuska y coautores^{3,4,5,6,11,12,13}. Los métodos presentados en estos trabajos conducen a buenos indicadores de error pero son computacionalmente costosos y no son generales.

El estimador de error propuesto por Zienkiewicz y Zhu (Z^2), puede ser considerado como una técnica de interpolación, un tanto más general por se independiente de la formulación del problema, aunque menos precisa. Este estimador fué obtenido en forma intuitiva y funciona solamente cuando la derivada de la solución aproximada, presenta saltos en la interface de los elementos.

El objetivo de este trabajo es implantar un nuevo tipo de estimador basado en los trabajos de Johnson y Hansbo²(J&H), el cual constituye una generalización del método Z^2 y es aplicable a una gama más extensa de problemas.

Para obtener resultados numéricos, que permitan la comparación de los estimadores, se resuelve el método de los elementos finitos adaptable aplicado al problema de Poisson para campos escalares.

EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS ADAPTABLES

Un enfoque para encontrar soluciones aproximadas es el siguiente: dado un problema P cuya solución exacta u pertenece a un espacio de funciones H con norma $|\cdot|$, construir un subespacio H_h de H , la solución aproximada u_h será la función de H_h que satisface:

$$|u - u_h| \leq |u - v| \quad \forall v \in H_h \quad (1)$$

A grandes rasgos el método de los elementos finitos es una técnica sistemática para encontrar el espacio de aproximación H_h . Para construir este espacio, el método

define una malla τ_h , con tamaño de malla h , la cual constituye una partición de la región de definición del problema, sobre esta malla se define un conjunto de funciones de interpolación que constituyen una base del espacio H_h . La Figura 1a muestra una representación gráfica de este problema.

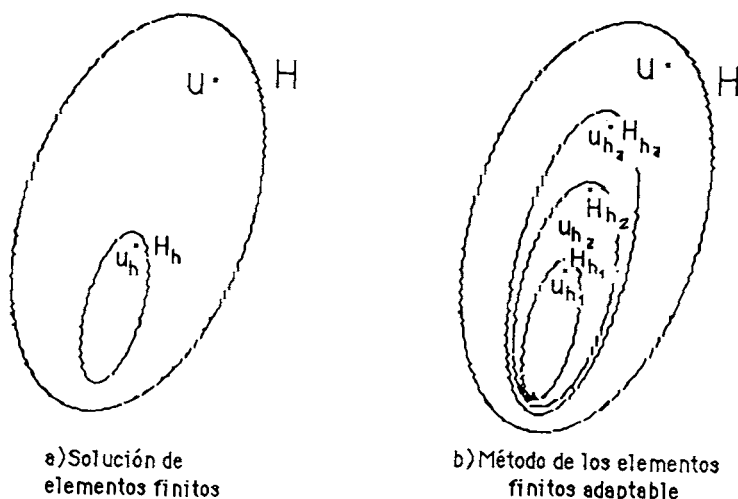


Figura 1. Representación gráfica del método de los elementos finitos y el método de los elementos finitos adaptable.

Por otro lado, el método de los elementos finitos adaptable puede ser planteado en los siguientes términos:

Sea P un problema que se pretende resolver por elementos finitos y que tiene solución exacta u perteneciente al espacio H , con norma $|\cdot|$. Denotemos por $\{P_i\}$ a la familia de problemas de elementos finitos asociada al problema P , que consisten en aproximaciones polinomiales a trozos sobre una familia de mallas $\{\tau_{h_i}\}$ con tamaño de malla local h_i . Cada malla junto con los polinomios asociados a ella, define un espacio $H_{h_i} \subset H$, teniendo así una familia de espacios de elementos finitos $\{H_{h_i}\}$.

Sea $\{u_{h_i}\}$ la familia de soluciones aproximadas correspondiente a la familia de mallas $\{\tau_{h_i}\}$. Finalmente sea η una tolerancia prefijada.

Basados en estos datos, el objetivo consiste en implantar un algoritmo que conduzca a una malla $\tau_{h_{opt}}$ que define $H_{h_{opt}}$, de tal manera que la solución correspondiente de elementos finitos $u_{h_{opt}}$ cumpla con:

$$|u - u_{h_{opt}}| \leq \eta \quad (2)$$

y el trabajo para calcular $\tau_{h_{opt}}$ sea mínimo, esto último define la eficiencia del método. Una medida del trabajo computacional estaría representada por el número de grados de libertad. La Figura 1b muestra una representación gráfica de este problema.

En otras palabras, el objetivo del método de los elementos finitos adaptable es obtener un algoritmo para resolver en forma aproximada el siguiente problema de optimización lineal: encontrar una malla óptima $\tau_{h_{opt}}$ con la restricción $|u - u_{h_{opt}}| \leq \eta$.

Este problema es difícil de resolver ya que la solución exacta u no está disponible y no existe una relación directa entre h y $|u - u_h|$.

Teniendo presente que no se conoce el error $|u - u_h|$, el punto central del método de los elementos finitos adaptable es disponer de estimaciones de error confiables para poder implantar el algoritmo de refinamiento. Más adelante enfocaremos nuestra atención hacia la búsqueda de estimaciones de error.

ESQUEMA DE REFINAMIENTO

Los procedimientos para el refinamiento de malla parten de una discretización muy somera, que se enriquece sucesivamente hasta alcanzar una solución con una tolerancia predefinida. Cuando se dispone de una estimación del error, los métodos de refinamiento de malla adaptable se basan fundamentalmente en lograr una distribución uniforme del error. Es decir, evaluar la estimación del error a nivel de cada uno de los elementos de la malla y refinar según su magnitud.

Se pueden plantear otros esquemas donde no es necesario conocer el error²³, por ejemplo, para el caso donde el problema pueda ser modelado como la minimización de un funcional, se puede implantar un proceso de refinamiento en la dirección del gradiente. Esto consiste en dividir cada uno de los elementos y evaluar la variación del funcional en esa dirección y posteriormente refinar según la magnitud de estas variaciones²³. Esta técnica es computacionalmente costosa.

El algoritmo de refinamiento propuesto sigue un esquema de distribución uniforme del error. Para encontrar una malla óptima τ_{hopt} , en la cual se satisface que $|e| = |u - u_h| \leq \eta$, y donde el trabajo computacional para conseguir τ_{hopt} sea cercano al mínimo, se siguen los siguientes pasos:

P1) Dada la región Ω de definición del problema, construir una malla $\tau_{h_{viejo}}$ lo más "gruesa" posible, pero que de una aproximación aceptable de Ω , esta malla define un $h_{h_{viejo}}$ y asocia polinomios de grado menor o igual que p a cada elemento. Sea N_n y N_e el número de nodos y el número de elementos, respectivamente. Calcular la solución de elementos finitos u_h en esta malla.

P2) Dada la tolerancia porcentual η (en el sentido $|e| / |u|$):

P2.1) Calcular el error permisible a nivel de cada elemento:

$$|e|_{permisible} = \eta \sqrt{\frac{|u_h|^2 + |e|^2}{N_e}} \quad (3)$$

P2.2) En cada elemento calcular:

$$\xi_i = \frac{|e|_i}{|e|_{permisible}} \quad i = 1, 2, \dots, N_e \quad (4)$$

Si ξ_i es menor que uno se desrefina y si ξ_i es mayor que uno se refina la malla.

P3) Refinar o desrefinar en cada elemento según:

$$h_{i_{nuevo}} = \frac{h_{i_{viejo}}}{\xi_i^{1/p}} \quad (5)$$

p representa el orden de convergencia de la solución aproximada. Así tendremos construida una nueva malla $\tau_{h_{nuevo}}$.

P4) Calcular el error porcentual actual η_{actual} en la nueva malla:

$$\eta_{actual} = \frac{|e|}{\sqrt{|u_h|^2 + |e|^2}} \quad (6)$$

Si $\eta_{actual} \leq \eta$ parar, sino repetir el proceso.

Se pretende que este algoritmo sea confiable y eficiente en el sentido de que el control del error quede garantizado y que el trabajo computacional sea lo más pequeño posible.

En la práctica $|e|$ no está disponible y por esta razón debemos utilizar estimadores del error.

EL PROBLEMA DE POISSON: TRANSFERENCIA DE CALOR

El problema de Poisson para campos escalares se modela de la siguiente manera. Dada una región Ω del plano con contorno $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$ como se muestra en la Figura 2.

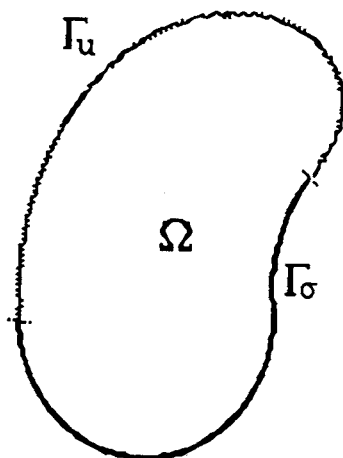


Figura 2. Región Ω .

Sea $L_2(\Omega)$ el espacio de las funciones cuadrado integrables dotado con la norma y producto interno

$$|f|_{L_2}^2 = \int_{\Omega} f^2 d\Omega \quad (7)$$

$$(f, g) = \int_{\Omega} f \cdot g d\Omega \quad (8)$$

y sea $H^1(\Omega)$ el espacio de Sobolev de orden uno con la norma

$$|f|_{H^1}^2 = |f|_{L_2}^2 + |\nabla f|_{L_2}^2 \quad (9)$$

El problema de conducción de calor para régimen estable en dos dimensiones se modela matemáticamente de la siguiente manera: encontrar una función u que satisfice

$$(S^T DS)u = f \quad \text{en } \Omega \quad (10)$$

$$u = u_0 \quad \text{en } \Gamma_u \quad (11)$$

$$n^T (DSu) = \sigma_o \quad \text{en } \Gamma_\sigma \quad (12)$$

donde

$$S^T = \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right); D = \begin{pmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{pmatrix}$$

$u_0 \in L_2(\Gamma_u)$ es la temperatura prescrita en Γ_u

k_x, k_y son las conductividades térmicas.

n es la normal a Γ

f son las fuentes de calor internas en Ω .

El flujo de calor asociado a este problema está dado por

$$\sigma = (\sigma_x \sigma_y)^T = -DSu \quad (13)$$

Al problema anterior se le puede asociar una formulación variacional. Para ello es necesario considerar los siguientes espacios afines de funciones

$$H = \{v \in H^1(\Omega) : v = u_0 \text{ en } \Gamma_u\} \quad (14)$$

$$H_0 = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ en } \Gamma_u\} \quad (15)$$

y los operadores funcionales:

$$B(u, v) = \int_{\Omega} (Su)^T DSv d\Omega \quad (16)$$

$$L(v) = \int_{\Gamma_\sigma} \sigma_0 v d\Gamma - \int_{\Omega} f v d\Omega \quad (17)$$

La formulación variacional, basada en estas definiciones, se expresa en los siguientes términos: encontrar $u \in H$ tal que:

$$B(u, v) = L(v), \quad \forall v \in H_0 \quad (18)$$

Adicionalmente, la norma energía asociada a este problema está definida por:

$$|v|_B = B(v, v)^{1/2}, \quad v \in H^1(\Omega) \quad (19)$$

Una vez formulado el problema variacional (18), para implantar la solución aproximada se necesita construir un espacio de dimensión finita H_h al cual pertenece la solución aproximada u_h . Para ello, en el método de los elementos finitos se introduce una malla τ_h que consiste en una partición de Ω en elementos finitos K de diámetro h_K . Adicionalmente sea $P_1(K)$ el espacio de los polinomios de grado uno sobre $K \in \tau_h$, y sea V_h el espacio definido por:

$$V_h = \{v \in H^1(\Omega); v|_K \in P_1(K), \forall K \in \tau_h\} \quad (20)$$

Los correspondientes espacios de elementos finitos H_h y H_{h0} quedan definidos por:

$$H_h = V_h \cap H \quad (21)$$

$$H_{h0} = V_h \cap H_0 \quad (22)$$

De esta forma se suele formular el problema de elementos finitos siguiente: Encontrar $u_h \in H_h$ tal que

$$B(u_h, v) = L(v), \quad \forall v \in H_{h0} \quad (23)$$

Aplicaremos el método de los elementos finitos adaptable, descrito anteriormente, a este problema particular de Poisson, utilizando la norma energía $|\cdot|_B$ para la evaluación del error.

Definido el problema que nos ocupa y teniendo presente que la solución exacta u no es conocida, y por lo tanto el error $|e| = |u - u_h|$ no está disponible, a continuación se plantean estimadores de error que permitan implantar el método de los elementos finitos adaptable.

De aquí en adelante se considera a Ω como un dominio con contorno poligonal.

ESTIMADORES DE ERROR

Los primeros trabajos para establecer un error a posteriori; es decir, obtenido de la solución aproximada u_h , se formularon en base a criterios de superconvergencia. Babuska y coautores se basan en esta orientación. Posteriormente se origina el método Z^2 , considerado como una técnica de proyección. Más recientemente Johnson y Hansbo proponen una estimación de error que da origen al método que denominaremos $J \& H$, este último método pretende englobar los de Babuska y Z^2 .

Otro tipo de estimador de error es el propuesto por Beltran y Alarcon¹⁶ basado en la diferencia de ciertos funcionales que definen formulaciones diferentes de un mismo problema.

A continuación daremos una reseña de los trabajos de Babuska y Kelly en lo que respecta a estimadores de error, y posteriormente plantearemos los estimadores de Z^2 y $J \& H$.

Para la deducción de los estimadores denotaremos $S_h = \{s\}$ la colección de lados s de los elementos $K \in \tau_h$ que pertenecen a Γ , para cada $s \in S_h$, el cual es común a dos elementos finitos, definimos n_s como la normal unitaria a s .

En los trabajos de Babuska^{3,4,5,6}, Kelly^{11,12} y coautores se pone de manifiesto que el error en la solución de elementos finitos está relacionado por una parte con el residuo:

$$(S^T DS)u_h - f \quad (24)$$

y por otro lado con el salto en el flujo normal asociado a la frontera inter-elemento $\|n_s^T \cdot \sigma\|$, de finido por:

$$\|n_s^T \cdot \sigma\| = \lim_{x \rightarrow x^+} n_s^T \cdot \sigma - \lim_{x \rightarrow x^-} n_s^T \cdot \sigma \quad (25)$$

Para ver esto, tomemos la formulación variacional (23) que establece:

$$\int_{\Omega} (Su_h)^T DS v d\Omega = \int_{\Gamma_{\sigma}} \sigma_0 v d\Gamma - \int_{\Omega} f v d\Omega \quad \forall v \in H_{ho} \quad (26)$$

Si las funciones que definen el espacio de elementos finitos H_h son los polinomios $P_1(K)$, tendremos discontinuidad en la derivada de u_h sobre la interface de los elementos. Integrando por partes (26) a nivel de cada elemento, obtenemos:

$$\sum_K \int_K (S^T DS u_h - f) v d\Omega - \sum_s \int_s \|n_s^T \cdot \sigma\| v d\Gamma = 0 \quad \forall v \in H_{ho} \quad (27)$$

donde:

$$\|n_s^T \cdot \sigma_h\| = \begin{cases} 0 & \text{si } s \in \Gamma_u \\ \text{salto del flujo} & \text{si } s \in \Omega \\ \sigma_0 + n_s^T \sigma_h & \text{si } s \in \Gamma_{\sigma} \end{cases}$$

Esta última expresión pone de manifiesto la aparición del residuo de la ecuación diferencial y el salto del flujo.

Adicionalmente se puede establecer, Kelly^{11,12}, que el error satisface el problema auxiliar:

$$S^T DS e = R \quad \text{en } \Omega \quad (28)$$

$$e = 0 \quad \text{en } \Gamma_u \quad (29)$$

$$n^T (DS e) = 0 \quad \text{en } \Gamma_{\sigma} \quad (30)$$

Donde R incluye tanto el residuo como el salto del flujo. Ésta es una forma de evaluar el error, pero evidentemente es poco práctica y computacionalmente costosa.

Estimador de error de Zienkiewicz-Zhu (Z^2)

En general los estimadores de error de Babuska requieren de la solución de un problema auxiliar y su implantación computacional es costosa. Si se trabaja con elementos de $P_1(K)$, y en el caso particular de que las fuentes de calor f sean nulas, de acuerdo con los operadores que modelan el problema de Poisson, el residuo $\mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} u_h - f$ es nulo y el salto pasa a jugar un rol preponderante en el cálculo del error, esto puede generalizarse a otros problemas. Zienkiewicz y Zhu introdujeron un estimador que toma en cuenta este hecho, adicionalmente es simple y fácil de incorporar en los códigos existentes de elementos finitos. Sin embargo las bases sobre las cuales el estimador fué derivado son eurísticas. A continuación daremos los lineamientos generales del estimador Z^2 .

La definición de la norma energía dada por (19) puede ser escrita como:

$$|u|_B^2 = \int_{\Omega} (\mathbf{S}u)^T \mathbf{D} (\mathbf{S}u) d\Omega = \int_{\Omega} \sigma^T \mathbf{D}^{-1} \sigma d\Omega \quad (31)$$

Siendo u_h y σ_h la solución y el flujo aproximados por elementos finitos, la norma del error $e = u - u_h$ será:

$$|e|_B^2 = \int_{\Omega} (\mathbf{S}e)^T \mathbf{D} (\mathbf{S}e) d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma - \sigma_h)^T \mathbf{D}^{-1} (\sigma - \sigma_h) d\Omega \quad (32)$$

La solución de elementos finitos u_h puede ser escrita como

$$u_h = \mathbf{N}_h^T \mathbf{U}_h \quad (33)$$

donde $\mathbf{N}_h$ es el vector de las funciones de interpolación relativas a τ_h y $\mathbf{U}_h$ es el vector que contiene los valores nodales de u_h . En consecuencia la aproximación para el flujo es:

$$\sigma_h = -\mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{N}_h^T \mathbf{U}_h \quad (34)$$

El estimador de error Z^2 se basa en sustituir el flujo exacto σ por una función pos-procesada σ^* obtenida de σ_h . Una alternativa es el flujo suavizado:

$$\sigma^* = \bar{\mathbf{N}}_h^T \Sigma_h^* \quad (35)$$

donde los valores nodales Σ_h^* se obtienen a través de la proyección de σ_h es el espacio de elementos finitos H_h es decir, σ^* debe satisfacer:

$$\int_{\Omega} \mathbf{P}(\sigma^* - \sigma_h) d\Omega = 0 \quad (36)$$

donde $\mathbf{P}$ es un vector de funciones peso que constituyen una bas de H_h ; en particular $\mathbf{P}$ puede ser $\bar{\mathbf{N}}_h$. En la práctica los valores nodales Σ_h^* puede obtenerse como el promedio de los valores de σ_h de los elementos que concurren en los nodos.

La estimación del error toma la forma:

$$|\bar{e}|^2 = \int_{\Omega} (\sigma^* - \sigma_h)^T \mathbf{D}^{-1} (\sigma^* - \sigma_h) d\Omega \quad (37)$$

Estimador de error basado en Johnson y Hansbo ($J\&H$)

En esta sección se propone un estimador de error basado en los trabajos de Johnson y Hansbo, que engloba los propuestos por Babuska y Z^2 , presentando una mayor generalidad. La norma energía del error $e = u - u_h$ está dada por:

$$|e|_B^2 = B(e, e) = B(u - u_h, e) = B(u, e) - B(u_h, e) \quad (38)$$

por definición de e (se supone que u_h satisface exactamente las condiciones de contorno (11)), se tiene que $e \in H_o$ y podemos utilizar (18) con $v = e$, obteniendo $B(u, e) = L(e)$, sustituyendo este valor en (38), se obtiene:

$$|e|_B^2 = L(e) - B(u_h, e) \quad (39)$$

Sea $\pi_h : H \rightarrow H_h$ el operador interpolación nodal clásico, usando la identidad (23) con $v = \pi_h e \in H_{ho}$ tenemos que:

$$B(u_h, \pi_h e) = L(\pi_h e) \quad (40)$$

Utilizando (40) en (39):

$$|e|_B^2 = L(e) - B(u_h, e) + B(u_h, \pi_h e) - L(\pi_h e) = L(e - \pi_h e) - B(u_h, e - \pi_h e) \quad (41)$$

donde:

$$L(e - \pi_h e) = \int_{\Gamma_\sigma} \sigma_o(e - \pi_h e) d\Gamma - \int_{\Omega} f(e - \pi_h e) d\Omega \quad (42)$$

$$B(u_h, e - \pi_h e) = \int_{\Omega} (\mathbf{S}u_h)^T \mathbf{D}[\mathbf{S}(e - \pi_h e)] d\Omega \quad (43)$$

Haciendo una integración por partes a nivel de cada elemento K en (43) e introduciendo el resultado en (41) obtenemos:

$$\begin{aligned} |e|_B^2 = & \sum_K \int_K [(\mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S})u_h - f](e - \pi_h e) d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_\sigma} (\sigma_o - \mathbf{n}^T \mathbf{D} \mathbf{S}u_h)(e - \pi_h e) d\Gamma \\ & - \sum_s \int_s \|\mathbf{n}_s^T \mathbf{D} \mathbf{S}u_h\| (e - \pi_h e) d\Gamma \end{aligned} \quad (44)$$

donde para todo $x \in s - \|\mathbf{n}_s^T \mathbf{D} \mathbf{S}u_h\| = [\mathbf{n}_s^T \sigma_h]$ representa el salto del flujo definido en (25).

En la ecuación (44) están representadas las tres fuentes de error que aparecen en la solución de elementos finitos, es decir:

- a) El residuo, al no satisfacerse exactamente la ecuación diferencial en el interior de la región, representado por:

$$\sum_K \int_K [(S^T DS)u_h - f](e - \pi_h e) d\Omega$$

- b) El hecho de no satisfacerse exactamente la condición de contorno natural representado por:

$$\int_{\Gamma_\sigma} (\sigma_o - n^T DS u_h)(e - \pi_h e) d\Gamma = \int_{\Gamma_\sigma} (\sigma_o + n^T \sigma_h)(e - \pi_h e) d\Gamma$$

- c) El salto inter-elemento en el flujo representado por:

$$\sum_s \int_s \|n_s^T DS u_h\| (e - \pi_h e) d\Gamma$$

A esta altura podemos decir que la estimación de error de Z^2 , que está basada únicamente en el salto del flujo, constituye un caso particular de esta última, que es más general. Por ejemplo en el caso de utilizar elementos de clase C^1 , las estimaciones de Z^2 no tendrían sentido puesto que no existiría salto de flujo. Sin embargo, la estimación de error propuesta tendría validez a través de los términos de las partes a) y b).

Para fines de resolver el problema del método de los elementos finitos adaptable es necesario asociar un error a cada elemento, con este objetivo podemos reordenar (44) de la siguiente manera:

$$|e|_B^2 = \sum_K \int_K R_K(e - \pi_h e) d\Omega + \sum_K \int_{\partial K} h_K R_{\partial K}(e - \pi_h e) d\Gamma \quad (45)$$

R_K representa el residuo en el interior de cada elemento dado por:

$$R_K = R_K(u_h) = (S^T DS)u_h - f \quad (46)$$

$R_{\partial K}$ representa el residuo en el contorno de cada elemento. Teniendo presente que algunos elementos tienen su frontera en el contorno de la región y otros en el interior de Ω (el contorno Γ_u no entra en juego en nuestro análisis de error puesto que suponemos que la solución aproximada u_h satisface exactamente la condición de contorno en Γ_u), $R_{\partial K}(u_h)$ se puede definir como:

$$R_{\partial K}(u_h) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\|n_s^T \sigma_h\|}{h_K} & \text{si } \partial K \in S_h \\ \frac{\sigma_o + n_s^T \sigma_h}{h_K} & \text{si } \partial K \in \Gamma_\sigma \end{cases} \quad (47)$$

El paso siguiente es dar una estimación del error de interpolación $e - \pi_h e$, sabemos que:

$$|e - \pi_h e|_{L_2(K)} \leq C_{1,K} h_K |e|_{B,K} \quad (48)$$

$$|e - \pi_h e|_{L_2(\partial K)} \leq C_{2,K} h_K^{1/2} |e|_{B,K} \quad (49)$$

donde

$$C_{1,K} = \sup_{\varphi \in H} \frac{h_K^{-1} |\varphi - \pi_h \varphi|_{L_2(K)}}{|\varphi|_{B,K}} \quad (50)$$

$$C_{2,K} = \sup_{\varphi \in H} \frac{h_K^{-1/2} |\varphi - \pi_h \varphi|_{L_2(\partial K)}}{|\varphi|_{B,K}} \quad (51)$$

con:

$$|\varphi|_{B,K} = \int_K (\mathbf{S}\varphi)^T \mathbf{D}(\mathbf{S}\varphi) d\Omega \quad (52)$$

Por la teoría de interpolación sabemos que las constantes $C_{1,K}$ y $C_{2,K}$, las cuales dependen de $P(K)$ y de las constantes de la matriz $\mathbf{D}$, están acotadas. Una estimación de estas constantes para el problema de transferencia de calor es²³:

$$C_{1,K} < \frac{0.57}{\sqrt{k}} \quad C_{2,K} < \frac{1.56}{\sqrt{5k}} \quad (53)$$

Para mayorar el término correspondiente al interior de los elementos en (45), se utiliza (48) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obteniéndose:

$$\begin{aligned} \left| \sum_K \int_K R_K(e - \pi_h e) d\Omega \right| &\leq \sum_K \left| \int_K R_K(e - \pi_h e) d\Omega \right| \\ &\leq \sum_K |R_K|_{L_2(K)} |e - \pi_h e|_{L_2(K)} \\ &\leq \sum_K |R_K|_{L_2(K)} C_{1,K} h_K |e|_{B,K} \\ &= \sum_K |C_{1,K} h_K R_K|_{L_2(K)} |e|_{B,K} \\ &\leq \left(\sum_K |C_{1,K} h_K R_K|_{L_2(K)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_K |e|_{B,K}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq |C_1 h R|_{L_2(\Omega)} |e|_B \end{aligned} \quad (54)$$

donde $C_1 = C_{1,K}$ en K , $R = R_K$ en K y $h = h_K$ en K .

Para el término correspondiente a la frontera en (45) tenemos:

$$\begin{aligned} \left| \sum_K \int_{\partial K} h_K R_{\partial K}(e - \pi_h e) d\Gamma \right| &\leq \sum_K |h_K R_{\partial K}|_{L_2(\partial K)} |e - \pi_h e|_{L_2(\partial K)} \\ &\leq \sum_K |h_K R_{\partial K}|_{L_2(\partial K)} C_{2,K} h_K^{1/2} |e|_{B,K} \\ &\leq \left[\sum_K C_{2,K}^2 h_K |h_K R_{\partial K}|_{L_2(\partial K)}^2 \right]^{1/2} |e|_B \end{aligned}$$

Sabemos que:

$$\|h_K R_{\partial K}\|_{L_2(\partial K)} = \|h_K R_{\partial K}\|_{L_2(K)} V^{1/2}(K)$$

donde $V(K)$ es el área de K , por tanto:

$$\begin{aligned} \left| \sum_K \int_{\partial K} h_K R_{\partial K} (e - \pi_{h_e}) d\Gamma \right| &\leq \left[\sum_K C_{2,K}^2 h_K \frac{\|h_K R_{\partial K}\|_{L_2(\partial K)}^2}{V(K)} \right]^{1/2} |e|_B \\ &= \left[\sum_K \left| \frac{C_{2,K} h_K^{1/2}}{V^{1/2}(K)} \|h_K R_{\partial K}\|_{L_2(\partial K)} \right|_{L_2(K)}^2 \right]^{1/2} |e|_B \quad (55) \\ &= \left[\sum_K \left| \frac{C_{2,K} h_K^{1/2}}{V^{1/2}(K)} \|R_{\partial K}\|_{L_2(\partial K)} \right|_{L_2(K)}^2 \right]^{1/2} |e|_B \\ &= |C_2 h R^*|_{L_2(\Omega)} |e|_B \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} C_2 &= C_{2,K} && \text{en } K \\ h &= h_K && \text{en } K \\ R^* &= \frac{h^{1/2}}{V^{1/2}(K)} \|R_{\partial K}\|_{L_2(\partial K)} && \text{en } K \end{aligned}$$

De esta forma hemos expresado el residuo en el contorno del elemento referido al interior del mismo.

Utilizando los resultados obtenidos en (54) y (55) en (45) podemos obtener la mayoración del error:

$$|e|_B \leq |C_1 h R|_{L_2(\Omega)} + |C_2 h R^*|_{L_2(\Omega)} \quad (56)$$

El estimador de error en este caso puede ser escrito como

$$|\tilde{e}|_B = |C_1 h R|_{L_2(\Omega)} + |C_2 h R^*|_{L_2(\Omega)} \quad (57)$$

De esta forma se ha logrado una cota superior del error que tiende a cero cuando h tiende a cero, por tanto se puede afirmar que el término de la derecha en (57) es una estimación confiable del error y por tanto el M.E.F.A. basado en este estimador debe ser confiable. Esto mismo no puede ser afirmado directamente utilizando el estimador de Z^2 .

CRITERIOS DE COMPARACIÓN PARA LOS ESTIMADORES

Aparte de comparar las estimaciones de error de Z^2 y $J \& H$ con el valor del error en problemas donde existe la solución exacta, se puede establecer un criterio de comparación basado en problemas con singularidades.

En problemas con singularidades el error en la norma energía está acotado por:

$$|e|_B \leq C N_n^{-\beta} \quad (58)$$

donde C es constante, N_n es el número de grados de libertad y β es el orden de convergencia dado por:

$$\beta = \frac{1}{2} \min(\lambda, p) \quad (59)$$

En esta última expresión p es el orden de los polinomios usados en las funciones bases y λ está asociado con la regularidad de la solución exacta.

En el caso de irregularidades en el dominio del problema, los valores de λ varían entre 0.5 para una grieta y 2 para una esquina²⁴. La Figura 3 muestra los valores de λ en los casos particulares de la esquina saliente, esquina entrante y la grieta.

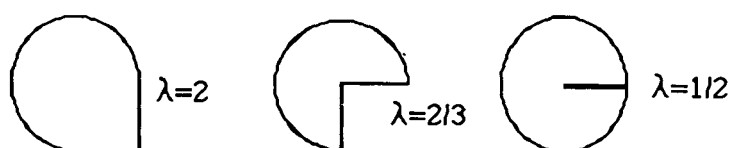


Figura 3. Regiones con esquina.

Se sabe que el orden de convergencia se afecta solamente en una región cerca de la singularidad. Por esta razón se puede decir que para la solución obtenida en una malla de elementos finitos, en los elementos lejos de la singularidad el orden de convergencia no es modificado.

Partiremos de la hipótesis de que en un refinamiento adaptable, para un problema con singularidad, el error es mayor cerca de la singularidad, produciéndose en esa zona el mayor refinamiento. De esta forma, se obtendrán cada vez más elementos que no estén afectados por la singularidad. Se espera que la malla refinada tiende a alcanzar el orden de convergencia máximo; es decir, el que tendría el problema sin singularidad.

EJEMPLOS NUMÉRICOS

A continuación daremos algunos ejemplos numéricos del método de los elementos finitos adaptable, la idea central es comparar el estimador de error de Z^2 con el de J & H .

Inicialmente daremos dos ejemplos cuya solución exacta es conocida y mediante un refinamiento uniforme compararemos numéricamente los estimadores, posteriormente daremos dos ejemplos del método de los elementos finitos adaptable en problemas con singularidades.

Para la obtención de la solución aproximada por el método de los elementos finitos se utilizarán triángulos lineales de tres nodos.

EJEMPLO 1. Sea la región Ω mostrada en la Figura 4 y sea el siguiente problema de Poisson:

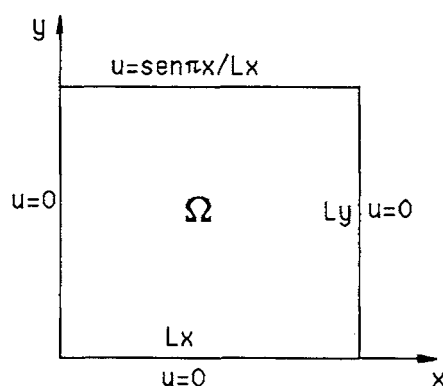


Figura 4. Región bidimensional.

$$S^T D S \quad u = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (60)$$

$$u = 0 \quad \text{en } x = 0 \quad (60a)$$

$$u = 0 \quad \text{en } x = L_x \quad (60b)$$

$$u = 0 \quad \text{en } y = 0 \quad (60c)$$

$$u = \text{sen } \pi x / L_x \quad \text{en } y = L_y \quad (60d)$$

La solución exacta de este problema con $k_x = k_y$, toma la forma:

$$u = \frac{\text{senh } \pi y / L_x \text{sen } \pi x / L_x}{\text{senh } \pi L_y / L_x} \quad (61)$$

En el caso particular con $L_x = L_y = 1$, el valor exacto de $\|u\|_B$ es:

$$|u|_B^2 = \frac{\pi \cosh \pi}{2 \text{senh } \pi} \quad (62)$$

Los resultados numéricos para el estimador Z^2 , $|\tilde{e}| = |e|_{Z^2}$, en (37) con $\sum_h^*$ tomado como el promedio de los σ_h que concurren en un nodo, y el estimador $|\tilde{e}| = |e|_{J \& H}$ dado por la ecuación (57) pueden observarse en la Tabla I. Esta tabla fué obtenida para un refinamiento uniforme.

N_n	$\ u_h\ _B$	$\ e\ _{B_{exacto}}$	$\ e\ _{Z^2}$	$\ e\ _{J \& H}$
9	1.322876	0.93593	0.855267	0.972624
36	1.269025	0.375726	0.361265	0.417037
127	1.258659	0.184129	0.181128	0.227010
257	1.256774	0.117856	0.119283	0.146560

Tabla I. Resultados numéricos del ejemplo 1. $\|u\|_{B_{exacto}}=1.255656819$.

La ecuación (58) para este ejemplo particular, sin singularidad toma la forma:

$$|e|_B \leq C N_n^{-1/2} \quad (63)$$

En la Figura 5 puede observarse que este orden de convergencia es seguido tanto por el estimador Z^2 como por el de $J \& H$.

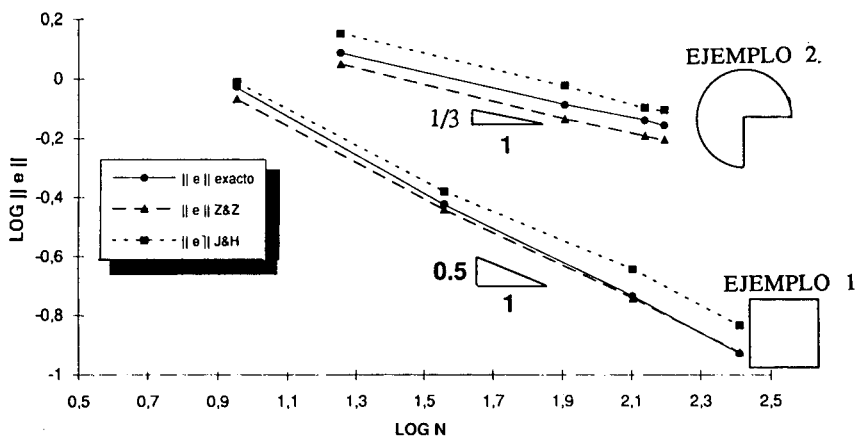


Figura 5. Tasa de convergencia de los estimadores Z^2 y $J \& H$.

EJEMPLO 2. Sea la región $\Omega = [(r, \theta), 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 3/2\pi]$ mostrada en la Figura 6 y el siguiente problema de valor de contorno:

$$S^T D_r S u = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (64)$$

$$u = 0 \quad \text{en } \Gamma_1 \quad (64a)$$

$$u = R^{1/3} \sin \theta / 3 \quad \text{en } \Gamma_2 \quad (64b)$$

$$\sigma = 0 \quad \text{en } \Gamma_3 \quad (64c)$$

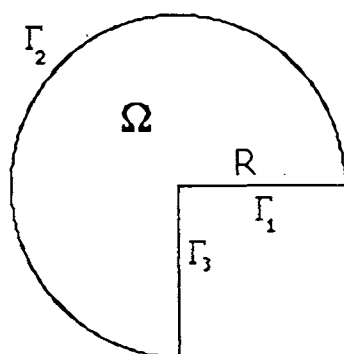


Figura 6. Región circular con singularidad.

En este caso la matriz S es la misma dada en (10) y $D_r = rD$. La solución exacta con $k_x = k_y$ es:

$$u = r^{1/3} \operatorname{sen} \theta / 3 \quad (65)$$

La norma de u toma el valor $|u|_B = \sqrt{\pi/2} R^{1/3}$. Los resultados numéricos para un refinamiento uniforme con $R = 10$ se muestran en la Tabla II.

N_n	$\ u_h\ _B$	$\ e\ _{B_{\text{exacto}}}$	$\ e\ _{Z^2}$	$\ e\ _{J \& H}$
18	2.307576	1.223256	1.123183	1.428320
81	2.099506	0.819457	0.733273	0.942098
138	2.059622	0.726615	0.641103	0.797071
157	2.052500	0.695738	0.621047	0.780225

Tabla II. Resultados numéricos del ejemplo 2. $\|u\|_{B_{\text{exacto}}} = 1.909318031$.

En este caso tenemos una singularidad $\lambda = 2/3$, la ecuación (58) será:

$$|e|_B \leq C N_n^{-1/3} \quad (66)$$

En la Figura 5 se observa nuevamente que el orden de convergencia establecido por la teoría es seguido por los estimadores en estudio, para un refinamiento uniforme.

Seguidamente aplicaremos el método de los elementos finitos adaptable al problema del ejemplo 2. En la Figura 7 se muestra la secuencia de mallas obtenida con el estimador Z^2 y el estimador $J \& H$. Podemos observar que el orden de convergencia con el refinamiento adaptable tiende al máximo de $1/2$. El valor de la tolerancia es $\eta = 0.2$.

EJEMPLO 3. Sea una chimenea cuadrada como muestra la Figura 8a. Se quiere conocer la distribución de temperatura en la pared. Por simetría se estudiará solamente un cuarto de la chimenea como se muestra en la Figura 8b.

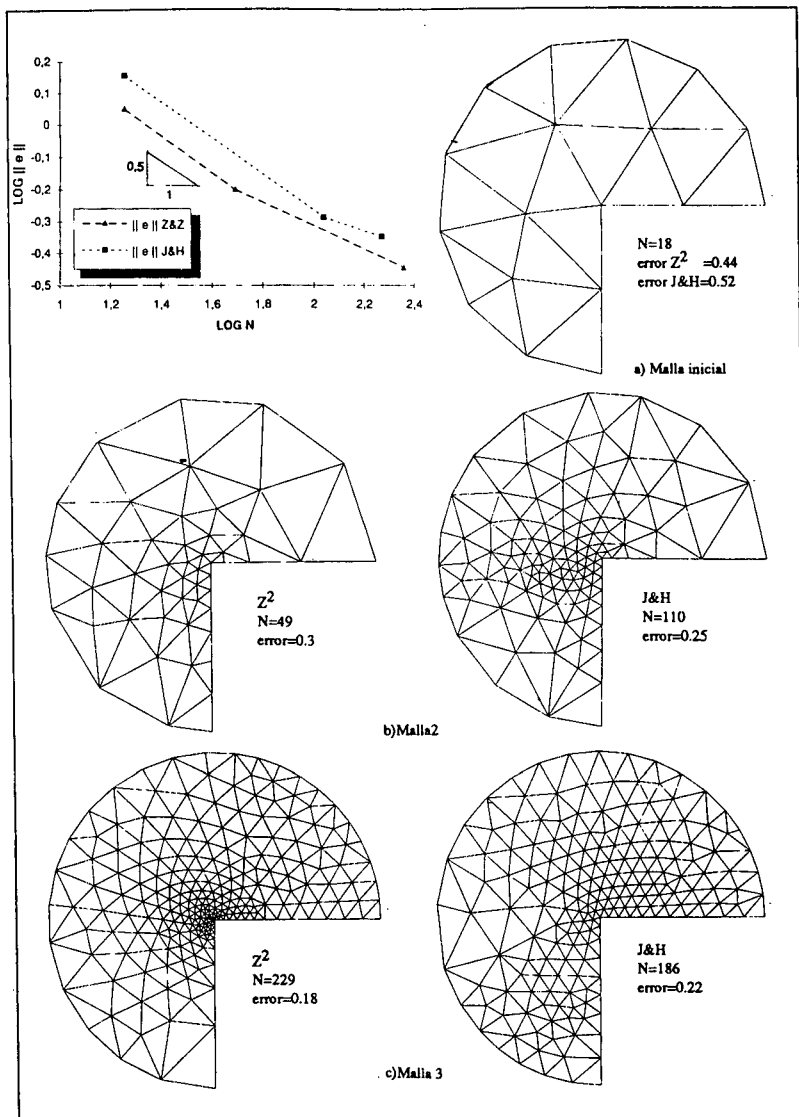


Figura 7. Secuencia de mallas adaptables con los estimadores de Z^2 y $J \& H$. Orden de convergencia. Región circular.

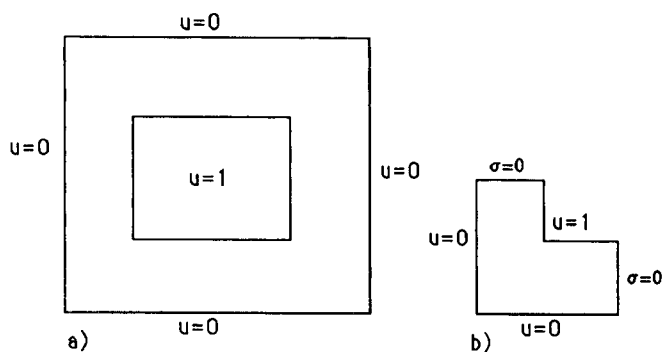


Figura 8. Distribución de temperatura en una chimenea.

La ecuación diferencial es la misma del ejemplo 1 y las condiciones de contorno se dan en la Figura 8. En la Figura 9 se muestran los resultados; esta figura corresponde al método de los elementos finitos adaptable con $\eta = 0.1$. Se puede apreciar que el estimador de $J \& H$ concuerda mejor con lo establecido por la teoría de aproximación.

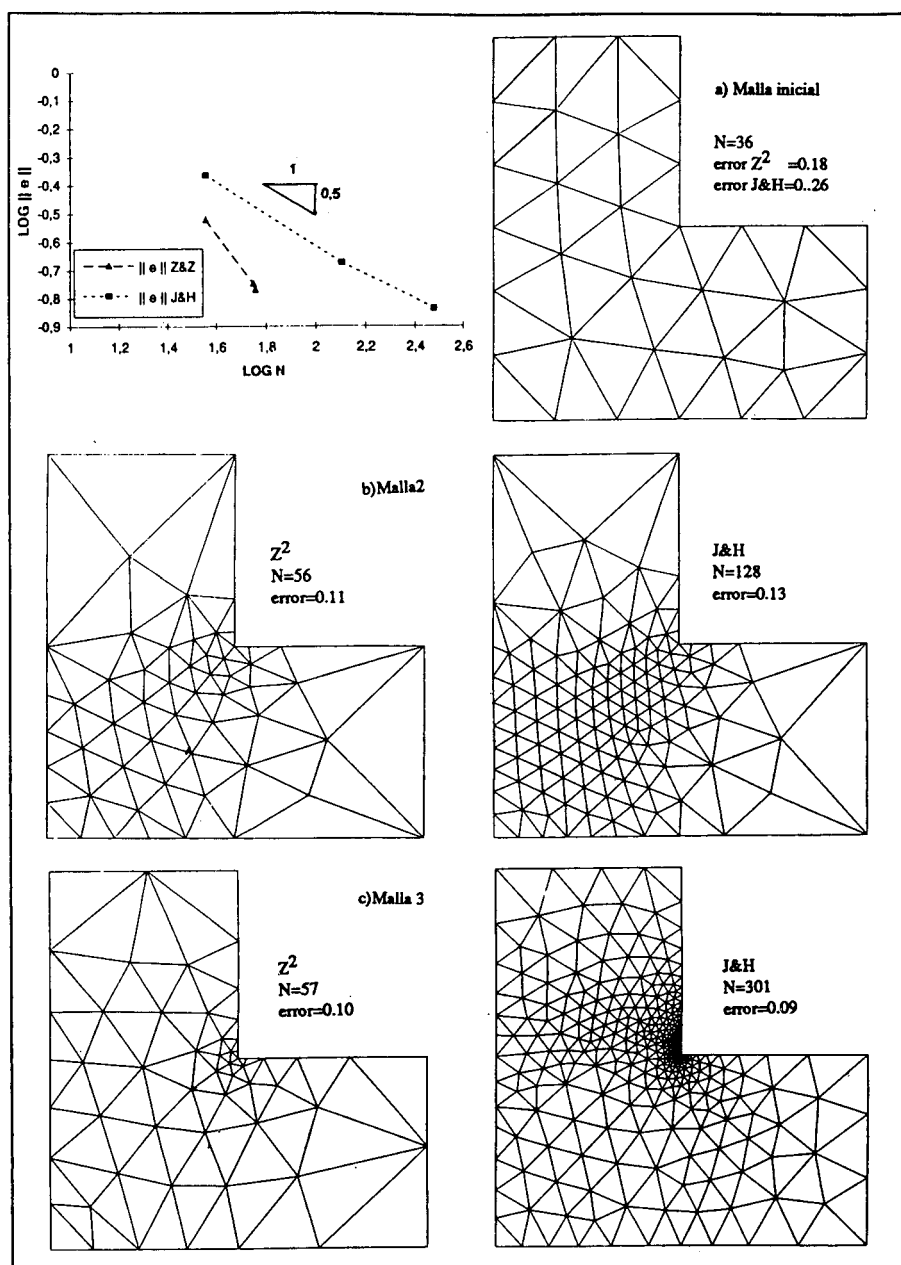


Figura 9. Secuencia de mallas adaptables con los estimadores de Z^2 y $J \& H$. Orden de convergencia. Chimenea.

CONCLUSIONES

Tanto las estimaciones de Zienkiewicz-Zhu como la de Johnson-Hansbo son adecuadas para implantar el Método de los Elementos Finitos Adaptable (M.E.F.A.) en el caso de problemas elípticos. Como puede observarse en las tablas I, II y en la Figura 5, las estimaciones de error de Z^2 y $J \& H$ proporcionan valores cercanos a los exactos, el estimador de $J \& H$ constituye una cota superior del error, mientras que el estimador de Z^2 no lo es.

En cuanto al orden de convergencia en problemas con singularidad, que constituye otra forma de comparar los estimadores, el estimador de $J \& H$ presenta un comportamiento similar al establecido por la teoría de aproximación; es decir, en el refinamiento adaptable el orden de convergencia tiende al correspondiente a un problema sin singularidad. El estimador de Z^2 presenta este mismo comportamiento en el ejemplo 2 pero difiere en el ejemplo 3.

En líneas generales se puede decir que el estimador de Z^2 es más eficiente (más fácil de implantar y obtiene el error deseado con menos trabajo computacional), pero menos confiable que el basado en la propuesta de $J \& H$. Adicionalmente este último tiene mayor generalidad, cubriendo una gama de problemas más extensa.

REFERENCIAS

1. O.C. Zienkiewicz y J.Z. Zhu, "A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis", *Int. J. Num. Meth. Eng.* Vol. **24**, pp. 337-357, (1987).
2. C. Johnson y P. Hansbo, "Adaptive finite element methods in computational mechanics", *Preprint N° 1992-041ISSN347-2809*. The University of Goteborg. (1992).
3. I. Babuska y A. Miller, "The post-processing approach in the finite element method. Part I: Calculation of displacements, stresses and other higher derivatives of the displacements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **20**, pp. 1085-1109, (1984).
4. I. Babuska y A. Miller, "The post-processing approach in the finite element method. Part II: The calculation of stress intensity factor", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **20**, pp. 1111-1129, (1984).
5. I. Babuska y A. Miller, "The post-processing approach in the finite element method. Part III: A posteriori error estimates and adaptive mesh selection", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **20**, pp. 2311-2324, (1984).
6. I. Babuska y W.C. Rheinboldt, "A posteriori error estimates for the finite element method", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **12**, pp. 1597-1615, (1978).
7. Y. Liu y H. Elmaraghy, "Assessment of discretized errors and adaptive refinement with quadrilateral finite elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **33**, pp. 781-798, (1992).
8. M. Ainsworth, J.Z. Zhu, A. Craig y O.C. Zienkiewicz, "Analysis of the Zienkiewicz-Zhu a posteriori error estimator in the finite element method", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **28**, pp. 2161-2174, (1989).
9. E. Rank y O.C. Zienkiewicz, "A simple error estimator in the finite element method", *Common. Appl. Num. Methods*, Vol. **3**, pp. 243-249, (1987).
10. O.C. Zienkiewicz y J.Z. Zhu, "The three R's of engineering analysis and error estimation and adaptivity", *Comp. Methods Appl. Mech. and Eng.*, Vol. **82**, pp. 95-113, (1990).
11. D.W. Kelly y J.P. de S.R. Gago, O.C. Zienkiewicz y I. Babuska, "A posteriori error and

- adaptive procedure in the finite element method. Part I: Error analysis. Part II: Adaptive mesh refinement", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 19, pp. 1593-1619, (1983).
12. D. Kelly, "The self-equilibration of residuals and complementary a posteriori error estimates in the finite element method", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 20, pp. 1491-1506, (1984).
 13. I. Babuska, O.C. Zienkiewicz, J.P. de S.R. Gago y E.R. de A. Oliveira (eds.), "Accuracy Estimates and Adaptive Refinement in Finite Element Computations", Wiley, New York, (1986).
 14. I. Babuska y W.C. Rheinboldt, "Error estimates for adaptive finite element computations", *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 15, pp. 736-754, (1978).
 15. I. Babuska y A. Miller, "A posteriori error estimates and adaptive techniques for the finite element method", *Tech. Note BN-968, Inst. for Phys. Sci. and Techn.*, Univ. of Maeyland, (1981).
 16. F.J. Beltran y E. Alarcon, "Estimación del error de discretización con principios variacionales multicampo: I. Elasticidad", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 8, pp. 25-43, (1992).
 17. J.Z. Zhu y O.C. Zienkiewicz, "Superconvergence recovery technique and a posteriori error estimators", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 30, pp. 1321-1339, (1990).
 18. R. Arcangeli y J.L. Gout, "Sur l'évaluation de l'erreur d'interpolation de Lagrange dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ", *R.A.I.R.O. Analyse Numerique*, Vol. 10, pp. 5-27, (1976).
 19. G.G. Castor, "Introducción matemática al método de los elementos finitos", *Tesis de pos-grado*, U.C.L.A. (1986).
 20. E.A. Fancello, A.C. Salgado y R.A. Feijóo, "Aranha: generador de malhas 2D para elementos finitos triangulares de 3 e 6 nos", *Publicación interna LNCC/CNPq*, Vol. 21, (1990).
 21. R.E.d Ewing, "A posteriori error estimation", *Comp. Methods Appl. Mech. and Eng.*, Vol. 82, pp. 59-72, (1990).
 22. B.A. Szabó, "The use of a priori estimates in engineering computations", *Comp. Methods Appl. Mech. and Eng.*, Vol. 82, pp. 139-154, (1990).
 23. G.G. Castor, "El método de los elementos finitos adaptable", *Tesis de doctorado*, U.C.V, Por presentar.
 24. G. Carey y T. Oden, "Finite elements: A second course. Volumen II", Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, (1983).