Rev. Int. Mét. Num. Cálc. Dis. Ing.
Vol. **19**, **3**, 383–394 (2003)

Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería

La ecuación de Poisson desde el punto de vista de la mecánica

Leonid P. Lebedev

Department of Mechanics and Mathematics
Rostov State University, Rusia
Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, Colombia
Tel.: 57-1-345 24 80; Fax: 57-1-316 52 47
e-mail: lebedev1946@yahoo.com

Ricardo O. Grossi *

Instituto de Ingeniería Civil y Medio Ambiente de Salta
Facultad de Ingeniería – Universidad Nacional de Salta
Avenida Bolivia 5150
4400 Salta, República Argentina
Tel.: 54-387-425 53 79; Fax: 54-387-425 53 51
e-mail: grossiro@unsa.edu.ar

Resumen

En este trabajo se discuten algunas cuestiones de la teoría de problemas de contorno para la ecuación de Poisson mediante el uso de una membrana como un objeto descrito por la mencionada ecuación. Se muestra cómo una interpretación mecánica de la ecuación de Poisson permite explicar ciertas relaciones conocidas de la teoría general y también cómo permite arrojar luz sobre varios problemas que se originan en la aplicación de métodos numéricos, comúnmente usados en la resolución de los problemas de contorno.

POISSON'S EQUATION FROM THE VIEWPOINT OF MECHANICS

Summary

Some questions of the theory of boundary value problems for Poisson's equation are discussed, using a membrane as an object described by the equation. A mechanical interpretation of the equation allows us to explain some relations known from the general theory and to shed some light on various problems in the application of numerical methods commonly used to solve the boundary value problems.

INTRODUCCIÓN

La conocida ecuación de Poisson $a\Delta u = -F$ surge en varias áreas de la física. El significado físico de los términos y parámetros que intervienen en esta ecuación dependen del área particular en la cual ésta se aplica. En la física matemática se estudian las propiedades generales de la ecuación de Poisson y así como también los problemas de contorno asociados[1,2].

* Miembro de la Carrera de Investigador Científico del CONICET

 ISSN: 0213–1315 Recibido: Junio 2002 Aceptado: Octubre 2002

Los autores de textos en matemática usualmente presentan una derivación de la ecuación a partir de un determinado problema físico, por ejemplo mecánico o eléctrico, pero luego realizan desarrollos matemáticos desvinculando a la ecuación de su planteo físico. Aunque ocasionalmente estos autores pueden establecer que determinados resultados matemáticos están vinculados con el sistema físico original, raramente proporcionan una imaginería concreta tal que explique los resultados matemáticos correspondientes y simultáneamente provea una adecuada intuición sobre el comportamiento real del sistema. Cabe destacar que dicha visión intuitiva es difícil de lograr en ciertas áreas. No obstante, en mecánica la ecuación de Poisson describe el equilibrio estático de una membrana, esto es: esta ecuación gobierna la deflexión u de la membrana sometida a tensiones internas caracterizadas por el parámetro a bajo la acción de la carga F.

Desde el punto de vista matemático la membrana es considerada como un dominio D del plano y en consecuencia, cada uno de sus puntos es descrito mediante el par de coordenadas cartesianas (x, y). Mediante un adecuado cambio de variables se puede lograr que sea $a = 1$ y esto es lo que se supone de aquí en más. Obviamente en este caso la ecuación se reduce a

$$\Delta u = -F \tag{1}$$

En las primeras etapas de la matemática clásica se estudió el caso particular de la ecuación de Poisson con $F = 0$, la cual se conoce como ecuación de Laplace. Para esta ecuación fueron formulados los denominados problemas de Dirichlet y Neumann. En el problema de Dirichlet se suponen dados, los valores de la deflexión transversal u a lo largo del contorno B del dominio D y esto conduce a una condición de contorno de la forma

$$u\Big|_B = \varphi \tag{2}$$

En cambio, en el problema de Neumann se suponen conocidos los valores de la derivada de u respecto de la normal a lo largo del contorno, esto es

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_B = f \tag{3}$$

Vamos a suponer que las funciones y F, f y φ son continuas en sus correspondientes dominios. Entre los resultados que se derivan en la física matemática respecto a los problemas de contorno mencionados existe una condición necesaria para la existencia de solución del problema Neumann para la ecuación de Laplace, la cual se establece mediante la siguiente igualdad

$$\int_B f \, \mathrm{d}s = 0 \tag{4}$$

donde s denota la longitud de arco a lo largo del contorno B. El significado físico de la condición (4) suele no ser claro, dado que comúnmente se deriva a partir de la teoría de funciones potenciales. En este trabajo se considerará esta cuestión junto con otras propiedades usando a la membrana como un sistema descrito mediante los problemas de contorno mencionados.

Es bien conocido el hecho que la energía potencial de la membrana está dada por

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_D (u_x^2 + u_y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

y que el trabajo de las fuerzas externas que actúan sobre la misma y producen la deflexión u está dado por

$$A(u) = \int_D Fu\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_B fu\,\mathrm{d}s$$

Nótese que se denota con f a la fuerza que actúa sobre el contorno B y que esta es la misma notación que la usada en la ecuación (3), lo cual es intencional, dado que tal como luego se demostrará, el significado físico de f en (3) es el de una fuerza aplicada sobre el contorno.

Es posible considerar el caso de condiciones de contorno mixtas. Esto ocurre cuando una porción B_1 del contorno está fijo y una fuerza f se aplica en el resto del contorno $B_2 = B \setminus B_1$. Las condiciones de contorno respectivas están dadas por

$$u\Big|_{B_1} = \varphi \tag{5}$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{B_2} = f \tag{6}$$

En este caso la segunda integral que compone la expresión de $A(u)$ debe ser planteada sobre B_2 en lugar de B.

Ahora vamos a introducir una clase de desplazamientos virtuales de la membrana. Se trata del conjunto de funciones que son suficientemente regulares y que permiten satisfacer la condición de contorno de Dirichlet cuando se superponen con la función u que describe el equilibrio estático de la membrana. La propiedad de regularidad de la función v y de sus derivadas depende del problema particular que se esté tratando; y es la misma que la requerida para la u función que está en la clase donde se busca la solución del problema. Vamos a considerar que v es suficientemente regular como para que todas las derivadas involucradas en los desarrollos que siguen, resulten continuas en el dominio cerrado $\bar{D}$. En consecuencia v debe satisfacer la condición

$$v\Big|_{B_1} = 0 \tag{7}$$

Esto implica que cuando v es un desplazamiento virtual y u satisface la condición (5), entonces $u + v$ también satisface (5).

El planteo de un problema de contorno mixto para la membrana sometida a una carga está dado por la ecuación (1) válida en D y dos condiciones de contorno del tipo (5) y (6). En el planteo clásico se trata de determinar una solución que pertenece al conjunto de funciones continuas con derivadas, hasta las de segundo orden, continuas en $\bar{D}$. En particular, se pueden considerar los dos problemas fundamentales para la membrana adoptando $B_1 = B$ para el problema de Dirichlet y $B_2 = B$ para el problema de Neumann.

Un enfoque diferente para resolver a los problemas descritos se basa en procedimientos del cálculo de variaciones y la mecánica. En este caso la ecuación de equilibrio (1) y la condición de contorno (6) se obtienen a partir del principio de energía mínima. Vamos a denotar por $C^{(2)}\ (\bar{D})$ al conjunto de funciones que junto con sus derivadas hasta las de orden dos son continuas en $\bar{D}$. A efectos de simplificar el desarrollo vamos a suponer que D es un dominio acotado y que su contorno es regular a trozos. Entonces se puede formular el denominado:

Principio de energía mínima

Una función $u \in C^{(2)}\ (\bar{D})$ que produce un mínimo en el funcional de energía $\Phi(u) = E(u) - A(u)$ y que satisface la condición de Dirichlet (5) es una solución del problema (1), (5), (6); esto es, $u = u(x, y)$ proporciona las deflexiones de la membrana sometida a las fuerzas F en D y f en B_2.

Vamos a demostrar esta afirmación mediante un razonamiento usualmente usado en el cálculo de variaciones. Sea $u \in C^{(2)}\ (\bar{D})$ una función que produce un mínimo en $\Phi(u)$ y que satisface la condición (5) y $v \in C^{(2)}\ (\bar{D})$ un desplazamiento virtual. Entonces, para todo real t la función $u + tv$ pertenece a $C^{(2)}\ (\bar{D})$ y satisface la condición (5). Para u y v fijas el funcional $\Phi(u + tv)$ se reduce a una función de la variable t y dado que u minimiza a $\Phi(u)$, se verifica la desigualdad

$$\Phi(u) \leq \Phi(u + tv)$$

Esto implica que $\Phi(u + tv)$ toma su valor mínimo en el punto $t = 0$. La dependencia de $\Phi(u + tv)$ de t es cuadrática y la derivada de esta función en $t = 0$ debe anularse, esto es

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(u + tv)\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[E(u + tv) - A(u + tv)]\bigg|_{t=0} = 0$$

Esto implica que debe verificarse

$$\int_D (u_x v_x + u_y v_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_D Fv\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_{B_2} fv\,\mathrm{d}s = 0 \tag{8}$$

para todo desplazamiento virtual v.

A continuación se analiza el significado de la ecuación (8). En primer lugar se observa que los términos $\int_D Fv\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{B_2} fv\,\mathrm{d}s$ representan al trabajo de las fuerzas externas cuando la membrana ejecuta un desplazamiento virtual v. A su vez, el primer término $\int_D (u_x v_x + u_y v_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ de (8) se puede interpretar como el trabajo de las tensiones internas, cuando la membrana ejecuta el mismo desplazamiento virtual v. Si la ecuación (8) se escribe como

$$\int_D (u_x v_x + u_y v_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_D Fv\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{B_2} fv\,\mathrm{d}s = 0 \tag{9}$$

se llega en forma natural al denominado:

Principio de los trabajos virtuales

En el estado de equilibrio de la membrana, el trabajo realizado por las fuerzas externas, cuando ésta realiza un desplazamiento virtual es igual al trabajo de las tensiones internas para el mismo desplazamiento virtual.

Esta es una formulación típica del principio de los trabajos virtuales para un cuerpo o sistema elástico. La ecuación (9) se utiliza para derivar las ecuaciones correspondientes al método de los elementos finitos para la obtención de soluciones numéricas del problema.

Vamos a demostrar que las ecuaciones (1) y (6) surgen a partir del principio de los trabajos virtuales. Así, si se aplica en la integral de la izquierda de (9) la técnica de integración por partes y se tiene en cuenta que es $v = 0$ en B_1, resulta

$$\int_D (u_x v_x + u_y v_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\int_D (u_{xx} + u_{yy})v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_B (u_x n_x + u_y n_y)v\,\mathrm{d}s =$$
$$= -\int_D \Delta u v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{B_2} \frac{\partial u}{\partial n} v\,\mathrm{d}s$$

donde n_x, n_y son las componentes de la normal exterior al contorno B. Al reemplazar esta igualdad en la ecuación (9), se tiene

$$-\int_D \Delta u v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{B_2} \frac{\partial u}{\partial n} v\,\mathrm{d}s = \int_D Fv\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{B_2} fv\,\mathrm{d}s$$

de donde es

$$\int_D (\Delta u + F) v \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y - \int_{B_2} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - f \right) v \, \mathrm{d}s = 0 \tag{10}$$

Dado que esta igualdad debe satisfacerse para todo desplazamiento virtual v si se restringen éstos a aquellos que se anulan a lo largo del contorno, resulta

$$\int_D (\Delta u + F) v \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 0$$

Ahora la aplicación del lema fundamental del cálculo de variaciones permite afirmar que dado que la expresión encerrada entre paréntesis en el integrando es continua, la misma debe ser nula en D, esto es

$$\Delta u + F = 0$$

Queda demostrado que la función minimizante u satisface a la ecuación de Poisson. Pero entonces de (10) resulta que debe ser

$$\int_{B_2} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - f \right) v \, \mathrm{d}s = 0$$

para todo desplazamiento virtual v. Si se aplica el lema fundamental del cálculo de variaciones a dicha expresión, dado que la función encerrada entre paréntesis en el integrando es continua, la misma debe ser nula en B_2. Esto implica que la función u satisface a la condición de Neumann (6) en B_2 y que la función f que interviene en esta condición es realmente una fuerza que actúa sobre el contorno de la membrana.

El razonamiento usado para obtener las ecuaciones (1) y (6) puede invertirse, esto es, se puede obtener (9) a partir de (1) usando (6). Para ello supongamos que $u \in C^{(2)}(\bar{D})$ es una solución del problema de contorno mixto (1), (5) y (6). Si se multiplica miembro a miembro a la ecuación (1) por una función de desplazamiento virtual v y se integra sobre el dominio D, luego se aplica integración por partes y finalmente se usa la condición (6), se obtiene la ecuación (9).

En conclusión: es posible plantear el mismo problema de contorno mixto mediante el uso de dos conjuntos diferentes de ecuaciones. El primero es clásico: lo componen la ecuación diferencial (1) y las condiciones de contorno (5) y (6). En el segundo se tiene además de la solución desconocida u un desplazamiento virtual arbitrario v y este conjunto consiste en las ecuaciones (9), (5) y la ecuación (7) para v.

Nótese que se demostró que tanto el principio de energía mínima como el rincipio de los trabajos virtuales pueden ser indistintamente usados para obtener una solución clásica del problema de contorno mixto antes planteado. Se considera mas adecuado el uso del principio de los trabajos virtuales, dado que el mismo puede ser aplicado a un espectro más amplio de problemas de la mecánica. Además, el mismo puede ser aplicado aún cuando las fuerzas que intervienen no son potenciales o los sistemas mecánicos en estudio son no elásticos.

Si bien los argumentos y conclusiones hasta aquí establecidos lo fueron en términos del problema de contorno mixto, es claro que los problemas de Dirichlet y Neumann son simples casos particulares. Cuando se trata de determinar una solución clásica a un problema de contorno para la membrana, los dos procedimientos mencionados son equivalentes.

En la física matemática clásica primero se establece la derivación de la ecuación (1), luego se plantean los dos tipos de condiciones de contorno que corresponden al problema de Dirichlet y al de Neumann y la discusión luego se orienta al uso de funciones potenciales. Si bien este enfoque es razonable, es conveniente observar que en el caso del problema de la membrana, el principio de los trabajos virtuales puede ser usado como punto de partida. Esto puede resultar no usual para aquellos matemáticos que están acostumbrados a resolver este tipo de problemas a partir de una ecuación diferencial, pero en rigor el principio de los trabajos virtuales es de uso muy común en la ingeniería; de hecho, para el problema de la membrana el método de los elementos finitos se basa en dicho principio.

Para explicar el significado de la expresión (4) para la ecuación de Laplace en el problema de Neumann, vamos a considerar el caso más general basado en la ecuación (1).

Se supone entonces que la fuerza f se aplica a lo largo del contorno B del dominio D. Para el problema de Neumann los desplazamientos virtuales no son restringidos por ninguna condición de naturaleza geométrica. De esa forma las funciones del tipo $v = c$, donde c es una constante, pertenecen a la clase de desplazamientos virtuales admisibles. Al reemplazar esto en la ecuación (9) con $B_2 = B$, se obtiene

$$\int_D Fc \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y + \int_{B_2} fc \,\mathrm{d}s = 0$$

Para $c = 1$ es

$$\int_D F \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y + \int_{B_2} f \,\mathrm{d}s = 0 \tag{11}$$

Se observa que para $F = 0$ se obtiene la relación (4). La interpretación desde el punto de vista de la mecánica de la ecuación (11) es que la fuerza resultante sobre la membrana es nula. Esta condición de equilibrio se aplica a un cuerpo que puede desplazarse como un rígido. Pero en el caso de una membrana que no está fija esto también ocurre de manera que el planteo de la condición (11) es bastante sensato. De la mecánica se conoce que para el equilibrio de un cuerpo libre se deben establecer seis condiciones sobre las fuerzas resultantes: esta es una de ellas. El interrogante que surge es dónde están planteadas las cinco condiciones restantes. Ocurre que simplemente han desaparecido, dado que el modelo matemático usado para describir el comportamiento de la membrana posee al movimiento de cuerpo rígido en la dirección normal a la membrana como su único grado de libertad. Si se consideran la energía $E(u)$ de la membrana y soluciones de la ecuación $E(u) = 0$, se deduce que sobre D se verifica que es $u_x = 0$ y $u_y = 0$. En consecuencia, $u = c$ es la única posibilidad si la membrana se debe desplazar sin un incremento de energía a partir del estado en que no hay deformaciones. A pesar de este pequeño defecto de la teoría de la membrana, el modelo matemático predice resultados adecuados en muchos casos y seguramente continuarán las aplicaciones exitosas del mismo. Podemos denominar a (11) como condición de *equilibrio propio* de las fuerzas externas que actúan sobre la membrana. Esta condición de equilibrio es necesaria para la resolución del problema de Neumann para la ecuación de Poisson (1).

Puede parecer que podemos excluir a los movimientos de cuerpo rígido sin pérdida de generalidad mediante algún procedimiento que fije a un punto dado de la membrana. Así por ejemplo se puede imponer una condición de la forma $u(x_0, y_0) = 0$ donde $(x_0, y_0) \in \bar{D}$. Dado que esto realmente impide los movimientos de cuerpo rígido de la membrana, uno puede verse tentado a eliminar la condición (11) y tratar de resolver al problema de Neumann para la ecuación (1) para todo par de funciones continuas F, f. No obstante, este procedimiento tiene un serio inconveniente: en general el punto (x_0, y_0) va a resultar un punto singular de la solución del problema. Desde un punto de vista de la matemática pura no existe nada incorrecto; en rigor las singularidades son de gran interés en esta disciplina. Pero la existencia de un punto singular en una solución significa que en el mismo algunas hipótesis establecidas en el proceso de derivación del modelo matemático han fallado y en consecuencia, el problema no describe adecuadamente al objeto en consideración (al menos en un en cierto entorno del punto singular). En la resolución de un problema práctico se debe evitar dicha situación o al menos se debe conocer cómo evitar sus características más problemáticas. En particular se debe hacer esto en toda resolución numérica del problema.

EL MÉTODO DE RITZ

Vamos ahora a considerar un método numérico muy popular para obtener la solución del problema de la membrana, el denominado método de Ritz, el cual constituye la base para el desarrollo del método de los elementos finitos. En este caso no es necesario plantear una ecuación diferencial, sino que se debe plantear el problema de la membrana directamente a partir del principio de los trabajos virtuales. Para obtener la n–ésima aproximación con el método de Ritz se realiza el siguiente procedimiento que se describe a continuación.

Sea φ_0 una función del espacio $C^{(2)}\ (\bar{D})$ que satisface la condición de Dirichlet (5). Sea además $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ un conjunto de funciones de $C^{(2)}\ (\bar{D})$ que son linealmente independientes y que satisfacen la condición de contorno (7). Ahora se busca una función que minimiza al funcional de energía $\Phi(u) = E(u) - A(u)$ sobre el conjunto de funciones de la forma $\varphi_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\varphi_k$ donde los coeficientes c_k son números reales.

Vamos a denotar por U_n al conjunto de funciones de la forma $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\varphi_k$. Ahora se introduce la forma bilineal dada por

$$\langle u, v\rangle = \int_D (u_x v_x + u_y v_y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

Sea $C^{(2)}_{B_1}\ (\bar{D})$ el conjunto de funciones v de $C^{(2)}\ (\bar{D})$ que satisfacen la condición de contorno (7). Es fácil verificar que si B_1 es no vacío, entonces la forma bilineal $\langle u, v\rangle$ se transforma en un producto interno del espacio $C^{(2)}_{B_1}\ (\bar{D})$. El conjunto U_n es un subespacio n–dimensional de $C^{(2)}_{B_1}\ (\bar{D})$, en el cual el conjunto de funciones $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ forma una base.

En la aplicación del método de Ritz se trata de determinar un conjunto de coeficientes $\{c_1, c_2, ..., c_n\}$ para los cuales $\Phi\left(\varphi_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\varphi_k\right)$ toma su valor mínimo. Si se considera a Φ como una función de n variables reales c_k y se escribe en detalle su expresión analítica, se puede fácilmente reconocer que se trata de una forma cuadrática en las variables c_k y en consecuencia su mínimo debe satisfacer al sistema de n ecuaciones lineales

$$\frac{\partial}{\partial c_i}\Phi\left(\varphi_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k\right) = 0 \qquad i = 1, 2, ..., n$$

Si se usa la notación $\langle u, v\rangle$, este sistema se reduce a

$$\begin{aligned}
&c_1\langle\varphi_1, \varphi_1\rangle + c_2\langle\varphi_2, \varphi_1\rangle + ... + c_n\langle\varphi_n, \varphi_1\rangle = -\langle\varphi_0, \varphi_1\rangle + A(\varphi_1)\\
&c_1\langle\varphi_1, \varphi_2\rangle + c_2\langle\varphi_2, \varphi_2\rangle + ... + c_n\langle\varphi_n, \varphi_2\rangle = -\langle\varphi_0, \varphi_2\rangle + A(\varphi_2)\\
&\vdots\\
&c_1\langle\varphi_1, \varphi_n\rangle + c_2\langle\varphi_2, \varphi_n\rangle + ... + c_n\langle\varphi_n, \varphi_n\rangle = -\langle\varphi_0, \varphi_n\rangle + A(\varphi_n)
\end{aligned} \tag{12}$$

El determinante de este sistema está dado por

$$\begin{vmatrix} \langle\varphi_1,\varphi_1\rangle & \langle\varphi_2,\varphi_1\rangle & \ldots & \langle\varphi_n,\varphi_1\rangle \\ \langle\varphi_1,\varphi_2\rangle & \langle\varphi_2,\varphi_2\rangle & \ldots & \langle\varphi_n,\varphi_2\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle\varphi_1,\varphi_n\rangle & \langle\varphi_2,\varphi_n\rangle & \ldots & \langle\varphi_n,\varphi_n\rangle \end{vmatrix} \tag{13}$$

y es el denominado determinante de Gram. Dado que el mismo caracteriza a la independencia lineal de un sistema de elementos de un espacio vectorial y como hemos adoptado al conjunto $\{\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n\}$ como linealmente independiente, resulta claro que este determinante es no nulo. En consecuencia, el sistema (12) que corresponde a la n–ésima aproximación del método de Ritz siempre posee una solución única u_n. Dado que el término cuadrático de Φ en las variables c_i es $E(u_n)$, expresión no negativa, se concluye que la solución u_n^* dada por (12) establece el mínimo de $\Phi(\varphi_0+u_n^*)$ entre todos los valores $\Phi(\varphi_0+u_n)$.

Consideremos algunas propiedades trascendentes del método de Ritz. En primer lugar vamos a demostrar que las aproximaciones que produce son uniformemente acotadas en la norma energética. Sea u_n^* la n–ésima solución aproximada que produce el método de Ritz. Si se cambia c_i por c_i^* en la i–ésima ecuación del sistema (12), la cual está dada por $\langle u_n^*,\varphi_i\rangle = -\langle\varphi_0,\varphi_i\rangle + A(\varphi_i)$, luego se multiplica miembro a miembro por c_i^* y se suma respecto de i, se obtiene

$$\langle u_n^*,u_n^*\rangle = -\langle\varphi_0,u_n^*\rangle + A(u_n^*) \tag{14}$$

Si se aplica la conocida desigualdad de Schwarz, resulta

$$|\langle\varphi_0,u_n^*\rangle| \le \sqrt{\langle\varphi_0,\varphi_0\rangle}\sqrt{\langle u_n^*,u_n^*\rangle}$$

Si ahora se aplica la mencionada desigualdad a los términos de $A(u_n^*)$, se tiene

$$\left|\int_F u_n^*\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \le \sqrt{\int_D F^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}\,\sqrt{\int_D {u_n^*}^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$

y

$$\left|\int_{B_2} f u_n^*\,\mathrm{d}s\right| \le \sqrt{\int_{B_2} f^2\,\mathrm{d}s}\,\sqrt{\int_{B_2} {u_n^*}^2\,\mathrm{d}s}$$

Para continuar se requiere de la aplicación de ciertas desigualdades que se derivan en la teoría de los espacios de Sobolev. La primera de ellas, que es válida cuando una función es nula en el contorno B se denomina desigualdad de Friedrichs y está dada por

$$\int_D u^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le m\int_D (u_x^2+u_y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{15}$$

La constante m depende de D, pero no de la función u. (En el caso de la membrana es $m=\nu_0^{-2}$ donde ν_0 es la menor autofrecuencia; en consecuencia, desde el vista físico resulta obvia la existencia de dicha constante.) En la teoría de los espacios de Sobolev se derivan otras desigualdades más generales de este tipo, en particular, estas son válidas cuando u es nula sólo en una parte del contorno que posee longitud no nula. Por lo tanto, vamos a usar esta desigualdad en el contexto del problema mixto que estamos tratando. La siguiente desigualdad se prueba también en la teoría de los espacios de Sobolev

$$\int_{B_2} u^2\,\mathrm{d}s \le m_1\int_D (u_x^2+u_y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{16}$$

La derivación de la desigualdad (16) no es simple, pero consideraciones mecánicas demuestran que tal constante existe independientemente de u y que la misma depende sólo de las formas de D y de B_2. Esta constante es la misma ν_0^{-2} para el problema sobre las autofrecuencias de una membrana cuya densidad ρ es despreciable, pero en cuyo borde B_2 existe adherida una masa distribuida de densidad lineal igual a 1. En rigor muchos problemas teóricos modernos pueden ser entendidos sobre la base de la mecánica!

Al usar las cinco últimas desigualdades en la ecuación (14), se obtiene

$$\langle u_n^*, u_n^* \rangle \leq \left[\sqrt{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle} + m \sqrt{\int_D F^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} \; + m_1 \sqrt{\int_{B_2} {u_n^*}^2 \,\mathrm{d}s} \right] \sqrt{\langle u_n^*, u_n^* \rangle}$$

Por lo tanto es $\langle u_n^*, u_n^* \rangle \leq m_2$ con una constante m_2 que no depende de n (el número que indica la aproximación). En el caso de un problema de contorno mixto para la membrana se puede probar mucho más: esto es, convergencia en la norma correspondiente al producto interno $\langle .,. \rangle$ de las aproximaciones a la solución exacta cuando B_2 posee longitud no nula. Esto sale del propósito de esta discusión, pero no obstante, el lector interesado puede consultar referencias más técnicas[5,4,3] para un tratamiento más completo. En este punto es interesante demostrar lo útil que puede ser el aprender la teoría aun cuando no se tenga en claro cómo se han obtenido todos los resultados.

En la práctica ingenieril la cuestión de la convergencia de las aproximaciones se trata de la siguiente forma. Se calculan dos aproximaciones de precisión diferentes y se comparan, si la diferencia es suficientemente pequeña se acepta a una de ellas como una aproximación adecuada. Lamentablemente tal procedimiento puede conducir a pensar que por ejemplo, la conocida serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ es convergente. Una cuestión similar puede ocurrir en el problema de Neumann para la ecuación (1). En efecto, en este caso la función φ_0 es nula. Supongamos que se eligió un conjunto $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ de funciones del espacio $C^{(2)}\ (\bar{D})$ que sean linealmente independientes y que no estén restringidas por ninguna condición de contorno. Dado que un ingeniero está interesado en el estado de tensiones y no en el movimiento como cuerpo rígido, dicho conjunto debe ser elegido de manera tal que su envolvente lineal no contenga a una función constante. Esto implica que el determinante de Gram (13) del sistema (12) no puede ser nulo y así el ingeniero va ha obtener una aproximación de Ritz a la solución (la cual no existe si la condición de equilibrio propio de las fuerzas no es satisfecha). Más aún, puede ocurrir que la aproximación siguiente sea cercana a la aproximación precedente en los valores de las derivadas primeras y que difieran sólo en los valores de las funciones en un valor aproximadamente constante. Dado que el ingeniero sabe que una membrana libre puede desplazarse libremente en una distancia constante, puede concluir que la aproximación deseada ha sido determinada. No obstante, en este caso no existe solución.

Vamos a analizar con más detalle la situación con respecto al problema de Neumann para la ecuación (1). Supongamos que la condición de equilibrio propio (11) es satisfecha para el caso de las fuerzas externas. Entonces el problema inicial posee solución, pero esta puede ser determinada salvo una constante aditiva indeterminada. Se puede dar un valor a la misma imponiendo que en un punto (x_0, y_0) la solución y en consecuencia todas las funciones coordenadas del método de Ritz sean nulas. Esto parece ser un procedimiento satisfactorio. De acuerdo con la teoría de los espacios de Sobolev, en el subconjunto de funciones de $C^{(2)}\ (\bar{D})$ que están restringidas por dicha condición no existen en las desigualdades (15) y (16) constantes m y m_1 respectivamente, que sean independientes de u. Esto no implica nada en forma directa, pero ahora no puede repetirse la derivación de la cota sobre la norma energética de la n–ésima aproximación de Ritz. Es interesante puntualizar que cada vez que se encuentren dificultades con la teoría en forma correspondiente, se van a tener problemas en los cálculos numéricos. Este es precisamente el caso del problema que estamos analizando. A pesar de que el problema de Neumann para la ecuación (1) tiene solución, el sistema del método de Ritz puede producir aproximaciones de escasa precisión. Una razón se debe a que se calculan numéricamente a todos los coeficientes de dicho sistema; en particular, esto ocurre con el segundo miembro $A(\varphi_i)$, cuando se debe integrar numéricamente. Los errores de redondeo se tornan equivalentes a pequeños cambios en las fuerzas y en consecuencia las mismas pierden la posibilidad de satisfacer la condición de equilibrio propio. Esto implica que en aproximaciones posteriores se va a producir el fenómeno de inestabilidad numérica.

Esto conduce a la cuestión de cómo deben restringirse las deflexiones de manera tal que el proceso numérico resulte estable. Si se establece una restricción sobre todas las funciones mediante una condición del tipo

$$\int_D u \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 0 \tag{17}$$

entonces en el conjunto de funciones de $C^{(2)}$ $(\bar{D})$ que satisfacen dicha condición las desigualdades (15) y (16) son válidas con constantes m y m_1 respectivamente, las cuales son independientes de u. Entonces se puede resolver el "problema de Neumann" para la ecuación (1) aún para fuerzas que no verifiquen la condición de equilibrio propio. Esto ocurre porque hemos establecido ciertas condiciones geométricas de manera que la membrana ha dejado de estar libre.

Una discusión más detallada sobre el planteo de problemas para la ecuación de Poisson requiere el uso de teoría adicional sobre análisis funcional y en particular sobre los espacios de Sobolev.

Consideremos como ejemplo de aplicación al problema de Neumann

$$\Delta u = y \qquad \text{en } D \tag{18}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_B = 0 \tag{19}$$

donde $D = \{(x, y); -a < x < a, -b < y < b\}$.

Vamos a adoptar como funciones coordenadas a polinomios de manera tal que la n–ésima aproximación con el método de Ritz está dada por

$$u_n = a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6x^2y + a_7xy^2 + a_8x^2y^2 + a_9x^3 + a_{10}y^3 + \ldots$$

Al tener en cuenta la condición (17) los términos que contienen potencias pares se eliminan y u_n se reduce a

$$u_n = c_1x + c_2y + c_3xy + c_4x^3 + c_5y^3 + c_6x^3y + c_7xy^3 + c_8x^3y^3 \ldots \tag{20}$$

El reemplazo de (20) en el sistema de ecuaciones (12) conduce a $c_1 = -3a^2c_4$, $c_2 = -3b^2c_5$, de donde resulta $u_n = 1/6(y^3 - 3b^2y)$, que es la solución exacta del problema de contorno dado.

EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

El método de los elementos finitos es sin duda uno de los métodos más empleados en el mundo entero tanto en las ciencias de la ingeniería como en el área de los problemas tecnológicos. El mismo es esencialmente el método de Ritz con una base de funciones de aproximación especialmente diseñada[6–9]. Básicamente se trata de un procedimiento mediante el cual un dominio dado es representado como una colección de dominios simples denominados *elementos finitos*. De esta forma es posible construir de manera sistemática las funciones de aproximación necesarias para la resolución del problema en cada elemento. Las características básicas del método son las siguientes:

(i) *División del dominio en partes*: esto permite la resolución de problemas que involucran dominios de geometría compleja al ser representados como una colección de dominios de geometría simple.
(ii) *Construcción de las funciones de aproximación*: comúnmente se utilizan polinomios obtenidos mediante la teoría de la interpolación numérica.
(iii) *Ensamble de los elementos*: esto se realiza mediante la satisfacción de propiedades de continuidad de las funciones de aproximación y mediante el balance de fuerzas u otras magnitudes.

Estas características del método de los elementos finitos están íntimamente relacionadas. Así, las geometrías de los elementos adoptados para representar al dominio deben ser tales que permitan la construcción de las funciones de aproximación con unicidad. A su vez estas funciones dependen no sólo de la geometría, sino también del número y localización de los puntos denominados *nodos*. Cabe destacar que una vez que las funciones de aproximación han sido construidas, el procedimiento para obtener los sistemas de ecuaciones algebraicas que proporcionan los valores de la solución en los nodos de los elementos finitos es el mismo que el explicado anteriormente para el método de Ritz.

El método de los elementos finitos se ha constituido, desde su aparición a mediados del siglo XX, en una herramienta esencial para científicos e ingenieros. El número de textos y publicaciones científicas sobre el mismo ha crecido en forma exponencial. Inicialmente las contribuciones se originaron en el campo de la ingeniería, pero posteriormente los matemáticos han realizado una enorme contribución en el tratamiento y desarrollo riguroso del método.

Una revisión rápida de la literatura permite determinar que la aplicación del mismo cubre una gran cantidad de áreas, entre las cuales se puede destacar:

- <u>Mecánica estructural</u>: estática, vibraciones de elementos estructurales, estabilidad, respuesta dinámica, viscoelasticidad, plasticidad, tensiones térmicas, etc.
- <u>Transmisión de calor</u>: conducción de calor en estructuras, fenómenos de convección y radiación, etc.
- <u>Mecánica de fluidos</u>: incompresibles, compresibles, viscosos, fluidos newtonianos, no newtonianos, laminares, turbulentos, estados estacionarios y no estacionarios.
- <u>Control</u>: diseño de controladores digitales, analógicos e híbridos.
- <u>Acústica</u>: análisis de guías de ondas acústicas, acústica estructural.

Por otra parte, para la predicción del comportamiento de una gran variedad de problemas de ingeniería que surgen en la práctica es necesario el análisis de la interacción de distintos fenómenos físicos[10]. Esta situación se presenta, por ejemplo, en el diseño de vehículos aeroespaciales los cuales se caracterizan por la existencia de una compleja interacción entre sus componentes estructurales, el área de control y el de propulsión. Los métodos analíticos que proporcionan soluciones exactas en general no son adecuados para atacar este tipo de problemas, siendo entonces necesarios el desarrollo y la aplicación de métodos numéricos. El método de los elementos finitos se ha constituido en una herramienta adecuada para modelar el comportamiento de fluidos y de sólidos y fundamentalmente para el análisis multidisciplinario.

CONCLUSIONES

A modo de conclusión se puede establecer en primer lugar que hemos considerado al método de Ritz con bases tomadas del espacio $C^{(2)}\ (\bar{D})$. No obstante, las ecuaciones involucradas no requieren tanta regularidad de las funciones y el método de Ritz puede ser aplicado con funciones cuyas derivadas son seccionalmente continuas. De esta forma se puede introducir el conocido método de los elementos finitos para la resolución de problemas de la membrana. El procedimiento es adecuado en la práctica, dado que las fuerzas aplicadas son a menudo continuas a trozos.

Con respecto a las posibles generalizaciones de estos problemas, al usar el principio de los trabajos virtuales se pueden fácilmente formular ecuaciones para una membrana con fundación elástica de tipo Winkler, la cual actúa sobre una porción de la membrana. De igual forma se pueden considerar varios problemas de acoplamiento entre una membrana y un cuerpo elástico. En este caso se pueden obtener las ecuaciones del método de Ritz (o del método de los elementos finitos) sin conocer los detalles del acoplamiento mecánico; la derivación de las adecuadas condiciones de acoplamiento puede presentar una gran dificultad cuando el problema se enfoca a partir de las correspondientes ecuaciones diferenciales como punto de partida. Más aún, para tales problemas la justificación de la convergencia de los métodos antes mencionados no resulta difícil, al menos no es mucho más difícil que la justificación correspondiente al problema de la membrana. Estas ventajas son inherentes al uso del principio de los trabajos virtuales en el planteo de problemas.

Finalmente se desea mencionar que todas estas cuestiones que se han discutido son típicas, salvo ciertos cambios, para los problemas de contorno estáticos que involucran a cuerpos elásticos, placas, cáscaras, etc.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean expresar su gratitud al Prof. Michael Cloud de la Lawrence Technological University y al revisor de la Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería por sus valiosas sugerencias en la preparación de este trabajo.

REFERENCIAS

1 D.L. Powers, “Boundary value problems”, New York, Harcourt, Academic Press, (1999).

2 I. Stakgold, “*Green's functions and boundary value problems*”, New York, Wiley, (1997).

3 L.P. Lebedev, I.I. Vorovich y G.M.L. Gladwell, “*Functional analysis: applications in mechanics and inverse problems*”, Dordrecht (The Netherlands), Kluwer Academic Publishers, (1996).

4 S.G. Mikhlin, “*The problem of minimum of a quadratic functional*”, San Francisco, Holden-Day, (1965).

5 S.L. Sobolev, “*Some applications of functional analysis to mathematical physics*”, LGU, (1951).

6 O.C. Zienkiewicz y R.L. Taylor “*The finite element method*”, 5ª edición, Butterworth-Heinemann, Vol. **I**, **II**, **III**, (2000).

7 E. Oñate, “*Análisis de estructuras por el método de los elementos finitos*”, 2ª edición, CIMNE, Barcelona, (1995).

8 J.N. Reddy, “*Finite element method*”, 2ª edición, Mc.Graw Hill, N.Y., (1993).

9 J.N. Reddy, “*Energy and variational methods in applied mechanics*”, John Wiley & Sons, N.Y. (1984).

10 K.K. Gupta y J. L. Meek, “*Finite element multidisciplinary analysis*”, AIAA, Education Series, USA (2000).