

MODELO COMPUTACIONAL PARA ANÁLISE DO PROCESSO DE PROPAGAÇÃO DE FISSURAS EM VIGAS DE CONCRETO SOB UM ASPECTO DINÂMICO¹

Maura Angélica Milfont Shzu² e Graciela Doz³

Resumo: O entendimento do processo de falha, bem como dos fatores capazes de desencadear o desenvolvimento de uma fissura, é a base fundamental da teoria da Mecânica da Fratura. Desta forma, várias formulações numéricas foram desenvolvidas na tentativa de simular esse processo dinâmico tão complexo. Aqui, o processo da propagação é descrito usando-se o Método dos Elementos Discretos que consiste, basicamente, em representar o contínuo mediante partículas onde se concentram massas que interagem entre si por meio de barras unidirecionais caracterizadas por uma lei constitutiva definida em função de diversos parâmetros. O material estudado é o concreto, cuja estrutura heterogênea é modelada por um campo aleatório gaussiano através da representação espectral de Monte Carlo. Para estudar o comportamento do concreto são utilizadas três formulações que reproduzem os formatos linear, bi-linear e não linear da parte descendente do diagrama constitutivo elemento tensão – deformação. Os aspectos dinâmicos do processo da ruptura, tais como a trajetória da fissura, acelerações e velocidades de propagação e energias gastas são representados adequadamente.

Palavras chave: diagrama constitutivo, método dos elementos discretos, propagação de fissuras, vigas de concreto.

COMPUTACIONAL MODELS FOR ANALYSIS OF CRACK PROPAGATION PROCESS IN CONCRETE BEAMS UNDER DYNAMICS ASPECTS

Abstract: The evaluation of the cracking process, as well as the fractures able to unleash the cracking process is fundamental to the fracture mechanics theory. At this rate, several numerics formulations were developed at the attempt of simulate this complex dynamics process. At this article, the cracking process is described using the discrete element method which consist in to represent the continuum at particles which mass group interact between it by unidirectional bars. These bars are described by a constitutive law formulated in function of diferents variables. The material studied is the concrete which heterogeneous structure is modeled by a gaussian distribution represented by Monte Carlo Method. Three formulations are used to simulate the concrete behaviour. Those formulations are related to the shape of the descendant part of the constitutive diagram, which was adopted, here, as linear, bi-linear and non-linear. The dynamics aspects of cracring process, just as cracks trajectory, acellaration and velocity of the cracks propagation, energy spended are represented adequately

Keywords: cracking process, discrete element method, constitutive diagram, concrete beam.

INTRODUÇÃO

Vários estudos foram conduzidos na área da mecânica da fratura, especificamente no estudo do processo da propagação da fissura. A primeira contribuição teórica na mecânica da fratura foi dada por Leonardo da Vinci, no século XV, relacionando, através de experimentos, a resistência de fios metálicos com o tamanho da fissura nesses materiais.

¹ Artículo recibido el 2 de octubre de 2008 y aceptado el 15 de enero de 2009.

² Faculdade do Gama, Universidade de Brasília. Área Especial 2, Lote 14, Setor Central, 72405-610, Gama-DF, Brasil. E-mail: maura@unb.br

³ Professora, Ph.D., Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Brasília. Campus Darcy Ribeiro, 70910-900, Brasília-DF, Brasil. E-mail: graciela@unb.br

No entanto, uma das fases mais marcantes do desenvolvimento da mecânica da fratura foi dada por Griffith e Irwin. O primeiro relacionou o processo de propagação da fissura com critérios energéticos e o segundo, com o estado de tensões nas proximidades da fissura (Kanninen e Popelar, 1985).

Kaplan, em 1961 foi o primeiro a aplicar a teoria da Mecânica da Fratura Linear Elástica em vigas fletadas de concreto. Uma década depois, Naus e Kesler provaram que a clássica mecânica linear elástica da fratura não se adequava para todas as estruturas de concreto. Com base nisto, Walsh, em 1972 e 1976, confirmou a necessidade de uma teoria não linear aplicada aos materiais quase-frágeis (Bazant e Oh 1983).

Desde então foram desenvolvidas formulações específicas para o concreto. Na década de 80 foram introduzidos os principais modelos de fissuração do concreto, o modelo da fissura discreta e o modelo da fissura distribuída, caracterizando deste modo um grande avanço na Mecânica da Fratura.

Existem três formulações básicas de diagrama constitutivo elementar para a simulação do comportamento do concreto perante a propagação da fissura: a linear, a bi-linear e a não linear. São chamados, também, de modelos *strain-softening* por representar o abrandamento do material através de seu trecho descendente. Vários pesquisadores utilizaram estes modelos para uma análise comparativa, dentre eles destacam-se, Petersson (1981), Rots et al. (1985), Cornelissen et al. (1986), Horii (1988), Jefferson e Wright (1991), Gopalaratnam e Ye (1991), Planas e Elices (1991), Guinea et al. (1994), Li e Bazant (1994), Ali (1996) e Alfaiate et al. (1997). Todos chegaram a uma conclusão comum: *“a solução numérica para cada tipo de problema de fratura é extremamente sensível à forma do diagrama strain-softening e ao valor da energia dissipada no processo da propagação da fissura”*.

O objetivo principal do presente trabalho foi a análise da propagação da fissura em estruturas de concreto focando a atenção nas formas do diagrama constitutivo do material e a influência dele no que se refere aos aspectos dinâmicos do processo de ruptura, tais como, as velocidades, acelerações, variação do quadro de fissuração com o tempo e as energias gastas no processo de fratura. Para isto, a representação do abrandamento do concreto, ou seja, do ramo descendente da curva tensão-deformação que caracteriza a perda gradativa da resistência do material, foi feita utilizando um modelo baseado no da fissura fictícia, (Hillerborg et al., 1976). Este modelo tem a vantagem de descrever o comportamento da zona de fratura de forma mais simples que os demais.

Aqui foi reavaliada uma viga carregada à flexão em três pontos (“three point bend test”) proposta por Petersson, (1981). Tal exemplo foi analisado utilizando um programa computacional baseado no método dos elementos discretos concebido por Hayashi (1982) e implementado por Shzu (2006) na linguagem FORTRAN.

MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS E SUA EVOLUÇÃO

Um dos pioneiros na apresentação do método dos elementos discretos foi Hrennikoff (1941) que propôs a representação do contínuo mediante arranjos de bielas de rigidez equivalente. Absi, em 1971, aplicou a mesma idéia em fundações de base elástica e na representação de muros em prédios altos através de arranjos de barras com rigidez equivalente (Iturrioz, 1995).

Grande mérito é atribuído a Cundall e Strack que desenvolveu um modelo numérico capaz de representar partículas de qualquer forma, a este deu o nome de método dos elementos distintos. Cundall e Strack (1979) aplicou seu método para realizar estudos mecânicos geotécnicos com materiais granulares. O método é baseado no uso de um esquema numérico explícito das equações de movimento de uma estrutura formada por partículas rígidas com massas conectadas entre si, mediante molas e amortecedores.

O Método dos Elementos Discretos foi sendo cada vez mais utilizado e se apresentando de diferentes formas de acordo com a representação almejada. Uma contribuição bastante significativa foi atribuída a Nayfeh e Hefzy (1978) na análise de arranjos de barras cúbicas e octaédricas. No entanto, o interesse destes autores era representar painéis empregados na indústria aeronáutica, cuja geometria se apresentava sob a forma de treliças espaciais, através de um meio contínuo equivalente. A partir desta idéia, foram desenvolvidas formulações para a obtenção das propriedades mecânicas equivalentes do sólido fictício.

Um caminho inverso foi percorrido no presente trabalho, assim como fez Hayashi (1982). Hayashi (1982) representou um sólido elástico ortotrópico mediante um sistema tridimensional de barras reticuladas e rigidez equivalente ao contínuo, com massas concentradas nos nós.

DESCRIÇÃO DO MODELO UTILIZADO

O modelo computacional básico utilizado neste trabalho foi desenvolvido por Rocha (1989) e está baseado no método dos elementos discretos. Modificações ao programa inicial foram desenvolvidas por Shzu (2006).

Como já foi mencionado, o método dos elementos discretos consiste em representar o contínuo mediante partículas onde se concentram massas que interagem entre si por meio de barras unidirecionais com uma lei constitutiva definida em função das características do material, da disposição das barras e da separação das massas a serem unidas. A fratura do material pode ser modelada desativando as barras na região afetada pela descontinuidade. O elemento utilizado neste trabalho tem a forma cúbica onde as arestas e barras paralelas aos eixos coordenados possuem comprimento L_c e as barras inclinadas, diagonais do cubo, possuem comprimento $(3^{1/2})L_c$, ver Figura 1. Todas as barras que compõem a treliça são rotuladas de modo que não há ocorrência de momento fletor localizado.

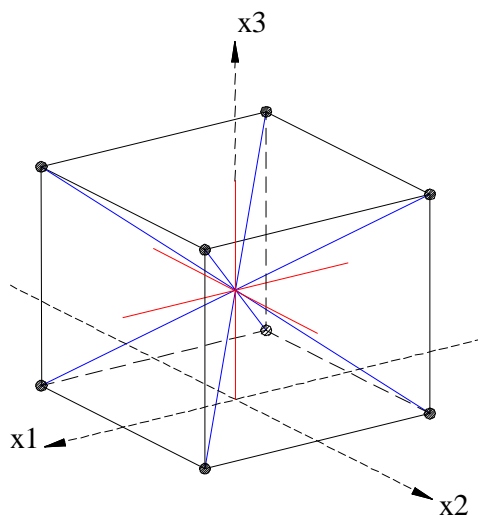


Figura 1: Modelo cúbico apresentado por Nayfeh e Hefzy (1979).

Vantagens e desvantagens

Os métodos tradicionais, tais como o Método dos Elementos Finitos e de Contorno partem do princípio de que o meio é contínuo e por isso demanda um esforço maior para a simulação do processo de fratura. Diante dos obstáculos encontrados com a utilização da mecânica do contínuo na análise de um corpo com falhas, a busca de métodos numéricos mais simplificados resultou na escolha do Método dos Elementos Discretos. O modelo, com a sua simplicidade, consegue também representar satisfatoriamente a trajetória da fissura, bem como toda a zona de fratura, cujas propriedades foram afetadas devido a um abrandamento do material.

O Método dos Elementos Discretos apresenta uma série de vantagens e, como todos os outros, algumas desvantagens. Ao enfatizar o lado positivo do método começa-se por citar a possibilidade de definir uma relação constitutiva não linear e um critério de ruptura a partir da forma mais simples: a uniaxial. A representação do comportamento dinâmico do meio contínuo a partir da concentração de massa nos nós, também é uma característica positiva do método. E também, a possibilidade de utilização dos métodos explícitos de integração por tornarem o problema dinâmico de fácil resolução, eliminando a necessidade de montagem e armazenagem de matrizes de rigidez. Entretanto, nestes casos o intervalo de tempo é severamente restringido por condições de instabilidade numérica. Isto pode resultar em um tempo computacional elevado para análises em que se deseje simular fenômenos de duração relativamente longos (modos de vibração de baixa frequência, aplicação lenta dos carregamentos, etc.).

Critério de ruptura e relação constitutiva elementar

Os modelos constitutivos são descritos por diagramas força-deformação. Os modelos “*strain-softening*” utilizados aqui se apresentam na forma linear, bi-linear e não linear (Figura 2). São comparados os resultados entre si, bem como com os obtidos em ensaios experimentais e análises numéricas realizadas por outros autores.

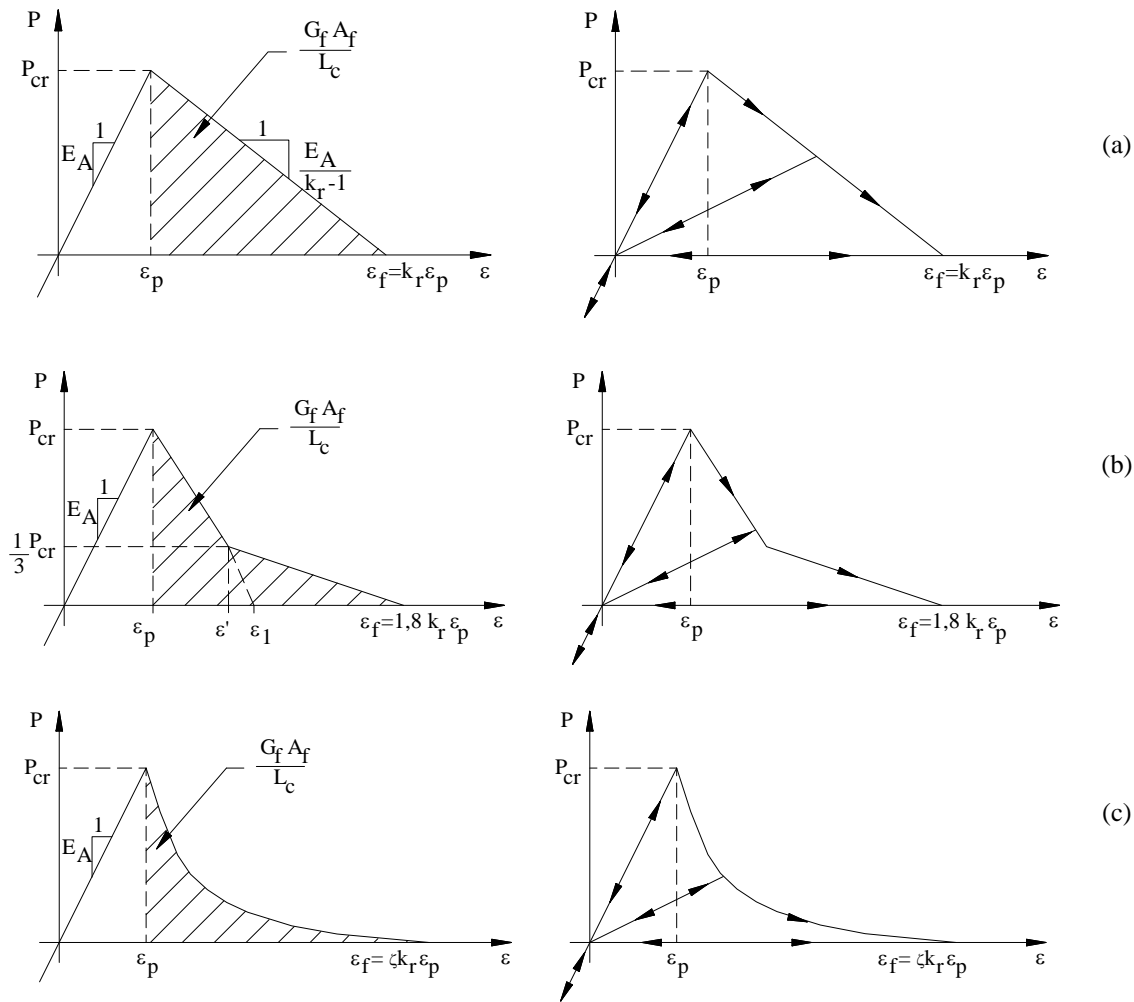


Figura 2: Modelos constitutivos. Strain-softening: (a) Linear (Petersson, 1981); (b) bi-linear (Petersson, 1981) e (c) não linear (Reinhardt, 1984).

onde, P é a força axial resultante da barra e P_{cr} , seu valor crítico associado a ε_p ; E_A é a rigidez axial das barras (φ_{11}^n ou φ_{11}^d , a depender da disposição da barra); ε_p deformação crítica de ruptura, que é a deformação para o qual uma microfissura se instabiliza e se propaga, $\varepsilon_p = f_t/E_A$; ε' é a deformação no ponto de mudança da declividade no diagrama *strain-softening* bi-linear, $\varepsilon' = (2/9)\varepsilon_f$; k_r é a ductilidade (trata-se de um parâmetro que permite calcular a deformação para a qual a barra não transmite mais esforços de tração); ζ é a relação $(n+1)/2n$, e n é um valor definido por Reinhardt (1984) para a formulação *strain-softening* não linear, equação (6); L_c é o comprimento da barra do elemento; A_f , a área de influência da barra, ou seja, a área de fratura formada com a sua ruptura (pode ser expressa na forma $A_f = c_A L_c^2$, onde c_A é um coeficiente geométrico próprio do modelo, com valor calculado em 0,1385, para as barras normais); G_f é a energia consumida por área de fratura formada após a instabilização e ε_f é a abertura axial crítica de uma fissura (ω), diluída no comprimento da barra, L_c .

São consideradas propriedades exclusivas do material os parâmetros G_f , ε_p , E , f_t e R_f . As propriedades que se restringem apenas ao modelo são A_f e L_c . As que dependem tanto do modelo como do material são os parâmetros k_r e E_A .

Aqui, são utilizadas as formulações usadas por Petersson (1981) para a descrição das curvas *strain-softening* linear, equação (1), e bi-linear, equação (2), e a formulação usada por Reinhardt (1984) para a representação da não linear, equação (3). As funções abaixo descrevem o trecho descendente da Figura 2.

Linear:

$$P(\varepsilon) = \begin{cases} P_{cr} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_f} \right) & \text{se } \varepsilon_p \leq \varepsilon \leq \varepsilon_f \\ 0 & \text{se } \varepsilon > \varepsilon_f \end{cases} \quad (1)$$

Bi-linear:

$$P(\varepsilon) = \begin{cases} P_{cr} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \right) & \text{se } \varepsilon_p \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1 \\ P_{cr}' \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_f} \right) & \text{se } \varepsilon_1 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_f \\ 0 & \text{se } \varepsilon > \varepsilon_f \end{cases} \quad (2)$$

Não linear:

$$P(\varepsilon) = \begin{cases} P_{cr} \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_f} \right)^n \right) & \text{se } \varepsilon_p \leq \varepsilon \leq \varepsilon_f, \text{ onde } 0 < n < 1 \\ 0 & \text{se } \varepsilon > \varepsilon_f \end{cases} \quad (3)$$

O modelo de ruptura empregado neste trabalho é o mesmo que foi adotado por Rocha (1989), para o modelo “*strain-softening*” linear, na qual a deformação crítica final, ε_f , é definida em função da deformação crítica no momento em que a força atinge seu valor máximo, ε_p , e também, em função do fator de ductilidade, k_r , assim como representa a equação 4. Para o modelo bi-linear, Petersson (1981) adota uma deformação crítica, ε_f , 1,8 vezes maior que a do modelo linear, equação (5), e o coeficiente ζ , no modelo não linear, é adotado por Reinhardt (1984) conforme mostra a equação (6). Nota-se que para $n=1$ o modelo não linear toma a forma linear.

Linear:

$$\varepsilon_f = k_r \varepsilon_p \quad (4)$$

Bi-linear:

$$\varepsilon_f = \zeta k_r \varepsilon_p \quad \therefore \quad \zeta = 1,8 \quad \varepsilon_f = 1,8 k_r \varepsilon_p \quad (5)$$

Não linear:

$$\varepsilon_f = \zeta k_r \varepsilon_p \quad \zeta = \frac{(n+1)}{2n} \quad \varepsilon_f = \frac{(n+1)}{2n} k_r \varepsilon_p \quad (6)$$

$$\text{sendo } n = 0,31; \quad \varepsilon_f = 2,113 k_r \varepsilon_p$$

As deformações críticas, ε_f , podem ser obtidas também em função da área abaixo das curvas descendentes de cada modelo “*strain-softening*”:

Linear:

$$\frac{\varepsilon_f P_{cr}}{2} = \frac{G_f A_f}{L_c} \quad \therefore \quad \varepsilon_f = 2 \cdot \frac{G_f A_f / L_c}{P_{cr}} \quad (7)$$

Bi-linear:

$$\left(P_{cr} + \frac{1}{3} P_{cr} \right) \cdot \frac{\varepsilon_f}{9} + \left(\varepsilon_f - \frac{2}{9} \varepsilon_f \right) \cdot \frac{P_{cr}}{6} = \frac{G_f A_f}{L_c} \quad (8)$$

$$\varepsilon_f = \frac{18}{5} \cdot \frac{G_f A_f / L_c}{P_{cr}} = 3,6 \cdot \frac{G_f A_f / L_c}{P_{cr}}$$

Não linear:

$$\frac{\varepsilon_f P_{cr}}{2} = \frac{(n+1)}{2n} \cdot \frac{G_f A_f}{L_c} \quad (9)$$

$$\varepsilon_f = \frac{(n+1)}{n} \cdot \frac{G_f A_f / L_c}{P_{cr}} \quad \text{com} \quad n = 0,31; \quad \varepsilon_f = 4,226 \cdot \frac{G_f A_f / L_c}{P_{cr}}$$

Solução da equação de movimento

A equação de movimento, equação (10), é resolvida para cada nó, a cada passo de integração:

$$m\ddot{u}_i + c\dot{u}_i = f_i \quad (10)$$

onde u_i representa as coordenadas em relação aos três eixos de referência; m a massa nodal; c é o amortecimento, e f_i representa os três componentes da resultante das forças que atuam sobre os nós do modelo.

Apesar de não existir uma correspondência clara para o emprego do amortecimento proporcional, o mesmo é bastante conveniente para suavizar o excesso de vibrações que surgem durante as simulações (Rocha, 1989).

Método de integração no tempo e intervalo crítico de integração

Na análise de problemas lineares, os deslocamentos para cada instante de tempo podem ser obtidos por superposição modal ou por integração direta das equações de movimento. Porém, ao se tratar de problemas não lineares a solução é dada apenas por integração direta.

A análise dinâmica utilizada neste trabalho é feita pelo emprego de um método explícito, com integração numérica por diferenças finitas centrais. A expressão obtida para o intervalo de integração crítico, a fim garantir as condições de estabilidade numérica, é:

$$\Delta t_{crit} \leq 0,6 \frac{L_c}{C_\rho} \quad \therefore \quad C_\rho = \sqrt{E/\rho} \quad (11)$$

onde L_c é o comprimento característico do elemento, C_p é a velocidade de propagação da onda de compressão, E é o módulo de elasticidade do material e ρ a massa específica.

Aspectos da heterogeneidade

A heterogeneidade é considerada por meio da variação aleatória do valor da resistência local à propagação da fratura. O método utilizado para a representação desta característica aleatória do material foi proposto por Rios (2002), e trata-se de um método de representação espectral que propõe tornar independentes o tamanho dos elementos e o comprimento de correlação de G_f , cuja dependência limita a possibilidade de modelar determinados problemas, equação (12).

$$f_0(x_1, x_2) = \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \left[A_{n_1 n_2} \cos(\kappa_{1n_1} x_1 + \kappa_{2n_2} x_2 + \Phi_{n_1 n_2}^{(1)}) + \hat{A}_{n_1 n_2} \cos(\kappa_{1n_1} x_1 - \kappa_{2n_2} x_2 + \Phi_{n_1 n_2}^{(2)}) \right] \quad (12)$$

onde $f_0(x_1, x_2)$ é um campo aleatório bidimensional, homogêneo com média igual a zero; k_{1u} e k_{2u} são os limites de corte de onda correspondentes aos eixos x_1 e x_2 no domínio do espaço, respectivamente; $\Phi_{n_1 n_2}^{(1)}$ e $\Phi_{n_1 n_2}^{(2)}$ com $n_1 = 0, 1, \dots, N_1 - 1$ e $n_2 = 0, 1, \dots, N_2 - 1$, são dois ângulos de fase aleatórios distribuídos uniformemente no intervalo $[0, 2\pi]$; $A_{n_1 n_2}$ e $\hat{A}_{n_1 n_2}$ são parâmetros que variam linearmente com a função de densidade espectral de potência, (Shinozuka e Deodatis, 1996).

ANÁLISE NUMÉRICA DO PROCESSO DE PROPAGAÇÃO DA FISSURA

Uma viga submetida à flexão em três pontos (“three point bending test”) estudada por Petersson (1981) é aqui reavaliada utilizando o MED. As análises são realizadas com o objetivo de avaliar o desempenho da ferramenta utilizada e das formulações empregadas e entender o processo de propagação da fratura nessa estrutura de concreto.

O objeto de estudo é uma viga de concreto isenta de armaduras e com uma fissura pré-estabelecida. Em 1981 Petersson realizou análises experimentais e numéricas nesta peça com a finalidade de investigar a propagação de fissuras no Modo I através de ensaios de flexão em três pontos. Nas análises experimentais foram ensaiadas seis vigas com as mesmas geometrias e propriedades, a fim de determinar a energia específica de fratura, G_f . As dimensões da peça, extraídas do trabalho de Petersson (1981), são apresentadas na Figura 3, onde todas as medidas são dadas em metros.

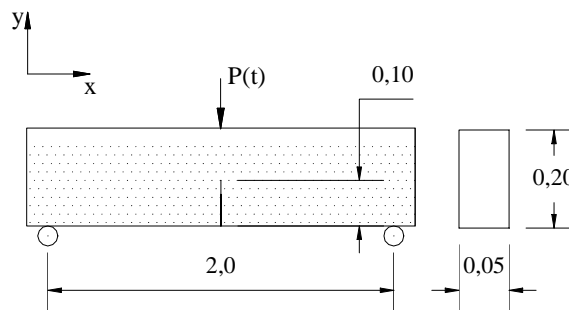


Figura 3: Esquema da viga 1 ensaiada por Petersson (1981).

A viga foi submetida a uma carga crescente com o tempo. A velocidade de aplicação da carga foi escolhida por Petersson, (1981) de forma que a carga última fosse alcançada em aproximadamente 30 s após o início do ensaio.

Na Figura 4 estão representadas as curvas força–deslocamento obtidas experimentalmente em dois ensaios. Os valores da energia crítica de fratura, G_f , obtidos experimentalmente, encontram-se na faixa de 115 N/m a 137 N/m. São apresentados também, os resultados numéricos obtidos por Petersson (1981), através do método dos elementos finitos, para um modelo *strain-softening* linear e bi-linear.

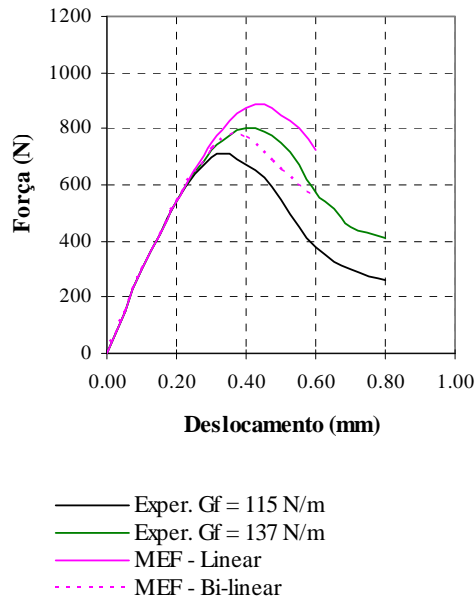


Figura 4: Curva força–deslocamento no centro do vão da viga 1, (Petersson, 1981).

Vale ressaltar que Petersson (1981) utilizou o modelo da fissura fictícia para simular numericamente a fratura do material.

Neste trabalho, a peça é discretizada ao longo de todo o seu comprimento. A Figura 5 ilustra a malha de elementos discretos, com $92 \times 10 \times 2$ módulos de arestas de comprimento 0,022 m nas direções x , y e z , respectivamente. As propriedades do material se encontram na Tabela 1.

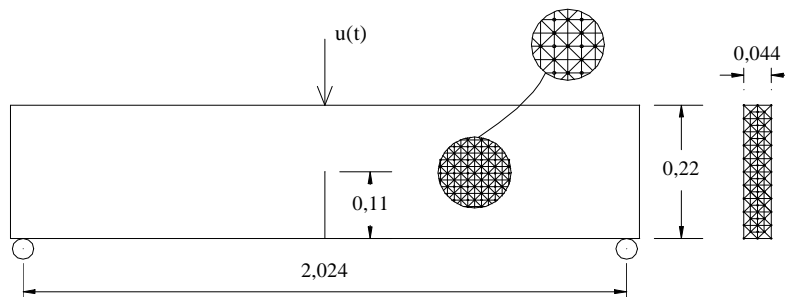


Figura 5: Malha de discretização de elementos discretos ao longo de todo o comprimento da viga.

Foram aplicados incrementos de deslocamento na parte superior central da viga segundo a função de velocidade, $\dot{u}(t)$, dada por:

$$\dot{u}(t) = \dot{u}_f \left(1 - e^{-(t/t_0)^2} \right) \quad (13)$$

onde adotou-se $\dot{u}_f = 0.01 \text{ m/s}$ como a velocidade final de aplicação do deslocamento. O tempo t_0 indica o instante em que a velocidade atinge aproximadamente 63% do seu valor máximo. A utilização da equação (13) tem por finalidade evitar os efeitos de uma imposição súbita da velocidade final de aplicação do deslocamento.

Foi considerado um valor médio das energias específicas de fratura obtidas por Petersson (1981), ou seja, 124 N/m. O módulo de elasticidade utilizado por Petersson foi de $3,0 \times 10^{10}$ N/m².

Na Tabela 1 são encontrados os valores das propriedades físicas adotadas para simular numericamente o ensaio.

Tabela 1: Propriedades físicas do material e parâmetros adotados para gerar o modelo teórico.

Propriedades	Valores
Módulo de Elasticidade, E	$3,0 \times 10^{10}$ N/m ²
Resistência à tração, f_t	$3,3 \times 10^6$ N/m ²
Energia específica de fratura, G_f	124 N/m
Massa Específica, ρ	2400 kg/m ³
Coefficiente de Poisson, ν	0,2
Razão de Amortecimento, ξ	5% ($D_f = 25$ s ⁻¹)
Coefficiente de Variação, CVA *	0,10

* Os parâmetros que variam são a energia de fratura, G_f , o módulo de elasticidade, E , e a massa específica, ρ (Rios, 2002).

Curvas força-deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga e curvas da variação da força ao longo do tempo

As Figuras 6, 7 e 8 mostram os resultados das curvas força–deslocamento no centro do vão, obtidos pelo método dos elementos discretos, MED, para os três modelos strain-softening proposto. Estes resultados são comparados com os de Petersson (1981). Foram realizadas cinco simulações com o MED. O primeiro gráfico de cada figura reúne todas as simulações reproduzidas numericamente, e o segundo, apresenta apenas uma delas.

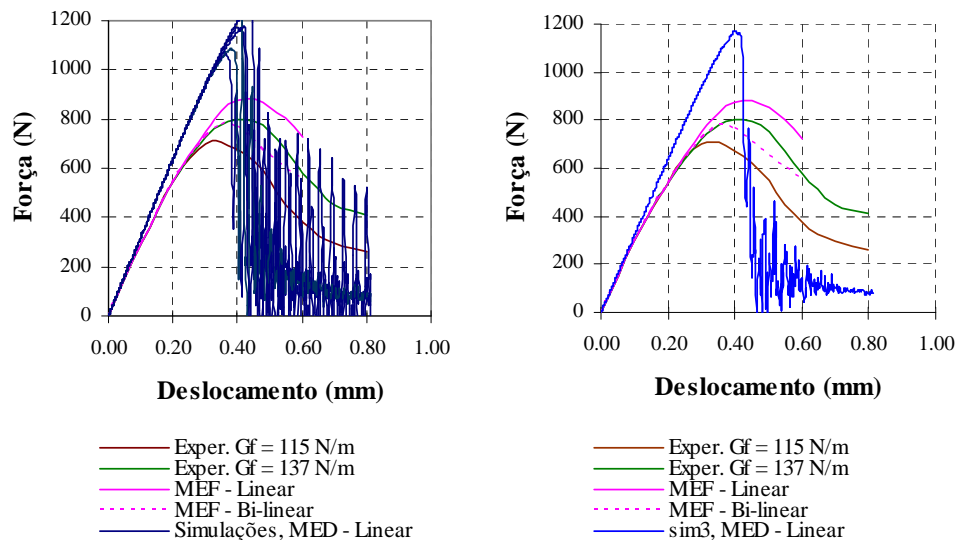


Figura 6: Curvas força–deslocamento da viga. Resultados de Petersson (1981) e da análise do MED para um modelo “strain-softening” linear.

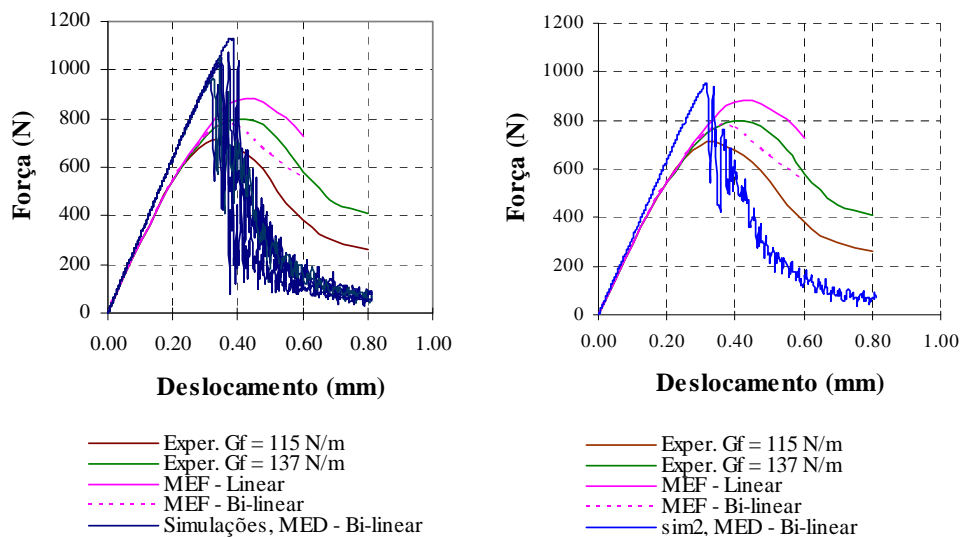


Figura 7: Curvas força–deslocamento da viga. Resultados de Petersson (1981) e da análise do MED para um modelo “strain-softening” bi-linear.

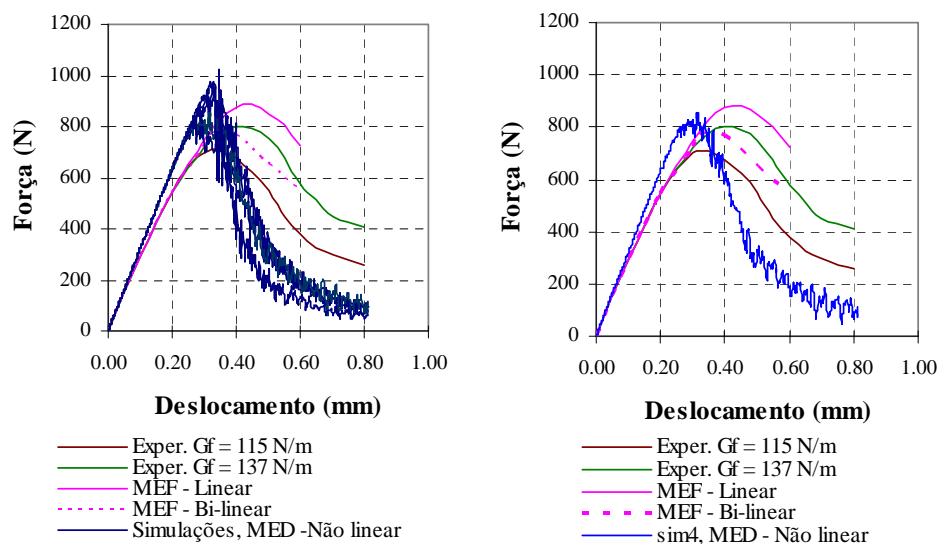


Figura 8: Curvas força–deslocamento da viga. Resultados de Petersson (1981) e da análise do MED para um modelo “strain-softening” não linear.

Observa-se que o modelo caracterizado pela maior deformação crítica, ε_f , o modelo “strain-softening” não linear, apresenta um trecho pós-pico mais suave e, portanto, mais condizente com os resultados experimentais.

A Figura 9 apresenta o diagrama força-tempo, permitindo visualizar o aspecto dinâmico do problema. É apresentada apenas uma simulação para cada modelo “*strain-softening*” empregado, são elas, a terceira “*sim.3*”, a segunda “*sim.2*” e a quarta “*sim.4*”, para os modelos linear, bi-linear e não linear, respectivamente, como mostra a figura.

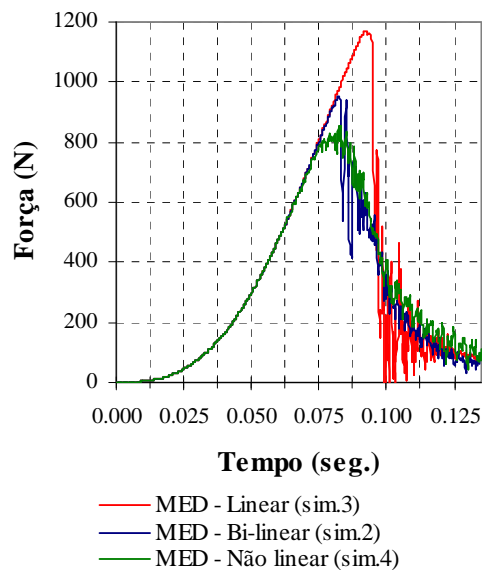


Figura 9: Curva força - tempo da viga 1. Resultados da análise do MED para os três modelos “*strain-softening*”.

Verifica-se, na Figura 9, que os três modelos apresentam instantes de propagação instável da fissura bastante próximos entre si. No modelo *strain-softening* linear a fissura começa a se propagar num instante de aproximadamente 0,09 segundos e para os demais modelos, no instante próximo à 0,08 segundos.

Trajatória da fissura

O algoritmo utilizado possibilita também a visualização de toda a trajetória da fissura em qualquer intervalo de tempo, para os três modelos “*strain-softening*”. A Figura 10 mostra o quadro de fissuração do modelo “*strain-softening*” linear analisado para as três situações mostradas nos resultados anteriores, em três estágios de tempo diferentes, um bem próximo do início do processo de fissuração, outro num tempo intermediário da propagação e, por último, em seu estágio final. A pré-fissura é representada pela eliminação de barras ao longo de seu comprimento. As barras rompidas no processo de fissuração são eliminadas do modelo, enquanto as barras danificadas, ou seja, as que apresentam perda na resistência ao longo do tempo, estão destacadas na cor vermelha. As figuras abaixo mostram apenas a região próxima à pré-fissura, onde ocorre todo o processo de propagação.

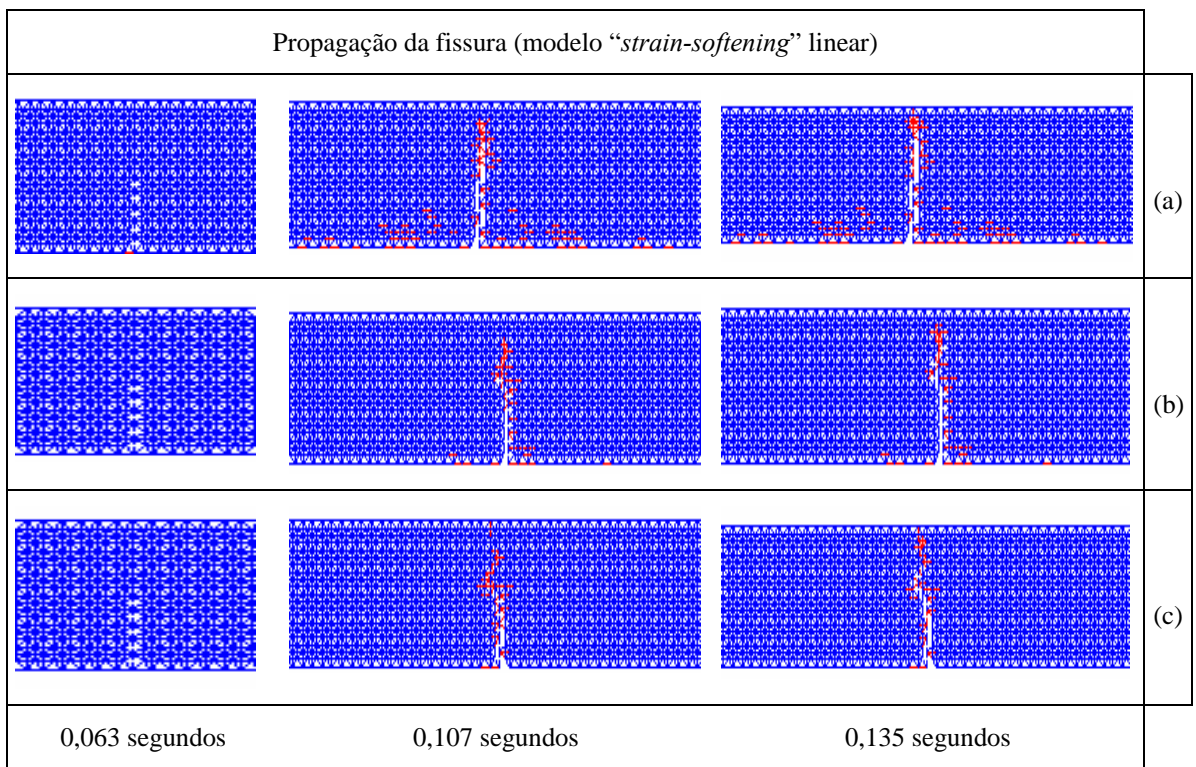


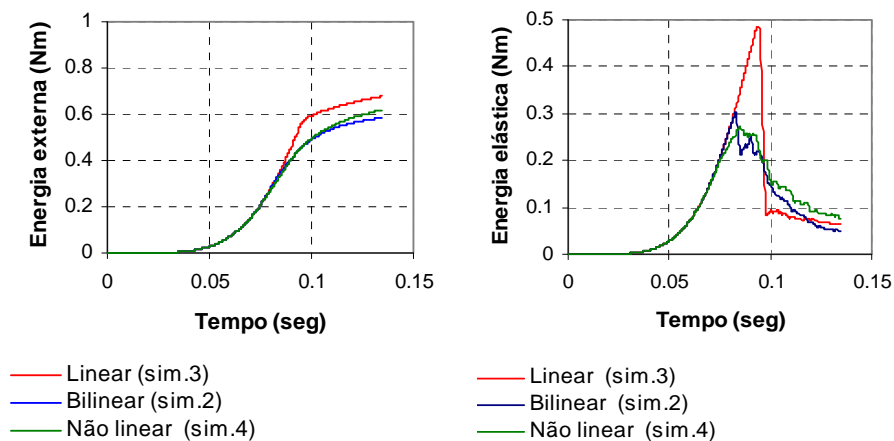
Figura 10: Propagação da fissura, viga 1. (a) Modelo “*strain-softening*” linear; (b) Modelo “*strain-softening*” bi-linear, e (c) Modelo “*strain-softening*” não linear.

A diferença na trajetória da fissura é mais notável quando se compara a Figura 10(c) com as demais. Nesta última situação, nota-se um menor número de barras rompidas e uma maior área de abrandamento do concreto, caracterizando um comportamento de maior ductilidade do material.

Nos casos mostrados, observa-se uma zona de fragilidade que começa a se formar no banzo inferior da peça, próximo à pré-fissura, a fim de quebrar qualquer resistência que houver no seu prolongamento. Esta zona frágil se desenvolve em direção à parte superior central da viga, onde está sendo aplicado o carregamento favorecendo, assim, a propagação da fissura. Esta observação condiz com a teoria da mecânica da fratura aplicada ao concreto no modo I de fissuração.

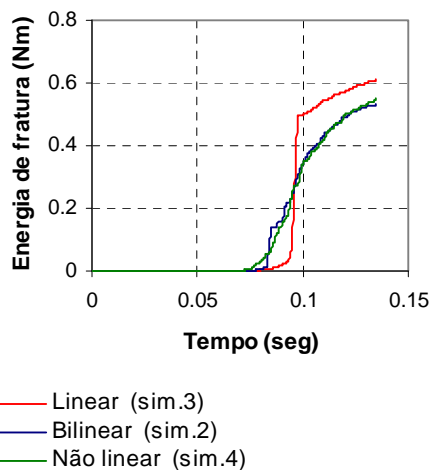
Curvas das energias gastas no processo de propagação da fissura

A Figura 11 ilustra as energias gastas em todo o processo de fratura. Elas são graficadas para os três modelos *strain-softening* em que são conservadas as propriedades utilizadas por Petersson (1981).



(a)

(b)



(c)

Figura 11: Variação das energias em função do tempo. (a) energia externa; (b) energia elástica e (c) energia de fratura.

Como se observa, as energias obtidas pelos três modelos apresentaram uma boa concordância entre si.

Ao focar a atenção na Figura 11 (b), verifica-se que o modelo linear consome mais energia elástica a partir do momento que se inicia a propagação instável da fissura. A energia de fratura gasta para este modelo é maior, como ilustra a Figura 11 (c). O modelo strain-softening linear também apresenta um processo de propagação mais acelerado, quando comparado com os outros modelos apresentados. Isto é possível de se afirmar devido à maior inclinação do trecho pós-pico do gráfico que plota a variação da energia elástica com o tempo.

Curvas da variação da velocidade com o tempo

É interessante saber os casos e situações em que o processo de propagação ocorre de forma mais suave ou mais brusca ao longo do tempo. A visualização da trajetória da fissura, por si só não é o melhor caminho para se conseguir tal informação. O estudo da velocidade de propagação da fissura é capaz de acrescentar uma melhor compreensão deste processo dinâmico.

Utilizando-se as propriedades físicas e geométricas concebidas por Petersson (1981), a Figura 12 ilustra a variação da velocidade de propagação da fissura com o tempo para os três modelos strain-softening propostos.

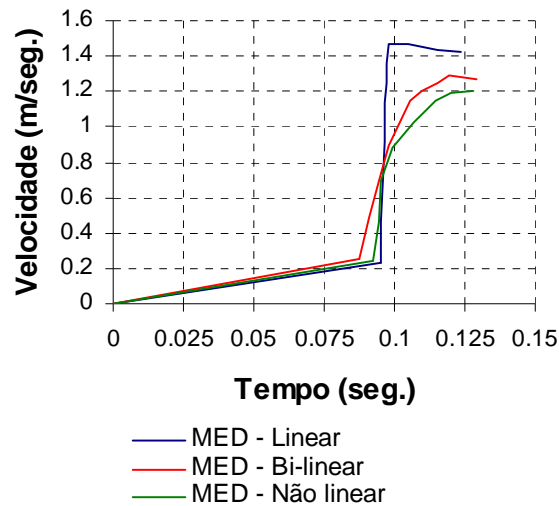


Figura 12: Variação da velocidade de propagação da fissura ao longo do tempo.

Observa-se que a fissura se propaga mais rapidamente no modelo “*strain-softening*” linear. Em intervalos muito pequenos e próximos do tempo de ruptura, a velocidade varia bruscamente atingindo valores mais altos quando comparados com os demais modelos “*strain-softening*”. Já nos modelos bi-linear e não linear observa-se uma variação da velocidade, após o tempo de ruptura, mais suave, caracterizando uma propagação mais lenta. Vale lembrar que estes últimos modelos possuem um valor de deformação crítica, ε_f , maior que o linear.

Curvas da variação da aceleração com o tempo

As acelerações induzidas no processo de ruptura permitem entender com mais clareza o processo dinâmico da propagação.

As acelerações obtidas correspondem ao nó situado na face frontal de maior comprimento da peça e na extremidade inferior da fissura pré-existente, indicado na Figura 13 com a letra “A”.

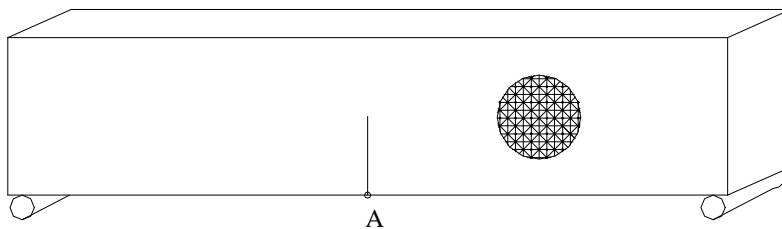


Figura 13: Nó de controle. Ponto de referência para medir as acelerações da propagação da fissura.

A Figura 14 mostra os gráficos de acelerações obtidos na direção perpendicular, x , e paralela, y , ao eixo da fissura, utilizando o método de representação espectral. O modelo “*strain-softening*” utilizado foi o linear, mantendo-se preservadas as propriedades físicas e geométricas indicadas por Petersson (1981).

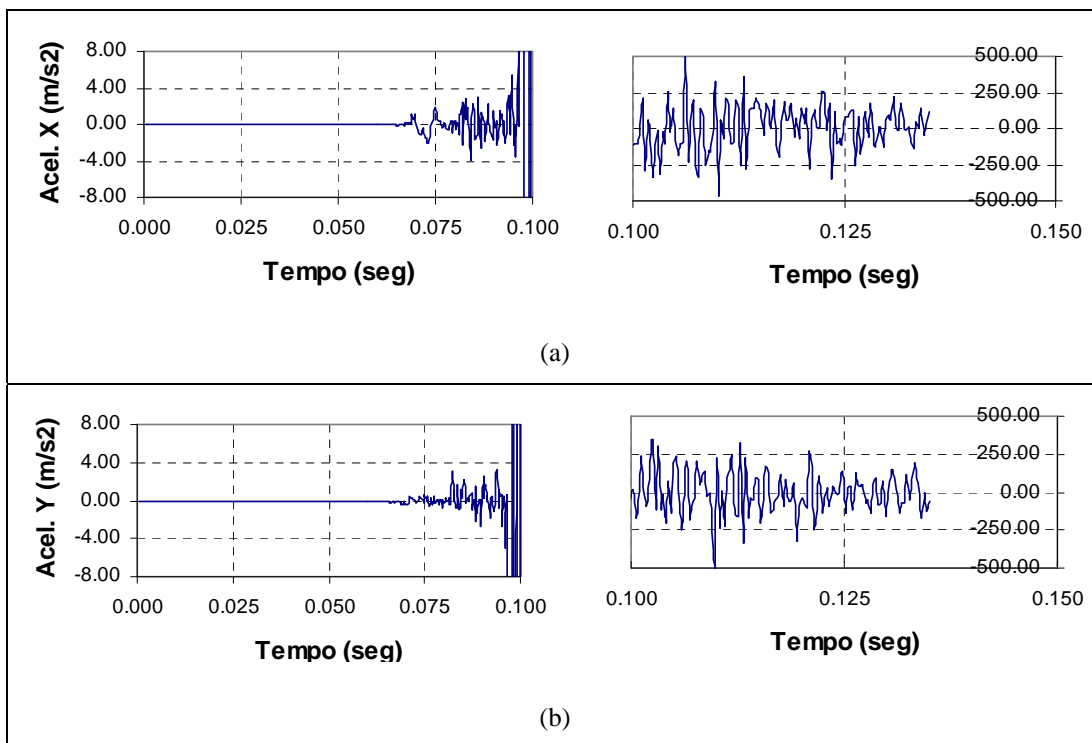


Figura 14: Variação da aceleração com o tempo. (a) na direção x do eixo cartesiano, e (b) na direção y do eixo cartesiano.

Observa-se que as acelerações são quase nulas até o instante em que se aproxima o início do processo de ruptura, ou seja, surgem pequenas acelerações antes de ser atingido a carga máxima e se inicie o processo de propagação instável da fissura. No tempo de aproximadamente 0,075 segundos a propagação da fissura começa com valores pequenos de acelerações. No decorrer da propagação instável, as acelerações atingem valores mais altos que diminuem no final de todo o processo de propagação da fissura.

Os resultados mostrados na Figura 14 condizem com o diagrama força-tempo ilustrado na Figura 9, cujo pico da curva traçada indica o início do processo de ruptura no mesmo instante em que surgem os primeiros picos de acelerações.

CONCLUSÕES

Os resultados obtidos com a metodologia e formulações adotadas por Shzu (2006) apresentaram uma boa concordância com os resultados apresentados por Petersson em 1981 caracterizando, deste modo, o bom desempenho do método dos elementos discretos como ferramenta numérica, bem como das formulações empregadas para a análise da propagação de fissuras em vigas de concreto.

Em geral, a média das cargas máximas no ponto de aplicação do deslocamento controlado, nos diferentes casos estudados referente ao resultado da curva “*strain-softening*” linear, foi maior que a do modelo bi-linear, que por sua vez apresentou um pico maior quando comparado com a obtida pela curva não linear, reforçando a idéia de que o primeiro modelo consome mais energia que os demais;

O modelo “*strain-softening*” linear apresentou um trecho pós-pico com descida mais brusca, caracterizando um processo de fissuração mais rápido que os demais modelos;

Os diagramas força-tempo permitem visualizar os aspectos dinâmicos do problema apontando o instante em que a fissura começa a se propagar;

As análises com o modelo “*strain-softening*” linear indicaram um processo de propagação mais acelerado, quando comparado com os resultados dos modelos bi-linear e não linear;

O uso do modelo “*strain-softening*” não linear, para todas as situações analisadas, permite reproduzir uma trajetória mais curta e suave da fissura. Isto se explica pelo fato deste modelo apresentar um valor de deformação crítica, ε_f , maior que os demais;

A fissura se propagou com uma velocidade maior nos modelos “*strain-softening*” linear. Em intervalos muito pequenos e próximos do tempo de ruptura, a velocidade variou bruscamente atingindo valores mais altos que os demais modelos. A velocidade máxima diminuiu e ocorreu de forma mais lenta e suave, na medida que o valor da deformação crítica, ε_f , dos modelos “*strain-softening*” aplicados ao concreto aumentou;

Na análise dinâmica do problema, as acelerações permaneceram nulas até ser iniciado o processo de propagação da fissura. No decorrer da propagação instável, as acelerações atingiram valores mais altos que diminuiram no final de todo o processo.

AGRADECIMENTOS

As autoras agradecem o apoio do CNPq, bem como todo o suporte oferecido pela Universidade de Brasília.

REFERENCIAS

- Alfaiate, J., Pires, E.B. e Martins, J.A.C. (1997). “A finite element analysis of non-prescribed crack propagation in concrete”, *Computers and Structures*. Vol. 63, No. 1, pp.17-26.
- Ali, A. (1996). “FEM analysis of concrete structures subjected to mode-I and mixed mode loading conditions”, *Computers and Structures*. Vol. 61, No. 6, pp.1043-1055.
- Bazant, Z. and Oh, B. (1983). “Crack band theory for fracture of concrete”. *Mat. Construct*, Vol. 16, No. 93, pp. 155-177.
- Cornelissen, H., Hordijk, D. e Reinhardt, H. (1986). “Experimental determination of crack softening characteristics of normal weight and lightweight concrete.”, *Heron*. Vol. 31, No. 2, pp.45-56.
- Cundall, P.A. e Strack, O.D.L. (1979). “A discrete numerical model for granular assemblies”, *Géotechnique*, Vol. 29, No. 1, pp. 47-65.
- Guinea, G.V., Planas J. e Elices, M. (1994). “A general bilinear fit for the softening curve of concrete”, *Materials and Structures*, Vol. 27, pp.99-105.
- Gopalaratnam, V.S. e Ye, B.S. (1991). “Numerical characterization of the nonlinear fracture process in concrete”, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 40, No. 6, pp. 991-1006.
- Hayashi, Y. (1982). “Sobre um modelo de discretização de estruturas tridimensionais aplicado em dinâmica não-linear”, Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.
- Hillerborg, A., Modéer, M. e Petersson, P-E. (1976). “Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements”, *Cement and Concrete Research*, Vol. 6, pp. 773-782.
- Horii, H. (1988). “Models of fracture process zone and a system of fracture mechanics for concrete and rock”, *International Workshop on Fracture Toughness and Fracture Energy, Test Methods for Concrete and Rock*, Tohoku University, Sendai, pp.12-14.
- Hrennikoff, A. (1941). “Solution of problems of elasticity by the framework method”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.12, pp. 169-175.
- Iturrioz, I. (1995). “Aplicação do método dos elementos discretos ao estudo de estruturas laminares de concreto armado”, Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.
- Jefferson, A.D. e Wright, H.D. (1991). “Stepped softening functions for concrete fracture in finite element analysis”, *Computers and Structures*, Vol. 41, No. 2, pp. 331-344.
- Kanninen, M.F. e Popelar, C.H. (1985). *Advanced Fracture Mechanics*, Oxford University Press - NY, Clarendon press, Oxford.
- Li, Y. e Bazant, Z.P. (1994). “Eigenvalue analysis of size effect for cohesive crack model”, *International Journal of Fracture*, Vol. 66, pp. 213-226.

- Nayfeh, A.H. e Hefzy, M.S. (1978). "Continuum modeling of three-dimensional truss-like space structures", *AIAA Journal*, Vol.16, No. 8, pp.779-787.
- Petersson, (1981). "Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials", Report TVBM-1006, Div. of Building Materials, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden.
- Planas, J. e Elices, M. (1991). "Nonlinear fracture cohesive materials", *International Journal of Fracture*, Vol. 51, pp. 139-157.
- Reinhardt, H.W. (1984). "Fracture mechanics of an elastic softening material like concrete", *Heron*, Vol. 29, No. 2.
- Rios, R.D. (2002). "Aplicações do método dos elementos discretos em estruturas de concreto", Tese de Doutorado, Universidade Federal do rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil, 181 pp.
- Rocha, M.M. (1989). "Ruptura e efeito de escala em materiais não-homogêneos", Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.
- Rots, J.G., Nauta, P., Kusters, G.M.A. e Blaauwendraad, J. (1985). "Smearred crack approach and fracture localization in concrete", *Heron*, Vol. 3, No. 1, pp. 1-48.
- Shinozuka M. e Deodatis G., (1996), "Simulation of multi-dimensional Gaussian stochastic fields by spectral representation". *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 49, pp. 1-53.
- Shzu, M.A.M. (2006). "Avaliação do processo de ruptura em vigas de concreto considerando os aspectos dinâmicos", Tese de Doutorado, Universidade de Brasília, Brasília, Brasil, 179 pp.