

# Condiciones de contorno esenciales en un método sin malla. Un indicador del error

Santiago Falcón

Unión Eléctrica Fenosa Distribución  
Avenida San Luis 77, 28033 Madrid, España  
Tel.: 34-91-567 60 00, Fax: 34-91-567 61 79  
e-mail: sfalcon@uef.es

Luis Gavete

Departamento de Matemática Aplicada a los Recursos Naturales  
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Minas  
Universidad Politécnica de Madrid  
Ríos Rosas 21, 28003 Madrid, España  
Tel.: 34-91-336 64 66, Fax: 34-91-336 32 30  
e-mail: gavete@dmarn.upm.es

## Resumen

Los denominados métodos sin malla presentan algunas ventajas claras sobre el método de elementos finitos (MEF) como puede ser la mejora que se obtiene en la regularidad de las derivadas, con lo que se obtiene una mejor aproximación. Sin embargo, la imposición de las condiciones de contorno esenciales es uno de los problemas que presentan estos métodos sin malla. En este artículo se ha trabajado con el denominado método de Galerkin sin elementos (EFG) al objeto de mejorar dicho método, concretamente en el tratamiento de las condiciones de contorno esenciales.

Se ha utilizado el método de mínimos cuadrados móviles con funciones de peso apropiadas al objeto de obtener una aproximación local y un principio variacional restringido con una función de penalización para satisfacer de modo aproximado la condición de contorno esencial. Con este método se obtienen resultados muy exactos para nubes de puntos regulares e irregulares.

También se ha abordado el estudio de la aproximación del error a posteriori en el método EFG, proponiéndose un indicador de error.

## ESSENTIAL BOUNDARY CONDITIONS IN A MESHLESS METHOD. AN ERROR INDICATOR

## Summary

The meshless methods have some important advantages compared with FEM. One of them is the improvement obtained in the regularity of the solution in the derivatives, obtaining a better approximation. However, accurate imposition of essential boundary conditions is a main drawback in the meshless methods. In this paper, it has been worked in the denominated Element Free Galerkin Method (EFG) in order to improve it. Moving least squares method with appropriate weighting functions and areas of influence, giving as result a local approximation have been used. As it is necessary to satisfy the essential boundary conditions only approximately, a way to do it, is to use a constrained variational principle with a penalty function. This new treatment for essential boundary conditions is simple and logical and works very well in all numerical examples for 2D potential problems that are presented here. It is shown that the present constrained variational formulation together with the EFG method and appropriated weighting function exhibit very high accuracy and stability, for regular and irregular grid of nodes.

The study of approximation of the error in EFG has been initiated. This paper proposes an error indicator.

## INTRODUCCIÓN

Recientemente, Nayroles,<sup>1</sup> Belytschko,<sup>2,3</sup> Liu,<sup>4</sup> Oden<sup>5</sup> y Oñate<sup>6</sup> han aplicado con éxito métodos sin malla para resolver problemas de ecuaciones en derivadas parciales.

La ventaja que presentan estos métodos es que guardando una similitud con la formulación clásica del MEF, del que conservan algunas características, proporcionan aproximaciones más suaves, ofrecen continuidad en la solución y en los gradientes y necesitan sólo conjuntos discretos de puntos (nodos) y no elementos explícitos. En algunos métodos sin malla suele utilizarse como método de aproximación numérica el método de mínimos cuadrados móviles (MCM)<sup>7</sup>.

En el método de mínimos cuadrados móviles<sup>7</sup> la idea es reemplazar la interpolación a trozos, típica del método de elementos finitos, por un ajuste por mínimos cuadrados local, válido en un cierto entorno del punto  $(x, y)$ , utilizando un número  $n$  de nodos próximos variable. Con esto la función aproximadora resultante es mucho más suave que la función interpoladora del método de elementos finitos (MEF), ya que se reemplazan los coeficientes discontinuos a aplicar al funcional que se minimiza en el MEF (valor unidad en el elemento y nulo fuera de él) por funciones de peso continuas, lo cual da una función de continuidad  $C^n$  tomando usualmente  $n > 1$ . El método de mínimos cuadrados móviles fue empleado inicialmente para aproximación de superficies.<sup>7</sup> También se ha utilizado en aplicaciones como por ejemplo en subsidencia minera.<sup>8</sup>

Duarte y Oden<sup>5</sup> por un lado y Babuška y Melenk<sup>9</sup> por otro han mostrado cómo los denominados métodos sin malla pueden estar basados en la partición de la unidad. Así es fácil por ejemplo justificar, que las funciones obtenidas con mínimos cuadrados móviles constituyen una partición de la unidad.

Parece claro pues, que antes de abordar la construcción de bases de funciones siguiendo esta idea es necesario aclarar el concepto de partición de la unidad.

Si  $\Omega$  es un dominio en  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 1, 2$  ó  $3$  y  $Q_n$  es un conjunto arbitrario de  $n$  puntos  $\{x_i\} \in \Omega$  denominados nodos, se puede asociar a este conjunto de puntos otro de segmentos, círculos, esferas (según  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 1, 2$  ó  $3$ ), que se denominan nubes o subdominios  $\Omega_i$ , tales que  $\bar{\Omega} \subset \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$  centrados en cada  $\{x_i\}$  y con un radio  $h_i$  elegidos de manera que se cubra completamente de forma abierta el dominio  $\Omega$ .

El conjunto de funciones  $S_n = \{\Phi_i^k\}_{i=1}^n$  (notación en la que el subíndice  $i$  se asocia a la localización del punto y el superíndice  $k$  hace referencia al orden de la función de aproximación) se llama partición de la unidad asociado al conjunto de subdominios o nubes  $\{\Omega_i\}_{i=1}^n$ , si tiene las siguientes propiedades

$$1) \quad \Phi_i^k \in C_0^\infty \quad 1 \leq i \leq n \quad 2) \quad \sum \Phi_i^k(\{x\}) = 1 \quad \forall x \subset \Omega \quad (1)$$

No hay una única forma de construir las funciones  $\Phi_i^k(\{x\})$  de manera que cumplan la condición de constituir una partición de la unidad, pudiéndose basar su elección en si el problema a resolver es o no lineal, la complejidad de la geometría del dominio, regularidad requerida ( $C^0$ ,  $C^1$ , ...), etc.

En este trabajo se presenta el estudio de un método de aproximación que sirve para tratar de modo sencillo y con gran precisión la condición de contorno de tipo Dirichlet. Para ello se combina una propiedad del método de mínimos cuadrados móviles junto con el método de penalización. También se ha empleado un nuevo indicador de error a posteriori con el que se trata de distribuir el error uniformemente en el dominio. Este procedimiento permite aislar las áreas del dominio con peor comportamiento y refinar sólo pequeñas zonas.

## EL MÉTODO DE GALERKIN SIN ELEMENTOS

El valor de la variable  $u(\mathbf{x})$  en un punto  $\mathbf{x}$  del dominio se aproxima

$$\{u(\mathbf{x})\} = \sum_{i=1}^n \{p_i(\mathbf{x})\}^T \{a_i(\mathbf{x})\} = \{\mathbf{p}(\mathbf{x})\}^T \{\mathbf{a}(\mathbf{x})\} \quad (2)$$

donde  $n$  es el número de términos de la base,  $\{p_i(\mathbf{x})\}$  son las funciones de base y  $\{a_i(\mathbf{x})\}$  son sus coeficientes, que son función de las coordenadas  $\mathbf{x}$ , y  $\{\mathbf{a}(\mathbf{x})\}$  el vector que contiene los parámetros a determinar mediante el algoritmo de aproximación, es decir, minimizando el funcional que define la suma de los errores cuadráticos ponderados

$$J = \sum_{I=1}^n w(d_I) (\{\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I)\} \{\mathbf{a}(\mathbf{x})\} - u_I)^2 \quad (3)$$

donde  $w(d_I) = w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$  es una función de peso con soporte compacto.

La ecuación (3) la podemos poner en la forma

$$\mathbf{J}(\mathbf{a}) = ([\mathbf{P}]\{\mathbf{a}\} - \{\mathbf{u}\})^T [\mathbf{W}(\mathbf{x})] ([\mathbf{P}]\{\mathbf{a}\} - \{\mathbf{u}\}) \quad (4)$$

donde

$$\{\mathbf{u}\}^T = (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (5)$$

$$[\mathbf{P}] = \begin{bmatrix} (\{\mathbf{p}(\mathbf{x}_1)\})^T \\ \vdots \\ (\{\mathbf{p}(\mathbf{x}_n)\})^T \end{bmatrix} \quad (6)$$

siendo

$$\{\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)\}^T = p_1(\mathbf{x}_i), \dots, p_m(\mathbf{x}_i) \quad (7)$$

y la matriz de funciones de ponderación diagonal

$$[\mathbf{W}] = \text{diag}[w_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1), \dots, w_n(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)] \quad (8)$$

Al imponer la condición de estacionariedad del funcional  $\mathbf{J}$  respecto de  $\mathbf{a}$ , se llega a la relación

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{a}} = [\mathbf{A}(\mathbf{x})]\{\mathbf{a}(\mathbf{x})\} - [\mathbf{H}(\mathbf{x})]\{\mathbf{u}\} = 0 \quad (9)$$

donde

$$[\mathbf{A}] = [\mathbf{P}]^T [\mathbf{W}(\mathbf{x})] [\mathbf{P}] \quad (10)$$

$$[\mathbf{H}] = [\mathbf{P}]^T [\mathbf{W}(\mathbf{x})] \quad (11)$$

y por tanto

$$\{\mathbf{a}(\mathbf{x})\} = [\mathbf{A}(\mathbf{x})]^{-1} [\mathbf{H}(\mathbf{x})]\{\mathbf{u}\} \quad (12)$$

La variable  $u(\mathbf{x})$  se puede expresar como

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n \{\Phi_I(\mathbf{x})\} \{u_I\} \quad (13)$$

donde

$$\{\Phi_I(\mathbf{x})\} = \{\mathbf{p}(\mathbf{x})\}^T [\mathbf{A}(\mathbf{x})]^{-1} [\mathbf{H}_I(\mathbf{x})] \quad (14)$$

siendo  $\mathbf{H}_I$  la columna  $I$  de  $\mathbf{H}$  y  $\Phi_I(\mathbf{x})$  las funciones aproximadoras para un punto  $\mathbf{x}$ .

Las derivadas parciales de las funciones aproximadoras son

$$\{\Phi_I(\mathbf{x})\}_{,j} = \{\mathbf{p}\}_{,j}^T [\mathbf{A}]^{-1} [\mathbf{H}_I] + \mathbf{p}^T [[\mathbf{A}]^{-1} ([\mathbf{H}_I]_{,j} - [\mathbf{A}]_{,j} [\mathbf{A}]^{-1} [\mathbf{H}_I])] \quad (15)$$

## CONDICIONES DE CONTORNO ESENCIALES

Una de las mayores dificultades de los métodos de puntos o métodos sin malla reside en que la aproximación no tiene carácter interpolatorio, lo cual suele expresarse mediante la llamada *propiedad delta de Kronecker* de la forma

$$\Phi_i(x_j) \neq \delta_{ij} \quad (16)$$

en la que  $\Phi_i$  es la  $i$ -ésima función de aproximación evaluada en el nodo  $\mathbf{x}_j$ . Además, también puede ocurrir que las funciones de aproximación asociadas a nodos, que no se encuentran en el contorno, tampoco sean nulas en el mismo.

Todo ello implica una dificultad cuando se aplican las condiciones de contorno esenciales, lo que ha llevado a la búsqueda de diferentes soluciones, entre otras mediante multiplicadores de Lagrange (Belytschko *et al.*<sup>2</sup>) o principios variacionales modificados (Lu *et al.*<sup>3</sup>).

De acuerdo con Krongauz y Belytschko,<sup>10</sup> una solución satisfactoria se obtiene acoplando elementos finitos en el contorno. Otro método importante, presentado por Mukherjee y Mukherjee,<sup>11</sup> al tratar las condiciones de contorno esenciales con principios variacionales modificados es tener en cuenta el hecho de que los MCM son una aproximación en vez de una interpolación. Oñate *et al.*<sup>6</sup> han propuesto una estrategia en ese sentido para tratar las condiciones de contorno de Dirichlet en el caso de colocación puntual. Otra solución consiste en forzar que las funciones de peso sean singulares en el contorno donde exista condición de contorno Dirichlet (Duarte y Oden<sup>12</sup>). Se pueden obtener funciones de forma interpoladoras usando funciones de peso singulares (Lancaster y Salkauskas<sup>7</sup>). Existen otras técnicas para métodos sin malla: en los denominados métodos RKP se han empleado diferentes procedimientos para generar aproximaciones admisibles para el tratamiento de las condiciones de contorno esenciales, como por ejemplo Gosz y Liu<sup>13</sup> y Günther y Liu.<sup>14</sup> La solución presentada por Gosz y Liu<sup>13</sup> consiste en forzar a que sean cero las funciones de ponderación en los contornos en que se tratan de imponer las condiciones tipo Dirichlet y, aunque a priori resulta una idea interesante, parece resultar menos robusta que las otras.

Aunque estos métodos proporcionan una manera de afrontar las dificultades inherentes a los métodos sin malla tienen también algunas limitaciones y desventajas. Por ejemplo, los multiplicadores de Lagrange presentan el inconveniente que al ser aplicados, la matriz de rigidez deja de ser definida positiva y de banda y el tamaño del problema se incrementa. Mientras que los principios variacionales permiten que la matriz de rigidez siga siendo positiva y de banda, presentan una precisión algo menor. El acoplamiento con elementos finitos desaprovecha las ventajas de los métodos sin malla y puede originar discontinuidades en las derivadas de la aproximación.

Aunque el método es consistente y bastante robusto, según sus autores, tiene la desventaja de la complejidad de las funciones de forma en la zona de interfase que obliga a la utilización de órdenes elevados en la cuadratura de Gauss. Además desvirtúa completamente la pureza de un método de puntos al tener que mezclarlo obligatoriamente con el método de elementos finitos.

## MÉTODO DE PENALIZACIÓN

En este artículo se utiliza el método de penalización para el tratamiento de la condición de contorno esencial. Se aplicará el método de MCM con funciones de peso y áreas de influencia adecuadas para cada una de ellas. Se obtiene así una aproximación muy cercana a la interpolación. Debido a que se emplean aproximaciones locales, se necesita satisfacer las condiciones de contorno esenciales sólo aproximadamente. Una manera de abordar este aspecto es usando un principio variacional restringido con una función de peso.

El problema planteado es el de obtener la estacionariedad de un funcional  $\Pi(\mathbf{u})$  y al que se desea imponer las condiciones de contorno esenciales. Por ejemplo, si la función  $\mathbf{u}$  debe verificar

$$\mathbf{P}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \quad (17)$$

Se puede añadir al funcional original  $\Pi(\mathbf{u})$  el término

$$\alpha \int_{\partial\Omega} \mathbf{P}^T(\mathbf{u})\mathbf{P}(\mathbf{u})d(\partial\Omega) \quad (18)$$

Obteniendo el nuevo funcional  $\Theta$  según

$$\Theta(\mathbf{u}) = \Pi(\mathbf{u}) + \alpha \int_{\partial\Omega} \mathbf{P}^T(\mathbf{u})\mathbf{P}(\mathbf{u})d(\partial\Omega) \quad (19)$$

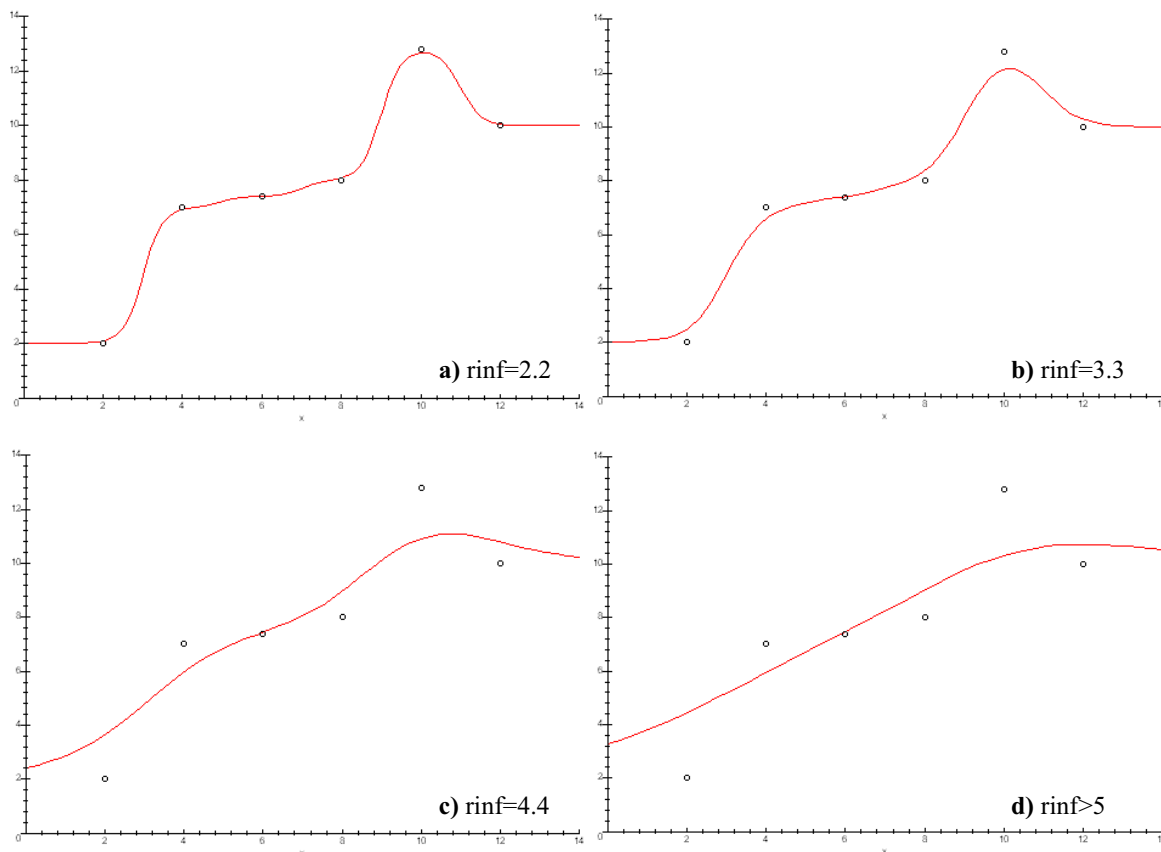
donde  $\alpha$  es el parámetro o número de penalización, al que se impone la condición de estacionariedad y que por tanto cumplirá las condiciones de contorno de forma aproximada dependiendo del valor de  $\alpha$ .

Aunque el método no tiene los inconvenientes mencionados en la utilización de multiplicadores de Lagrange, la elección del número de penalización es muy importante, ya que un valor excesivamente alto o bajo puede conducir a problemas numéricos que invaliden los resultados obtenidos. Como se verá más adelante el método de penalización puede resultar muy eficaz y estable para un amplio rango de valores del parámetro de penalización.

Por otro lado, si la restricción  $\mathbf{P}$  es aplicable sólo a uno o más puntos del contorno, entonces añadir el término  $\mathbf{P}^T(\mathbf{u})\mathbf{P}(\mathbf{u})$  en esos puntos en el funcional general introduce un número discreto de restricciones.

En la práctica la aplicación junto al método de elementos finitos de las funciones de penalización ha resultado muy efectiva.<sup>15</sup> Para poder emplear este método con éxito en el método EFG es necesario que la aproximación obtenida sea muy próxima a la interpolación. Con objeto de verificar el requisito anterior es suficiente considerar áreas de influencia para cada función de peso con solapamientos pequeños pero abarcando nodos suficientes para la aproximación empleada (Figura 1).

Como se muestra en la Figura 1, usando MCM se puede obtener una función aproximadora muy cercana a la interpolación con sólo disminuir el solapamiento de las áreas de influencia de las funciones de peso en cada punto ( $\text{rinf} = 2, 2$ ; Figura 1).



**Figura 1.** Aproximaci3n por MCM usando diferentes radios de influencia (rinf) para las funciones de peso en el caso de un conjunto de 6 puntos

Adem3s, haciendo uso de los MCM se obtendr3n los valores de la funci3n y de los gradientes mediante las aproximaciones

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n(x)} \Phi_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I \quad (20)$$

$$\frac{\partial u^h}{\partial x}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n(x)} \frac{\partial \Phi_I}{\partial x}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I \quad (21)$$

$$\frac{\partial u^h}{\partial y}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n(x)} \frac{\partial \Phi_I}{\partial y}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I \quad (22)$$

Los valores de  $u^h$ ,  $\frac{\partial u^h}{\partial x}$  y  $\frac{\partial u^h}{\partial y}$  en todos los nodos se aceptan como la soluci3n num3rica al problema.

Para comparar la bondad del m3todo de penalizaci3n se han abordado las condiciones de contorno esenciales empleando dos metodolog3as distintas con el m3todo EFG: multiplicadores de Lagrange de flujo<sup>3,11</sup> y funciones de penalizaci3n. Todo ello puede verse con un mayor detalle en Falc3n.<sup>16</sup>

## RESULTADOS NUMÉRICOS

Se han desarrollado diferentes ejemplos para poder comparar las capacidades numéricas de ambos métodos. Consideremos la ecuación de Laplace en 2D

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{en el dominio } \Omega = ]0, 1[x]0, 1[ \quad (23)$$

con las condiciones de contorno

$$\mathbf{u} = u_d \quad \text{en } \partial\Omega_D \quad (24)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = v_d \quad \text{en } \partial\Omega_N \quad (25)$$

donde  $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N$  es el contorno del dominio  $\Omega$  y  $\mathbf{u}$  es el vector normal unitario exterior en cualquier punto del contorno  $\partial\Omega_N$ .

Consideraremos empleando el método EFG dos formas diferentes de tratar la condición de contorno de Dirichlet. En el método EFG con multiplicadores de Lagrange de flujo, se obtiene

$$\iint_{\Omega} u_{,ii} \delta \mathbf{u} dA + \int_{\partial\Omega_D} \delta \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \right) (\mathbf{u} - u_d) dr = 0 \quad (26)$$

integrando por partes

$$\iint_{\Omega} u_{,i} \delta u_{,i} dA - \int_{\partial\Omega_D} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \right) \delta \mathbf{u} dr - \int_{\partial\Omega_D} \mathbf{u} \delta \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \right) dr = \int_{\partial\Omega_N} v_d \delta \mathbf{u} dr - \int_{\partial\Omega_D} u_d \delta \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \right) dr \quad (27)$$

Sustituyendo las ecuaciones (20) en la forma débil (27) se llega al sistema de ecuaciones

$$\{[\mathbf{K}] - [\mathbf{G}] - [\mathbf{G}^T]\}\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{f}\} - \{\mathbf{g}\} \quad (28)$$

donde

$$K_{IJ} = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial \Phi_I}{\partial x} \frac{\partial \Phi_J}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_I}{\partial y} \frac{\partial \Phi_J}{\partial y} \right) dA \quad (29)$$

$$G_{IJ} = \int_{\partial\Omega_D} \frac{\partial \Phi_I}{\partial n} \Phi_J dS \quad (30)$$

$$f_I = \int_{\partial\Omega_N} v_d \Phi_I dS \quad (31)$$

$$g_I = \int_{\partial\Omega_D} u_d \frac{\partial \Phi_I}{\partial n} dS \quad (32)$$

Por otra parte en el método de penalización, se llega al sistema de ecuaciones

$$\{[\mathbf{K}]\}\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{f}\} \quad (33)$$

siendo  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{f}$  las definidas anteriormente, pero además hay que modificar las ecuaciones correspondientes a los nodos del contorno con condición de Dirichlet, teniendo en cuenta que el funcional en esos puntos es diferente debido a que se suma el término (18). Para un mayor detalle de este método puede consultarse Oñate.<sup>17</sup>

Se van a considerar diferentes soluciones de la ecuación de Laplace.

Ejemplo	Solución	Condiciones de contorno
E1	$u = x + y$	Dirichlet en todo el contorno
E2	$u = -x^3 - y^3 + 3xy^2 + 3x^2y$	Dirichlet en todo el contorno
E4	$u = -x^3 - y^3 + 3xy^2 + 3x^2y$	Neumann ( $v_d = 0$ ) en $x = 0$ ó $y = 0$ y Dirichlet en el resto del contorno
T1	$u = x^2 - y^2$	Dirichlet en todo el contorno
T2	$u = e^x \sin y$	Dirichlet en todo el contorno

**Tabla I.** Casos de estudio

Se han empleado los mismos casos E1, E2 y E4 con el fin de poder comparar con los resultados obtenidos por Mukherjee.<sup>11</sup>

Se define una medida del error global como

$$\text{Error}_f = \frac{1}{|f|_{\max}} \sqrt{\frac{1}{N_N} \sum_{i=1}^{N_N} (f_i^{(e)} - f_i^{(n)})^2} \quad (34)$$

donde  $f$  podrá ser el valor de la variable  $\mathbf{u}$ , o bien sus gradientes  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}$ . Los superíndices  $(e)$  y  $(n)$  hacen referencia a las soluciones exacta y obtenida numéricamente respectivamente y  $N_N$  es el número total de nodos.

Se utilizan funciones de forma con una base de polinomios lineal. Se han realizado dos modelos regulares: uno con  $4 \times 4$  celdas ( $9 \times 9$  nodos) y otro con  $8 \times 8$  celdas ( $9 \times 9$  nodos) utilizándose diferentes ordenes de integración numérica.

En ambos casos se han utilizado las funciones de ponderación polinómica (tipo *spline*) y exponencial (tipo Gauss) con el mismo significado para los diferentes parámetros allí indicado. Dichas funciones de peso son:

a) Función de peso polinomial (*spline* cuártica)

$$w_i(d) = 1 - 6 \left( \frac{d}{dm} \right)^2 + 8 \left( \frac{d}{dm} \right)^3 - 3 \left( \frac{d}{dm} \right)^4 \quad \text{si } d \leq dm$$

$$w_i(d) = 0 \quad \text{si } d > dm$$
(35)

donde  $dm$  es el radio de influencia y

$$d = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \quad (36)$$

b) Función de peso polinomial (*spline* cúbica)

$$w_i(d) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4 \left( \frac{d}{dm} \right)^2 - 4 \left( \frac{d}{dm} \right)^3 & \text{si } d \leq \frac{1}{2} dm \\ \frac{4}{3} - 4 \left( \frac{d}{dm} \right) + 4 \left( \frac{d}{dm} \right)^2 - \frac{4}{3} \left( \frac{d}{dm} \right)^3 & \text{si } \frac{1}{2} dm < d \leq dm \\ 0 & \text{si } d > dm \end{cases} \quad (37)$$

donde  $dm$  es el radio de influencia y  $d$  viene dada por la expresión (36).

c) Función de peso exponencial (tipo Gauss)



$$w_i(d) = \frac{e^{-\left(\frac{d}{c}\right)^2} - e^{-\left(\frac{dm}{c}\right)^2}}{1 - e^{-\left(\frac{dm}{c}\right)^2}} \quad \text{si } d \leq dm \tag{38}$$

$$w_i(d) = 0 \quad \text{si } d > dm$$

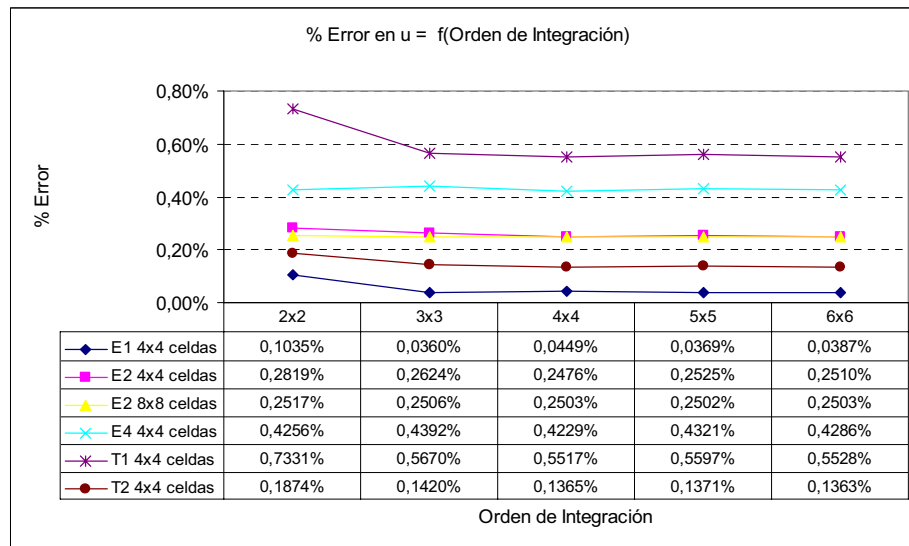
$$c = \beta c_i \tag{39}$$

donde  $dm$  es el radio de influencia y  $d$  viene dada por la expresión (36),  $c_i$  es el lado de la celda y  $\beta$  es el parámetro de Gauss.

En la ecuación anterior  $c$  y por lo tanto  $\beta$  es el parámetro que controla la forma de la función de peso y  $dm$  es el tamaño del soporte de puntos de la función y determina el dominio de influencia de  $x_i$ .

A continuación pueden verse los resultados obtenidos, primero utilizando el método de penalización, y luego comparando dicho método con el de multiplicadores de Lagrange.

Como se puede ver en la Figura 2, el error en el valor de la función es estable al variar el orden de integración en los diferentes casos considerados.



**Figura 2.** Error en la función para diferentes órdenes de integración

A continuación se estudia cuál debe ser el valor del parámetro de penalización ( $10^\alpha$ ), llegándose a la conclusión de que se puede tomar  $3 < \alpha < 31$ , tal y como se puede apreciar en la Figura 3 para el valor de la función.

Otro importante parámetro que afecta a la precisión de los resultados obtenidos es el tamaño del dominio de influencia de las funciones de ponderación. Para obtener una mejor aproximación local es necesario que las áreas de influencia sean pequeñas, siempre que se asegure un mínimo de puntos suficiente para el orden de aproximación elegido. Esto se puede apreciar en la Figura 4. Para el caso E1 ( $u = x + y$ ), el método prácticamente reproduce la solución exacta.

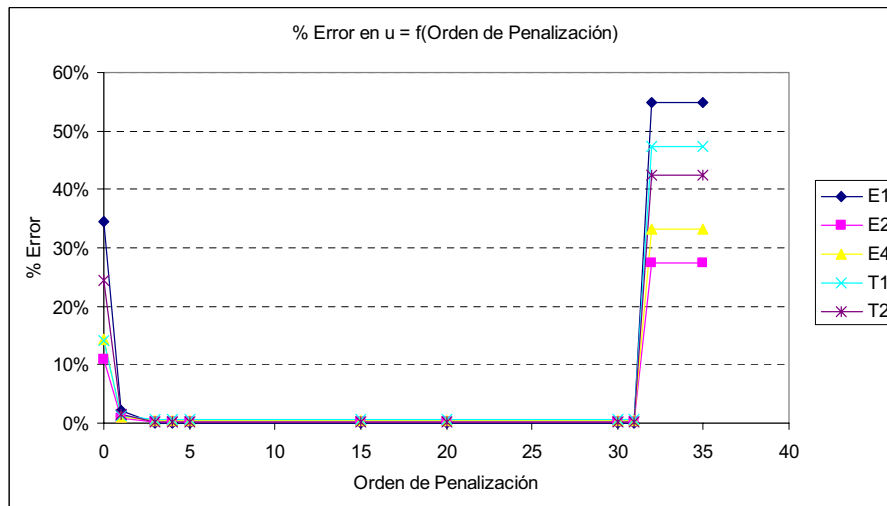


Figura 3. Error en  $u$  para diferentes parámetros penalización

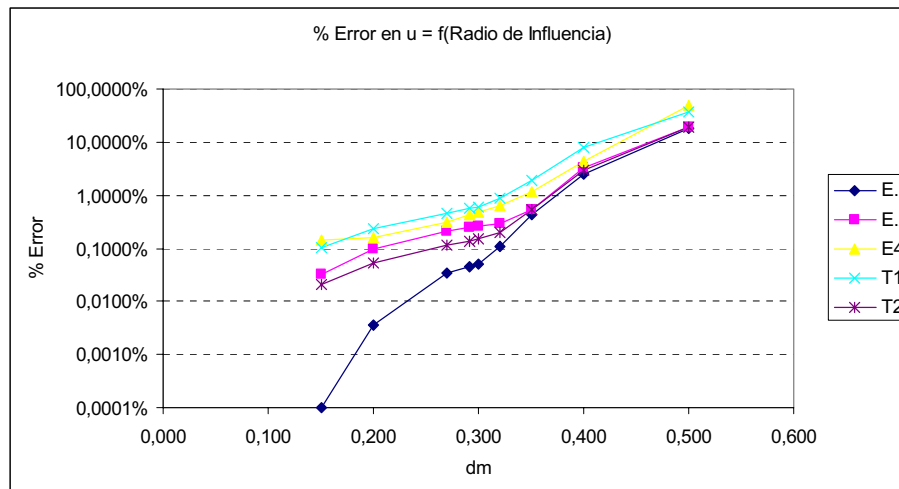


Figura 4. Error en  $u$  para diferentes radios de influencia en la función de peso

En la Tabla II se pueden ver los resultados obtenidos para la función  $u$  en comparación con los obtenidos por Mukherjee y Mukherjee<sup>11</sup> usando la nueva estrategia propuesta por ellos para el caso  $4 \times 4$  celdas con  $9 \times 9$  nodos.

Además de los cinco casos de estudio presentados anteriormente se va a emplear un sexto con el mismo mallado regular, que se denominará T3 y que es solución de la ecuación de Laplace en 2D

$$\nabla^2 \mathbf{u} = 0 \quad \text{en el dominio } \Omega = [0, 1; 1, 1] \times [0, 1; 1, 1] \quad (40)$$

con las condiciones de contorno

$$\mathbf{u} = u_d \quad \text{en } \partial\Omega_D \quad (41)$$

donde

$$\mathbf{u} = \log(x^2 + y^2) \quad (42)$$

Este caso presenta la particularidad de tener una singularidad en la función y en los gradientes en el origen de coordenadas.

Estrategia en el tratamiento de las condiciones de contorno esenciales	Función de penalización (10 <sup>15</sup> )		Muk. & Muk.  Nueva estrategia	Multiplicadores de Lagrange de flujo
Datos de la función de peso	<i>Spline</i> rinf = $d = 0, 15$	Gauss rinf = $d = 0, 15$ $c = 0, 48$	Gauss $d = 0, 32; c = 0, 48$	
Orden de integr.	4 × 4	4 × 4	6 × 6	6 × 6
E1	0,0001 %	0,0732 %	0,51 %	–
E2	0,0318 %	0,2073 %	1,85 %	17,97 %
E4	0,1432 %	2,9071 %	0,5 %	3,06 %

**Tabla II.** Comparación con los resultados de Mukherjee y Mukherjee<sup>11</sup>

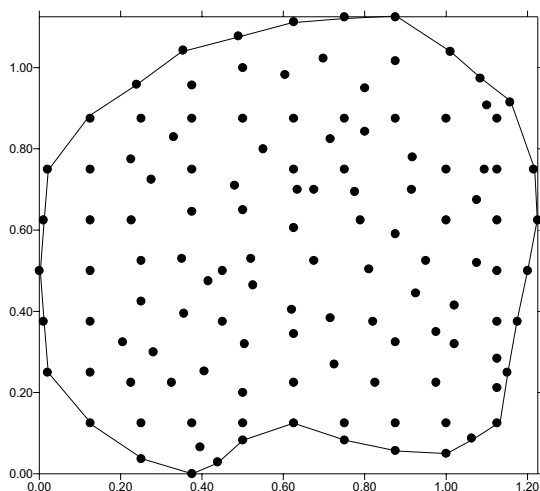
En la Tabla III se presentan los resultados obtenidos con multiplicadores de Lagrange de flujo para los casos E2 y T3 con diferentes números de celdas de integración para las tres funciones de peso consideradas y rinf = 0,32. Los mejores resultados se han obtenido con funciones de peso “spline” cuártica y cúbica. Los resultados obtenidos con el método de penalización pueden ser ampliamente mejorados reduciendo el radio de influencia “rinf” (como se vio en la Figura 1).

Estrategia en el tratamiento de las condiciones de contorno esenciales		Multiplicadores de Lagrange de flujo			Función de penalización (10 <sup>15</sup> )		
Datos de la función de peso		<i>Spline</i> cuártica rinf = $d = 0, 32$	<i>Spline</i> cúbica rinf = $d = 0, 32$	Gauss rinf = $d = 0, 32$ $c = 0, 48$	<i>Spline</i> cuártica rinf = $d = 0, 32$	<i>Spline</i> cúbica rinf = $d = 0, 32$	Gauss rinf = $d = 0, 32$ $c = 0, 48$
Orden de integración		6 × 6	6 × 6	6 × 6	6 × 6	6 × 6	6 × 6
E2 8 × 8 cel. 9 × 9 nod.	$\mathbf{u}$ $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}$ $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}$	10,609 19,819 19,819	10,619 20,284 18,164	11,974 29,275 29,281	0,293 1,944 1,944	0,316 2,241 4,435	4,964 36,133 36,133
E2 4 × 4 cel. 9 × 9 nod.	$\mathbf{u}$ $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}$ $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}$	10,610 19,817 19,817	10,619 20,289 18,169	11,889 29,619 29,565	0,293 1,951 1,951	0,317 2,239 4,437	5,014 36,813 36,813
T3 8 × 8 cel. 9 × 9 nod.	$\mathbf{u}$ $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}$ $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}$	8,945 10,619 7,019	7,937 11,970 7,878	15,735 21,303 12,945	2,176 8,138 8,138	1,916 7,856 8,472	4,114 6,448 6,448
T3 4 × 4 cel. 9 × 9 nod.	$\mathbf{u}$ $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}$ $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}$	8,948 10,613 7,017	7,941 11,971 7,878	15,575 21,266 12,877	2,177 8,138 8,138	1,916 7,856 8,472	4,261 6,365 6,365

**Tabla III.** Error (%) en  $\mathbf{u}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}$  y  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}$

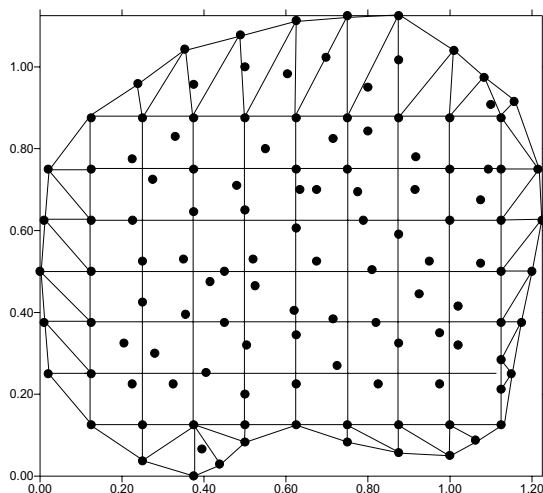
Sin embargo, el principal interés de los métodos sin malla es el de poder aplicarlos a geometrías arbitrarias y mallados irregulares. Por este motivo se ha considerado un segundo

ejemplo del caso de la ecuaci3n de Laplace en un dominio m1s complejo, con una malla irregular de nodos (Figura 5).



**Figura 5.** Dominio complejo con un mallado de nodos irregular

La integraci3n num3rica sobre este dominio m1s complejo se ha realizado usando celdas triangulares y cuadrangulares seg1n se muestra en la Figura 6.



**Figura 6.** Celdas triangulares y cuadradas empleadas para la integraci3n num3rica

La Tabla IV muestra los resultados obtenidos con multiplicadores de Lagrange y penalizaci3n para el caso T3, para dos radios de influencia distintos.

Se han empleado, como se muestra en la Figura 6, 52 celdas triangulares (13 puntos de integraci3n) y 48 celdas cuadradas ( $4 \times 4$  puntos de integraci3n). Los mejores resultados se han obtenido con el m3todo de penalizaci3n empleando una funci3n de peso *spline* y un peque1o radio de influencia ( $r_{inf} = 0,15$ ), ya que en este caso se obtiene una aproximaci3n muy cercana a la interpolaci3n.

Estrategia en el tratamiento de las condiciones de contorno esenciales		Multiplicadores de Lagrange de flujo			Función de penalización ( $10^{15}$ )		
Datos de la función de peso		<i>Spline</i> cuártica	<i>Spline</i> cúbica	Gauss rinf/ $c = \frac{2}{3}$	<i>Spline</i> cuártica	<i>Spline</i> cúbica	Gauss rinf/ $c = \frac{2}{3}$
Orden de integración		$4 \times 4/13$	$4 \times 4/13$	$4 \times 4/13$	$4 \times 4/13$	$4 \times 4/13$	$4 \times 4/13$
T3 $8 \times 8$ cel. cuad. 52 triáng. rinf = 0, 32	$\mathbf{u}$	22,370	20,617	23,821	22,217	19,740	23,707
	$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}$	35,332	42,195	29,279	32,683	38,563	29,875
	$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}$	31,786	32,003	27,407	45,742	35,134	28,305
T3 $8 \times 8$ cel. cuad. 52 triáng. rinf = 0, 15	$\mathbf{u}$	34,657	19,989	15,482	2,431	2,069	2,573
	$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}$	> 100	83,390	40,071	7,169	7,143	10,819
	$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}$	> 100	> 100	72,179	11,348	10,211	13,731

**Tabla IV.** Error (%) en  $\mathbf{u}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}$  y  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}$  para el caso T3

Como se ha podido comprobar, se obtienen unos resultados muy precisos con el método EFG en combinación con el método de penalización. Sin embargo, hay que tener en cuenta a modo de guía para su uso eficaz los siguientes aspectos:

1. Es recomendable el uso de las funciones de peso tipo *spline*, dadas en las ecuaciones (35) y (37).
2. Es necesario que al emplear el MCM se obtenga una aproximación cercana a la interpolación. Este punto es muy fácil de verificar, ya que es posible evaluar la diferencia entre el valor  $\mathbf{u}$  (solución del sistema de ecuaciones) y el valor aproximado  $u^h$  de (20), usando por ejemplo la fórmula (34) para calcular el error global de interpolación, con  $\mathbf{u} = u^{(e)}$  y  $u^h = u^{(n)}$ . Esta fórmula, (34), se aplica en la siguiente Tabla V para calcular el “% de error de interpolación”.

El punto anterior puede ser abordado también empleando radio variable (rinf). En este caso, rinf se ajusta para cada punto en función solamente del área cercana que abarca los  $n$  puntos más próximos. Se puede multiplicar la distancia del  $n$ -ésimo nodo por un parámetro (como se ha hecho en la siguiente Tabla V) para asegurar un pequeño solapamiento entre las áreas de influencia de cada punto.

La Tabla V se ha obtenido considerando rinf variable, ajustándose al tercero, cuarto, quinto o sexto punto más cercano al entorno de cada nodo.

Una propiedad interesante de las funciones MCM aparece cuando las funciones de forma cubren un número de nodos igual que el número de monomios que hay en la base. Por ejemplo si una función de forma con una base lineal  $(1, x, y)$  cubre tres nodos, el resultado es una delta de Kronecker.

En dos dimensiones es difícil usar esta propiedad, ya que las funciones de forma usan un soporte circular. Sin embargo, como se mostró en la Figura 1, es posible acercarse a una interpolación reduciendo el número de nodos, en el soporte circular de cada una de las funciones de peso.

En la Tabla V el error global de interpolación de la función, calculado de acuerdo con la ecuación (34), disminuye con el número de nodos empleado para calcular el radio de influencia de la función de peso. Sin embargo, el error en  $\mathbf{u}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}$  y  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}$  se incrementa cuando

se est1a muy cerca de la interpolaci3n, como en el caso de tres nodos de soporte. Los mejores resultados se obtienen con cuatro nodos en el 1rea de influencia de cada punto.

Por ello los resultados obtenidos indican que es aconsejable acercarse a la interpolaci3n (empleo de 4 nodos), que adem1s se puede medir el error en la interpolaci3n empleando (20) y (34), pero que no es conveniente forzar en exceso la interpolaci3n (empleo de 3 nodos).

Estrategia en el tratamiento de las condiciones de contorno esenciales		Funci3n de penalizaci3n ( $10^{15}$ )	
Datos de la funci3n de peso		<i>Spline</i> cu1rtica	<i>Spline</i> c3bica
Orden de integraci3n		$4 \times 4/13$	$4 \times 4/13$
rinf = 1,05 $\times$ distancia al tercer nodo m1s cercano	error en interpolaci3n (%)	0,013	0,006
	error en $\mathbf{u}$ (%)	11,211	10,394
	error en $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}$ (%)	34,063	33,566
	error en $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}$ (%)	27,751	27,383
rinf = 1,1 $\times$ distancia al cuarto nodo m1s cercano	error en interpolaci3n (%)	0,136	0,1867
	error en $\mathbf{u}$ (%)	1,835	1,718
	error en $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}$ (%)	6,919	9,171
	error en $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}$ (%)	8,079	10,117
rinf = 1,1 $\times$ distancia al quinto nodo m1s cercano	error en interpolaci3n (%)	1,034	0,687
	error en $\mathbf{u}$ (%)	2,519	2,068
	error en $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}$ (%)	7,851	7,669
	error en $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}$ (%)	11,311	10,497
rinf = 1,1 $\times$ distancia al sexto nodo m1s cercano	error en interpolaci3n (%)	2,143	1,351
	error en $\mathbf{u}$ (%)	2,6091	2,154
	error en $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}$ (%)	8,1615	7,947
	error en $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}$ (%)	11,675	10,350

Tabla V. Error (%) en  $\mathbf{u}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}$  y  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}$  para el caso T3

## ESTIMACI3N DEL ERROR EN M1TODOS SIN MALLA

La estimaci3n del error debe ser una pieza clave en todo proceso de c1lculo adaptable y por tanto actualmente es parte importante en todo an1lisis. En efecto, un estimador del error permite conocer cu1l es la calidad de la soluci3n y por tanto, si esta resulta o no aceptable, proporcionando, en el segundo caso, informaci3n sobre las modificaciones que se deben introducir en el modelo matem1tico utilizado para alcanzar de forma econ3mica la aproximaci3n deseada.

En el MEF los estimadores de error a posteriori se clasifican en tres familias: estimadores de posproceso, estimadores residuales y estimadores de extrapolaci3n. Para un mayor detalle sobre estimadores del error en el MEF ver Oñate,<sup>17</sup> Diez<sup>18</sup> y Huerta *et al.*<sup>19</sup>

La medida del error local como diferencia entre la soluci3n aproximada y la exacta, adem1s de resultar dif1cilmente estimable en general, puede dar una informaci3n confusa (pi3nsese, por ejemplo, en zonas bajo cargas puntuales). Si adem1s se pretende ser capaz tanto de realizar estimaciones globales como otras restringidas a un subdominio local, convendr1 utilizar normas integrales, alguna de las cuales, adem1s, tiene un significado f1sico que se puede interpretar en el problema que se est1 tratando.<sup>20</sup>

En los denominados métodos sin malla se ha tratado en algunos casos de calcular el error a posteriori al objeto de redistribuir los nudos. En lo que sigue, se trata únicamente de representar una panorámica de las estrategias utilizadas para conseguirlo.

Como ya se ha visto anteriormente, existen varias posibilidades al plantear un método sin malla. Por ello parece que resultará más clara la exposición, si nos referimos a ellas al resumir los casos en que de alguna forma se ha tratado de obtener el error a posteriori.

Existen diversos trabajos. Orkisz<sup>21</sup> aplicó en el método de diferencias finitas generalizadas un método adaptativo multimalla para el cálculo del error a posteriori. Así, propuso una aproximación adaptativa que utiliza los residuos como indicadores del error y una relación de convergencia, con un límite establecido, en los nudos comunes a las mallas, cada vez más densas, que se van utilizando sucesivamente. Para evaluar aproximadamente los residuos en cada punto, se utilizan las expresiones en diferencias finitas generalizadas del operador diferencial correspondiente al problema en estudio. Sin embargo, los valores evaluados dependen tanto de la precisión de la solución que se está examinando, como de los operadores en diferencias finitas que se están aplicando. Esta última dependencia es un inconveniente que se propone eliminar considerando términos de orden más elevado en la aproximación local utilizada.

Laouar y Villon<sup>22</sup> han presentado una técnica adaptativa con un estimador del error a posteriori aplicado al método de elementos difusos desarrollado por Nayroles *et al.*<sup>1</sup> Se utiliza la norma de tensión para cada uno de los subdominios  $\Omega_K$ , que cubren el dominio  $\Omega$ .

$$\|e_\tau\|_K = \left[ \int_{\Omega} (\{\tilde{\sigma}\} - \{\hat{\sigma}\})^T (\{\tilde{\sigma}\} - \{\hat{\sigma}\}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (43)$$

en la que  $\{\hat{\sigma}\}$  es la aproximación obtenida para el campo de tensiones por aplicación del método de elementos difusos y  $\{\tilde{\sigma}\}$  es el campo de tensiones continuo obtenido por auto-equilibrio.<sup>23</sup>

También empleando el método de elementos difusos se ha propuesto un indicador del error que estima la variación de las derivadas primeras.<sup>24</sup>

Duarte y Oden han publicado varios trabajos sobre el método adaptativo de nubes  $h-p$ .<sup>5</sup> Han demostrado que el orden de convergencia para la aproximación con nubes  $h-p$  viene dado por

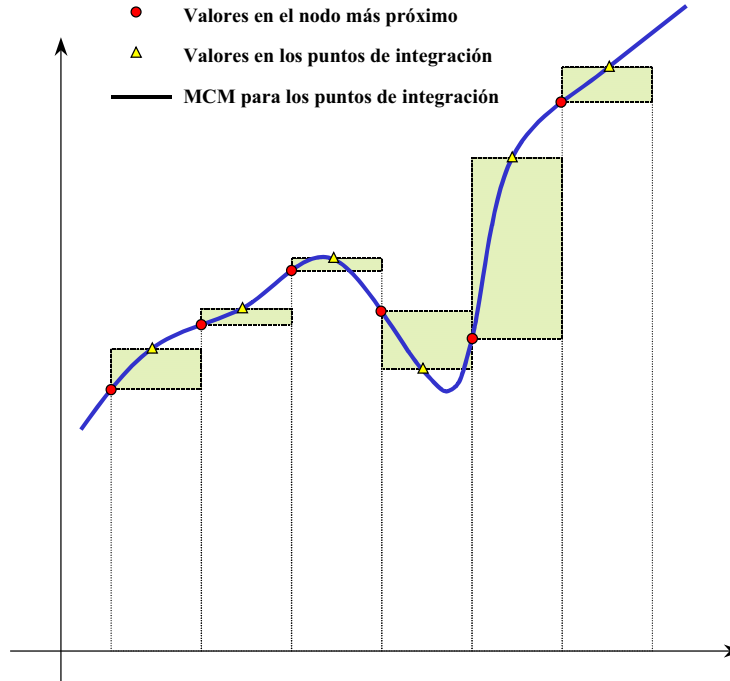
$$|u(x) - u^h(x)|_{m,\Omega} \leq c h^{k+1-m} |u|_{K+1,\Omega} \quad (44)$$

donde  $h$  es el tamaño de la ventana,  $k$  es el grado de polinomio de la base correspondiente,  $m$  es el orden de la ecuación diferencial y las seminormas son las normas L2 usuales que se generan en los espacios de Sobolev. Liu, Li y Belytschko<sup>25</sup> han obtenido resultados similares para el caso más restrictivo de emplear la aproximación (RPK).

## UNA PROPUESTA DE INDICADOR DE ERROR A POSTERIORI

En esta trabajo se presenta un sencillo indicador de error a posteriori. Para ello tomamos como datos de partida los valores calculados por el programa, es decir los valores de la función y sus gradientes en cada uno de los nodos del dominio.

También podríamos calcular los valores de los gradientes en cada uno de los puntos de integración de Gauss. Por ejemplo en el caso unidimensional, supuesto un sólo punto de Gauss para cada dominio de integración, obtendríamos la Figura 7, donde puede verse en representación esquemática lo que sería una curva continua de aproximación por MCM de uno de los gradientes (suponemos en la gráfica que es una interpolación) y la representación en diagrama de barras de la diferencia entre los valores de los gradientes en los puntos de integración numérica y los de los puntos más próximos, asignados a su zona de influencia.



**Figura 7.** MCM y criterio del indicador de error empleado

A partir de estos datos podríamos obtener una aproximación a posteriori del error. Para ello supongamos que para cada nodo del dominio hacemos una teselación de los gradientes. Con ello podemos obtener en cada punto de integración dos valores distintos de cada gradiente. Uno corresponde al valor nodal más cercano y otro al valor calculado mediante MCM en cada punto de integración. Aplicando las normas integrales correspondientes, este podría ser un estimador, evidentemente no muy exacto, pero válido, al menos a nivel cualitativo. Tomaríamos como valor más exacto el obtenido en los puntos de integración (Figura 7).

La norma integral que tomaremos será la clásica norma de la energía y en cada dominio de integración evaluaremos, como usualmente se hace en el MEF, el error de la aproximación. En ambos casos tomaremos el error a posteriori como la diferencia obtenida entre dos aproximaciones. Una proviene del cálculo mediante el método EFG–penalización como posproceso en los puntos de integración aplicando (21) y (22); y la segunda haciendo una teselación de los gradientes.

$$\begin{aligned}
 \|e\|_{\Omega_i}^2 &= \left[ \int_{\Omega_i} (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^e\})^T (\{\sigma\} - \{\sigma^e\}) d\Omega \right] = \\
 &= \left[ \int_{\Omega_i} (\{\sigma\} - \{\sigma^e\})^T [D]^{-1} (\{\sigma\} - \{\sigma^e\}) d\Omega \right] = \\
 &= \left[ \int_{\Omega_i} (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^e\})^T [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^e\}) d\Omega \right]
 \end{aligned} \tag{45}$$

$$\|w\|_{\Omega_i}^2 = \int_{\Omega_i} (\{\sigma^e\})^T [D]^{-1} (\{\sigma^e\}) d\Omega \tag{46}$$

$$\|e\|_{\Omega}^2 = \sum_i \|e\|_{\Omega_i}^2 \tag{47}$$



$$\|w\|_{\Omega}^2 = \sum_i \|w\|_{\Omega_i}^2 \tag{48}$$

y el error relativo

$$\eta = \frac{\|e\|}{\|w\|} \tag{49}$$

Se define el índice de efectividad según

$$\theta = \frac{\|e\|}{\|E\|} \tag{50}$$

donde  $\|E\|$  es el error exacto.

### RESULTADOS NUMÉRICOS DEL INDICADOR DEL ERROR

Consideremos la ecuación de Laplace en el dominio  $\Omega = ]0, 01; 1, 01[x]0, 01; 1, 01[$  con la condición de contorno  $\mathbf{u} = u_d$  en  $\partial\Omega_D$ .

Se utilizan funciones de aproximación de base lineal y el método de penalización para imponer las condiciones de contorno esenciales.

A continuación se van a obtener algunos resultados numéricos en la ecuación de Laplace para el caso T3 definido anteriormente. Los modelos empleados se pueden ver en la Figura 8. Los resultados se muestran en la Tabla VI.

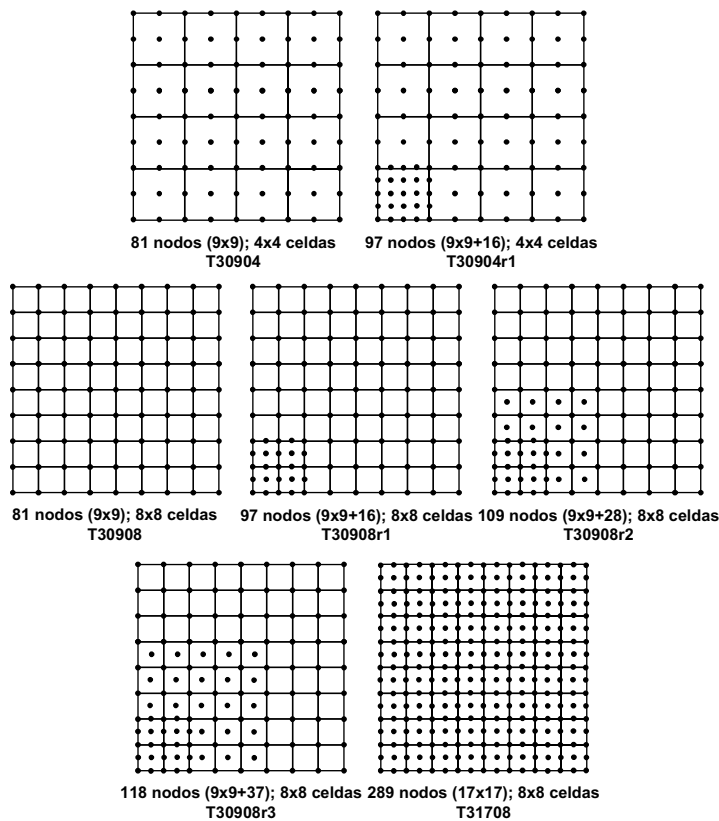


Figura 8. Mallados empleados

Modelo	Orden de integración	Error (%)		Índice de efectividad
		Exacto	Aproximado	
Nodos $9 \times 9$ Celdas $4 \times 4$ rinf = 0, 2	4	25,3491	32,1397	1,4117
	5	26,8721	39,0075	1,6115
	6	27,8113	30,7500	1,2268
	7	28,1217	32,4962	1,2830
	8	28,1638	36,0590	1,4218
	9	28,1618	32,2483	1,2716
	10	28,1756	32,6562	1,2872
Nodos $9 \times 9$ Celdas $8 \times 8$ rinf = 0, 2	4	27,7014	31,3270	1,2552
	5	28,1307	30,7002	1,2118
	6	28,1595	32,3730	1,2766
	7	28,1762	30,6916	1,2098
	8	28,1637	32,7349	1,2909
	9	28,1664	30,9184	1,2191
	10	28,1651	32,9076	1,2977
Nodos ( $17 \times 17$ ) Celdas $8 \times 8$ rinf = 0, 1	4	14,3961	23,8344	1,7385
	5	14,7224	28,6029	2,0402
	6	15,0863	22,7652	1,5851
	7	15,1121	24,1418	1,6785
	8	15,1048	26,5639	1,8479
	9	15,1023	23,8819	1,6615
	10	15,1105	24,2553	1,6867

**Tabla VI.** Comparación de errores

A continuación se han llevado a cabo una serie consecutiva de estudios con modelos sucesivamente más refinados, con el fin de evaluar el comportamiento del indicador. La Figura 8 muestra los distintos mallados empleados. En todos los casos se han empleado funciones de peso *spline* cuártica y radio variable. Para referirse a cada caso se les ha asignado un código que indica el grado de refinamiento del modelo (Figura 8). En todos ellos se ha empleado un radio variable y función de peso *spline* cuártica. Los resultados generales se muestran en la Tabla VII. La siguiente Tabla VIII corresponde al modelo de 118 nodos. Las Figuras 9 a 15 muestran los errores relativos exacto y aproximado en la energía de cada uno de los modelos para cada celda de integración.

Modelo		Error (%)				Índice de efectividad
Nodos	Celdas	En $\mathbf{u}$	En $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}$ y $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}$	En la energía		
				Exacto	Aprox.	
81 ( $9 \times 9$ )	$4 \times 4$	0,4489	7,1139	35,7164	37,5526	1,1905
97 ( $9 \times 9 + 16$ )	$4 \times 4$	2,5535	5,2343	46,1488	55,9473	1,3405
81 ( $9 \times 9$ )	$8 \times 8$	0,3706	7,1157	41,9328	47,0869	1,2834
97 ( $9 \times 9 + 16$ )	$8 \times 8$	0,4014	4,8910	23,8721	29,6375	1,3196
109 ( $9 \times 9 + 28$ )	$8 \times 8$	0,2665	4,5967	21,8715	28,8199	1,3977
118 ( $9 \times 9 + 37$ )	$8 \times 8$	0,2603	4,4176	21,7182	28,6888	1,3210
289 ( $17 \times 17$ )	$16 \times 16$	0,1269	2,8251	22,7767	28,7229	1,3412

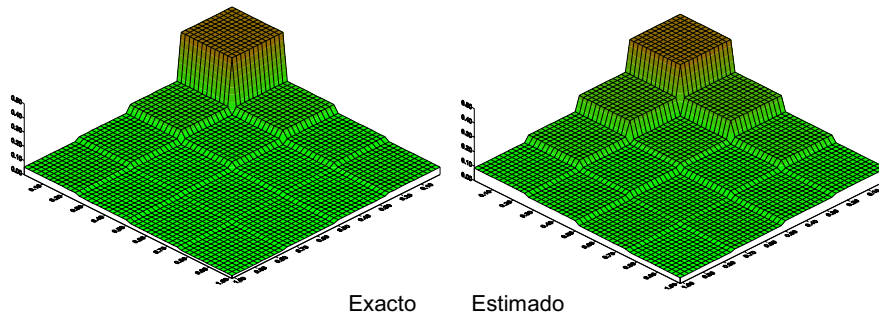
**Tabla VII.** Comparación de errores de los distintos modelos refinados; radio variable 4 nodos; O.I.  $4 \times 4$

Celda N°	Exacto	Estimado	Celda N°	Exacto	Estimado
1	30,5552	37,2677	33	9,5697	11,8855
2	10,7724	20,5471	34	7,9509	11,7392
3	13,2135	21,4845	35	6,0015	9,4920
4	12,2370	16,3743	36	5,0773	7,9830
5	9,5697	11,8855	37	6,2308	8,0693
6	18,3508	20,7830	38	10,3016	14,5061
7	6,0034	9,2398	39	3,9716	7,3741
8	5,2363	6,8589	40	3,6363	6,6689
9	10,7724	20,5471	41	18,3508	20,7830
10	5,1505	10,8032	42	17,3535	20,4013
11	12,9108	18,5707	43	15,3187	18,6273
12	9,1046	14,0867	44	13,3161	16,9466
13	7,9509	11,7392	45	10,3016	14,5061
14	17,3535	20,4013	46	4,5196	9,3919
15	5,5036	10,1862	47	3,6067	6,7826
16	4,9148	7,9729	48	3,2936	6,2160
17	13,2135	21,4845	49	6,0034	9,2398
18	12,9108	18,5707	50	5,5036	10,1862
19	9,6811	14,5959	51	4,9288	9,3119
20	5,7886	11,5390	52	4,3685	8,2569
21	6,0015	9,4920	53	3,9716	7,3741
22	15,3187	18,6273	54	3,6067	6,7826
23	4,9288	9,3119	55	3,1740	6,0966
24	4,4823	7,5804	56	3,0174	5,7802
25	12,2370	16,3743	57	5,2363	6,8589
26	9,1046	14,0867	58	4,9148	7,9729
27	5,7886	11,5390	59	4,4823	7,5804
28	4,5883	9,5640	60	4,0350	7,1211
29	5,0773	7,9830	61	3,6363	6,6689
30	13,3161	16,9466	62	3,2936	6,2160
31	4,3685	8,2569	63	3,0174	5,7802
32	4,0350	7,1211	64	2,7322	5,5010

**Tabla VIII.** T3; 118 nodos ( $9 \times 9 + 37$ );  $8 \times 8$  celdas. Errores en cada celda

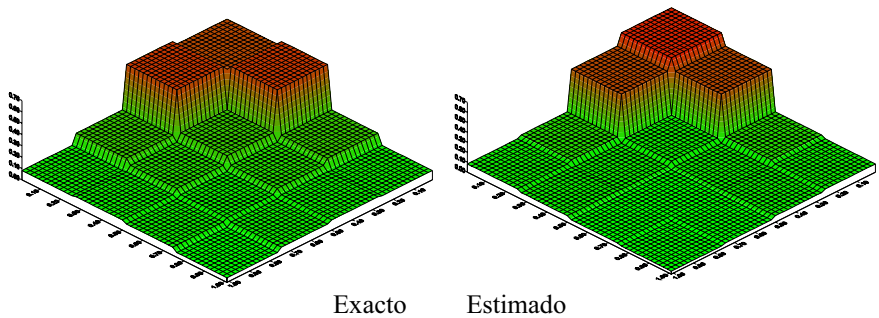
Aunque se han mostrado todos los resultados e ilustraciones de manera consecutiva, los sucesivos refinados han sido escogidos sobre la base de los resultados obtenidos en los modelos previos haciendo uso del indicador del error.

El modelo T30904, como se puede observar, tiene una distribuci3n del error en la energ3a en el dominio muy irregular. En especial, como se puede observar en la Figura 9, la primera celda acumula casi todo el error. Este resultado era l3gicamente esperable al encontrarse una singularidad en los gradientes en el origen de coordenadas. Sin embargo, el objetivo es distribuir el error m3s homog3neamente en todo el dominio, lo que permitir3 obtener unos mejores resultados en los gradientes.



**Figura 9.** T3; 81 nodos ( $9 \times 9$ );  $4 \times 4$  celdas. Errores en cada celda

Las conclusiones anteriores conducen a refinar dicha celda, seg3n el modelo T30904r1, aunque los resultados no son lo suficiente satisfactorios que se esperaban. Los errores son muy altos y se propaga el error a las celdas adyacentes sin disminuir, e incluso aumentar, el error en la primera celda (Figura 10). El motivo es que el modelo obtenido tiene una densidad de nodos muy irregular en el dominio y la transici3n entre diferentes densidades se hace de manera abrupta de una celda a otra. La soluci3n pasa por a3adir nodos en los alrededores de la celda n3mero 1. Pero debido al reducido n3mero de celdas del modelo presente se ha optado por refinar las celdas como paso previo a otro aumento del n3mero de nodos.



**Figura 10.** T3; 97 nodos ( $9 \times 9 + 16$ );  $4 \times 4$  celdas. Errores en cada celda

Surgen as3 los modelos T30908 y T30908r1 similares a los dos anteriores pero con 64 celdas. Los resultados obtenidos, aunque mejores que en los modelos T30904 y T30904r1, conducen a similares conclusiones. Como se deseaba, el indicador en todo el dominio ha disminuido, bajando dr3sticamente en la celda n3mero 1, aunque l3gicamente aumentado ligeramente en las adyacentes a esta (Figuras 11 y 12). Sin embargo, lo m3s interesante es que las celdas que aumentan en mayor medida el error son las que podr3amos denominar segundo anillo, es decir las m3s cercanas a la zona refinada. Es por tanto necesario establecer una transici3n nodal m3s suave.

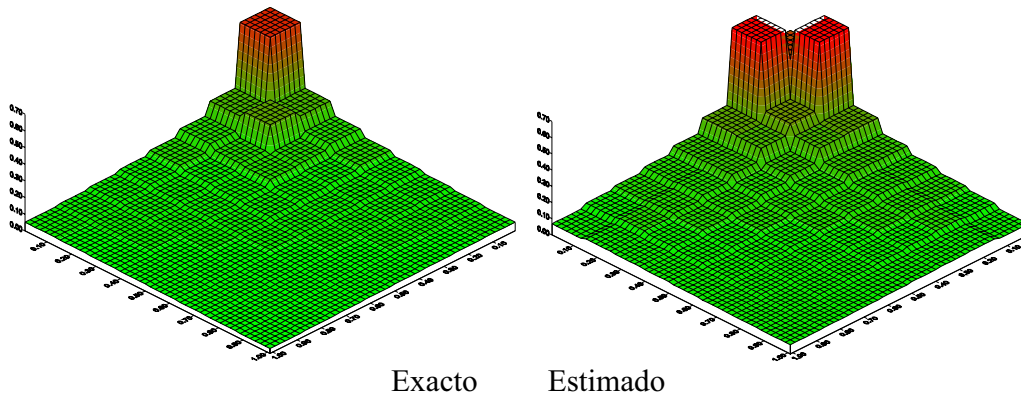


Figura 11. 3; 81 nodos ( $9 \times 9$ );  $8 \times 8$  celdas. Errores en cada celda

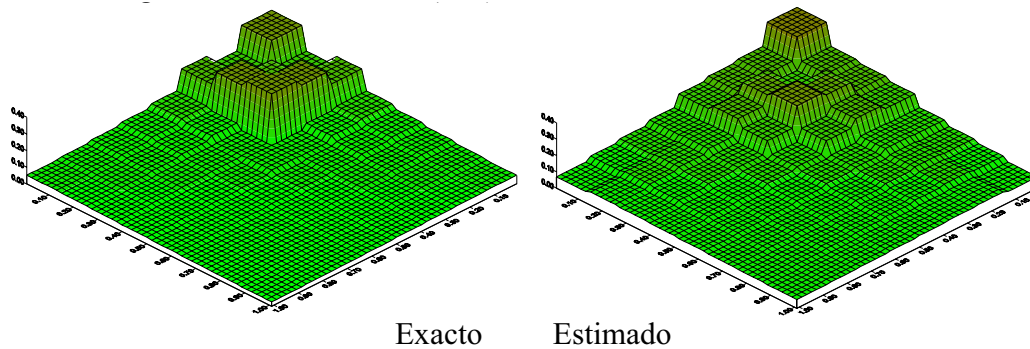


Figura 12. T3; 97 nodos ( $9 \times 9 + 16$ );  $8 \times 8$  celdas. Errores en cada celda

En el modelo T30908r2 se ha añadido un nodo en el centro de las celdas de los anillos tercero y cuarto. El resultado mejora considerablemente. Los errores en la función son mucho mejores que en el modelo anterior y en los gradientes bajan ligeramente. La estimación disminuye en el dominio y se homogeneiza sin aumentar en los cuatro primeros anillos (Figura 13). Como en el caso anterior el que más aumenta es el quinto porque es donde se produce el salto en la densidad nodal.

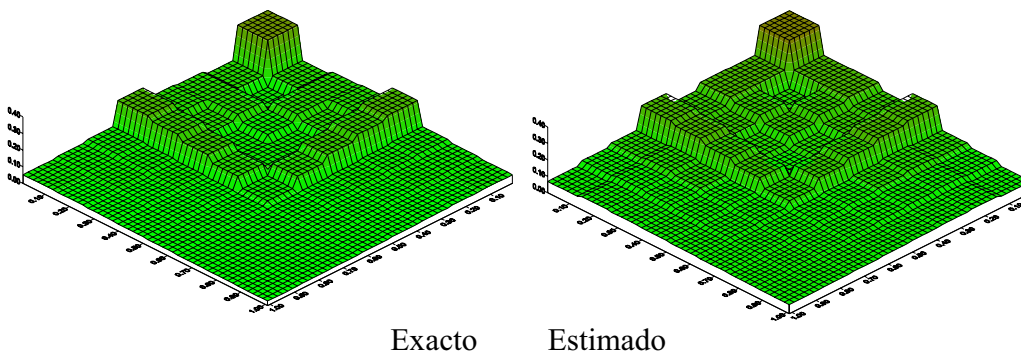


Figura 13. T3; 109 nodos ( $9 \times 9 + 28$ );  $8 \times 8$  celdas. Errores en cada celda

Como consecuencia se refina una hilera más de celdas. Con el modelo T30908r3 se mejoran un poco los errores, aunque los resultados son muy parecidos (Figura 14).

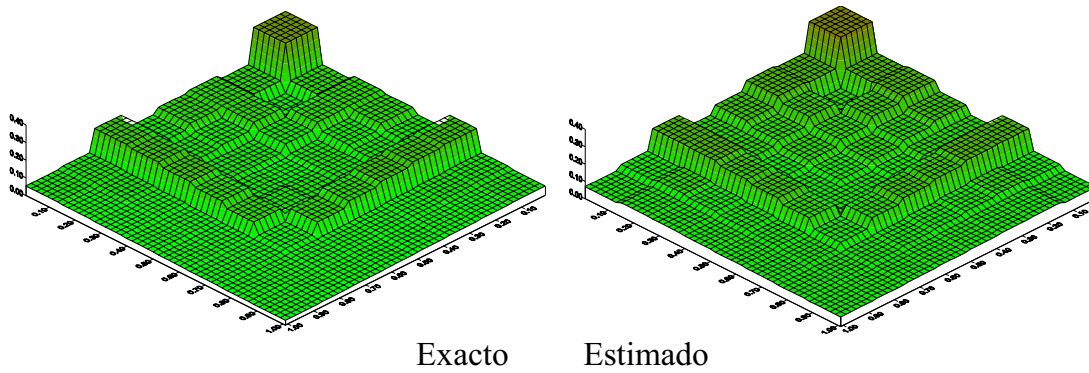


Figura 14. T3; 118 nodos ( $9 \times 9 + 37$ );  $8 \times 8$  celdas. Errores en cada celda

L3gicamente un refinado uniforme como el del modelo T31708 produce unos resultados mejores (Figura 15). Sin embargo, el aumento computacional es elevado (289 nodos frente a 118) y los resultados no son ya mucho mejores que en el modelo T30908r3.

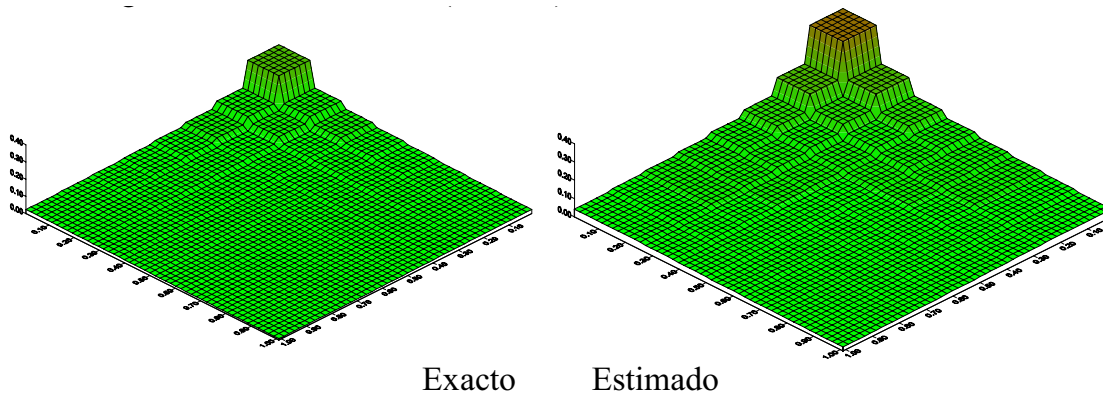


Figura 15. T3; 289 nodos ( $17 \times 17$ );  $8 \times 8$  celdas. Errores en cada celda

Como se ha podido observar, el indicador del error propuesto es una herramienta sencilla y de gran utilidad a la hora de decidir sucesivos refinados.

## CONCLUSIONES

En primer lugar, si se aplica penalizaci3n para el tratamiento de la condici3n de contorno esencial, se ha podido comprobar en el m3todo EFG, empleando la ecuaci3n de Laplace, la utilizaci3n del m3todo de penalizaci3n es ventajosa para la imposici3n de las condiciones de contorno esenciales por la gran precisi3n obtenida en todos los casos estudiados.

La funci3n de peso escogida es un factor importante en la aplicaci3n de las condiciones de contorno por el m3todo de penalizaci3n. En este sentido la utilizaci3n de funciones tipo *spline* cu3rtica y *spline* c3bica para la ponderaci3n ha resultado muy adecuada e incluso ventajosa frente a las exponenciales tipo Gauss.

El m3todo de penalizaci3n no varía para un amplio rango del coeficiente de penalizaci3n y es adem3s muy estable para el cambio del n3mero de puntos de integraci3n num3rica.

Otro par3metro decisivo a la hora de emplear funciones de peso es la elecci3n de un radio de influencia adecuado que ha de ser tan peque1o como sea posible con el fin de garantizar que la funci3n aproximadora est3 muy cerca de la interpolaci3n, pero que tambi3n permita un peque1o solapamiento entre funciones de forma de puntos pr3ximos.

A su vez y para garantizar radios de influencia pequeños en zonas con densidades de puntos diferentes, se ha empleado también radio variable con muy buenos resultados. En ese caso tampoco es conveniente forzar la interpolación exacta empleando el mismo número de puntos que el de los términos del polinomio aproximador. Se recomienda emplear al menos un punto más y medir el error global de interpolación, tal y como se ha propuesto en este trabajo.

Como se ha visto, el método ha sido ensayado con éxito en dominios complejos y con nubes de puntos irregularmente distribuidos, empleándose mallas de integración que combinan triángulos y cuadriláteros.

En segundo lugar se ha propuesto un método sencillo de aproximación del error. Dicho método no puede considerarse un estimador real del error, tal como los empleados en el MEF, pero sí es una primera aproximación sencilla de gran utilidad. El método es aplicable a dominios arbitrarios, eliminando problemas de mallado. Los cambios y mejoras del modelo se realizan simplemente añadiendo nodos donde sea necesario, pero teniendo en cuenta dos importantes cuestiones:

- a) Puesto que los mejores resultados se obtienen con mallados con densidades de nodos uniformes, es recomendable realizar una transición suave desde la zona donde ha sido necesario refinar al resto del modelo, creando una zona de densidad nodal decreciente.
- b) Es igualmente aconsejable mantener una proporcionalidad entre el número de nodos y celdas y no conservar la estructura inicial de celdas de integración si se ha refinado fuertemente en una zona determinada.

## REFERENCIAS

- 1 B. Nayroles, G. Touzot y P. Villon, "Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements", *Computational Mechanics*, Vol. **10**, pp. 307–318, (1992).
- 2 T. Belytschko, Y.Y. Lu y L.Gu, "Element-free Galerkin methods", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **37**, pp. 229–256, (1994).
- 3 Y.Y. Lu, T. Belytschko y L. Gu, "A new implementation of the element-free Galerkin method", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **113**, pp. 397–414, (1994).
- 4 W. K. Liu, S. Jun, S. Li, J. Adee y T. Belytschko, "Reproducing kernel particle methods for structural dynamics", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **38**, pp. 1655–1679, (1995).
- 5 A. Duarte y J.T.Oden, " $H - P$  cloud-an  $h - p$  meshless method", *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Vol. **12**, pp. 673–705, (1996).
- 6 E. Oñate, S. Idelsohn, O.C. Zienkiewicz y R.L. Taylor, "A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **39**, pp. 3839–3866, (1996).
- 7 P. Lancaster y K. Salkauskas, "Surfaces generated by moving least squares methods", *Math. Comput.*, Vol. **37**, pp. 141–158, (1981).
- 8 S. Falcón, L. Gavete y A. Ruiz, "A model to simulate the mining subsidence problem: coding and implementation of the algorithm", *Computers & Geosciences*, Vol. **22**, pp. 897–906, (1996).
- 9 I. Babuška y J.M. Melenk, "The partition of unity method", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **40**, pp. 727–758, (1997).
- 10 Y. Krongauz y T. Belytschko, "A Petrov-Galerkin diffuse element method (PG DEM) and its comparison to EFG", *Computational Mechanics*, Vol. **19**, pp. 327–333, (1997).

- 11 Y.X. Mukherjee y S. Mukherjee, "On boundary conditions in the element-free Galerkin method", *Computational Mechanics*, Vol. **19**, pp. 264–270, (1997).
- 12 A. Duarte y J.T. Oden, "An  $h-p$  adaptive method using clouds", TICAM report 96–07, (1996).
- 13 J. Gosz y W.K. Liu, "Admissible approximations for essential boundary conditions in the reproducing kernel particle method", *Computational Mechanics*, Vol. **19**, pp. 120–135, (1996).
- 14 F.C. Günther y W.K. Liu, "Implementation of boundary conditions for meshless methods", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **163**, N° 1–4, pp. 205–230, (1998).
- 15 O.C. Zienkiewicz, "Constrained variational principles and penalty function methods in the finite element analysis", *Lecture Notes in Mathematics*, N° **363**, pp. 207–214, Springer-Verlag, (1974).
- 16 S. Falcón de Andrés, "Desarrollo de nuevos métodos de aproximación y su aplicación al método de Galerkin. Cálculo del error, mejoras y aplicaciones", Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, (1999).
- 17 E. Oñate, "Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos. Analisis estático lineal", CIMNE, (1992).
- 18 P. Díez Mejía, "Un nuevo estimador de error para el método de los elementos finitos", Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Barcelona, (1996).
- 19 A. Huerta, P. Díez y J.J. Egozcue, "An a-posteriori error estimator for classical linear and non linear finite elements", *Numerical Methods in Engineering' 96 ECCOMAS Conferences*, pp. 277–283, John Wiley and Sons, Paris, (1996).
- 20 O.C. Zienkiewicz y J.Z. Zhu, "The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **33**, pp. 1331–1364, (1992).
- 21 J. Orkisz, "Meshless finite difference method II. Adaptative approach", *Computation Mechanics*, S. Idelsohn, E. Oñate y E. Dvorkin (Eds.), CIMNE, (1998).
- 22 T. Laouar y P. Villon, "Adaptative analysis for the diffuse element method", *Computational Mechanics*, S. Idelsohn, E. Oñate y E. Dvorkin (Eds.), CIMNE, (1998).
- 23 T. Blacker y T. Belytschko, "Superconvergent patch recovery with equilibrium and conjoint interrpolant enhancements", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **37**, pp. 517–536, (1994).
- 24 L. Gavete, S. Falcón y A. Ruiz, "Some results on the diffuse approximation using Galerkin method", *II ECCOMAS Conference on Numerical Methods in Engineering, ECCOMAS'96*, John Wiley and Sons, Ltd. pp. 499–505, Paris, September, (1996).
- 25 W.K. Liu, S. Li y T. Belytschko, "Reproducing least square kernel Galerkin method. I. Methodology and convergence", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, (a ser publicado).