

DETECCIÓN DE DAÑO USANDO TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONDUCCIÓN

Jhon Jairo Gil Peláez¹, Frederick A. Just-Agosto², David Serrano², Basir Shafiq³

Resumen: En esta investigación estudia la factibilidad de aplicar un método térmico para detectar daños en materiales compuestos, en el cual se usan los cambios mostrados en la conductividad térmica, k , del material como criterio para localizar las imperfecciones o anomalías que en un compuesto. Usando el método de elementos finitos se modelaron barras sometidas a transferencia de calor por conducción unidimensional. Un problema de autovalores es desarrollado a partir de las ecuaciones diferenciales del modelo y se muestran las características de convexidad de su interpretación geométrica. Es mostrado gráficamente cómo un envolvente convexo se convierte en un subconjunto de un nuevo envolvente convexo, obtenido al cambiar la conductividad térmica en el modelo, para representar el daño. Se realizó un escenario experimental de daño en un espécimen de aluminio y se comparó con los escenarios de daño simulados usando ALGOR, mediante una norma euclidiana. La localización del daño fue lograda favorablemente y la anomalía pudo representarse como una reducción en la conductividad térmica del 25%. Se realizó una prueba cualitativa en material compuesto – carbón, y los resultados mostraron la aplicabilidad del método.

DAMAGE DETECTION USING TRANSIENT CONDUCTIVE HEAT TRANSFER

Abstract: The feasibility of developing a transient damage detection scheme based on the convexity of the eigenvalue problem in conductive heat transfer in a composite material is investigated. Damage which can come from imperfections, direct contact or abnormalities, is modeled as a reduction in the thermal conductivity of the material. A one dimensional conductive heat transfer model for a composite and aluminum bar was developed using the finite element method. Here the eigenvalue problem (EVP) was formulated and the convex characteristics are demonstrated by examining the EVP's geometric interpretation before and after damage implemented in the bars. As damage occurs, a new convex hull is formed ensuring unique transient damage scenario responses. With this a mind, an Euclidian norm was developed as a detection method. Finite element modeling was used on one bar to establish the various damage scenarios that are then compared with experimental results to demonstrate its applicability. Actual physical damage was interpreted as a twenty five percent reduction in the thermal conductivity of a particular element corresponding to the actual location of the damage.

INTRODUCCIÓN

La inspección de infraestructura civil construida con materiales compuestos ha motivado que muchos investigadores en diferentes campos de la ingeniería estructural desarrollen herramientas de evaluación no destructiva, destinadas a asegurar la integridad física de estos componentes. Estos sistemas incluyen varios métodos de detección de daños, tales como la inspección visual, radiografía, corrientes de Eddy, rastreo ultrasónico, termografía infrarroja y análisis ópticos entre otros. Cada una de estas técnicas tienen características propias que las hacen particularmente más ventajosas para ciertas aplicaciones con respecto a otras.

Métodos termográficos han sido estudiados para ser usados como sistemas de inspección en estructuras de materiales compuestos. El método de imaginado infrarrojo ofrece muchas ventajas para aplicaciones de inspección de campo en adición a la excelente sensibilidad mostrada (Jones y Berger, 1992). La base de la inspección con infrarrojo cuenta con el hecho de que una aplicación de calor sobre una superficie del material en inspección podría resultar en cambios de la temperatura superficial. En 1994 Kaiser demostró que la onda milimétrica es aplicable para calentamiento de componentes hechos de CFRP (Carbon-Fiber Reinforced Polymer) para lograr una evaluación termográfica. Una

¹ Estudiante Graduado, Universidad de Puerto Rico, Departamento de Ingeniería Civil, Mayagüez, PR 00681-9041.

² Universidad de Puerto Rico, Departamento de Ingeniería Mecánica, Mayagüez, PR 00680-9045.

³ Universidad de Puerto Rico, Departamento de Ingeniería General; Mayagüez, PR 00681-9044.

comparación directa de las imágenes obtenidas por fototermal y fotoacústica por diferentes métodos fue realizada por Zhang *et al.* en 1994, considerando daños superficiales producidos por indentadores y por diferentes técnicas de maquinado. Osiander *et al.* realizaron una evaluación no destructiva usando fuentes de microondas en 1995. Una investigación de la habilidad de la técnica de imagen termográfica para detectar defectos creados artificialmente de varios diámetros y profundidades fue realizada en 1996 por Roth. Se estudiaron sistemas de CMC (Ceramic Matrix Composite), MMC (Matrix Metal Composite) y PMC (Polymer Matrix Composites), que son compuestos de interés como materiales estructurales de alta temperatura. La habilidad de la termografía para detectar daños por impacto en materiales CFRP, con espesores desde 3.44 a 13.76 mm, fue demostrada por Ball y Almond en 1997. Shih *et al.* (2000) investigaron la posibilidad de detectar daños en un espécimen de concreto usando imágenes termales, basándose en las características del flujo de calor, en un medio conductivo de geometría específica. Varios anchos de grieta, representando daños mecánicos, fueron introducidos bajo condiciones de laboratorio controladas en el espécimen. En todos los casos, las grietas fueron satisfactoriamente localizadas.

Técnicas espectroscópicas tales como LIF (Laser Induced Fluorescent), proporcionan un método atractivo para detectar daños por calor, los cuales aparecen en una escala molecular en PMCs. Fisher *et al.* (1995) utilizaron LIF para realizar una inspección no destructiva en un compuesto de grafito-epoxy con daño por calor.

Dada su creciente importancia se propuso estudiar la factibilidad de un método alternativo para detectar daños en materiales compuestos, en el cual, a diferencia de otros métodos se usaron los cambios mostrados en la conductividad térmica, k , del material como criterio para localizar las imperfecciones o anomalías que existían en el compuesto. La solución de la ecuación diferencial que gobierna el fenómeno de transferencia calor unidimensional en una barra fue desarrollada empleando el método de elementos finitos. Se empleó la respuesta de la temperatura en estado transitorio. Los daños o anomalías fueron representados como cambios en la conductividad térmica del material. En el estudio se utilizaron dos especímenes, uno hecho de Aluminio y otro de Compuesto – Grafito. El método propuesto para detectar daños en un espécimen es validado usando la interpretación geométrica del problema de autovalores para dos y tres dimensiones. Una detección de un daño real, creado en el espécimen, fue realizada comparando el escenario de daño experimental con los escenarios de daño generados al variar la conductividad térmica del material en el modelo de elementos finitos.

MODELADO

La transferencia de calor, la cual puede definirse como la transmisión de energía de una región a otra, como resultado de una diferencia de temperatura, ha sido objeto de estudio debido a su presencia en las diversas aplicaciones relacionadas con energía. La conducción y la radiación térmica representan dos mecanismos fundamentales por los cuales ocurre transferencia de calor. En el primero la transferencia de calor se realiza a través del material, sin flujo neto de masa, mientras que en el segundo los cuerpos están separados en el espacio y el cambio de energía térmica obedece a las leyes de electromagnetismo. La transferencia de calor por conducción desde una superficie sólida a un fluido en movimiento es conocida como transferencia de calor por convección. Este trabajo se centrará en la transferencia de calor por conducción.

Transferencia de calor por conducción

Empleando el balance de energía y la ley de Fourier para conducción se puede encontrar la ecuación diferencial que describe la transferencia de calor por conducción dentro de un medio en sistemas inestables, (Haberman, 1998)

$$c \rho A \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(kA \frac{\partial T}{\partial x} \right) - p\beta(T - T_{\infty}) + AQ \quad (1)$$

donde:

c : Calor específico, J / kg °C

ρ : Densidad, kg/m³

A : Área transversal, m²

k : Conductividad térmica, W/m °C

T : Temperatura, función de la posición y el tiempo, °C

T_{∞} : Es la temperatura del fluido, °C

p : Perímetro de la sección transversal, m

β : Es el coeficiente de transferencia de calor por convección, W/ m² °C

t : Tiempo, Seg.

Q : Energía generada por unidad de volumen por unidad de tiempo, W/m³ seg

Se asume que todas las propiedades del medio son homogéneas e isotrópicas.

El método más común usado para resolver la ecuación diferencial parcial de los problemas de transferencia de calor es el de separación de variables. Sin embargo, otras técnicas de aproximación numérica, como el Método de Elementos Finitos, MEF, y el Método de Diferencias Finitas, MDF, son igualmente usados. En este trabajo se usará el MEF para dar una aproximación al modelo matemático de la ecuación (1).

Solución usando el Método de los Elementos Finitos (MEF)

El MEF es una técnica para aproximar la solución de un modelo matemático. La característica más distintiva de este método es la división de un dominio dado en un conjunto de subdominios llamados elementos finitos. Esto permite obtener una construcción sistemática de las funciones de aproximación de cada subdominio, para posteriormente obtener la solución al dominio total del problema. Cuando se usa el MEF para modelar una barra unidimensional sometida a conducción, el dominio del problema $\Omega = (0, L)$, consistente de todos los puntos de la barra entre $x = 0$ y $x = L$ se divide en un conjunto de elementos de línea, de longitud h_e (elemento finito), Figura 1. Un elemento típico se muestra en la Figura 2 con dominio $\Omega_e = (x_1^e, x_2^e)$ y longitud h_e , donde el subíndice e en Ω y h se usa para referirse a un elemento arbitrario e . En la notación x_1^e y x_2^e el superíndice, e , denota al elemento y el subíndice, 1 o 2, hace referencia al nodo uno o dos respectivamente. x_i^e es la coordenada global del nodo i del elemento e .

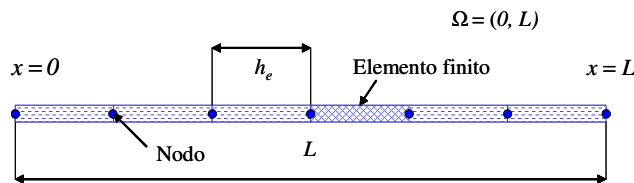


Figura 1: Barra discretizada en elementos finitos.

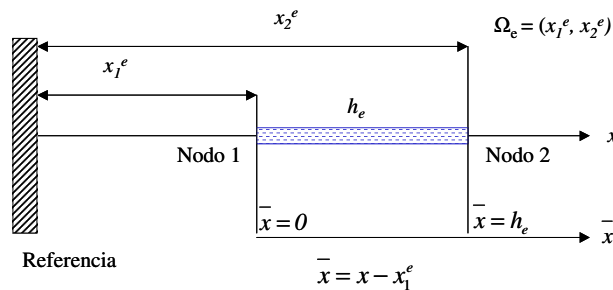


Figura 2: Elemento típico para un problema de transferencia de calor por conducción unidimensional.

x coordenada global y \bar{x} coordenada local.

La resolución de un problema por elementos finitos requiere de una formulación integral. Para ello se multiplica la ecuación diferencial gobernante (1) (considerando que no hay fuentes de calor) por una función de peso w y se integra por partes sobre un elemento típico. Así se obtiene la forma débil en la forma

$$\int_{x_1^e}^{x_2^e} w c \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx + \int_{x_1^e}^{x_2^e} k A \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} dx + \int_{x_1^e}^{x_2^e} w p \beta T dx - \int_{x_1^e}^{x_2^e} w p \beta T_{\infty} dx - \sum_{j=1}^2 w(x_j^e) Q_j^e = 0 \quad (2)$$

Se puede suponer que T se interpola con un polinomio de grado uno, $U^e = c_1 x + c_2$, expresado en la forma

$$T(x, t) \approx U^e(x, t) = \sum_{j=1}^2 T_j^e(t) \psi_j^e(x) \quad (3)$$

Para obtener las expresiones de ψ_j^e , se usa el hecho de que $U^e(x_1^e, t) = T_1^e(t)$ y $U^e(x_2^e, t) = T_2^e(t)$ en la expresión para U^e (Gil, 2002). Seleccionando la coordenada local \bar{x} con el origen fijo en el nodo uno del elemento, se obtienen las siguientes dos expresiones:

$$\psi_1^e(\bar{x}) = 1 - \frac{\bar{x}}{h_e}, \quad \psi_2^e(\bar{x}) = \frac{\bar{x}}{h_e} \quad (4)$$

Substituyendo ψ_1^e y ψ_2^e para w y la ecuación (3) en la forma débil (2), se obtienen dos ecuaciones algebraicas, las cuales se pueden escribir en una sola de la siguiente manera:

$$\sum_{j=1}^2 \left[\int_{x_1^e}^{x_2^e} c p A \psi_i^e \psi_j^e d\bar{x} \frac{dT_j^e}{dt} + \int_{x_1^e}^{x_2^e} k A \frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} \cdot \frac{d\psi_j^e}{dx} d\bar{x} T_j^e + \int_{x_1^e}^{x_2^e} p \beta \psi_i^e \psi_j^e d\bar{x} T_j^e \right] - \int_{x_1^e}^{x_2^e} \psi_i^e p \beta T_\infty d\bar{x} - Q_i^e = 0$$

Evaluando las integrales y reorganizando los términos se obtienen las ecuaciones del modelo de elementos finitos que puede ser escrito usando la notación matricial de la siguiente manera:

$$[M^e] \{\dot{T}^e\} + [K^e] \{T^e\} = \{F^e\} \quad (5)$$

Las matrices M^e y K^e se conocen como matriz de masa y matriz de conductividad del elemento e respectivamente y F^e se conoce como vector de calor. Los valores obtenidos para las componentes de las matrices son los siguientes:

$$\frac{c p A h_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{T}_1^e \\ \dot{T}_2^e \end{Bmatrix} + \left[\frac{k A}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{p \beta h_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} T_1^e \\ T_2^e \end{Bmatrix} = \frac{p \beta T_\infty h_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^e \\ Q_2^e \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Adicionalmente se observa que $m_{ij} = m_{ji}$ y $k_{ij} = k_{ji}$ es decir, las matrices M^e y K^e son simétricas.

En la derivación de estas ecuaciones, se aisló un elemento típico e de la malla que representa el dominio total del problema. Ahora para resolver el problema total es necesario llevar a su posición original cada elemento, lo cual se logra haciendo uso de la continuidad existente entre los nodos conectados. Asumiendo que los elementos se conectan en secuencia se pueden escribir las dos condiciones siguientes:

$$T_2^e = T_1^{e+1} = T_{e+1}$$

$$Q_2^e + Q_1^{e+1} = \begin{cases} 0 & \text{Si no se aplica una fuente externa de calor} \\ Q_o & \text{Si se aplica una fuente externa de calor, } Q_o \end{cases}$$

Una condición de daño es simulada en este trabajo como una reducción en la conductividad térmica del material en dicha región, es decir, se supone que la presencia de una anomalía o delaminación en el material disminuirá el flujo de calor y en consecuencia se presentarán variaciones en la temperatura. El modelo alcanzado con el MEF puede ser empleado para modelar un daño en la barra. El daño puede representarse como σk donde σ es un factor para caracterizar el daño y su valor está entre cero y uno. Si $\sigma = 1$ entonces ha ocurrido 0% de daño en la barra representada por el elemento finito. Si $\sigma = 0.90$ implica que hay un daño de 10% de reducción en la conductividad térmica. Puesto

que el daño se representa como una reducción de la conductividad térmica, la matriz de conductividad dada por (7) se transformará en:

$$\sigma[K] = \sigma \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

A manera de ilustración la Figura 3 muestra como cambia la temperatura cuando varía la conductividad térmica. Las gráficas fueron obtenidas examinando varias reducciones de la conductividad térmica en las soluciones obtenidas con el MEF para un modelo simple, una barra aislada en la superficie y en un extremo y sometida a convección en el otro. Estas gráficas muestran como predecir un daño por cambios en la temperatura. Sin embargo, los resultados no dependen de la localización del daño, lo que implica que la grieta o daño podría estar en cualquier lugar de la barra. Empleando un solo elemento finito para representar la barra, el modelo predice una reducción global en la conductividad térmica cuando se presenta un daño. De modo que no es posible localizar el daño, lo que es muy importante en un esquema de detección de daño. Sin embargo, esta dificultad puede ser aminorada usando un modelo con más elementos finitos.

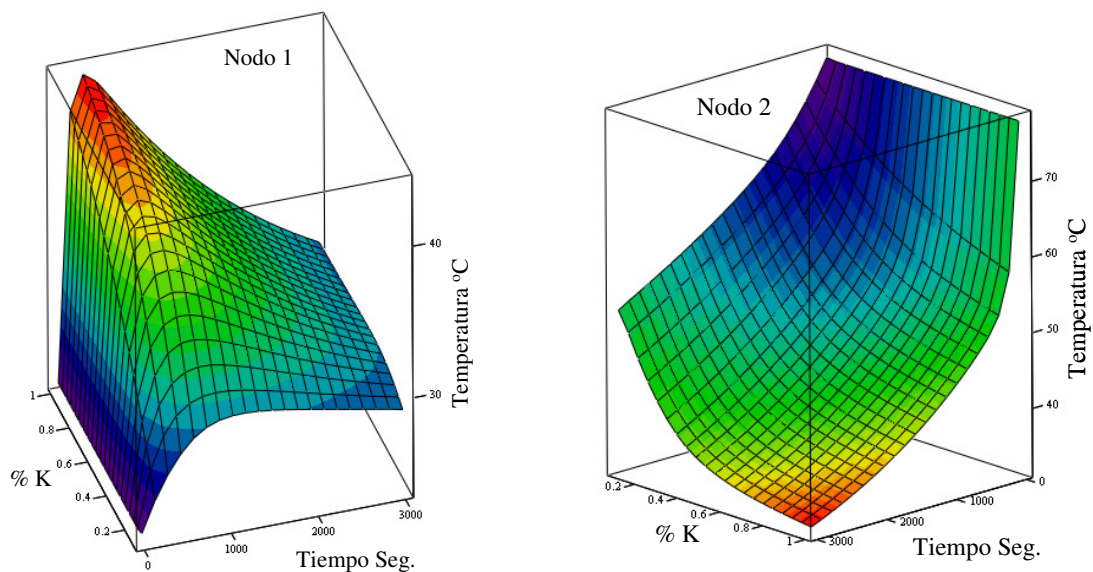


Figura 3: Variación de la temperatura con respecto al tiempo y al porcentaje de reducción en la conductividad térmica del material. (a) Distribución para el primer nodo, sometido a convección. (b) Distribución para el segundo nodo, aislado.

Modelo usando Dos Elementos Finitos

Cuando se consideran varios elementos en la discretización del dominio de la barra, la metodología de multiplicar la matriz de conductividad por un factor σ se puede aplicar a cada elemento, es decir, se puede introducir un factor a la matriz de conductividad local de los elementos. De esta manera, será posible representar un daño en cada parte de la barra asociada a cada elemento.

El modelo de una barra discretizada en dos elementos puede desarrollarse usando la aproximación de elementos finitos similar a la de un elemento. Una descripción de este modelo de elementos finitos está dada por:

$$\begin{bmatrix} M_{11}^1 & M_{12}^1 & 0 \\ M_{21}^1 & M_{22}^1 + M_{11}^2 & M_{12}^2 \\ 0 & M_{21}^2 & M_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \\ \dot{T}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_1 K_{11}^1 & \sigma_1 K_{12}^1 & 0 \\ \sigma_1 K_{21}^1 & \sigma_1 K_{22}^1 + \sigma_2 K_{11}^2 & \sigma_2 K_{12}^2 \\ 0 & \sigma_2 K_{21}^2 & \sigma_2 K_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 + q_1^2 \\ q_2^2 \end{Bmatrix}$$

donde σ_1 y σ_2 son los factores empleados para reducir la conductividad térmica en los elementos 1 y 2 respectivamente.

Usando las ecuaciones del modelo se pueden representar diferentes condiciones de daño mediante la substitución de valores apropiados en cada parámetro indicador de daño σ_1 y σ_2 . Aplicando las condiciones de frontera y resolviendo las ecuaciones se puede obtener las distribuciones de temperatura en cada nodo, las cuales están asociadas a los valores de conductividad térmica existentes. Cada condición de daño se considera como un escenario de daño.

Puesto que cada escenario de daño exhibe un valor particular para las temperaturas en cada nodo a un tiempo t , esta característica puede ser usada como un medio de identificar el daño y su correspondiente localización. Cuando se emplean dos elementos en el MEF, la presencia de una sola anomalía puede ser asociada a alguno de los dos lados de la barra, sin embargo, esto no da mucha información en cuanto a su localización exacta. Aunque la localización exacta aun no se tiene, es claro que ahora está aislada a alguna de las dos regiones representadas por los elementos finitos 1 y 2. El modelar la barra con un mayor número de elementos reduce la habilidad de examinar gráficamente las temperaturas de los nodos versus los porcentajes de reducción de la conductividad térmica del material.

En general, se puede decir que para una barra representada con n elementos se tendrá para cada instante de tiempo t , un valor para la temperatura en cada nodo, obedeciendo a los valores alcanzados por la conductividad térmica de todos los elementos usados en la discretización. De este modo, se podrán generar escenarios teóricos de daño al reducir la conductividad térmica en algunos de los elementos del modelo. Los valores de temperatura obtenidos pueden ser a su vez asociados a las componentes de un vector en un instante de tiempo t , $V_i(t)$. El vector $V_i(t)$ es representativo de la condición de daño i . Por otro lado, se pueden lograr escenarios de daños experimentales al medir la distribución de temperatura alcanzada en varios especímenes, en las cuales se ha creado artificialmente una anomalía. Un daño se puede simular por medio de una perforación hecha con una barrena o por medio de una reducción de material. Cada condición de daño es considerada como un escenario experimental de daño. Los valores de temperatura tomados experimentalmente en los diferentes puntos del espécimen son usados para crear un vector $W_i(t)$. De esta manera, será posible comparar los vectores obtenidos experimentalmente con los obtenidos usando el MEF. Una norma euclidiana es desarrollada para ayudar a determinar la condición de daño en la barra (Gil 2002).

Método de Aproximación más Cercana

Los escenarios obtenidos experimentalmente y los generados con el modelo de elementos finitos podrán ser localizados geoméricamente en un sistema coordenado cuyos ejes representen las temperaturas en cada punto para un instante de tiempo dado. Se puede utilizar el Método de Aproximación más Cercana para predecir el estado del material, es decir, una vez los puntos an localizan en el sistema coordenado (en caso de tener tres componentes) como muestra la Figura 4, se calcularán las distancias entre el punto experimental y cada uno de los puntos obtenidos con el modelo de elementos finitos para cada condición de daño. Finalmente, se seleccionará el punto obtenido con el modelo de elemento finito más cercano al experimental, lo cual permitirá conocer el estado del espécimen. En general, esta idea puede ser extendida a un caso que considere la temperatura en n -puntos de la barra.

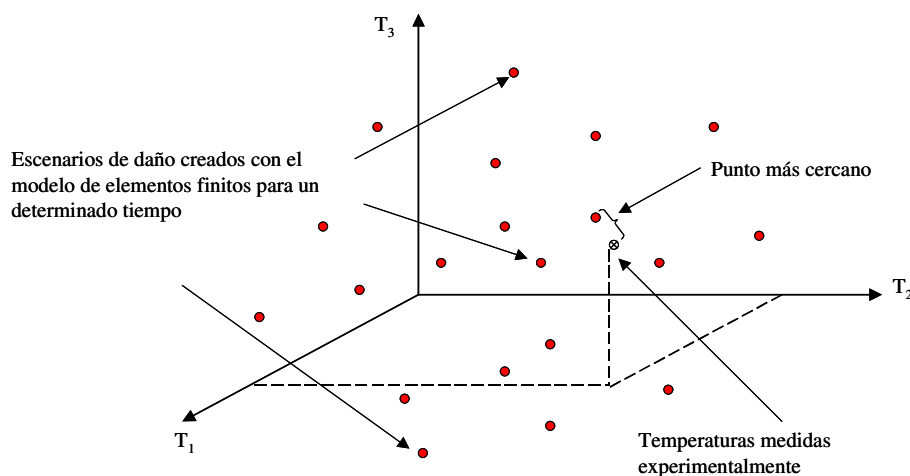


Figura 4: Representación gráfica del esquema de detección de daño para una barra simulada por dos elementos finitos unidimensionales.

PROBLEMA DE AUTOVALORES

El modelo matemático correspondiente al problema considerado en esta investigación pudo ser representado en forma matricial como

$$[M] \{\dot{T}\} + [K]\{T\} = \{F\} \quad (7)$$

El problema homogéneo asociado a la ecuación anterior genera un problema de autovalores de la forma

$$[M] \{\dot{T}\} + [K]\{T\} = 0 \quad (8)$$

Tomando $[M^{1/2}]$ tal que $[M] = [M^{1/2}][M^{1/2}]$ y reemplazando en la ecuación (8) el vector $\{T\} = [M^{-1/2}]\{P\}$ en donde $[M^{-1/2}]$ es la matriz inversa de $[M^{1/2}]$ y $\{P\} = e^{-\lambda t}\{v\}$, siendo λ un escalar positivo y $\{v\}$ un vector constante de dimensión n , la ecuación es modificada, después de realizar alguna álgebra, en la siguiente expresión:

$$[A]\{v\} = \lambda\{v\} \quad (9)$$

donde la matriz $[A]$ está dada por:

$$[A] = [M^{-1/2}][K][M^{-1/2}] \quad (10)$$

La ecuación (9) representa un problema de autovalores escrito en la forma estándar. Los autovalores, λ , se determinan suponiendo soluciones no triviales para el vector $\{v\}$.

La matriz $[K]$ es simétrica y definida positiva, de modo que sus autovalores son positivos. De este modo la matriz $[A]$ de la ecuación (10) resulta ser una matriz simétrica y definida positiva. Cuando se presenta esto, se puede establecer una interpretación geométrica del problema de autovalor correspondiente a la ecuación (8).

Conducción en una Barra - Modelo empleando un solo elemento finito.

Considere el fenómeno de transferencia de calor por conducción en una barra unidimensional, con todas las propiedades asumidas para ser homogéneas e isotrópicas, de longitud h_e , sección transversal constante A_r , con convección superficial y sin generación interna de calor, como se muestra en la Figura 5.

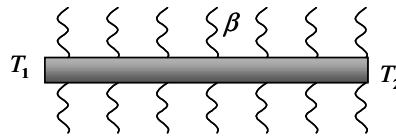


Figura 5: Barra con convección superficial, β .

El modelo de elementos finitos para esta situación se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{c_p \rho A_r h_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \end{Bmatrix} + \left[\frac{k A_r}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{P_e \beta h_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Puesto que los daños pueden ser representados como una reducción en la conductividad térmica del elemento, la ecuación (11) puede modificarse reemplazando k por el producto σk , $0 < \sigma \leq 1$. Así, es posible estudiar el efecto que tiene el daño sobre interpretación geométrica del problema de autovalores.

El problema de autovalores relacionado con el problema homogéneo asociado de la ecuación (11), se expresa en la forma estándar, de acuerdo a las ecuaciones (9) y (10), como sigue:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{8} \frac{P_e \beta h_e^2 + 6 \sigma k A_r}{C_p \rho A_r h_e^2} & \frac{-3}{4} \frac{\sigma k}{C_p \rho h_e^2} \\ \frac{-3}{4} \frac{\sigma k}{C_p \rho h_e^2} & \frac{1}{8} \frac{P_e \beta h_e^2 + 6 \sigma k A_r}{C_p \rho A_r h_e^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

Como se discutió anteriormente, la interpretación geométrica de este problema es equivalente a encontrar los ejes principales de una elipse. Los autovalores y sus respectivos autovectores encontrados para este problema son los siguientes:

$$\lambda_1 = \frac{1}{8} \frac{P_e \beta}{C_p \rho A_r} \quad \bar{x} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{8} \frac{P_e \beta h_e^2 + 12 \sigma k A_r}{C_p \rho A_r h_e^2} \quad \bar{x} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

La ecuación de la elipse puede obtenerse a partir de $\bar{x}^T [A] \bar{x} = 1$ como:

$$\frac{1}{8} \frac{(P_e \beta h_e^2 + 6 \sigma k A_r) x^2 + (P_e \beta h_e^2 + 6 \sigma k A_r) y^2 - 12 x y \sigma k A_r}{C_p \rho A_r h_e^2} = 1 \quad (12)$$

La sustitución de diferentes valores de σ en la ecuación (12) permite simular varios escenarios de daño. Cada condición de daño se representa por una elipse en particular. El comportamiento de las elipses puede estudiarse usando dos formas de la ecuación (12). Una forma corresponde al caso en el cual la barra no presenta ninguna anomalía, $\sigma = 1$. La otra forma podrá representar la barra con una condición de daño. Como se mostró para este caso en particular, todas las elipses tienen la misma orientación en sus ejes principales (independientes de σ) y un eje principal de igual magnitud. El otro eje aumenta de magnitud para cualquier valor de σ por lo que se puede concluir que el efecto del daño sobre la elipse produce un envolvente convexo de la condición sana. De este modo se puede garantizar que las fronteras definidas por las elipses asociadas a cada condición de daño en particular son un envolvente convexo de la condición sana. Así, se puede establecer un esquema de daño usando la propiedad de convexidad y las características geométricas de cada elipse, las cuales son únicas para cada condición de daño en la barra. Físicamente esto significa que cada nuevo escenario en la barra produce una única respuesta transitoria. De este modo, es posible usar la respuesta de la temperatura en estado transiente como un medio para detectar el daño en la barra. Se muestra un ejemplo para examinar la interpretación geométrica del problema de autovalores y la propiedad de convexidad.

Ejemplo de una Barra de Aluminio

Considere una barra de aluminio sometida a conducción unidimensional y con convección superficial como la mostrada en la Figura 5. El valor del coeficiente de conductividad térmica del material y del coeficiente de convección para el fluido son respectivamente 120 W/m°C y 10 W/m² °C. La capacidad calorífica del material es de 896 J/Kg°C. El aluminio usado tiene una densidad de 2702 Kg/m³. La barra posee una longitud de 0.25 m, un área transversal de 1.27 x 10⁻⁴ m² y un perímetro de 0.0608 m. Sustituyendo estos valores en la ecuación (12) se establece una expresión, la cual puede usarse para representar varias condiciones de daño por medio de las elipses que se generan al variar el valor del factor modificador de k , σ . Las elipses mostradas en la Figura 6 corresponden a la interpretación geométrica del problema de autovalores. Los valores de $\sigma = 1$ (sin daño), $\sigma = 0.25$, $\sigma = 0.5$ y $\sigma = 0.75$ fueron reemplazados en la ecuación anterior. En esta figura puede notarse que las elipses obtenidas para valores de σ diferentes de uno forman un envolvente convexo de la condición sana.

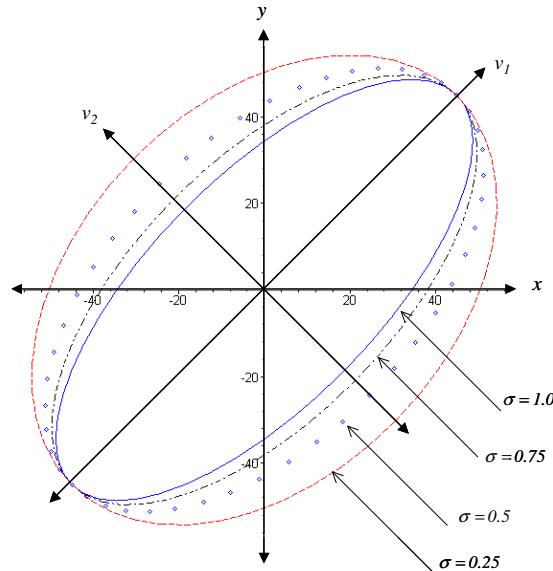


Figura 7: Elipses representativas de una condición particular de daño. Envolvente convexo.

Conducción en una Barra - Modelo empleando dos elementos finitos.

Para obtener una representación geométrica en R^3 , la barra anterior es discretizada en dos elementos, como en el caso anterior, la conductividad térmica de cada elemento puede afectarse por un factor, de tal manera, que sea posible representar diferentes tipos de condiciones de daño en la barra. Así, el modelo puede ser escrito como:

$$\frac{c_p \rho A_r h_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \\ \dot{T}_3 \end{Bmatrix} + \left[\frac{A_r}{h_e} \begin{bmatrix} \sigma_1 k_1 & -\sigma_1 k_1 & 0 \\ -\sigma_1 k_1 & \sigma_1 k_1 + \sigma_2 k_2 & -\sigma_2 k_2 \\ 0 & -\sigma_2 k_2 & \sigma_2 k_2 \end{bmatrix} + \frac{P_e h_e \beta}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

donde σ_1 y σ_2 son los factores usados para modificar la conductividad térmica del elemento uno y dos respectivamente.

Sustituyendo los valores apropiados en las variables que intervienen y para cada parámetro indicador de daño, σ_1 y σ_2 , es posible simular diferentes tipos de daño. Encontrando la matriz $[A]$ dada por la expresión (10) y resolviendo el problema de autovalores (9) asociado al problema homogéneo, se encuentran las características geométricas de los elipsoides, esto es, la magnitud y orientación de sus ejes.

Como segundo ejemplo se usa una barra de aluminio con las mismas propiedades del ejemplo anterior, pero esta vez es discretizada con dos elementos. Resolviendo el problema de autovalores relacionado con la ecuación (13) para diferentes combinaciones de σ_1 y σ_2 , se establece la ecuación de varios elipsoides representativos de cada condición de daño. La Figura 7 muestra los elipsoides correspondientes a la interpretación geométrica del problema de autovalores. En ella se observan los elipsoides del caso en el cual se ha modificado el valor de la conductividad térmica del primer elemento ($\sigma_1 = 0.25, 0.50, 0.75$ y 1.00), dejando constante la del segundo elemento, $\sigma_2 = 1.0$. El elipsoide correspondiente al estado sin daño, esto es, valores de σ_1 y $\sigma_2 = 1.0$ se muestra completo. Por conveniencia, los elipsoides correspondientes a cada combinación de factores se muestran en secciones. Se observa una modificación en las dimensiones de los elipsoides correspondientes a los modelos que simulan el daño, como una reducción de su conductividad térmica. De manera similar, se observan los elipsoides obtenidos para estas reducciones de k para ser un envolvente convexo de la condición sana. Estos cambios de geometría podrían usarse para desarrollar un esquema de detección de daño en un material, pues cada uno de estos está asociado a una respuesta de temperatura transiente única. En la figura se observa una curva de tangencia entre los dos elipsoides, lo cual se genera como resultado de cambiar los valores del factor σ_1 .

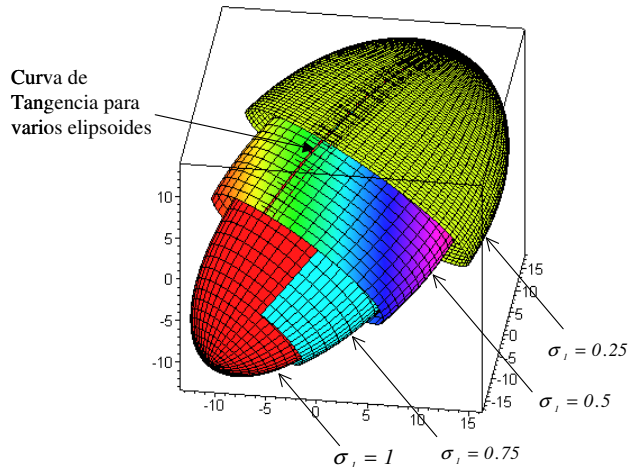


Figura 7: Interpretación geométrica del problema de autovalores para una barra sometida a transferencia de calor unidimensional. Barra discretizada en dos elementos.

VALIDACIÓN EXPERIMENTAL

Las pruebas se realizaron en dos barras, una de aluminio y otra de compuesto - grafito. Se empleó un sistema de adquisición de datos para tomar las temperaturas en cada barra. El sistema incluía un computador, con la aplicación computacional Labview, una tarjeta de adquisición de datos, un chasis SCXI 1000, un módulo SCXI 1102 y terminales SCXI 1303, componentes producidos por la compañía "National Instruments".

Las pruebas experimentales consideraron el espécimen con convección en toda su superficie y con condiciones de frontera en los extremos obedeciendo a la ley de Newton para enfriamiento, se realizó un montaje compuesto por el sistema de adquisición de datos, un soporte para fijar el espécimen y un dispositivo para acercar y retirar la fuente de calor. Un esquema simplificado se muestra en la Figura 8. El espécimen se calentó en el centro hasta alcanzar una distribución de temperatura constante. Una vez fue logrado el estado estable, la fuente de calor fue retirada para producir un fenómeno de transferencia de calor en estado transiente en el espécimen.

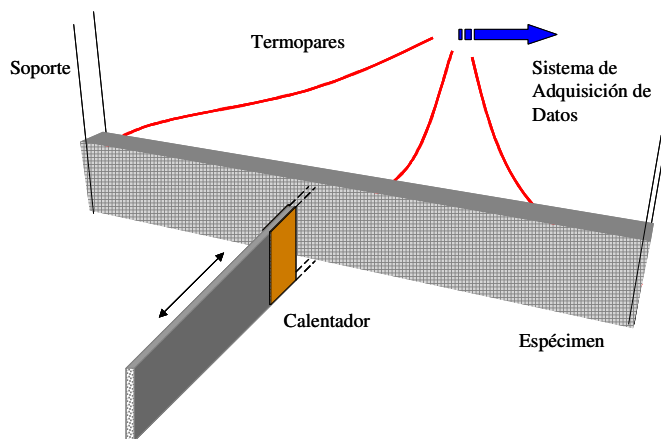


Figura 8: Montaje experimental, espécimen sometido a convección en todas sus caras.

Espécimen de compuesto-grafito

Una barra de sección rectangular hecha en compuesto – grafito fue estudiada experimentalmente. Las características de la barra son las siguientes: densidad, $\rho=1550 \text{ kg/m}^3$, capacidad calorífica, $c=700 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$, conductividad térmica, $k=78.82 \text{ W/m}^\circ\text{C}$, longitud=74.2 mm, ancho=12.8 mm, espesor=1.25 mm. Los resultados mostraron una ligera variación en los valores promedio de la temperatura, los cuales no son significativos, puesto que los valores están comprendidos en la región definida por la incertidumbre del instrumento de medida ($\pm 1^\circ\text{C}$). De esta manera, el daño no pudo ser representado como una reducción en la conductividad térmica del elemento, pues los cambios de temperatura no son apreciables. Un análisis cualitativo es mostrado en la Figura 9, se empleó una cámara termográfica para obtener la distribución de temperaturas en la superficie del espécimen. Una variación en la distribución de la temperatura, verificando la aplicabilidad del método estudiado, es notada en la región asociada al daño, el cual fue realizado haciendo una reducción del material.

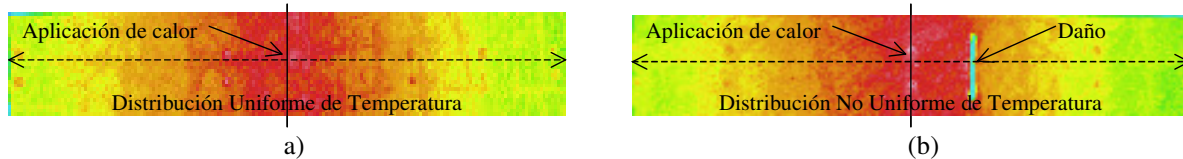


Figura 9: Fotografía termal de una barra de compuesto-grafito, sometida a convección en toda su superficie. (a) sin daño. (b) con daño.

Espécimen de Aluminio

Se evalúa experimentalmente una barra de Aluminio con las siguientes características: Densidad, $\rho=2780 \text{ kg/m}^3$, capacidad calorífica, $c=875 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$, conductividad térmica, $k=118 \text{ W/m}^\circ\text{C}$, longitud=180 mm, ancho=25.4 mm, espesor=3.17 mm. El procedimiento experimental se hizo de manera similar al espécimen de compuesto-carbón, esto es, la pieza se calentó por el centro, y después de alcanzar el estado estable, la fuente de calor se retiró para permitir un enfriamiento por convección con aire. Cada 5 segundos se tomaron los perfiles de temperatura hasta que la barra alcanzara la temperatura ambiente. Una perforación localizada a 4.5 cm de un extremo se realizó en el espécimen con una barrena, a lo ancho de la barra, para simular un daño. De nuevo, la barra se sometió a la misma situación de calentamiento y enfriamiento, almacenándose los nuevos perfiles de enfriamiento.

La barra anterior se modeló con ALGOR para generar escenarios de daño teóricos. Por hipótesis, un daño se simula como una reducción en la conductividad térmica, en este caso a manera de ejemplo, se consideró una reducción del 25% en los elementos finitos relacionados a la anomalía. Variando el valor de k de estos elementos fue posible generar diferentes escenarios de daño. Puesto que los escenarios están representados por los vectores $V_i(t)$, el Método de Aproximación más Cercana se aplicó entre los puntos asociados a los vectores obtenidos con ALGOR y los conseguidos experimentalmente, es decir, se calculó la distancia que existe entre los puntos experimentales y los teóricos. En la Tabla 1 se resumen las componentes encontradas, valores de temperatura, y la distancia que existe entre los puntos. Como era esperado, la norma Euclidiana muestra el menor valor para el elemento siete, lo cual indica la efectividad del método.

Tabla 1: Componentes de los vectores $V_i(t)$ y experimental.

t=10 seg Elemento, (dominio mm)	Posición (mm)										Norma
	0	16.5	37.5	58.5	79.5	100.5	121.5	142.5	163.5	180	
1, [0,16.5]	36.2401	36.4906	37.1329	37.7833	38.2756	38.4254	38.0761	37.435	36.7647	36.5007	0.896585
2, [16.5,37.5]	36.0618	36.2165	37.3604	37.849	38.2936	38.4302	38.0773	37.4353	36.7648	36.5008	0.876779
3, [37.5,58.5]	36.1921	36.4138	36.8977	38.0153	38.3424	38.4437	38.0809	37.4362	36.7651	36.5009	0.848801
4, [58.5,79.5]	36.2303	36.4744	37.0808	37.6044	38.4544	38.4771	38.0902	37.4387	36.7658	36.5014	0.863178
5, [79.5,100.5]	36.2392	36.489	37.1278	37.7651	38.2137	38.4873	38.0943	37.4401	36.7662	36.5016	0.905394
6, [100.5,121.5]	36.2406	36.4914	37.1357	37.794	38.3143	38.5584	37.943	37.3959	36.7526	36.4933	0.842088
7, [121.5,142.5]	36.2404	36.4909	37.1342	37.7882	38.2941	38.4932	38.3104	37.1974	36.6868	36.4518	0.785209
8, [142.5,163.5]	36.2402	36.4907	37.1332	37.7846	38.2806	38.4443	38.1452	37.6739	36.4768	36.3131	0.846609
9, [163.5,180]	36.2402	36.4906	37.133	37.7835	38.2763	38.4282	38.0864	37.4718	36.8872	36.0977	0.960864
Experimento		36.35	37.04	37.73	38.28	38.4	37.99	37.14	36.31		

CONCLUSIONES

El modelo matemático relacionado al problema de transferencia de calor pudo representarse en forma matricial. Así, fue posible usar el problema homogéneo asociado para producir un problema de autovalores, el cual, debido a que la matriz k es simétrica y definida positiva, permitió obtener una interpretación geométrica, siendo un elipsoide en el caso de tres dimensiones, caracterizado por las dimensiones y orientación de sus ejes principales. Se estudió la convexidad de la interpretación geométrica del problema de autovalores y el efecto del daño sobre la misma para una barra sometida a conducción unidimensional.

La representación del problema de autovalores de una condición de daño, simulada como una reducción en la conductividad térmica, es un envolvente convexo de la condición sana. Cada representación geométrica del problema de autovalores está asociada a una distribución de temperatura única, lo cual permite desarrollar un esquema de detección de daño usando una norma euclidiana. El método de los elementos finitos pudo usarse favorablemente para representar un daño como una reducción en la conductividad térmica de un material. Tomando experimentalmente perfiles de temperatura en un espécimen de aluminio con y sin daño y empleando una norma euclidiana con los vectores generados usando ALGOR, fue localizado un daño satisfactoriamente. Se estudio un daño en un material compuesto – carbón, los cambios de temperatura entre el espécimen sano y con daño quedaron en el margen de incertidumbre del equipo con lo cual no fue posible aplicar la norma Euclidiana. Sin embargo, se muestra cualitativamente la validez del método, usando imágenes termales.

Anomalías en materiales de baja conductividad presentan mayor dificultad para determinarse, esto debido a la mayor posibilidad de que el fenómeno de transferencia de calor sea dominado por la convección. Puesto que en este trabajo la discusión se centra en el fenómeno de transferencia de calor por conducción, mejores resultados pueden alcanzarse cuando las pruebas se realizan donde esta condición predomina sobre las demás formas de transferencia de calor. Se sugiere estudiar diferentes tamaños y geometrías de daño, del mismo modo que su aplicación para diferentes profundidades. Es importante realizar los experimentos en condiciones controladas y emplear equipos que tengan alta sensibilidad para medir temperatura.

En este trabajo, los modelos se consideraron unidimensionales, pero se sugiere realizar estudios futuros que consideren el fenómeno de transferencia de calor en dos y tres dimensiones. El método podría usarse en un material compuesto, construido con fibras de material con buena conductividad térmica, de tal manera, que cuando sean interrumpidas por la presencia de una anomalía, ayuden a mostrar un cambio en la distribución de la temperatura más efectivamente.

AGRADECIMIENTOS

Los autores quisieran agradecer la ayuda del Programa de Investigación de ONR sobre “Composite for Marine Structures”, los comentarios y sugerencias convenientes del oficial del programa: El Dr. Yapa D. S. Rajapakse, y el DoD-ONR HSI Grant. (No. N000140111043).

REFERENCIAS

- Ball R.J., y Almond, D.P. (1998). “The Detection and Measurement of Impact Damage in Thick Carbon Fiber Reinforced Laminates by Transient Thermography”, *Materials Evaluation*, 31(3), 165-173.
- Bar-Cohen, Y. (1999). “In-Service NDE of Aerospace Structures – Emerging Technologies and Challenges at the end of the 2nd Millennium.” *NDT.net*, 4 (9).
- Figliola R. S. y Beasley D. E. (2000). *Theory and Design for Mechanical Measurements*. 3rd ed., John Wiley & Sons, Inc. New York, 121-125.
- Fisher, W.G., Meyer, K.E., Wachter, E.A., Perl, D.R. y Kulowitch, P.J. (1997). “Laser Induced Fluorescence Imaging of Thermal Damage in Polymer Matrix Composites”, *Materials Evaluation*, 726-729.
- Fisher, W.G., Storey, J.M.E., Sharp, S.L., Janke, C.J. y Wachter, E.A. (1995). “Nondestructive Inspection of Graphite-Epoxy Composites for Heat Damage Using Laser-Induced Fluorescence”, *Applied Spectroscopy*, 49(9), 1225-1231.
- Gil-Peláez, J.J. (2002). “Detección de Daño en un Material Compuesto Usando Transferencia de Calor por Conducción”, Tesis de Maestría en Ingeniería Mecánica, University of Puerto Rico, Mayagüez, PR.
- Haberman, R. (1998). *Elementary Applied Partial Differential Equations*. 3rd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1-18.
- Jones, T.S. y Berger, H. (1992). “Thermographic Detection of Impact Damage in Graphite-Epoxy Composite”, *Materials Evaluation*, 50(12), 1446-1453.
- Just, F. A. (1997) “Damage Detection Based on the Geometric Interpretation of The Eigenvalue Problem”, Ph.D. Tesis, Virginia Polytechnic Institute and State University.
- Kaiser, J.H. (1994). “Millimeter Wave Heating for Thermographic Inspection of Carbon-Reinforced Composites”, *Materials Evaluation*, 597-599.

- Myers, G.E. (1998). *Analytical Methods in Conduction Heat Transfer*. 2nd ed., AMCHT Publications, Madison, Wisconsin, 70-75.
- Osiander, R., Spiecer, J.W.M. y Murphy, J.C. (1995). "Thermal Nondestructive Evaluation Using Microwave Sources", *Materials Evaluation*, 942-948.
- Reddy, J. N. (1993). *An Introduction to the Finite Element Method*. 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 67-113.
- Roth, D. J. (1996). "Capability of Thermographic Imaging Defined for Detection in High-Temperature Composite Materials". <<http://www.grc.nasa.gov/WWW/RT1996/5000/5250r/.htm>>
- Shih J.K.C., Hsin M., Delpak R., Hu C. W., Plassmann P. y Kogut M. (2000). "Application of Infrared Thermography for Damage Detection in Structural Concrete – a Preliminary Report". *NDT.net*, 5(02).
- Thomas L.C. (1992). *Heat Transfer*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1-107.
- Zhang, H., Gissinger, S., Weides, G. y Netzelmann, U. (1994). "Detection of Surface Damage in Ceramics by Photothermal and Photoacoustic Techniques", *Journal de Physique. IV*, Colloque, JP., Vol. 4, 603-606.