

EMANT: Programa de Análisis de Problemas Electrotécnicos Mediante el Método de los Elementos Finitos

**J. Mora
J. Miquel
E. Oñate
C. Sacco
L.M. Martínez**

Publicación CIMNE N° 177, Septiembre 1999

**Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería
Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, España**

EMANT: PROGRAMA DE ANÁLISIS DE PROBLEMAS ELECTROTÉCNICOS MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Javier Mora^{*}, Juan Miquel Canet^{*}, Eugenio Oñate^{*}, Carlos Sacco^{*} y Lluís M. Martínez[†]

^{*} Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE)
Universidad Politécnica de Cataluña
Campus Norte UPC, 08034 Barcelona, España
e-mail: cimne@etseccpb.upc.es, página web: <http://www.cimne.upc.es/>

[†] Análisis Tecnológico Innovador para Procesos Industriales Competitivos (ATIPIC)
Centro de Empresas de Nuevas Tecnologías
Parque Tecnológico del Vallés, 08290 Cerdanyola, Barcelona, España
e-mail: atipic@ptv.es

Palabra clave: Electrostática, Electromagnetismo, Métodos Numéricos, Elementos Finitos.

Resumen. *La sencillez conceptual de la electrostática esconde todo un abanico de aplicaciones industriales que precisa de herramientas de cálculo numérico para su optimización. En particular, el diseño de aisladores para sistemas de alta tensión o de las cámaras de tratamiento de alimentos implica una cuidadosa elección de la geometría del sistema y materiales empleados. A la ayuda que supone el conocimiento de la distribución de los campos eléctricos asociados a cada prototipo desde el punto de vista de prestaciones del equipo (homogeneidad de campo, minimización de puntos triples), se añade la interesante posibilidad de contribuir a la comprensión del fenómeno físico (cómo se alteran los alimentos al aplicar un campo eléctrico intenso). Se recoge en las siguientes líneas la formulación desarrollada para escribir un código de resolución de problemas electrostáticos mediante el método de los elementos finitos, no tanto como nuevo problema sino como transición desde otras disciplinas como son la mecánica o transferencia de calor.*

1 INTRODUCCIÓN

Dentro del electromagnetismo, la electrostática suele ser el primer eslabón en el complejo entramado de las ecuaciones de Maxwell y, a menudo, relegada al entorno exclusivamente académico. Sin embargo, componentes tan cotidianos dentro de la teoría de circuitos como los condensadores y diodos bipolares pueden ser explicados y diseñados en su ámbito^{1,2}. Del mismo modo, el estudio de las distribuciones de campo eléctrico en régimen estático juega un importante papel dentro de la rama de la ingeniería eléctrica dedicada a la alta tensión^{3,4}.

Los programas comerciales de cálculo dedicados a electromagnetismo ofrecen el potencial de su tratamiento global, si bien suelen distinguir entre diferentes problemas tipo en correspondencia con cada módulo de análisis. Este esfuerzo por abarcar todas las ramas del electromagnetismo obliga a una rigidez en el planteamiento del problema que incomoda, cuando no imposibilita, su resolución. Casos particulares podrían ser aquellos en que las fuentes de campo dependieran de éste. Son problemas fuertemente no lineales idóneos para ser resueltos por métodos numéricos y que, paradójicamente, se encuentran usualmente vedados en los paquetes comerciales.

El programa de elementos finitos EMANT v1.0, sin alejarse del clásico módulo comercial, ofrece la posibilidad de cubrir estas deficiencias adaptándose a las necesidades específicas que requiera el problema. En particular, la actual versión es fácilmente extensible a situaciones donde las densidades de carga sean dependientes de la posición y/o del valor de potencial a que están sometidas. Éste sería el caso de la distribución de campo en un diodo bipolar, usualmente diseñado bajo severas simplificaciones (normalmente suposiciones de geometría infinita). Del mismo modo, situaciones donde la permitividad del medio fuera dependiente del campo al que se halla sometida son, como se verá, fácilmente implementables a partir del núcleo desarrollado.

EMANT ha sido íntegramente desarrollado en el Centro de Métodos Numéricos en Ingeniería de Barcelona (CIMNE) e incorpora un potente entorno de pre y postproceso gráfico (GID⁵) también desarrollado en CIMNE. La versión actual de EMANT permite la solución de problemas bidimensionales (incluyendo el caso de simetría de revolución) así como problemas en tres dimensiones. Finalmente, a la adaptación de las condiciones de carga desde el problema térmico hacia el electrostático se le suma la implementación de condiciones de contorno en el infinito, imprescindibles para situaciones con geometría abierta.

2 METODOLOGÍA UTILIZADA

La descripción que se realiza a continuación es autocontenida y elaborada sobre las leyes de la electrostática. No obstante, se establece un paralelismo al desarrollo equivalente que lleva el problema térmico fundamentalmente para adoptar un punto de referencia común con el resto de algoritmos de resolución de problemas mediante elementos finitos⁶.

En el planteamiento de las ecuaciones y posteriormente de los ejemplos se empleará como unidades, salvo otra indicación, el sistema métrico de unidades (m.k.s.). Queda implícito, sin embargo, que EMANT permite realizar un escalado en las dimensiones que afectará a la solución de forma proporcional, con la única precaución de ser coherente.

2.1 Leyes Básicas de la Electroestática

La electrostática se sintetiza en las siguientes dos ecuaciones de Maxwell para el campo eléctrico, particularizadas al caso estacionario:

$$\nabla \vec{D} = \rho_v \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (2)$$

donde ρ_v es la densidad cúbica de carga (Coulombs por metro cúbico, C/m^3), \vec{D} es la densidad de flujo eléctrico (C/m^2) y \vec{E} es la intensidad de campo eléctrico (Volts por metro, V/m). Ambos vectores se relacionan a través de la permitividad del medio ϵ (Farad por metro, F/m):

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (3)$$

En el vacío, $\epsilon = \epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} F/m$.

Por ser \vec{E} conservativo, puede definirse un potencial V (V) tal que:

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (4)$$

Introduciendo esta definición de potencial en la divergencia de la densidad de flujo eléctrico, se obtiene la ecuación de Poisson:

$$\nabla \epsilon \nabla V + \rho_v = 0 \quad (5)$$

Nótese que estas expresiones diferenciales no deben evaluarse punto a punto, debiendo considerarse su expresión integral. De esta manera, la densidad cúbica de carga puede generalizarse a los casos de:

Carga puntual Q (C), que es equivalente a decir:

$$Q = \iiint_V \rho_v dV \quad (6)$$

con:

$$\rho_v = Q \cdot \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \quad (7)$$

para la carga situada en el punto (x_0, y_0, z_0) .

Densidad lineal de carga ρ_L (C/m), que es equivalente a una densidad volumétrica tal como: $\rho_v = \rho_L \cdot \delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$ si la carga se situara en la línea (x_0, y_0) –que puede extenderse a cualquier línea genérica -.

Densidad superficial de carga ρ_S (C/m^2), equivalente a una densidad volumétrica tal como: $\rho_v = \rho_S \cdot \delta(x - x_0)$ si la carga se situara en el plano $x=x_0$, tratándose una vez más de un caso concreto, ya que la carga superficial no está restringida a un plano, siendo posible definirla en cualquier superficie.

Desarrollando la ecuación de Poisson:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon_x \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon_y \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon_z \frac{\partial V}{\partial z} \right) + \rho_v = 0 \quad (8)$$

con:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (9)$$

$$D_x = -\epsilon_x \frac{\partial V}{\partial x} \quad D_y = -\epsilon_y \frac{\partial V}{\partial y} \quad D_z = -\epsilon_z \frac{\partial V}{\partial z} \quad (10)$$

que, en coordenadas cilíndricas para problemas con simetría de revolución $\left(\frac{\partial}{\partial \phi} (\cdot) = 0 \right)$:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\epsilon_\rho \rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon_z \frac{\partial V}{\partial z} \right) + \rho_v = 0 \quad (11)$$

con:

$$E_\rho = -\frac{\partial V}{\partial \rho} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (12)$$

$$D_\rho = -\epsilon_\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \quad D_z = -\epsilon_z \frac{\partial V}{\partial z} \quad (13)$$

Las condiciones de contorno para campos electrostáticos entre dos medios 1 y 2 pueden escribirse:

$$\hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \Big|_{\Gamma_{1 \rightarrow 2}} = (E_{t1} - E_{t2}) \Big|_{\Gamma_{1 \rightarrow 2}} = 0 \quad (14)$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \Big|_{\Gamma_{1 \rightarrow 2}} = (D_{n1} - D_{n2}) \Big|_{\Gamma_{1 \rightarrow 2}} = \rho_c \quad (15)$$

con \hat{n} la normal al contorno que separa ambos medios y ρ_c la densidad de carga (lineal o superficial) existente en tal contorno.

En la resolución de la ecuación de Poisson sobre un dominio Ω limitado por un contorno Γ , las condiciones en dicha frontera pueden expresarse como sigue:

$$V - \nabla = 0 \Big|_{\Gamma_v} \quad (16)$$

con Γ_v el contorno donde se fija el valor del potencial ∇ .

$$n^T \vec{D} - D_n = 0 \Big|_{\Gamma_b} \quad (17)$$

con Γ_D el contorno donde se fija la densidad de flujo \bar{D}_n .

Obsérvese que no se incluye en este último caso la densidad de carga en el contorno por entender que se trata de una de las fronteras del problema y, por tanto, libres de carga. Si se deseara incorporar una situación que las incluyera bastaría fijarlas como condición de carga.

A estas dos condiciones puede añadirse una más, correspondiente a la resolución de problemas con geometría abierta, es decir, condiciones de contorno en el infinito.

$$\left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r_\infty} \approx -\frac{V}{r} \quad (18)$$

con Γ_∞ el contorno donde se fija la condición de infinito $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ($= \sqrt{\rho^2 + z^2}$, en coordenadas cilíndricas)

En este caso se supone que el potencial varía con la distancia en el contorno de la forma

$$V \approx \frac{V_0 r_0}{r} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial r} \approx -\frac{V}{r} \quad (19)$$

Otra posibilidad sería considerar:

$$V \approx \frac{V_0 r_0^2}{r^2} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial r} \approx -2\frac{V}{r} \quad (20)$$

o bien

$$V \approx V_0 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial r} \approx -\frac{V}{r \ln(r/r_0)} \quad (21)$$

El punto r_0 da la referencia de potencial ($V(r_0) = V_0$).

Otros parámetros de interés en el análisis de resultados serán la energía W (Joule, J) del sistema, densidad de energía w (J/m^3), potencia P (Watt, W), fuerza F (Newton, N) o capacidad (F). Para cada caso en particular deben revisarse las expresiones, pero en una primera presentación pueden escribirse las siguientes:

$$w = \frac{1}{2} \epsilon |\vec{E}|^2 \quad (22)$$

$$W = \iiint_V w \partial V = \frac{1}{2} \iiint_V \epsilon |\vec{E}|^2 \partial V = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 \quad (23)$$

$$P = \frac{\partial W}{\partial t} \quad (24)$$

si definimos el momento dipolar como:

$$\mathbf{p} = q\bar{\mathbf{d}} \quad (25)$$

con q la carga asociada y $\bar{\mathbf{d}}$ el vector que une ambas cargas,

$$\bar{\mathbf{F}} = \nabla(\bar{\mathbf{p}} \cdot \bar{\mathbf{E}}) = (\bar{\mathbf{p}} \cdot \nabla)\bar{\mathbf{E}} \quad (26)$$

Conviene insistir en que para cada aplicación deben matizarse las relaciones aquí presentadas, dado que conceptos como los de fuerza o capacidad, por ejemplo, presentan múltiples interpretaciones.

2.2 Formulación para el Problema Electroestático del Método de los Elementos Finitos

La normalización de las anteriores expresiones a una terminología más usual dentro de la formulación por elementos finitos conduce a la siguiente identificación de las variables empleadas:

Potencial: $\phi = V$ flujos: $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{D}}$ $\mathbf{q}' = \bar{\mathbf{E}}$ material: $\mathbf{K} = \varepsilon$, y sus correspondientes contornos: $\Gamma_\phi = \Gamma_V$ $\Gamma_q = \Gamma_D$

$$\text{y } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} K_x & 0 & 0 \\ 0 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & K_z \end{bmatrix} \quad \text{matriz constitutiva (de permitividades).}$$

Obsérvese que \mathbf{D} no tiene por qué ser necesariamente diagonal. Pueden existir términos cruzados como K_{xy} , K_{yz} , etc.

La forma de los residuos ponderados de la ecuación de Poisson y sus condiciones de contorno, se escribe⁸:

$$\int_{\Omega} \mathbf{W} [\nabla^T \mathbf{D} \nabla \phi + \rho_v] \partial \Omega + \oint_{\Gamma_q} \bar{\mathbf{W}} [\mathbf{n}^T \mathbf{D} \nabla \phi + \bar{\mathbf{q}} + \alpha \phi] \partial \Gamma_q = 0 \quad (27)$$

siendo $\mathbf{W}, \bar{\mathbf{W}}$ los pesos asignados a cada ecuación diferencial. El factor α representa la condición de absorción dada para problemas abiertos (condiciones de contorno en el infinito), siendo en este caso, $\alpha = \frac{1}{r}$, si bien y como ya se describió anteriormente puede adoptar otros valores.

Con la asignación $\bar{\mathbf{W}} = -\mathbf{W}$ e integrando por partes:

$$\int_{\Omega} \nabla^T \mathbf{W}^T \mathbf{D} \nabla \phi \partial \Omega + \oint_{\Gamma_{\infty}} \mathbf{W}^T \alpha \phi \partial \Gamma_{\infty} = \int_{\Omega} \mathbf{W}^T \rho_v \partial \Omega - \oint_{\Gamma_q} \mathbf{W}^T \bar{\mathbf{q}}_n \partial \Gamma_q - \oint_{\Gamma_\phi} \mathbf{W}^T \mathbf{q}_n \partial \Gamma_\phi \quad (28)$$

donde puede observarse un término sobre el contorno donde se fijan las condiciones de potencial que se corresponde a las reacciones que tienen lugar (en forma de flujo). Tales valores pueden calcularse a posteriori, una vez obtenida ϕ .

En el caso de problemas con simetría de revolución, la integral de la ecuación de Poisson en cilíndricas:

$$\int_{\Omega} \left\{ \mathbf{W} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(K_{\rho} \rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right] + \overline{\mathbf{W}} \rho_v \right\} \partial \Omega \quad (29)$$

teniendo en cuenta que $\partial \Omega = \rho \partial \rho \partial z$, puede escribirse:

$$\int_{\Omega} \left\{ \mathbf{W} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(K_{\rho} \rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \rho \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right] + \overline{\mathbf{W}} \rho \rho_v \right\} \partial \rho \partial z \quad (30)$$

es decir, puede hacerse el cambio de variable:

$$\rho = x, \quad z = y$$

e incorporar la distancia radial en las cargas y permitividades, manteniendo el resto de la formulación empleada para el caso 2D cartesiano, es decir^{9,7}:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla^T \mathbf{W}^T \mathbf{D} \mathbf{x} \nabla \phi \partial x \partial y + \oint_{\Gamma_q} \mathbf{W}^T \alpha x \phi \partial \Gamma_q = \\ \int_{\Omega} \mathbf{W}^T x \rho_v \partial x \partial y - \oint_{\Gamma_q} \mathbf{W}^T x \bar{\mathbf{q}}_n \partial \Gamma_q - \oint_{\Gamma_{\phi}} \mathbf{W}^T x \mathbf{q}_n \partial \Gamma_{\phi} \end{aligned} \quad (31)$$

Obsérvese que para las integrales sobre los contornos también debe añadirse el escalado radial. La condición de contorno en el infinito no varía respecto al caso más general, ya que, en

$$\text{este caso, } \alpha = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \equiv \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

En formulación isoparamétrica, la discretización del dominio conduce a:

$$\mathbf{x} = [x, y, z]^T = \sum N_i [x_i, y_i, z_i]^T \quad (32)$$

para las coordenadas del elemento en función de sus valores nodales y:

$$\phi = \sum N_i \phi_i = \mathbf{N} \mathbf{a}^{(e)} \quad (33)$$

para la incógnita a resolver (potencial eléctrico)

$$\mathbf{g} = \nabla \phi = \nabla \mathbf{N} \mathbf{a}^{(e)} = \mathbf{B} \mathbf{a}^{(e)} \quad (34)$$

es el gradiente del potencial con:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \dots \quad \mathbf{B}_n] \quad \text{y:} \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (35)$$

Los correspondientes flujos (densidad de flujo eléctrico e intensidad de campo eléctrico) se

obtienen por:

$$\mathbf{q} = -\mathbf{DBa}^{(e)} \quad \text{y} \quad \mathbf{q}' = -\mathbf{Ba}^{(e)} \quad (36)$$

Sustituyendo las ecuaciones (33-36) en la expresión integral (28) o (31) y operando en la forma usual se llega al clásico sistema de ecuaciones matriciales¹⁰:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (37)$$

con \mathbf{a} el vector de valores nodales del potencial a calcular (vector incógnita), \mathbf{K} la matriz de rigidez del sistema y \mathbf{f} el vector de fuerzas o fuentes independientes de campo (cargas o densidades de carga eléctricas).

La matriz \mathbf{K} y el vector \mathbf{f} se obtienen ensamblando las contribuciones elementales dadas por:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{DB} \partial \Omega^{(e)} + \oint_{\Gamma_q^{(e)}} \alpha \mathbf{N}^T \mathbf{N} \partial \Gamma_q^{(e)} \quad (38)$$

$$\mathbf{f}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}^T \rho_v \partial \Omega^{(e)} - \oint_{\Gamma_q^{(e)}} \mathbf{N}^T \bar{q} \partial \Gamma_q^{(e)} - \oint_{\Gamma_\phi^{(e)}} \mathbf{n}^T \mathbf{N}^T \mathbf{q}_n \partial \Gamma_\phi^{(e)} \quad (39)$$

donde \mathbf{B} es la desarrollada matriz de gradientes.

3 DESCRIPCIÓN DEL CÓDIGO DESARROLLADO

La estructura general de EMANTv1.0 es completamente paralela a la implementada para resolver la ecuación de Poisson en el caso térmico (programa CALTEP⁶). Es por ello que no se profundizará en los detalles de la misma que pueden consultarse en la publicación referenciada y que, junto a la formulación descrita en el apartado 2.2, configura la esencia del programa.

El problema sigue una resolución secuencial dado que no presenta variación temporal ni interrelación entre las fuentes de campo y las incógnitas, casos en los que se requeriría un algoritmo de resolución iterativo.

El procedimiento de cálculo puede sintetizarse a través de las subrutinas que componen el código, es decir:

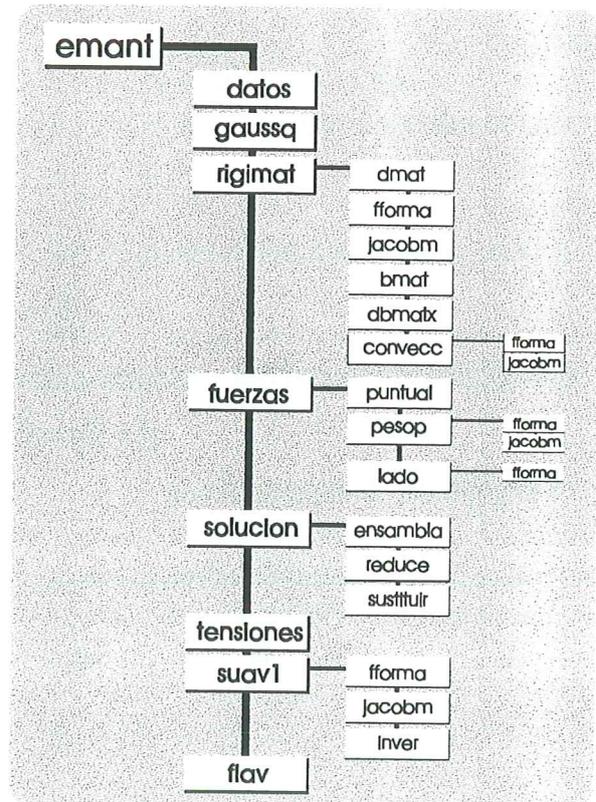


Figura 1: Esquema general del programa Emant

EMANTv1.0	
DATOS	<i>Bloque Principal</i>
GAUSSQ	<i>Lectura de Datos</i>
*RIGIMAT	<i>Definición de los Puntos de Integración</i>
*FUERZAS	<i>Construcción de la Matrices de Rigidez de cada elemento $K^{(e)}$</i>
*SOLUCIÓN	<i>Construcción de los Vectores de Fuerzas Nodales para cada elemento $f^{(e)}$</i>
TENSIONES	<i>Resuelve el Sistema de Ecuaciones y obtiene los valores nodales del Potencial</i>
*SUAV1	<i>Calcula los Flujos correspondientes como Gradientes de la Solución Nodal</i>
FLAV	<i>Realiza un alisado de los Flujos obtenidos</i>
	<i>Prepara y Almacena los resultados para adecuada Representación Gráfica</i>

Las etapas o subrutinas marcadas con un asterisco indican la llamada, a su vez, de otros bloques o subrutinas.

Refinando estas etapas se tiene:

RIGIMAT	
DMAT	<i>Bucle sobre todos los elementos</i>
FFORMA	<i>Proporciona la Matriz Constitutiva</i>
JACOBM	<i>Obtiene las Funciones de Forma del elemento</i>
BMAT	<i>Jacobiano del cambio de coordenadas en el elemento</i>
DBMATX	<i>Cálculo de la Matriz de Gradientes</i>
*CONVECC2	<i>Cálculo de la Matriz de Flujo</i>
	<i>Condiciones de Absorción (Cond. de Contorno en el Infinito)</i>

La subrutina CONVECC2 contiene las subrutinas FFORMA y JACOBM ya enumeradas.

FUERZAS	<i>Calcula el valor nodal de todas las cargas, nodales o elementales</i>
PUNTUAL	<i>Cargas puntuales Q</i>
*PESOP	<i>Densidades de carga en elementos a cargas nodales</i>
*LADO	<i>Flujos en contornos a cargas nodales</i>

La subrutina PESOP llama a FFORMA y JACOBM, mientras LADO invoca a FFORMA. Realmente LADO también emplea el jacobiano, pero ya lo integra en su propia estructura, por lo que no necesita de JACOBM.

SOLUCION	<i>Obtiene los valores del potencial</i>
ENSAMBLA	<i>Ensamblaje de Matriz y Vector Global a partir de los valores elementales $K^{(e)}, f^{(e)}$</i>
REDUCE	<i>Reduce el Sistema de Ecuaciones Global por Eliminación Gaussiana Directa</i>
SUSTITUIR	<i>Obtiene los Valores del Potencial realizando la Sustitución hacia Atrás</i>

SUAV1	
FFORMA	<i>Bucle sobre todos los elementos</i>
JACOBM	<i>Obtiene las Funciones de Forma del elemento</i>
INVER	<i>Jacobiano del cambio de coordenadas en el elemento</i>
	<i>Inversión de matrices por eliminación gaussiana</i>

4 RESULTADOS

Se presentan tres colecciones de análisis, que muestran, más allá del potencial del programa desarrollado, la variedad de problemas sobre los que puede aplicarse.

La primera colección de resultados aborda el diseño de aisladores eléctricos, presentando

una comparación cualitativa en los efectos de un punto triple, para mostrar a continuación los resultados del potencial sobre la geometría completa de un aislador.

La segunda colección corresponde al estudio de una cámara de descarga eléctrica para tratamiento de alimentos y, desde el punto de vista numérico, no reviste mayor dificultad a la de un cálculo de potencial escalar bidimensional. Por el contrario, muestra que los análisis numéricos no están reñidos con la simplicidad conceptual, aunque desde el punto de vista geométrico o de materiales sea complejo estudiarlo de otra manera.

Finalmente, se presenta la utilidad que este tipo de cálculos presenta sobre los transformadores planares, que rompen con las técnicas tradicionales de diseño, debido a su específica tecnología.

4.1 Distribución del Potencial Eléctrico en una Cámara de Descarga

El estudio de los diferentes caminos por donde pueden producirse arcos eléctricos tiene un papel central en el diseño de aisladores. El estudio de la geometría que se asigna a los diferentes materiales puede potenciarse mediante herramientas de cálculo como EMANT. Su forma simple y rápida de proporcionar las líneas equipotenciales y de campo para geometrías complejas permite configurar adecuadamente los caminos eléctricos precisos requeridos.

La figura 2 muestra la evolución en las líneas equipotenciales del punto triple para diferentes

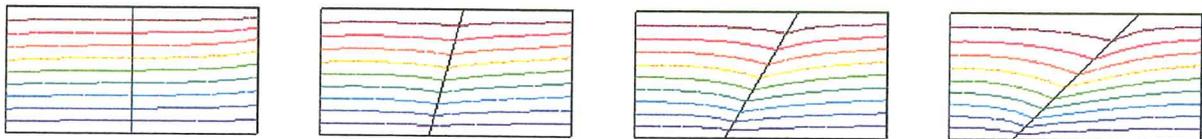


Figura 2: Cambios direccionales del potencial en la frontera gas-aislante para varios ángulos (90°, 75°, 60° y 45°)

ángulos. El material aislante es en todos los casos el de la izquierda, mientras el gas corresponde a la superficie de la derecha. Se ha aplicado un potencial de 1 voltio a la cara superior (en rojo) y de 0 voltios a la inferior (en azul).

Un aislador de G.I.S. (*Gas Insulated Switchgear*) supone el elemento estructural básico dentro de una subestación de transmisión de alta tensión³. Su importante rol electrostático viene acompañado de unas fuertes restricciones mecánicas y térmicas. Su tratamiento mediante elementos finitos simplifica significativamente el dimensionado de sus componentes aportando un profundo conocimiento de las interrelaciones entre las variables de estado del problema. El presente ejemplo se muestra el análisis del potencial eléctrico asociado.

La figura 3 muestra los componentes del

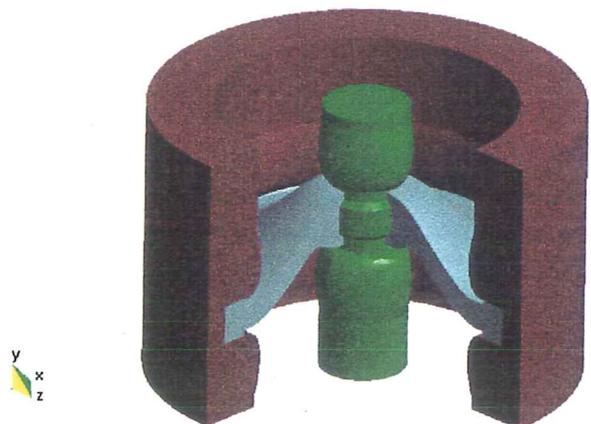


Figura 3: Geometría del aislador.

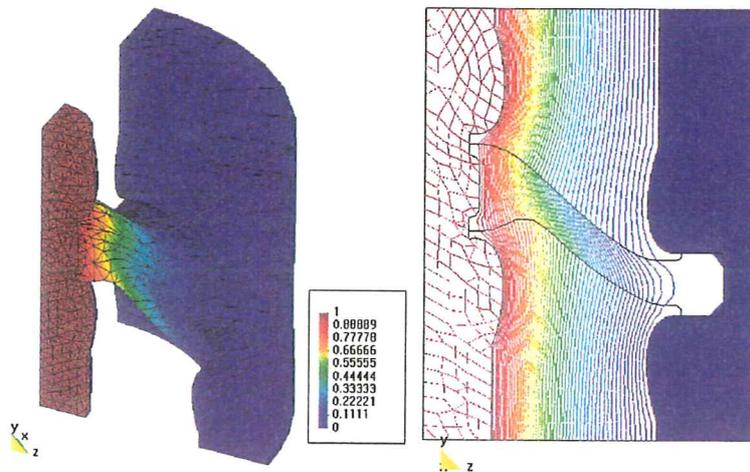


Figura 4: Distribución del potencial eléctrico sobre el aislador:
 a) concentración de líneas de campo sobre la placa aislante
 b) líneas equipotenciales incluyendo el aire.

izquierda no se representa el aire para facilitar la visualización de la tensión sobre la placa aislante. De forma adicional se dibuja la malla de tetraedros usada.

aislador: la barra conductora (verde) se encuentra unida a las cubiertas metálicas (rojo) a través del aislador (azul).

Se ha simulado sólo un cuarto del dispositivo, si bien bastaría con una representación bidimensional debido a la geometría cilíndrica del problema. Con todo, se ha optado por el cálculo en tres dimensiones para mostrar la potencia del programa.

La figura 4 muestra las líneas equipotenciales del campo eléctrico. En la figura

4.2 Distribución del Potencial Eléctrico en una Cámara de Descarga

La necesidad de un cuidadoso diseño en los dispositivos eléctricos de tratamiento de alimentos conlleva un profundo conocimiento de las líneas de campo creadas, altamente sensibles como se ha visto, a la geometría y materiales del circuito.

La figura 5 muestra la geometría simulada, donde también puede apreciarse el entorno

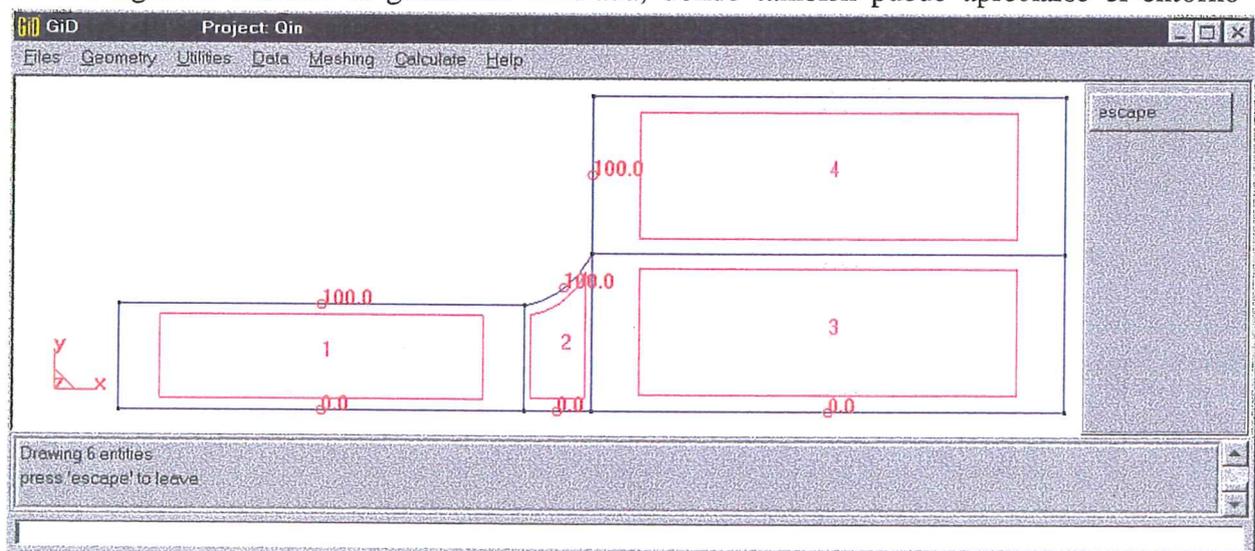


Figura 5: Geometría y condiciones de contorno para una cámara de tratamiento de alimentos.

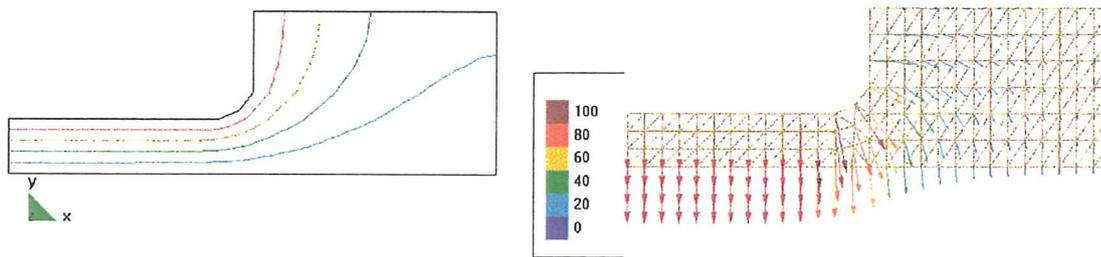


Figura 6: Líneas equipotenciales y distribución vectorial de la intensidad de campo eléctrico para una cámara de tratamiento de alimentos.

gráfico del programa EMANT. La figura 6 corresponde a los resultados tanto en líneas equipotenciales como en campo (mediante vectores). También en este caso se muestra el tipo de elementos usados (triangulares).

La presencia de fuertes gradientes de campo o de los puntos triples antes comentados indican, en el mejor de los casos, un desaprovechamiento de la energía empleada, cuando no un falseamiento del proceso al que se somete el producto. Una vez más, se hace insuficiente el cálculo global del campo presente en la cámara, siendo preciso su conocimiento local.

4.3 Distribución del potencial eléctrico en circuitos impresos

El módulo electrostático proporciona en transformadores planares, como en el resto de los ejemplos presentados, la distribución del potencial en las placas de sus circuitos impresos. Mediante su cálculo se accede a valores tan importantes como la capacidad entre pistas, gradientes de campo e influencia sobre el dieléctrico, etc.

Este dispositivo se muestra como uno de los más claros ejemplos donde el diseño

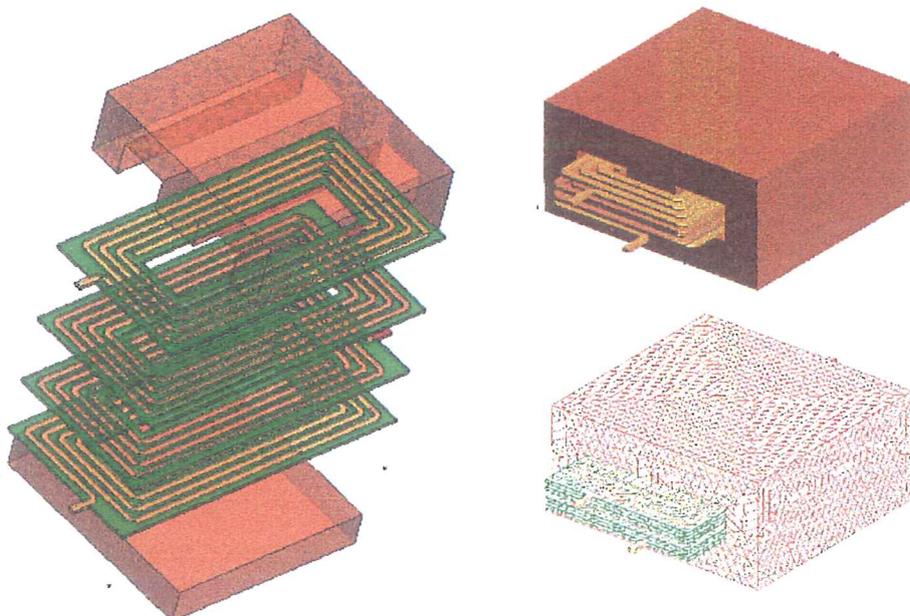


Figura 7: Geometría y mallado para un transformador planar.

electrónico debe apoyarse sobre técnicas de cálculo numérico. Aún tratándose de un transformador de potencia, un sobredimensionado del mismo supone una gran pérdida competitiva. El interés por reducir el tamaño junto a la imposición de mantenerse dentro de unos márgenes de seguridad que impida, por ejemplo, la ruptura del dieléctrico, han pasado a constituir exigencias del diseño y no simples mejoras. El coste de la tecnología implicada en el desarrollo exige de un buen cálculo de parámetros ya en la fase de diseño.

5 FUTURAS EXTENSIONES DEL PROGRAMA

La simplicidad en la implementación de las ecuaciones electromagnéticas en condiciones estáticas se repite en el caso magnético. Aún así, junto a la formulación básica debe atenderse a ciertas peculiaridades del magnetismo, como son las fuentes de campo vectoriales (corrientes e imanes). En este caso existen diversas formulaciones¹¹ atendiendo al uso del potencial magnético vector, a un potencial escalar equivalente o un híbrido entre ambos. Tal trabajo queda fuera de los objetivos del presente artículo, pero sí se muestra a continuación algunos resultados preliminares obtenidos.

Para su cálculo se ha empleado un potencial magnético escalar equivalente al electrostático. En este caso no existen corrientes y el rotacional se anula. La definición del potencial escalar es completamente paralela a la descrita en el apartado 2:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} = 0 \Rightarrow \vec{H} = -\nabla\Phi \quad (40)$$

Como en los restantes ejemplos, en este caso el principal interés radica en la utilidad del método sobre las necesidades industriales. La figura 8 representa una pantalla magnética que protege la correcta orientación de un haz de electrones. El estudio realizado persigue tanto comparar los diferentes materiales que pueden emplearse como detectar qué zonas de la chapa efectúa un papel más activo en el apantallamiento magnético.

Por simetría basta simular un cuarto de la geometría. Se ha empleado una malla no estructurada de elementos tetraédricos. Como ya se ha mencionado, el conjunto de simulaciones realizadas explora el uso de diferentes permeabilidades en la chapa así como el efecto de campos magnéticos con diferentes orientaciones.

La figura 9 muestra los resultados para un campo aplicado vertical (según el eje Y en el sistema de coordenadas empleado). La figura 9.a corresponde a las líneas de campo magnético tanto sobre la chapa como en planos que la cortan, incluyendo sus correspondientes zonas de aire.

La concentración del campo en las proximidades de la

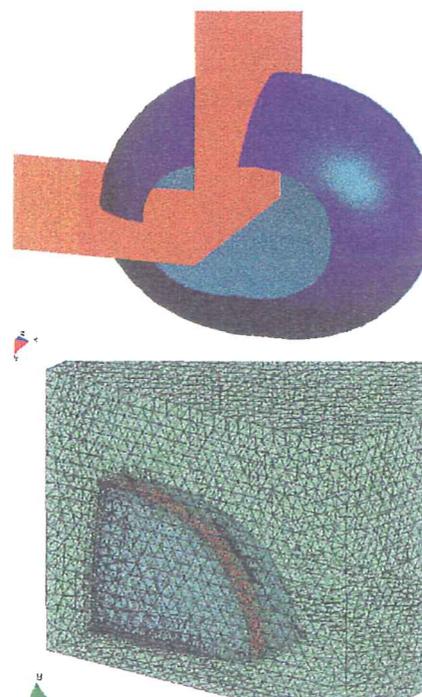


Figura 8: Geometría y discretización de una pantalla magnética



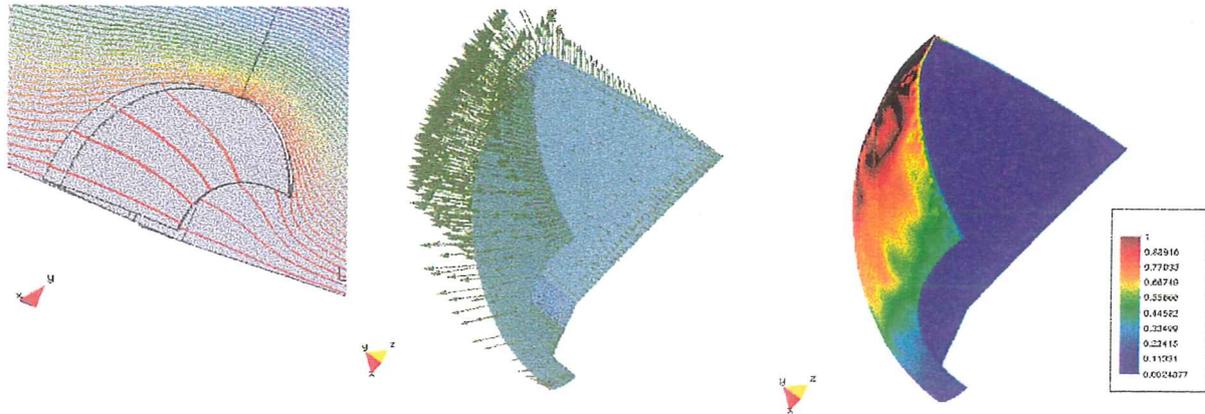


Figura 9: Estudio del apantallamiento magnético producido por una chapa ferromagnética:

- a) Líneas de campo magnético
- b) Vectores densidad de flujo magnético
- c) Intensidad de campo magnético (en módulo)

chapa, como es natural, disminuye conforme se hace menos permeable la chapa. Las figura 9.b y 9.c muestran los vectores densidad de campo y el valor del módulo de la intensidad de campo, respectivamente, sobre la superficie del material. Junto al cambio de orientación sobre el campo aplicado, forzado por la geometría de la chapa, se observan las áreas de mayor saturación de campo.

6 CONCLUSIONES

El cálculo asistido por ordenador ha pasado de constituir un aconsejable complemento en el diseño de prototipos para convertirse en obligada etapa en todo proyecto de ingeniería. La concepción clásica de las pruebas de laboratorio está cediendo un importante espacio al ensayo virtual.

La experimentación desde el ordenador no elimina el papel clave del conjunto de medidas sobre los prototipos a industrializar, sino que facilita su reducción y potencia la ampliación del banco de pruebas. Variables del sistema muy interesantes como parámetros de diseño pero difícilmente mensurables, pueden ser consideradas gracias al prototipaje virtual.

Sobre el caso que ocupa el presente informe, el adecuado diseño de condensadores o placas de circuito impreso debe evitar la generación de arcos eléctricos o rupturas de dieléctrico. Gracias a la amplia experiencia acumulada, para una geometría relativamente simple y combinación de materiales convencional puede obtenerse un buen diseño. Para novedosos planteamientos, sin embargo, resulta de gran utilidad una visualización clara de la distribución de las líneas de potencial.

Tanto por el progreso en potencia de cálculo y economía de los actuales ordenadores como por el parejo avance en el desarrollo de programas capaces de aprovechar tales ventajas, resulta inmediato, tanto en coste como en infraestructura, realizar todo este conjunto de ensayos virtuales.

Frente a la creciente oferta comercial de programas de elementos finitos orientados al

electromagnetismo, EMANT se presenta como solución abierta a problemas específicos del usuario. Nacido de la necesidad de modelar el peculiar comportamiento en materiales superconductores (propósito de un módulo posterior), presenta como primer análisis el bloque electrostático.

El método de los elementos finitos se muestra como potente herramienta de análisis de problemas electrostáticos. La implementación del algoritmo de solución resulta de una particularización en la resolución de la ecuación de Poisson.

REFERENCIAS

- [1] M. A. Plonus, *Electromagnetismo Aplicado*, Ed. Reverté, S.A., 1982
- [2] P. Lorrein and D. R. Corson, *Campos y Ondas Electromagnéticas*, 4ª Ed. Selecciones Científicas, Madrid 1986
- [3] J. R. López-Roldán Otaduy, *Concepción Dieléctrica de Aislantes Interiores de Resina Epoxy para Alta Tensión con Hexafluoruro de Azufre*, Tesis Doctoral, Departament d'Enginyeria Elèctrica, Universitat Politècnica de Catalunya, 1997
- [4] B. Qin, Q.Zhang, G.V. Barbosa-Cánovas, B.G.Swanson, P.D. Pedrow, *Pulsed Electric Field Treatment Chamber Design for Liquid Food Pasteurization Using a Finite Element Method*, Transactions of the ASAE, Vol. 38(2);557-565
- [5] R. Ribó, *GID User Manual*, CIMNE, 1997
- [6] F. Zárate, E. Oñate, *CALTEP: Programa para el Cálculo Transitorio de la Ecuación de Poisson*, CIMNE 1993
- [7] Jianning Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*, John Wiley & Sons, Inc., 1993
- [8] E. Oñate, *Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos. Análisis Estático Lineal*, 2ª Ed., CIMNE, 1995
- [9] C. W. Trowbridge, *An Introduction to Computer Aided Electromagnetic Analysis*, Vector Fields Ltd., 1990
- [10] O. C. Zienkiewicz & R. L. Taylor, *The Finite Element Method*, 4ª Ed. Mc Graw-Hill Book Company (UK), 1989
- [11] K. Preis, I. Bardi, O. Biro, C. Magele, W. Renhart, K. R. Richter, G. Vrisk, *Numerical Analysis of 3D Magnetostatic Fields*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 27, Nº. 5, September 1991

