

Introducción a la Optimización de Estructuras

**M. Soboleosky
G. Bugada
S. Oller**

Introducción a la Optimización de Estructuras

**M. Soboleosky
G. Bugeda
S. Oller**

Publicación CIMNE N°-213, Mayo 2002

INTRODUCCION A LA OPTIMIZACION DE ESTRUCTURAS

INDICE.

1. PROLOGO.
2. INTRODUCCIÓN.
3. EJEMPLOS INTRODUCTORIOS.
 - 3.1. Ejemplo 1
 - 3.2. Ejemplo 2
 - 3.3. Ejemplo 3
4. METODO GENERAL DE OPTIMIZACION.
5. APLICACIONES.
 - 5.1. Aplicación 1. Optimización de una biela.
 - 5.2. Aplicación 2. Optimización de un gancho.
 - 5.3. Aplicación 3a. Optimización de un tubo con presión interior.
 - 5.4. Aplicación 3b. Optimización de un tubo con presión interior.
6. EPILOGO.
7. BIBLIOGRAFÍA.

1. PROLOGO.

El presente apunte tiene como meta mostrar, de manera sencilla y conceptual, los objetivos y procedimientos de la optimización orientada a la ingeniería.

Es el resultado de una pasantía en el Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería de la Universidad Politécnica de Catalunya, bajo la dirección de los profesores Gabriel Bugeda y Sergio Oller.

2. INTRODUCCIÓN.

Según el diccionario la palabra óptimo/a es un adjetivo que significa “superlativo de bueno; sumamente bueno; que no se puede mejorar”, y optimizar es el verbo que quiere decir “mejorar un aparato, proceso o sistema”. En ingeniería no se emplea el término óptimo con el significado tan estricto de alcanzar algo que ya no se pueda mejorar, sino en el sentido optimista de lograr la mejor solución posible. Se busca siempre el resultado más bueno (máximo) o el menos malo (mínimo).

La optimización es una rama de la matemática aplicada que tiene utilidad, además de en la ingeniería, en muchos otros campos como la producción, los negocios, la ecología, la política, etc. Es decir tanto en áreas técnicas como humanísticas.

Todos hacemos permanentemente procesos de optimización a veces consciente y otras inconscientemente buscando el mejor resultado. Por ejemplo, cuando se planifica un viaje en auto se busca el mejor recorrido en el sentido de más rápido o más confortable, o más económico, o varias opciones simultáneamente. Supóngase que se quiere ir en un determinado auto y de la manera más rápida; entonces aparece un **OBJETIVO** que es hacer mínimo el tiempo de viaje para ese auto. Por otro lado están las **VARIABLES** que podrían ser distintos trayectos que lleven al mismo destino y **RESTRICCIONES** como respetar la velocidad máxima. Si se desechan otras alternativas como que los caminos no están todos en igual estado de

mantenimiento, que algunos son más transitados que otros, que pasan por más o menos pueblos, etc., resulta obvio en este caso que la solución óptima es tomar el camino más corto. Pero si en este caso tan sencillo comenzamos a considerar las distintas *VARIABLES* que no se tuvieron en cuenta y además que también se pueden modificar *PARAMETROS* del vehículo como andar con nafta o gas, el problema se complica y no se sabría con certeza qué hacer, salvo que se pudiera realizar el viaje varias veces modificando las variables, los parámetros y midiendo el tiempo que se tarda en cada combinación siempre respetando la velocidad máxima. Así se descubriría finalmente la solución de cuál es el viaje óptimo, es decir con qué auto y por qué camino el tiempo de viaje es el menor.

Se representa este ejemplo:

CASO	Camino	Auto	Velocidad	Tiempo
	VARIABLES	PARAMETROS	RESTRICC.	FUNC. OBJET.
1	B	gas	vel < 100km/h	20
2	B	nafta	vel < 100km/h	15
3	C	nafta	vel < 100km/h	18
4	A	nafta	vel < 100km/h	22
5	A	gas	vel < 100km/h	27
6	D	gas	vel < 100km/h	29
7	D	nafta	vel < 100km/h	28

Tabla 1

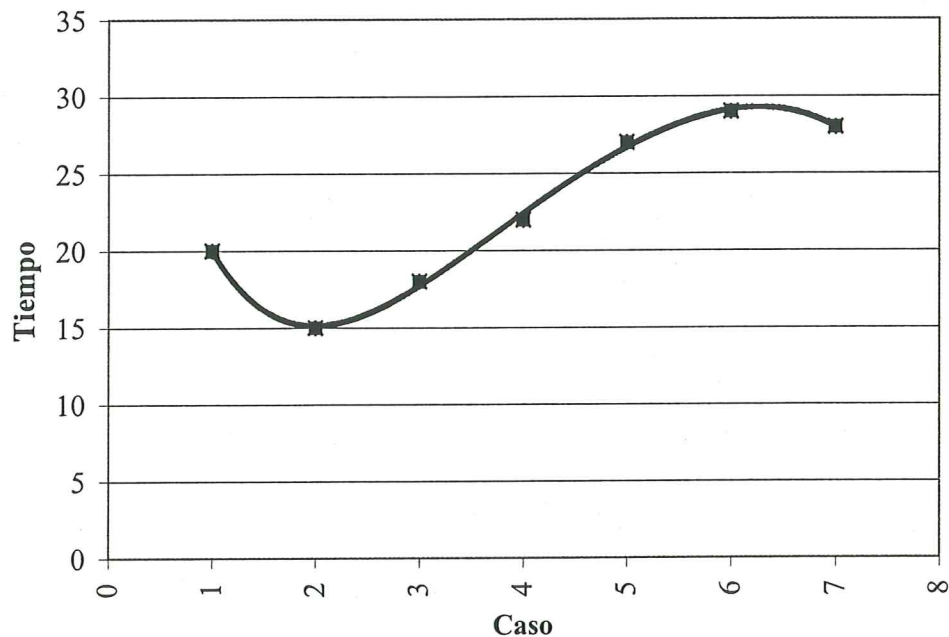


Figura 1

Como se desprende de la tabla 1 y se ve claramente en el gráfico 1 el viaje óptimo en el sentido de menor tiempo resulta por el camino B en auto a nafta.

Si se tuvieran muchas variables y parámetros se tendrían más puntos y se podría representarlos por una curva o función continua que pase próxima a todos los puntos. En términos matemáticos se ha establecido una función en donde se encuentra el objetivo buscado,

que es el valor mínimo de la misma; y el mínimo de una función es aquel punto donde la derivada de la función toma valor cero o gráficamente la pendiente a la curva se hace horizontal. El valor máximo también tiene pendiente horizontal pero no es el objetivo buscado. En resumidas cuentas se puede decir que el problema de optimización consiste en encontrar un punto donde la derivada de la función objetivo es nula.

Se aclara que el ejemplo presentado es un caso particular de optimización, que no responde a la generalidad, ya que en el eje de abscisas no tiene importancia el orden en que se coloquen los “casos” por lo cual se podrían ordenar de otras maneras y ver en forma inmediata el resultado menor como se ve en la figura 2.

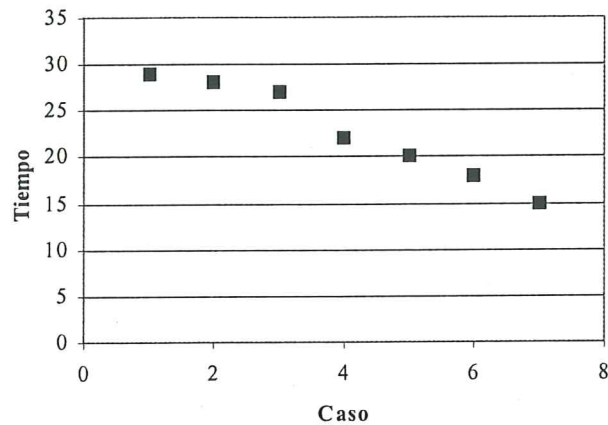


Figura 2

Otro comentario que cabe sobre el caso planteado es que en los problemas reales de optimización no se realiza el viaje en cada caso, es decir que no se miden realmente los resultados de las distintas soluciones posibles o se ensayan todos los casos, sino que se calculan o estiman a través de formulaciones o modelos matemáticos.

De este sencillo ejemplo se desprende que, esquemáticamente, en un problema de optimización tenemos unos valores de entrada o variables (camino), unos parámetros (características del vehículo), y un resultado o salida (tiempo menor) que se determina encontrando el mínimo de una función objetivo sujeta a determinadas condiciones o restricciones como se representa en la figura 3.

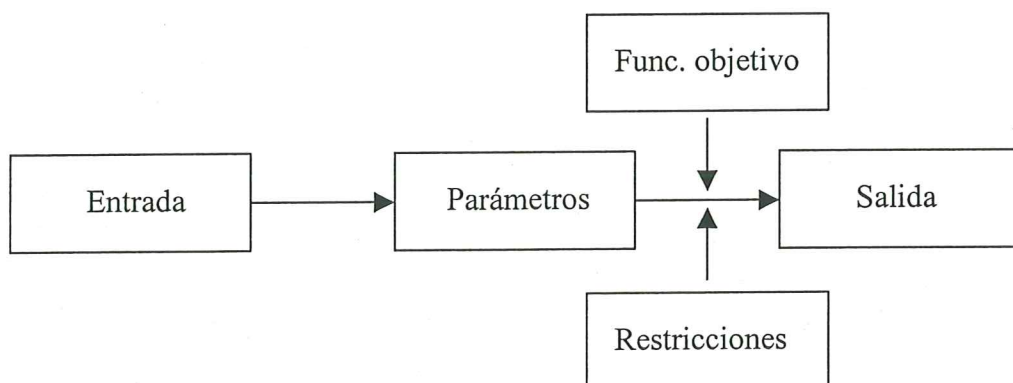


Figura 3

La ciencia matemática ha desarrollado la “Teoría de la Optimización” que propende al estudio cuantitativo de lo óptimo y los métodos para encontrarlo. Desde que la optimización busca la mejor manera de hacer las cosas, tiene aplicación en el mundo de la producción, negocios, política, etc., donde a veces pequeños cambios en eficiencia significan la diferencia entre el éxito o el fracaso.

Algunos conceptos de optimización han sido conocidos por los matemáticos desde hace siglos, pero el tedioso y voluminoso trabajo de cálculo que se requería demoraron su aplicación hasta mediados del siglo XX cuando apareció la computadora.

3. EJEMPLOS INTRODUCTORIOS.

Entrando en el terreno más específico, se verán algunos casos muy simples de optimización, donde todavía no es necesario entrar en la teoría matemática, para introducirse paulatinamente en el tema.

3.1. Ejemplo 1

Se dimensiona en un primer paso una viga en voladizo de sección rectangular uniforme con carga repartida con el objeto de optimizarla en un segundo paso para obtener la viga de menor cantidad de material. Para simplificar no se considera el esfuerzo de corte, ni el peso propio, ni problemas de estabilidad, solamente la flexión.

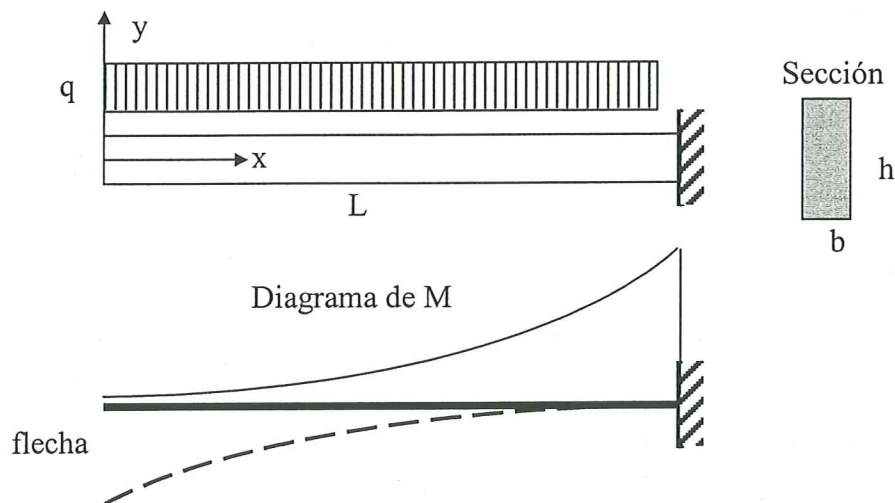


Figura 4

La ménsula es de un material que tiene tensión admisible σ_{adm} .

La sección es rectangular y su módulo resistente se calcula:

$$W = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

El momento flector a lo largo de la viga:

$$M_x = \frac{q \cdot x^2}{2}$$

En el empotramiento el momento máximo vale:

$$M_{m\acute{a}x} = \frac{q \cdot L^2}{2}$$

En el empotramiento, donde se encuentra el $M_{m\acute{a}x}$, debe cumplirse:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{M_{m\acute{a}x}}{W} = \frac{3 \cdot q \cdot L^2}{b \cdot h^2} \leq \sigma_{adm}$$

Adoptando fijo el ancho b , de la fórmula anterior se despeja la altura máxima necesaria:

$$H = L \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot q}{b \cdot \sigma_{adm}}}$$

El volumen de la pieza resulta:

$$V_1 = b \cdot H \cdot L = b \cdot L^2 \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot q}{b \cdot \sigma_{adm}}}$$

La flecha se calcula con la conocida fórmula que se encuentra en los manuales:

$$f = \frac{q \cdot L^4}{4.8 \cdot E \cdot J}$$

El momento flector disminuye desde el empotramiento en la medida que se desplaza hacia el origen de coordenadas, por lo que resulta evidente que no es necesaria la altura determinada para el momento flector máximo. Por lo tanto se calcula seguidamente la altura de la sección en cada punto para que la tensión en todos ellos sea máxima y aprovechar totalmente el material.

En cada sección debe cumplirse:

$$\sigma_x = \frac{M_x}{W_x} = \frac{3 \cdot q \cdot x^2}{b \cdot h_x^2} \leq \sigma_{adm}$$

De aquí se despeja

$$h_x = x \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot q}{b \cdot \sigma_{adm}}} = x \cdot K_1$$

Se observa que la altura h_x varía linealmente a lo largo de la viga desde un valor 0 cuando $x = 0$ hasta H cuando $x = L$. La viga óptima queda entonces como la de la figura 5.

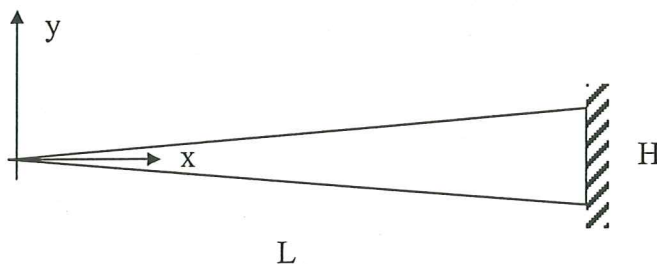


Figura 5

El volumen de la pieza en este caso resulta:

$$V_2 = \frac{b \cdot H \cdot L}{2} = \frac{b \cdot L^2 \cdot \sqrt{3 \cdot q / b \cdot \sigma_{adm}}}{2} = \frac{V_1}{2}$$

que es igual a la mitad del volumen del caso con altura constante.

La flecha de la viga de altura variable se puede obtener por métodos tradicionales:

$$f = \frac{q \cdot L^4}{2 \cdot E \cdot J_L} = \frac{4.8}{2} \cdot f_1 = 2.4 \cdot f_1 \quad (J_L = \text{inercia de la sección en el empotramiento})$$

y se aprecia que vale 2.4 veces la flecha de la viga con altura constante.

La viga de altura variable que se ha desarrollado, así como otros casos sencillos, se encuentran tratados en la bibliografía de Resistencia de Materiales y son conocidos como “sólidos de igual resistencia”, es decir que aprovechan al material en todas las secciones de la misma manera; o sea que se optimiza al máximo el consumo de material. Lo que no hay que perder de vista es que la deformación aumenta considerablemente de un caso al otro.

Se identifican ahora los términos empleados en el caso del viaje.

OBJETIVO: Lograr la viga de menor cantidad de material, o sea menor volumen.

VARIABLES: La altura h_x de la sección.

PARÁMETROS: La forma rectangular y el ancho de la sección que se decidieron mantener constantes. La carga es fija y el material se adopta.

SOLUCIÓN: Volumen mínimo $V_2 = \frac{b \cdot H \cdot L}{2} = \frac{b \cdot L^2 \cdot \sqrt{3 \cdot q / b \cdot \sigma_{adm}}}{2} = \frac{V_1}{2}$

RESTRICCIÓN: Las tensiones tienen que ser menores que la admisible en todas las secciones.

Como se ve, aquí no es necesario resolver el mínimo de la función objetivo porque en este caso tan sencillo la función es en realidad un punto que directamente responde al fin perseguido.

3.2. Ejemplo 2

Ahora se va a complicar un poco más el ejercicio de la ménsula buscando al igual que antes que tenga la menor cantidad de material sin que se supere la tensión admisible en ninguna sección pero que además la flecha máxima sea menor que un determinado valor límite, por ejemplo $L/200$ ó $L/300$.

Se siguen manteniendo los **PARÁMETROS** sección rectangular, ancho fijo, carga única y material predefinido, constantes, a lo que se agrega que la altura en el empotramiento sea H y la variación de altura sean curvas que varíen exponencialmente sin puntos angulosos. La **VARIABLE** seguirá siendo la altura h_x a lo largo del eje x . La **FUNCIÓN OBJETIVO** al igual que antes es el volumen de la viga, que debe ser mínimo; y las **RESTRICCIONES** ahora son dos: 1- mantener las tensiones menores que la admisible en toda la viga y 2- que la flecha sea menor que la límite.

En este caso ya no es tan sencillo encontrar la variación de la altura como antes ya que ésta puede modificarse de muchas maneras posibles y además para cada una hay que verificar que se cumpla la condición de flecha máxima además de la tensión.

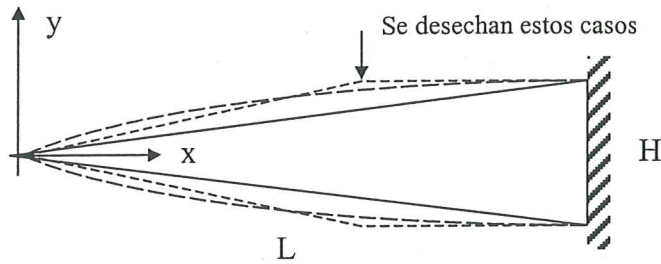


Figura 6

No hay una función que brinde automáticamente la variación de altura que haga mínimo el volumen como en el ejercicio previo. Pero si se define un parámetro que esté relacionado a la forma y a la variación de altura a lo largo del eje x, se puede vincular a través de este número al volumen y a las deformaciones y determinar cuál sería la solución óptima que simultáneamente cumpla con las restricciones de tensión y flecha.

La variación de altura se establece de la forma

$$h_x = H - H \cdot \left[\frac{(L-x)}{L} \right]^\alpha, \text{ donde } 1 \leq \alpha \leq \infty, \text{ para } 0 < x \leq L.$$

El exponente α es el parámetro que gobierna la forma y variación de altura de la ménsula en cada punto.

Para resolver el ejercicio se toman 4 casos, los dos límites y 2 intermedios.

Formas	α	h_x	Altura en L/2	Vol = $\beta \cdot H L b$	Flecha = $\delta \cdot q L^4 / (E J_L)$
	∞	$H - H \cdot \left[\frac{(L-x)}{L} \right]^\infty = H$	$1 \cdot H$	$1 \cdot \text{Vol}_{\text{rectang}}$	$0.208 \cdot \frac{q \cdot L^4}{E \cdot J_L}$
	3	$H - H \cdot \left[\frac{(L-x)}{L} \right]^3$	$0.875 \cdot H$	$\beta_2 \cdot \text{Vol}_{\text{rectang}}$	$\delta_2 \cdot \frac{q \cdot L^4}{E \cdot J_L}$
	2	$H - H \cdot \left[\frac{(L-x)}{L} \right]^2$	$0.75 \cdot H$	$\beta_3 \cdot \text{Vol}_{\text{rectang}}$	$\delta_3 \cdot \frac{q \cdot L^4}{E \cdot J_L}$
	1	$H - H \cdot \left[\frac{(L-x)}{L} \right]^1 = 0.5 \cdot x \cdot H$	$0.5 \cdot H$	$0.5 \cdot \text{Vol}_{\text{rectang}}$	$0.5 \cdot \frac{q \cdot L^4}{E \cdot J_L}$

Tabla 2

En función del parámetro α , que es el exponente de la variación de altura, se pueden determinar el volumen, con un coeficiente β que multiplica al volumen de la viga rectangular, y

la flecha, con otro coeficiente δ que multiplica a la flecha también de la viga rectangular. Con estos valores se representa el gráfico de la figura 7. Allí, en el eje horizontal, en vez de colocar el valor de α se coloca el valor asociado de la altura en la mitad de la ménsula con lo cual se evitan inconvenientes de representación y se le da más sentido físico a los valores. (se aclara que no está hecho con valores exactos, sino aproximados).

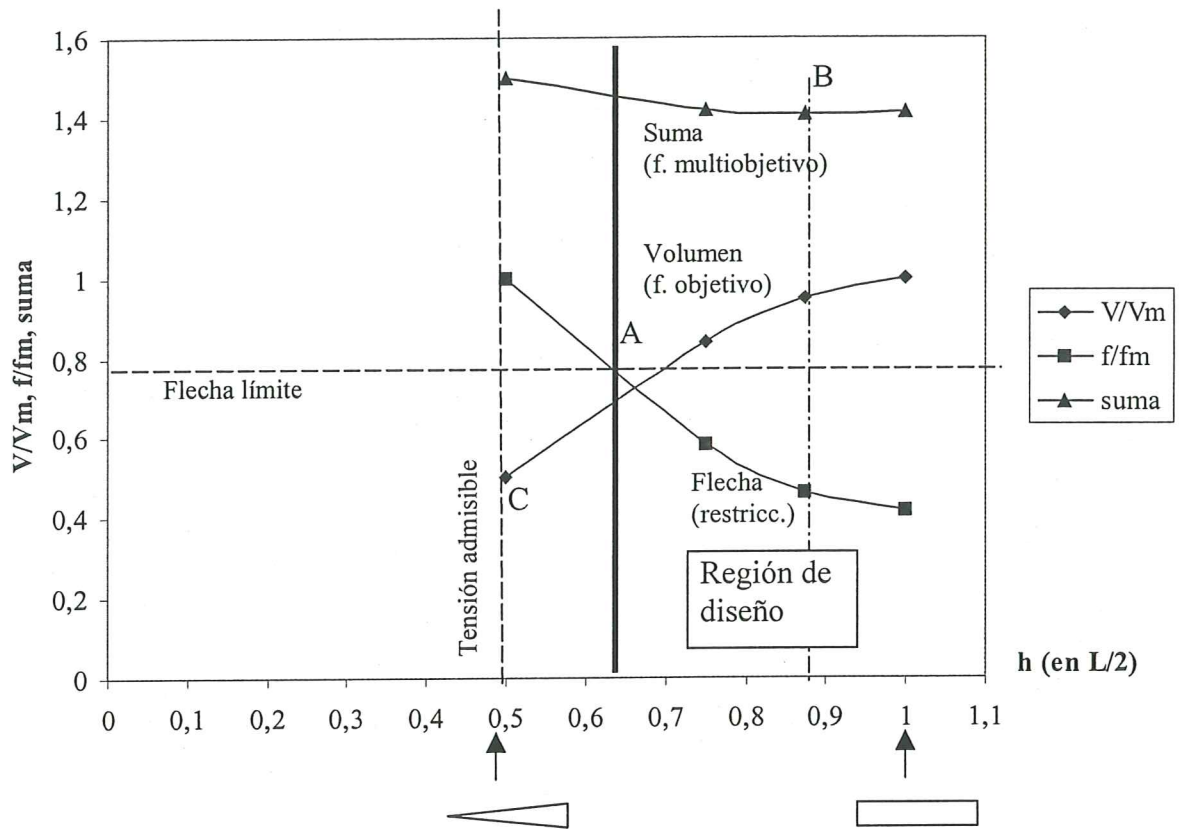


Figura 7

En el gráfico se agrega la función “suma de volumen + flecha” en donde se encuentra la solución que produce la menor flecha con el menor volumen (punto B que es el mínimo de la función). A este tipo de funciones, que combinan dos o más objetivos se las llama **FUNCIÓN MULTI OBJETIVO**. Además se traza una recta horizontal que indica el límite de la máxima flecha admisible que se haya adoptado ($L/200$, $L/300$, etc.), o sea que las vigas cuya flecha se encuentran por encima de la misma no verifican esa restricción. También se traza una recta vertical en correspondencia con la viga triangular, que es la geometría de menor volumen que se encuentra con todas sus secciones a la tensión admisible, por lo que las vigas que se ubican a la izquierda de esta recta tendrán algún punto con tensión superior a la admisible. En consecuencia queda definida un área, que es de la recta vertical que pasa por el punto A hacia la derecha, donde se encuentran los casos que cumplen todas las condiciones, que se denomina **REGIÓN DE DISEÑO**; y la solución óptima, en el sentido del menor volumen, es la que pasa justamente por el punto A. Si por ejemplo la restricción de flecha fuera más severa, es decir que baja la recta horizontal de flecha límite, el punto A con su recta gruesa vertical se desplazaría hacia la derecha y el voladizo óptimo en ese caso tendría mayor volumen. El punto C del gráfico es la solución hallada en el primer ejemplo donde la función objetivo es simplemente un punto en vez de una curva.

En el caso analizado se ha trabajado únicamente sobre las **DIMENSIONES** de la ménsula, dejando la **FORMA** prefijada como viga de alma llena y sección rectangular. Pero se

pueden encarar los problemas incluyendo la optimización de las formas, lo cual es mucho más complejo, y se obtendrían resultados diferentes. Para tener una idea de lo que se puede lograr con un “método de optimización de forma” se muestra en la figura 8 la solución de una ménsula con una fuerza aplicada en el extremo, caso similar al presente, publicado en (3).

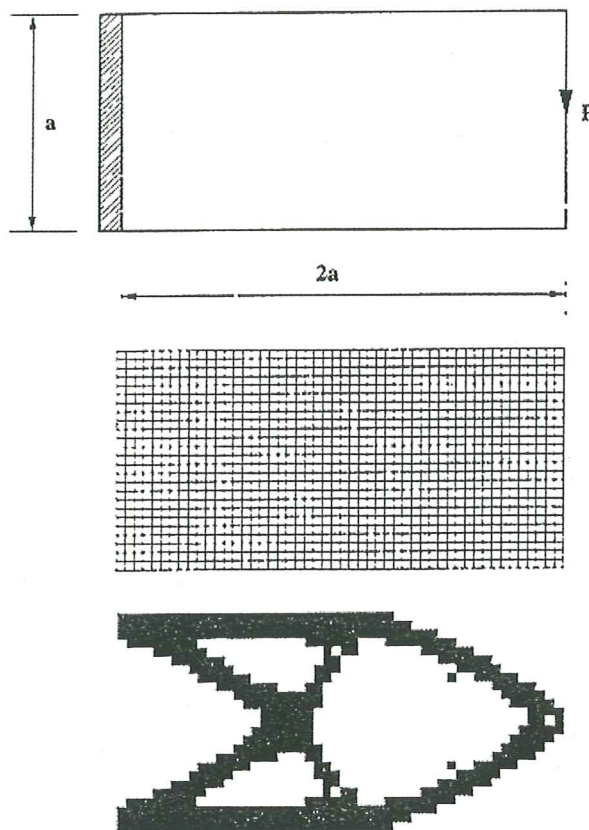


Figure 9 *Topology optimization using the artificial material model: (a) top: Initial design space (b) middle: FE idealization and (c) bottom: Optimum topology.*

Figura 8

La manera como se resuelven los casos como el publicado es a través de discretizar un espacio donde pueda entrar la forma y luego el programa, analizando sucesivamente la estructura por medio del método de elementos finitos, va eliminando los elementos que tienen tensiones nulas o muy bajas, con lo cual se redistribuyen las tensiones, hasta llegar a la que tiene menor cantidad de material. En un proceso posterior, con programas de ajuste, se obtiene una forma continua.

3.3. Ejemplo 3

Se presenta otro caso del campo de la ingeniería, aunque no sea específicamente de estructuras, que es un ejemplo de aplicación de los criterios de optimización a la elaboración de mezclas de hormigón. Aquí se pondrá de manifiesto la presencia de dos variables.

Supóngase que se busca dosificar el hormigón más económico para una determinada obra, es decir las cantidades óptimas de cemento, piedra, arena y agua. En este caso la resistencia ya está definida por proyecto. La arena y la piedra por razones prácticas se emplean las normales

de la zona. El tamaño máximo del agregado se establece en función de las dimensiones y armaduras de la pieza a hormigonar. Por lo tanto las variables que quedan por definir son el asentamiento y las proporciones de piedra y arena.

Se ordenan los conceptos de acuerdo a como se hecho en los ejemplos anteriores.

FUNCIÓN OBJETIVO:

Lograr las proporciones de los distintos componentes más económica, es decir de menor costo. La función costo es la suma de las cantidades en kilos de cemento, piedra, arena y agua por sus precios unitarios. Se adopta que el agua prácticamente no tiene valor. Por lo tanto

$$\text{COSTO} = C(\text{kg}) * \$_{\text{cemento}} + G(\text{kg}) * \$_{\text{piedra}} + S(\text{kg}) * \$_{\text{arena}}$$

VARIABLES DE DISEÑO:

1- Asentamiento o grado de fluidez.

Depende fundamentalmente del tamaño máximo del agregado y de la cantidad de agua. Dado un tamaño máximo del agregado, en la medida que se modifica el asentamiento varía la cantidad de agua necesaria. En la figura 9 se indica la vinculación entre los distintos parámetros.

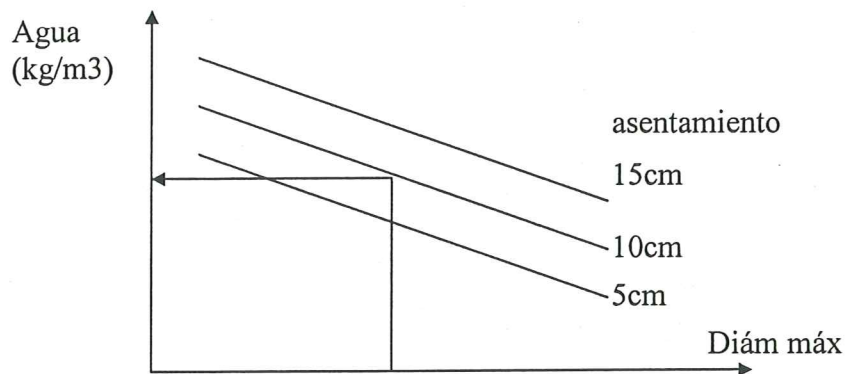


Figura 9

2- Proporciones de piedra y arena.

El agregado fino y grueso se deben combinar para obtener un esqueleto granular compacto.

Arena $S(m^3) = \alpha \cdot V_{\text{agregados}}$ $S(kg) = \alpha \cdot V_{\text{agregados}} / PE_{\text{arena}}$

Piedra $G(m^3) = \beta \cdot V_{\text{agregados}}$ $G(kg) = \beta \cdot V_{\text{agregados}} / PE_{\text{piedra}}$

Condición que se debe cumplir: $\alpha + \beta = 1$

RESTRICCIONES:

Las proporciones de piedra y arena deben ser tales que la mezcla de agregados se encuentre dentro de una zona reglamentaria (A-B) como se muestra esquemáticamente en las curvas granulométricas de la figura 10.

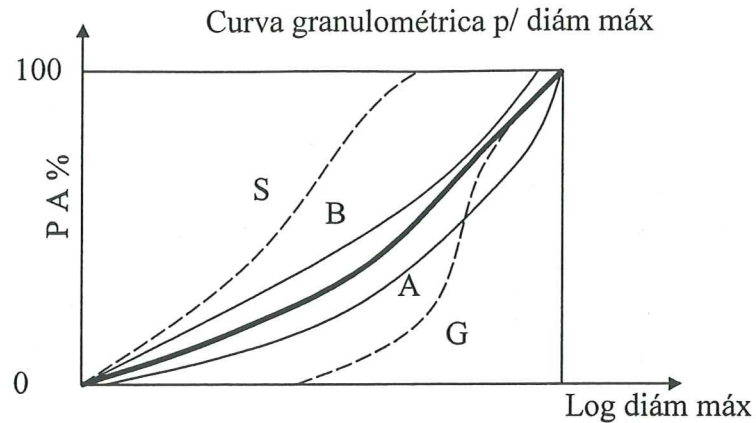


Figura 10

PARAMETROS:

1- Resistencia media del hormigón.

El valor característico de la resistencia queda definido en el proyecto estructural, y a partir de él se adopta una tensión media para dosificar. En función de la resistencia media se determina la relación agua/cemento por una de las muchas fórmulas que las vinculan de acuerdo a la “Ley de Abrams”, por ejemplo:

$$\sigma_{bm} = \frac{18}{a/c} - 8$$

$$a/c = \frac{18}{\sigma_{bm} + 8}$$

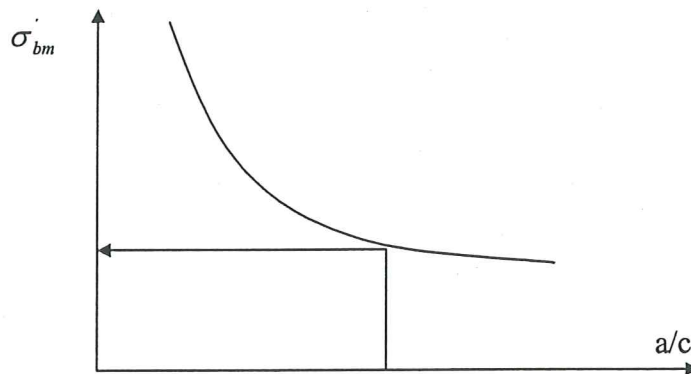


Figura 11

2- Agregado grueso.

Se adopta un tipo de agregado común en la zona, como piedra partida, del tamaño máximo definido por las dimensiones de la estructura y separación entre armaduras. La piedra tiene un “módulo de finura “ que la caracteriza y un peso específico.

3- Agregado fino.

Se adopta un tipo de arena común en la zona, como arena mediana. La arena tiene un “módulo de finura “ que la caracteriza y un peso específico.

Para resolver el ejercicio es necesario proyectar distintas mezclas de hormigón para los parámetros definidos, cambiando las variables y adjudicando precios estimativos a los distintos materiales.

Los pasos a seguir son los siguientes:

1- Se adopta un asentamiento (variable de diseño) y se determina la cantidad de agua correspondiente.

2- Se calcula la cantidad de cemento para el agua adoptada $C = \frac{A}{a/c} (kg)$

3- Se calcula el volumen total de agregados $V_{agregados} = 1000dm^3 - (\frac{C}{PE_{cem}} + Agua + aire)$

4- Se determinan las proporciones de arena y piedra (α y β) que cumplan la condición reglamentaria (variable de diseño y restricción).

5- Se calculan las cantidades de piedra y arena

$$G(kg) = \beta \cdot V_{agregados} / PE_{piedra}$$

$$S(kg) = \alpha \cdot V_{agregados} / PE_{arena}$$

6- Definidas las cantidades de los componentes se multiplican por los precios unitarios obteniéndose el costo de cada una de las mezclas (función objetivo).

7- se busca el valor mínimo de la función objetivo, que es el resultado óptimo.

Se grafica la función objetivo (Costo) en función de las 2 variables (Asentamiento, arena/piedra) donde se observa que, en este ejemplo, la solución óptima (costo menor) tiene asentamiento 5cm y relación arena/piedra 0.45, lo que significa que del volumen total de agregados el 45% es arena y el 55% es piedra.

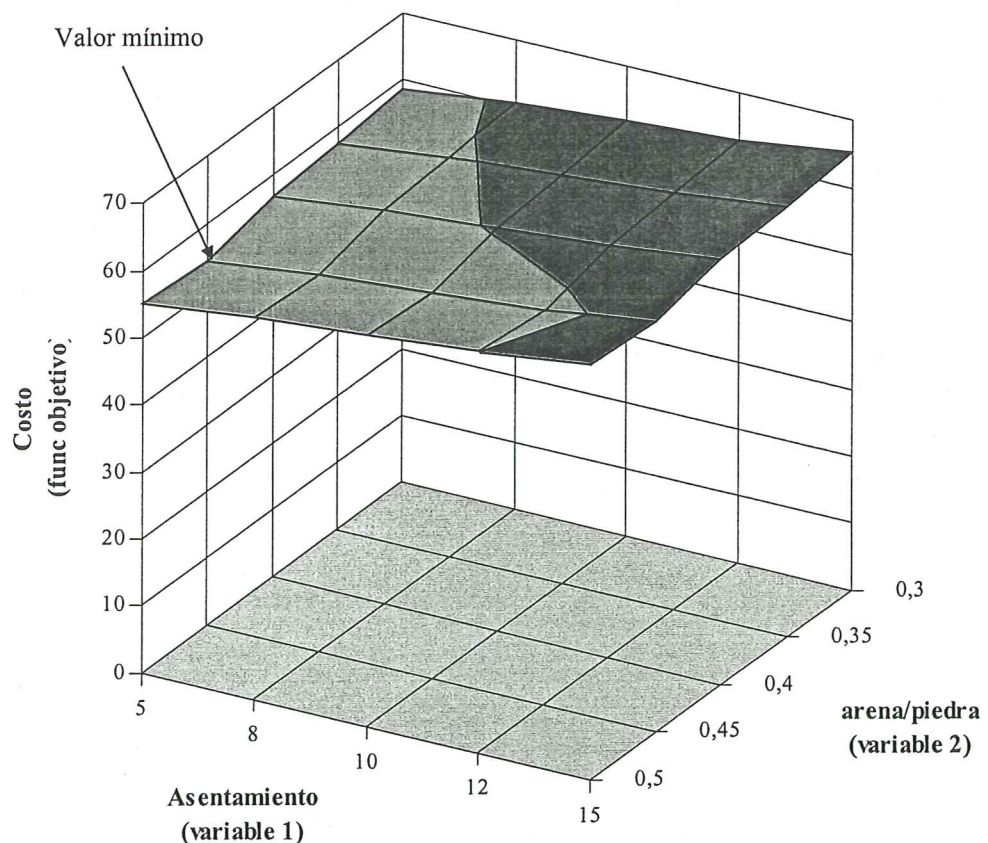


Figura 12

4. METODO GENERAL DE OPTIMIZACION.

Por lo visto se desprende que resolver problemas de optimización no es una tarea sencilla. Se requiere conocer profundamente el problema para plantear correctamente las variables de diseño, las restricciones y la función objetivo. Luego, para encontrar la solución se necesita una importante cantidad de trabajo de cálculo ya que son procesos iterativos en donde se busca el valor mínimo de las numerosas soluciones posibles.

El planteo general de optimización para estructuras consiste en lo siguiente.

Se tienen o adoptan elementos del problema que no van a variar permaneciendo constantes. A éstos se los llama **PARÁMETROS FIJOS** y se agrupan en un vector $\underline{p} = (p_1, p_2, \dots, p_k)$ (por ejemplo el ancho del voladizo)

Por otra parte hay elementos que van a cambiar de valor, que se denominan **VARIABLES DE DISEÑO** y están contenidas en otro vector $\underline{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ (por ejemplo la altura del voladizo)

Aparecen una serie de **CONDICIONES** o **RESTRICCIONES**, como la limitación de tensiones o deformaciones, que dependen de \underline{X} y \underline{p} y se expresan en la forma de una función $g(\underline{X}, \underline{p}) \leq 0$. (por ejemplo la flecha máxima del voladizo)

Habitualmente son condiciones de **COMPORTAMIENTO** o de **DISEÑO**. Las primeras son aquellas relacionadas con los estados límites de la estructura y no pueden infringirse sin poner en peligro la estabilidad o funcionalidad de la misma. Se pueden expresar

$\sigma(\underline{X}, \underline{p}) \leq \sigma_{\text{máx.}}$ (tensiones)
 $u(\underline{X}, \underline{p}) \leq u_{\text{máx}}$ (desplazamientos)

Las segundas dependen de criterios estéticos o técnicos y no están vinculadas al comportamiento resistente de la estructura.

$\underline{X}_{\text{mín}} \leq \underline{X} \leq \underline{X}_{\text{máx}}$ (por ejemplo mantener algunas dimensiones dentro de ciertos límites por motivos estéticos o reglamentarios. Caso de la combinación de agregados).

Se plantea una expresión que expresa las propiedades que se desean perfeccionar llamada **FUNCIÓN OBJETIVO** que depende de las variables de diseño y los parámetros

$F = f(\underline{X}, \underline{p})$ (por ejemplo el volumen mínimo)

Entonces se plantea al diseño óptimo como conseguir un conjunto de valores de las variables x contenidas en el vector \underline{X} , que cumpla

	$F = f(\underline{X}, \underline{p}) \rightarrow \text{mínimo (ó máximo)}$
Sujeto a	
	$g_j(\underline{X}, \underline{p}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m$
	$x_{\text{mín}} \leq x_i \leq x_{\text{máx}} \quad i = 1, \dots, n$

La resolución de esta clase de planteos no es conocida para el común de los profesionales, sino que está en el terreno de los especialistas.

Como se manejan gran cantidad de variables y parámetros el planteo se hace en forma matricial y numérica.

Para resolver el sistema planteado existe una gama de métodos matemáticos que a grandes rasgos buscan, mediante procesos iterativos, el mínimo de la función objetivo que cumpla con las restricciones. Cuando se buscan valores mínimos en una función pueden aparecer mínimos locales, que no serían la solución óptima del problema, y el mínimo absoluto. Siempre existe una cierta incertidumbre sobre de que mínimo se trata. Para clarificar la idea, en el gráfico de la figura 13 se representa un caso de una sola variable.

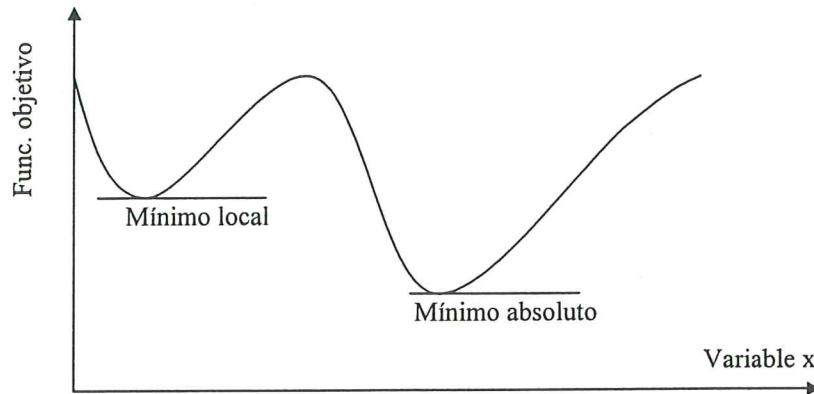


Figura 13

Para hacerse una idea más concreta de un problema de optimización de una sola variable, supóngase una estructura sencilla donde se busca el menor costo modificando la sección. Si la sección aumenta, aumentaría el valor por mayor consumo de material, pero si en cambio la sección disminuye el costo podría también aumentar por la incidencia del mayor trabajo de elaboración. Entre ambos extremos la función pasaría por un mínimo, en este caso absoluto, que sería la solución óptima del caso.

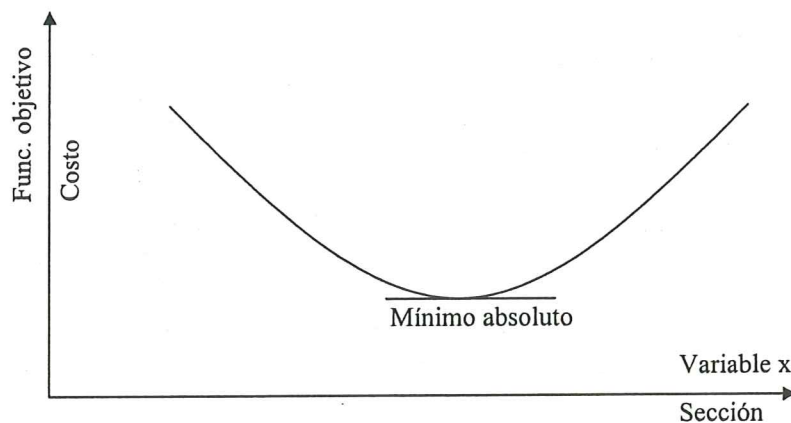


Figura 14

Cuando los problemas son más complejos, con mayor cantidad de variables, la representación deja de ser en un plano para pasar a 3 dimensiones, si hay 2 variables, y luego a más. Ejemplo de esto es el ejercicio de dosificación óptima del hormigón. En la figura 15 se representa en el plano una superficie a través de sus curvas de nivel que son valores constantes de la función objetivo.

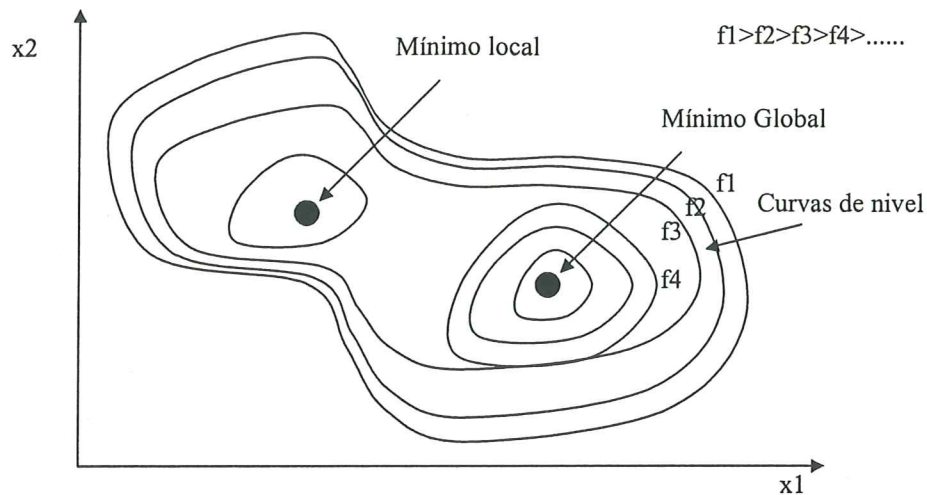


Figura 15

Una estructura general de algoritmo de optimización puede ser la siguiente:

- 1º- Se elige una primera solución \underline{X}_0 y se resuelve el problema $F = f(\underline{X}, \underline{p})$.
- 2º- Se establece un contador K que varía con cada iteración.
- 3º- Se calcula un incremento $\Delta \underline{X}$.
- 4º- Se vuelve a calcular la función objetivo $F = f(\underline{X}, \underline{p})$ en $\underline{X} + \Delta \underline{X}$
- 5º- Se comprueba si hay convergencia, es decir si la solución va hacia un mínimo.
- 6º- Si se llega a un mínimo para, sino se vuelve al punto 2, y así sucesivamente.

Durante este proceso se suele estudiar la **SENSIBILIDAD**, que consiste en analizar la dependencia que tiene la función objetivo con relación a las variables. Esto se hace calculando las derivadas parciales de la función objetivo respecto de las variables de diseño y sirve, entre otras cosas, para apreciar cuales son aquellas variables que más influyen en la función y cuales menos. Las variables cuyas derivadas sean más grandes serán las que más interesan.

5. APLICACIONES.

Basados en la metodología general descrita se han resuelto gran cantidad de problemas principalmente de la industria mecánica, automotriz, aeroespacial, que son los campos donde mayor aplicación tiene, porque el estudio de optimización y las formas no convencionales que surgen se justifican cuando hay una producción en serie o una necesidad importante de reducir pesos o consumo de materiales. En el campo de las obras civiles hay casos concretos de aplicación a presas y torres de transmisión de energía.

Seguidamente se muestran tres aplicaciones de optimización a piezas, publicadas en revistas científicas. Los estudios fueron realizados con modelos planos de tensiones, buscando minimizar el peso o volumen.

- a) Biela sometida a carga axial⁽⁴⁾. Partiendo de la primera forma dibujada en la figura 16, el algoritmo converge luego de 11 iteraciones pasando por las etapas intermedias que se muestran. Dada la simetría de la biela se representa solamente la mitad de la misma.
- b) Gancho de donde cuelga una carga⁽⁵⁾. Partiendo de la primera forma dibujada en la figura 17, el algoritmo converge en 130 iteraciones con las etapas intermedias que se muestran.

c) Sección transversal de un tubo sometido a presión interior uniforme donde se mantiene el radio interior⁽⁴⁾. En este último caso se parte de dos propuestas iniciales diferentes: primero sección circular, que es la más lógica (figura 18); y segundo cuadrada (figura 19) donde se observa que el programa va modificando la forma en sucesivas iteraciones (figuras 20 y 21) hasta llegar a la forma circular. En ambos casos se representa un cuarto de la sección del tubo por simetría. Cuando se parte de la sección circular el programa converge luego de siete iteraciones, mientras que cuando se parte de la sección cuadrada se necesitan dieciséis iteraciones para converger.

5.1. Aplicación 1. Optimización de una biela.

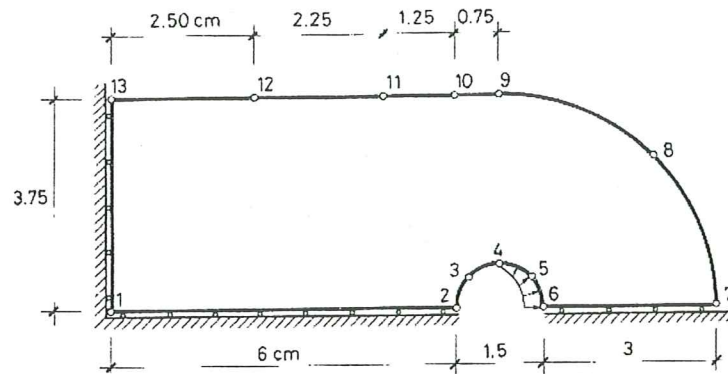
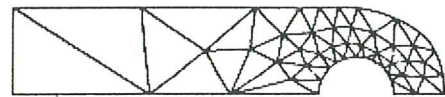
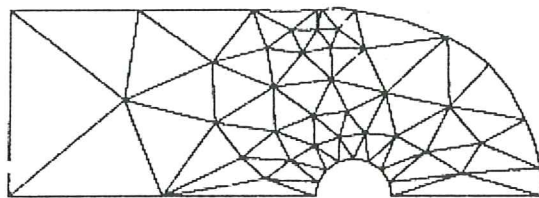


Figure 13. Connecting rod optimization problem: initial shape and parametrization.

Geometry for the iteration: 0

Geometry for the iteration: 1



Geometry for the iteration: 2

Geometry for the iteration: 4



Geometry for the iteration: 6

Geometry for the iteration: 8



Geometry for the iteration: 10

Geometry for the iteration: 11



Figure 14. Connecting rod optimization problem: successive meshes and designs

Figura 16

5.2. Aplicación 2. Optimización de un gancho.

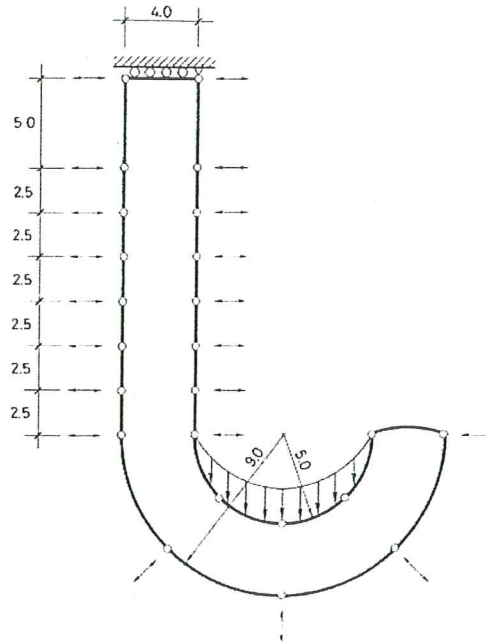


Fig. 3. Hook optimization problem. Initial shape and parametrization.

Optimum shape design problems

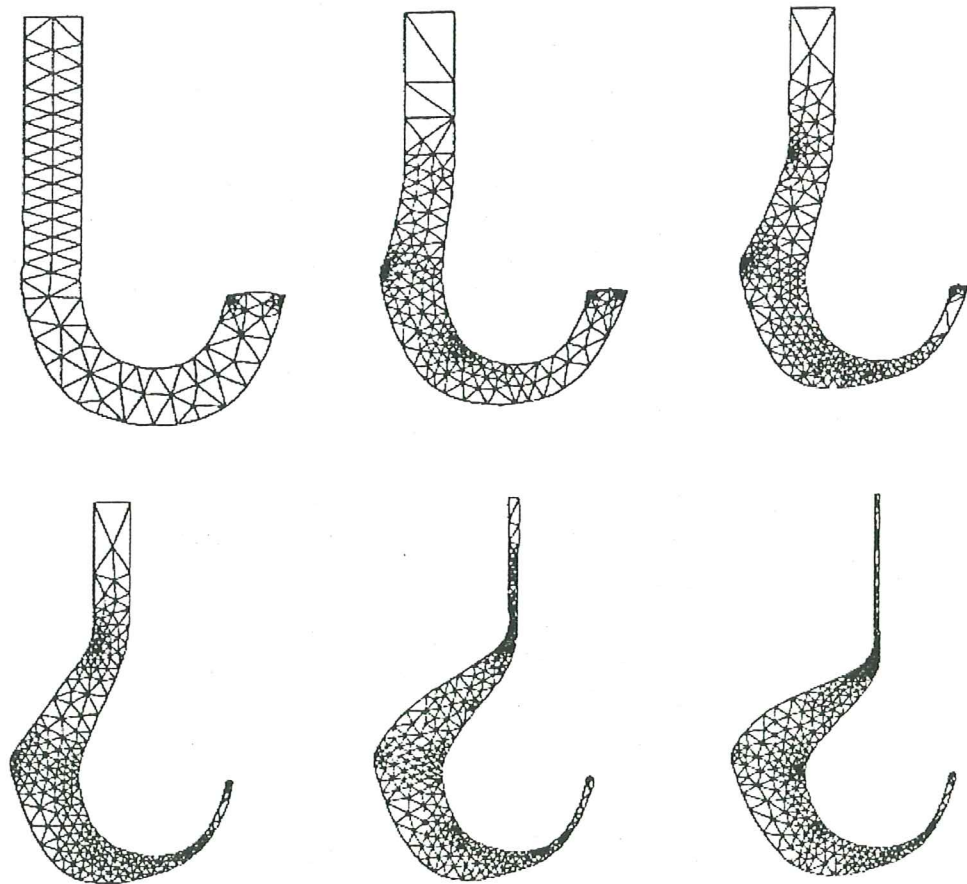


Fig. 4. Hook optimization problem. Successive meshes and designs for iterations 0, 20, 40, 60, 90 and 130.

Figura 17

5.3. Aplicación 3a. Optimización de un tubo con presión interior.

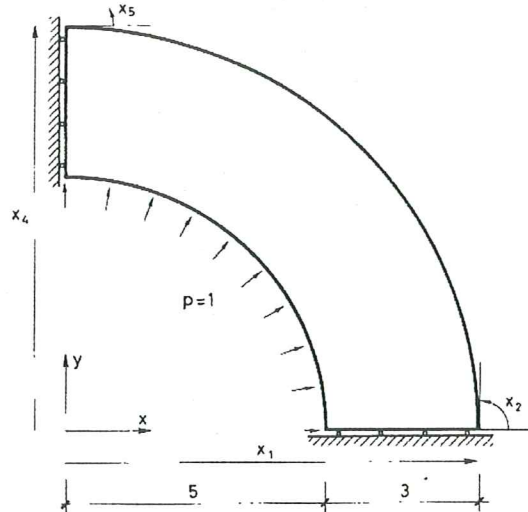
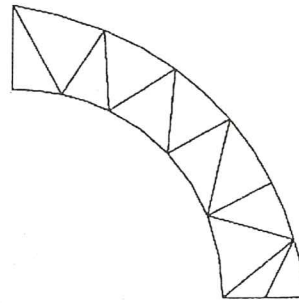
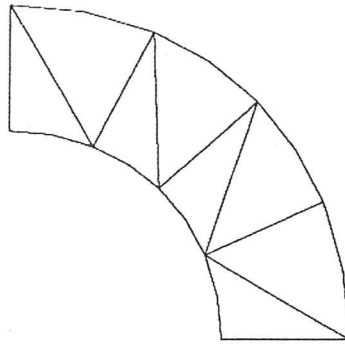


Figure 3. Pipe cross-section optimization problem, first case: initial shape and parametrization

AUTOMATIC ADAPTIVE REMESHING

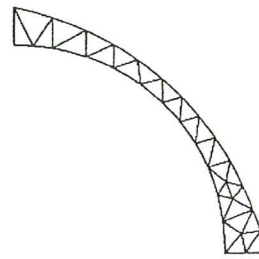
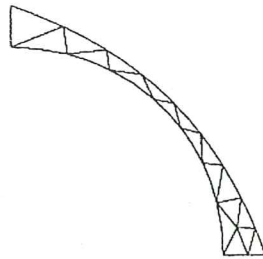
Geometry for the iteration: 0

Geometry for the iteration: 1



Geometry for the iteration: 2

Geometry for the iteration: 3



Geometry for the iteration: 4

Geometry for the iteration: 7

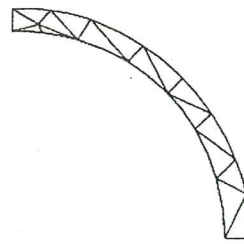
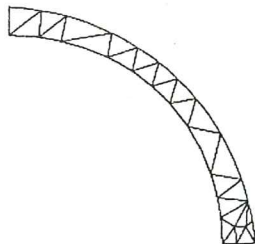


Figure 4. Pipe cross-section optimization problem, first case: successive meshes and designs

Figura 18

5.4. Aplicación 3b. Optimización de un tubo con presión interior.

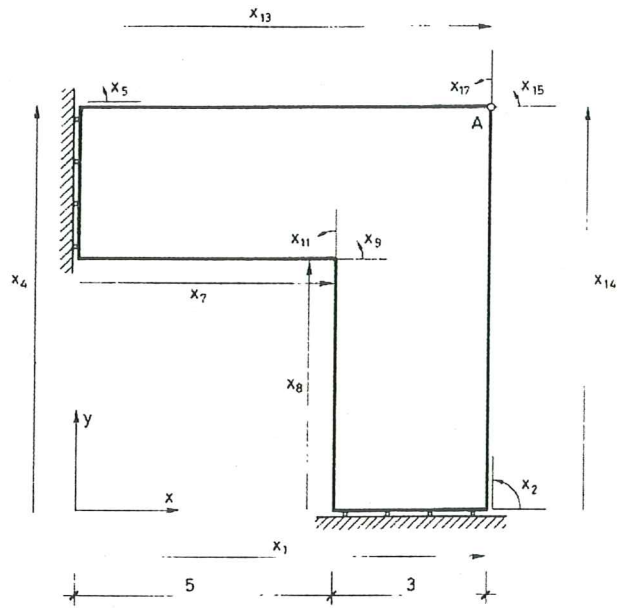
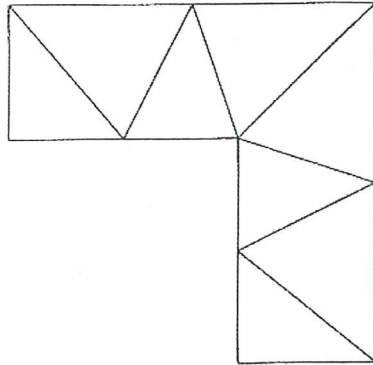


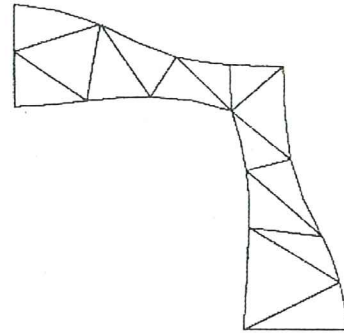
Figure 8. Pipe cross-section optimization problem, second case: initial shape and parametrization

Figura 19

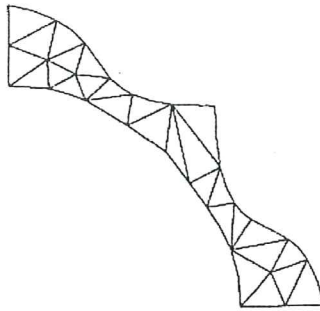
Geometry for the iteration: 0



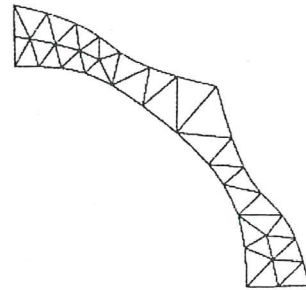
Geometry for the iteration: 1



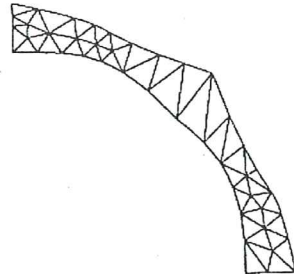
Geometry for the iteration: 2



Geometry for the iteration: 3



Geometry for the iteration: 4



Geometry for the iteration: 5

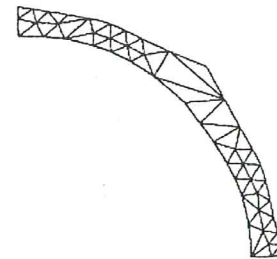
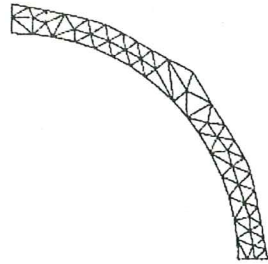


Figure 9a. Pipe cross-section optimization problem, second case: successive meshes and designs

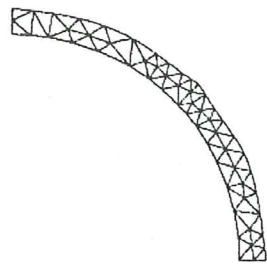
Figura 20

AUTOMATIC ADAPTIVE REMESHING

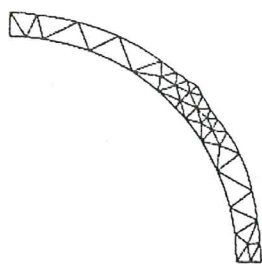
Geometry for the iteration: 6



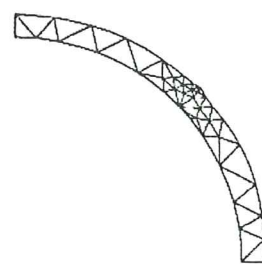
Geometry for the iteration: 8



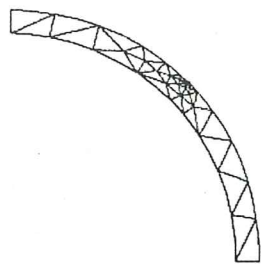
Geometry for the iteration: 10



Geometry for the iteration: 12



Geometry for the iteration: 14



Geometry for the iteration: 16

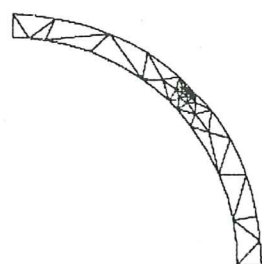


Figure 9b. Pipe cross-section optimization problem, second case: successive meshes and designs

Figura 21

6. EPILOGO.

Se ha intentado mostrar a través de estas páginas, la importancia, utilidad y funcionamiento de los métodos de optimización aplicados a la ingeniería.

La optimización es una herramienta muy poderosa que ayuda a resolver de manera más eficiente gran cantidad de problemas, no solo técnicos como la mejor forma de una estructura, o una pieza mecánica, sino también en campos muy variados y cercanos a nosotros, donde a veces no sabemos que se ha empleado. Algunos ejemplos de ello son procesos industriales, ordenamiento de tránsito, elaboración de alimentos, sistemas de distribución, políticas sociales, etc.

En todos los casos es necesario conocer profundamente el problema que se busca mejorar para poderlo plantear en términos racionales y matemáticos, así como las condiciones y limitaciones a que debe someterse.

Resolver concretamente un problema de optimización requiere de personas altamente capacitadas. Salvo para casos específicos en industrias automotrices, aeroespaciales, metalmecánicas, no hay todavía difundidos programas comerciales de optimización al alcance de los profesionales. Lo que sí se encuentra implementado en algunos software de cálculo de estructuras de barras, son subrutinas de optimización de dimensionado de secciones de acuerdo a bibliotecas de perfiles comerciales, pero que no resuelven el problema en toda su dimensión ya que se limitan a brindar la menor sección que cumple con las condiciones de resistencia, deformación y estabilidad.

Se ve de los ejemplos mostrados que haciendo un trabajo intensivo de cálculo, es decir, evaluando varias veces la función objetivo cambiando las variables por sus valores posibles, se obtiene una cantidad de resultados de los cuales el menor es el óptimo. Esta tarea la hace habitualmente el profesional, primero a través de un ejercicio intelectual de diseño y segundo con varios predimensionados. Pero cuando los problemas son más complejos y se busca una solución que efectivamente sea la mejor que se puede alcanzar no queda otra opción que recurrir al método de optimización. El resultado óptimo no siempre concuerda con la solución intuitiva del problema sino que pueden aparecer soluciones originales que costarían demasiado esfuerzo lograrlas por procedimientos menos científicos.

En el campo de las estructuras, el objetivo que comúnmente se busca es que tengan la menor cantidad de material o peso, que se traduce en el menor volumen de la obra. Esto no siempre está asociado a la obra más económica o de menor costo porque aquí entran también a jugar los problemas constructivos, mano de obra, etc. Por este motivo los casos concretos donde la optimización tiene mayor aplicación es en las estructuras repetitivas o de gran consumo de materiales. Torres para líneas aéreas de alta tensión, puentes, presas, traza de cables de pretensado, etc son algunos de los casos donde efectivamente se ven las ventajas comparativas de aplicar estos métodos.

6. BIBLIOGRAFIA.

- (1) HERNÁNDEZ IBAÑEZ, Santiago – *Métodos de diseño óptimo de estructuras*. Colección SEINOR N°8 Colegio de Caminos, Canales y Puertos, Demarcación de Argón, editado por PARANINFO S.A. 1990.
- (2) WILDE D. and BEIGHTLER Ch – *Foundations of optimisation*. Prentice - Hall, Inc. 1967.
- (3) J. SIENZ, E. HINTON, G. BUGEDA and S. BULMAN – *Some studies on integrating topology and shape optimisation*, publicado en *Innovative Computational Methods for Structural Mechanics*, edited by M. Papadrakakis and B.H. V. Topping, Saxe – Coburg Publications (1999).
- (4) BUGEDA G., OLIVER J. – *A general methodology for structural shape optimization problems using automatic adaptive remeshing*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 36, 3161-3185 (1993).
- (5) BUGEDA G., OÑATE E. – *A methodology for adaptive mesh refinement in optimum shape design problems*. *Computing Systems in Engineering*, vol. 5, N° 1, pp. 91-102 (1994).