

Método sin red para termoelasticidad lineal basado en propagadores

Enrique Pardo

INTEMA-Facultad de Ingeniería
Universidad de Mar del Plata
Juan B. Justo 4302
7600 Mar del Plata, Argentina
Tel.: 54-223-481 66 00 , Fax: 54-223-481 00 46
e-mail: epardo@fimdp.edu.ar

Resumen

Se describe una formulación de la termoelasticidad lineal basada en propagadores, que se presta naturalmente a implementaciones computacionales “sin red”. Ello es porque, a diferencia de las formulaciones débiles, no requiere integrales sobre el dominio de cálculo. Asimismo, y a diferencia de las formulaciones fuertes, no requiere el cálculo de las derivadas segundas de las funciones de forma. Esto último torna atractivo al método para ser utilizado con métodos de interpolación de elevado orden de continuidad, tal como Mínimos Cuadrados Móviles, donde el cálculo de derivadas es la etapa más costosa del cómputo. En la presente implementación se utilizan funciones de interpolación sumamente sencillas (ajuste de polinomios cuadráticos en torno a cada nodo), con la que se obtienen resultados suaves, tanto en desplazamientos como en tensiones, y buena precisión, no requiriéndose alisado posterior de la solución.

MESHLESS METHOD FOR LINEAR THERMOELASTICITY BASED ON PROPAGATORS

Summary

We describe a formulation of linear thermoelasticity based on propagators which lends itself to meshless computational implementations. This stems from the fact that unlike weak formulations, it does not require integrals over the domain. Also, unlike strong formulations it does not involve the calculation of second order derivatives of shape functions. In the present implementation we use a very simple interpolating scheme (second degree polynomial fit around each node) which yields quite accurate results, not requiring postprocessing for smoothing.

INTRODUCCIÓN

En los últimos años se han desarrollado diversos métodos sin red, con el objeto de evitar el uso de mallas - tal como se hace en elementos finitos - y los inconvenientes que ello acarrea en ciertos casos. Una descripción actualizada del estado del arte en ese tema puede hallarse en Belytschko *et al.*¹. En esencia, esta creciente familia de métodos consiste en efectuar la aproximación enteramente en términos de un conjunto de nodos y una descripción del contorno, eliminando la necesidad de generar una malla y sus conectividades asociadas.

Cuando se usan formulaciones débiles (p.ej. trabajos virtuales), la mayoría de los métodos requieren de todos modos una malla de fondo para realizar las integraciones. Esto ocurre por ejemplo al usar diversas Particiones de la Unidad (PU)², Mínimos Cuadrados Móviles (MCM)^{3,4}, $h-p$ clouds⁵, etc. En el Método de Elementos Naturales (MEN)⁶, en cambio, la integración se realiza sobre la triangulación de Delaunay en la que se apoya el esquema de interpolación. Alternativamente, en los métodos de partículas tales como Smooth Particle Hydrodynamics⁷ y Reproducing Kernel Particle Methods⁸, la aproximación se construye en una ventana en torno a cada nodo por lo que no se requiere una malla de fondo para integrar. Sin embargo, al igual que las formulaciones fuertes, estos son en general menos precisos, necesitan de esquemas de estabilización y requieren pos procesamiento para suavizar la solución.

En este trabajo se describe una formulación de elasticidad lineal en términos de una integral de camino (IC), que se presta naturalmente para implementaciones computacionales sin red. Ello emana de que, a diferencia de los principios variacionales y formulaciones débiles en general, no hace referencia a integrales de volumen en todo el dominio. Asimismo, a diferencia de las formulaciones fuertes, no se requiere computar derivadas del mismo orden que la ecuación diferencial. Dado que la IC no presupone continuidad del campo de desplazamiento a través de todo el dominio, aun aproximaciones relativamente rudimentarias dan resultados satisfactorios y sumamente suaves, eliminando la necesidad de post-procesamiento.

EL PROPAGADOR PARA ELASTOSTÁTICA LINEAL

Para simplificar la exposición, consideremos primeramente la elastostática lineal e isótropa en ausencia de fuerzas de volumen y autodeformaciones (que se introducirán más adelante). El campo de desplazamiento satisface las ecuaciones de Navier

$$\mu \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_\beta^2} + (\lambda + u) \frac{\partial^2 u_r}{\partial x_\alpha \partial x_\gamma} = 0 \quad (1)$$

Aquí usamos las constantes de Lamè λ y μ por comodidad e invocamos la convención de supresión del símbolo sumatoria en índices griegos repetidos. Postulamos entonces que la solución de la ecuación (1) equivale a la solución asintótica

$$\mathbf{u}_{\alpha(x)} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathbf{u}_{\alpha(x,\tau)} \quad (2)$$

donde $\mathbf{u}_{(x,\tau)}$ depende del campo de desplazamientos antes de aplicar las cargas $\mathbf{u}_{(x,0)}$ del siguiente modo

$$\mathbf{u}_{\alpha(x,\tau)} = \int \Delta_{(x,y,\tau)}^{\alpha\beta} \mathbf{u}_{\beta(y,0)} d^3y \quad (3)$$

Llamaremos al operador matricial $\Delta_{x,y,\tau}$ *propagador elástico*, por analogía formal con los propagadores usados en teoría cuántica de campos^{10,11}. Obsérvese que el planteo implícito en las ecuaciones (2) y (3) es que el campo “inicial” $\mathbf{u}_{(x,0)}$ “difunde”, transformándose en el campo $\mathbf{u}_{(x,\tau)}$ a “tiempo” τ . Es decir, este planteamiento equivale a transformar la ecuación de Navier (1) en una ecuación de difusión, mediante el agregado de una derivada temporal en el segundo miembro. Más adelante se discute la relación entre el planteamiento presente y otras ecuaciones integrales.

Por otra parte, supondremos que el propagador elástico puede calcularse mediante una integral de camino (o integral funcional). Para ello, supóngase que el intervalo de “tiempo” $[0, \tau]$ se divide en N subintervalos de igual extensión ε . Entonces el propagador $\Delta_{x,y,\tau}$

puede expresarse como el límite para $N \rightarrow \infty$ de un conjunto de N integrales, manteniendo el producto $N \varepsilon = \tau = \text{constante}$

$$\Delta_{(x,\tau)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \mathbf{P}_{(x,x_1,\varepsilon)} \int \mathbf{P}_{(x_1,x_2,\varepsilon)} \dots \int \mathbf{P}_{(x_N,x,\varepsilon)} d^3x_1 d^3x_2 \dots d^3x_N \quad (4)$$

Llamaremos a los operadores $\mathbf{P}_{(x,y,\varepsilon)}$ *propagadores infinitesimales*. Su forma no es única y dependen además del número de dimensiones del espacio. Por simplicidad, y sin pérdida de generalidad, consideraremos de ahora en más el caso particular de deformación plana, para lo que basta con eliminar la coordenada x_3 y la correspondiente componente del desplazamiento. Como punto de partida utilizaremos las funciones más sencillas posibles. Como se verá más adelante, estas permiten generar toda una familia de propagadores infinitesimales. Considérese la función “sombrero”

$$\Theta_{(x)} = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$$

Un propagador infinitesimal adecuado resulta ser el siguiente

$$P_{(x,\bar{x},\varepsilon)}^{11} = \frac{\Theta\left[\frac{\|x_1-y_1\|}{\sqrt{3(\lambda+2\mu)\varepsilon}}\right]}{2\sqrt{3(\lambda+2\mu)\varepsilon}} \frac{\Theta\left[\frac{\|x_2-y_2\|}{\sqrt{3\mu\varepsilon}}\right]}{2\sqrt{3\mu\varepsilon}} \quad (5a)$$

$$P_{(x,\bar{x},\varepsilon)}^{22} = \frac{\Theta\left[\frac{\|x_1-y_1\|}{\sqrt{3\mu\varepsilon}}\right]}{2\sqrt{3\mu\varepsilon}} \frac{\Theta\left[\frac{\|x_2-y_2\|}{\sqrt{3(\lambda+2\mu)\varepsilon}}\right]}{2\sqrt{3(\lambda+2\mu)\varepsilon}} \quad (5b)$$

$$P_{(x,\bar{x},\varepsilon)}^{12} = P_{(x,\bar{x},\varepsilon)}^{21} = \frac{\Theta\left[\frac{\|x_1-y_1\|}{\sqrt{3(\lambda+\mu)\varepsilon}}\right]}{2\sqrt{3(\lambda+\mu)\varepsilon}} \frac{\Theta\left[\frac{\|x_2-y_2\|}{\sqrt{3(\lambda+\mu)\varepsilon}}\right]}{2\sqrt{3(\lambda+\mu)\varepsilon}} \frac{(y_1-x_1)(y_2-x_2)}{(\lambda+\mu)\varepsilon} \quad (5c)$$

Para mostrar que la integral (3) con el propagador definido por la integral de camino (4) mediante los propagadores infinitesimales (5) es equivalente, en el límite $t \rightarrow \infty$ a las ecuaciones de Navier (1), consideremos un lapso de “tiempo” infinitesimal ε . En este caso, la (3) se aproxima por

$$u_{1(x\varepsilon)} = \iint [P_{(x,y,\varepsilon)}^{11} u_{1(y,0)} + P_{(x,y,\varepsilon)}^{12} u_{2(y,0)}] d^2y \quad (6)$$

y una ecuación similar para u_2 . Dado que el punto x está fijo, efectuamos el cambio de variables $y \rightarrow (y+x)$ a la derecha de (6) de modo que los propagadores infinitesimales no dependan explícitamente de x . Hecho esto, desarrollamos el primer miembro de (6) en potencias de ε hasta primer orden y desarrollamos los desplazamientos bajo el signo integral en potencias alrededor del punto fijo x hasta segundo orden. Se tiene

$$\begin{aligned} u_{1(x,0)} + \varepsilon \frac{\partial u_{1(x)}}{\partial \tau} &= \\ &= \iint P_{(y,\varepsilon)}^{11} \left[u_{1(x,0)} + y_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{y_1^2}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + y_1 y_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{y_2^2}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right] dy_1 dy_2 + \\ &+ \iint P_{(y,\varepsilon)}^{12} \left[u_{2(x,0)} + y_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{y_1^2}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + y_1 y_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{y_2^2}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right] dy_1 dy_2 + \end{aligned} \quad (7)$$

En este punto observamos que el propagador infinitesimal P^{11} definido en (5) tiene las siguientes propiedades integrales

$$\iint P_{(yx,\varepsilon)}^{11} dy_1 dy_2 = 1 \quad (8a)$$

$$\iint y_1 P_{(y,\varepsilon)}^{11} dy_1 dy_2 = \iint y_2 P_{(y,\varepsilon)}^{11} dy_1 dy_2 = 0 \quad (8b)$$

$$\iint y_1^2 P_{(y,\varepsilon)}^{11} dy_1 dy_2 = 2(\lambda + 2\mu)\varepsilon \quad (8c)$$

$$\iint \bar{x}_2^2 P_{(\bar{x},\varepsilon)}^{11} d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 = 2\mu\varepsilon \quad (8d)$$

$$\iint \bar{x}_1 \bar{x}_2 P_{(\bar{x},\varepsilon)}^{11} d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 = 0 \quad (8e)$$

A su vez, las integrales del propagador infinitesimal P^{12} son nulas excepto

$$\iint y_1 y_2 P_{(y,\varepsilon)}^{12} dy_1 dy_2 = (\lambda + \mu)\varepsilon \quad (8f)$$

Colectando resultados la ecuación (7) se expresa

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (9a)$$

y una ecuación similar para u_2

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (9b)$$

Estas dos ecuaciones de difusión son las ecuaciones de Navier (2) para deformación plana, con una derivada temporal extra. De modo que el “estado estacionario” del sistema (9) es solución de las ecuaciones de Navier. Obsérvese que las funciones (5) fueron definidas de modo tal que sus soportes son rectangulares, con tamaño dependiente del paso de tiempo ε . Estos resultan más convenientes que los soportes ovales para la cuadratura numérica.

En el caso más general en que hay presentes fuerzas de volumen y gradientes de temperatura, las ecuaciones Navier toman la forma

$$\mu \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_\beta^2} + \lambda \frac{\partial^2 u_r}{\partial x_\alpha \partial x_\gamma} - \vartheta \kappa \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + \rho g_\alpha = 0 \quad (10)$$

donde ϑ , κ y ρ son el coeficiente de expansión térmica, módulo de compresibilidad y densidad respectivamente. La regla de actualización para un paso de tiempo infinitesimal (6) toma ahora la forma

$$u_{\alpha(x,\varepsilon)} = \iint (P_{(x,y,\varepsilon)}^{\alpha\beta} u_{\beta(y,0)} + \mathbf{K}_{(x,y,\varepsilon)}^\alpha T_{(y)} + \mathbf{G}_{(x,y,\varepsilon)}^{\alpha\beta} g_{\beta(y)}) d^2 y \quad (11)$$

donde los propagadores infinitesimales \mathbf{K} y \mathbf{G} son

$$K_{(x,y,\varepsilon)} = \frac{-\vartheta \kappa}{24\mu^2\varepsilon} \Theta \left[\frac{\|x_1 - y_1\|}{\sqrt{3\mu\varepsilon}} \right] \Theta \left[\frac{\|x_2 - y_2\|}{\sqrt{3\mu\varepsilon}} \right] \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{(x,y,\varepsilon)} = \frac{1}{12\mu} \Theta \left[\frac{\|x_1 - y_1\|}{\sqrt{3\mu\varepsilon}} \right] \Theta \left[\frac{\|x_2 - y_2\|}{\sqrt{3\mu\varepsilon}} \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puede mostrarse su validez por un desarrollo en serie análogo al de la fórmula (7). En efecto, es sencillo comprobar que se cumple

$$\int \mathbf{K}T_{(y)}d^2y = -\vartheta\kappa\nabla T_{(x)}\varepsilon + O(\varepsilon)^2; \quad \int \mathbf{G}\mathbf{g}d^2y = \mathbf{g}\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

términos que agregados a (7) conducen, en el límite $\varepsilon \rightarrow 0$ a la ecuación (10) con una derivada temporal del desplazamiento en el miembro izquierdo.

Es interesante observar que por aplicación sucesiva de (11) puede obtenerse toda una familia de propagadores infinitesimales. En efecto, para dos pasos sucesivos de tiempo se tiene

$$\begin{aligned} u_{\alpha(x,\tau+2\varepsilon)} &= \iint (P_{(x,y,\varepsilon)}^{\alpha\beta} u_{\beta(y,\tau+\varepsilon)} + K_{(x,y,\varepsilon)}^\alpha T_{(x)} + G_{(x,y,\varepsilon)}^{\alpha\beta} g_{\beta(y)}) d^2y = \\ &= \int (^2P_{(x,y',2\varepsilon)}^{\alpha\gamma} u_{\gamma(y',\tau)} + ^2K_{(x,y',2\varepsilon)}^\alpha T_{(\bar{x})} + ^2G_{(x,y',2\varepsilon)}^{\alpha\gamma} G_{\gamma(y')}) d^2y' \end{aligned} \quad (12)$$

donde

$$^2P_{(x,y',2\varepsilon)}^{\alpha\gamma} = \int P_{(x,y,\varepsilon)}^{\alpha\beta} P_{(y,y',\varepsilon)}^{\beta\gamma} d^2y \quad (13a)$$

$$^2K_{(x,y',2\varepsilon)}^\alpha = \int P_{(x,y,\varepsilon)}^{\alpha\beta} K_{(y,y',\varepsilon)}^\beta d^2y + K_{(x,y',\varepsilon)}^\alpha \quad (13b)$$

$$^2G_{(x,y',2\varepsilon)}^{\alpha\gamma} = \int P_{(x,y,\varepsilon)}^{\alpha\beta} G_{(y,y',\varepsilon)}^{\beta\gamma} d^2y + G_{(x,y',\varepsilon)}^{\alpha\gamma} \quad (13c)$$

Dado que las fórmulas (13a) son integrales de convolución, los propagadores aumentan progresivamente el grado de continuidad y el tamaño de los soportes, de modo que ${}^n\mathbf{P}$ tiene continuidad C^{n-1} y tamaño proporcional a $\sqrt{n\varepsilon}$. En particular, para $n \rightarrow \infty$ degeneran en funciones proporcionales a gaussianas (para ε finito), de donde se infiere que el propagador finito $\Delta_{(x,\bar{x},\tau)}$ (y por ende la integral (3)) se extienden a todo el espacio.

CONDICIONES DE CONTORNO

En cada punto del contorno deben especificarse componentes de desplazamiento y/o tracciones, que resulta conveniente especificar con referencia a coordenadas locales, como se indica en la Figura 1. Eligiendo los versores normal y tangente anti-horario \hat{n} y \hat{b} , las componentes del desplazamiento serán u_n y u_b . Las condiciones de contorno de tracción (es decir $\sigma\hat{n} = \mathbf{t}$) se pueden expresar en términos de desplazamientos como

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_n}{\partial n} + \lambda \frac{\partial u_b}{\partial b} - t_n = 0 \quad (14a)$$

$$\mu \left[\frac{\partial u_b}{\partial n} + \frac{\partial u_n}{\partial b} \right] - t_b = 0 \quad (14b)$$

Figura 1. Soporte del propagador y coordenadas locales para punto del contorno

Existen diversas posibilidades para especificar, en cada punto del contorno, dos de las cuatro variables u_n , u_b , t_n y t_b . Una alternativa es diseñar una integral de camino especial para puntos del contorno⁹. Si bien hemos probado esa alternativa con éxito utilizando aproximaciones polinómicas, resulta conveniente utilizar un método más versátil, que facilite el tratamiento de esquemas de aproximación más generales.

Un modo muy sencillo y efectivo es prolongar adecuadamente el campo de desplazamiento fuera del recinto Ω en cada punto del contorno. Para ello, considérese un punto del contorno X_0 , como se indica en la Figura 1, y supóngase que el contorno es suficientemente suave como para ser considerado recto en la vecindad de X_0 . Llámese Γ_n^u y Γ_n^t y a las regiones del contorno donde se especifican *C.C.* de desplazamiento y tracción en la dirección normal respectivamente Γ_b^u y Γ_b^t a las correspondientes a la dirección tangente. Entonces, en la región exterior a Ω adyacente a X_0 se impone un campo de desplazamiento

$$u_{n(x)} = \begin{cases} u_n^0 & \text{si } X_0 \in \Gamma_n^u \\ u_{n(X_0)} + (x_n - X_{0n}) \left[\frac{t_n}{\lambda + 2\mu} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial u_b}{\partial x_b} \Big|_{X_0} \right] + (x_b - X_{0b}) \frac{\partial u_n}{\partial x_b} \Big|_{X_0} & \text{si } X_0 \in \Gamma_n^t \end{cases} \quad (15a)$$

$$u_{b(x)} = \begin{cases} u_b^0 & \text{si } X_0 \in \Gamma_b^u \\ u_{n(X_0)} + (x_n - X_{0n}) \left[\frac{t_b}{\mu} - \frac{\partial u_n}{\partial x_b} \Big|_{X_0} \right] + (x_b - X_{0b}) \frac{\partial u_b}{\partial x_b} \Big|_{X_0} & \text{si } X_0 \in \Gamma_b^t \end{cases} \quad (15b)$$

ECUACIONES DE EQUILIBRIO

Si bien el planteamiento inicial del problema es asintótico, está claro que del mismo pueden obtenerse directamente ecuaciones de equilibrio que no hagan referencia explícita a la variable auxiliar τ . En efecto, basta con observar que de acuerdo a las fórmulas (2) y (3) el problema elástico (1) puede expresarse del siguiente modo: hallar el campo de desplazamiento $\mathbf{u}_{(x)}$ que satisface

$$u_{\alpha(x)} = \int \Delta_{(x,y\tau)}^{\alpha,\beta} u_{\beta(y)} d^3y \quad (16)$$

A esta ecuación deben agregarse los términos correspondientes en caso de haber fuerzas de volumen y cargas térmicas. La (16) tiene el aspecto de una ecuación integral del tipo de Fredholm de segunda especie. En elasticidad lineal pueden derivarse ecuaciones integrales de este tipo (incluyendo eventualmente integrales de contorno) por aplicación de los teoremas de Castiglano, Betti, Somigliana, etc. Existe no obstante una sustancial diferencia entre el presente planteo y las ecuaciones de Fredholm, ya que en estas últimas la integral en (16) se efectúa sobre el dominio de cálculo Ω , y además el núcleo (que aquí llamamos propagador) debe satisfacer las condiciones de contorno. La integral (16), en cambio, se realiza sobre el soporte del propagador que contiene al punto campo x , que como se dijo en la sección anterior es infinito. Esto no resulta ventajoso para soluciones computacionales. Sin embargo, para una solución numérica aproximada basta con reemplazar el propagador exacto Δ por el propagador infinitesimal. Es decir, el problema elástico se *aproxima* por el sistema de identidades integrales

$$u_{\alpha(x)} = \iint (P_{(x,y,\varepsilon)}^{\alpha\beta} u_{\beta(y)} + K_{(x,y,\varepsilon)}^{\alpha} T_{(y)} + G_{(x,y,\varepsilon)}^{\alpha\beta} g_{\beta(y)}) d^2y \quad (17)$$

Es importante recalcar que esto constituye una aproximación *previa* a la discretización del campo de desplazamiento que se discute en la sección siguiente.

IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

Discretización

Una de las ventajas de la presente formulación es que no hace referencia al orden de continuidad del campo de desplazamiento en todo el recinto de cálculo. Todo lo que requiere es continuidad C^2 sobre el soporte del propagador de cada punto campo, para asegurar que exista el desarrollo en potencias (7). Asimismo, no se requiere una descripción regular del contorno, ya que sólo hay que especificar la normal exterior y las condiciones de contorno en cada punto del mismo donde se deseé calcular el campo. De este modo, una versión discreta de la formulación sólo demanda un conjunto de puntos llenando el dominio, como se ilustra en la Figura 2. Naturalmente, esto es similar al procedimiento utilizado en otros métodos sin red, tales como los mencionados en la Introducción. En particular, es evidente que cualquiera de esos procedimientos de aproximación pueden utilizarse en esta formulación.

Figura 2. Arreglo nodal para simular tubo con presión interna

Sin embargo, la *I.C.* permite mayor flexibilidad en la elección de la aproximación, dado que no lleva aparejadas integrales de volumen o de línea en todo el recinto, lo que elimina de entrada la necesidad de mallas de fondo para integrar. Como es habitual, supondremos que el campo de desplazamiento $\mathbf{u}_{(x)}$ puede aproximarse en términos de N desplazamientos nodales $u_\alpha^i (i = 1, \dots, N; \alpha = 1, 2)$ y funciones de forma $\Phi_{i(x)}$.

$$u_{\alpha(x)} = \sum_{i=1}^N \Phi_{i(x)} u_\alpha^i \quad (18)$$

Reemplazando la discretización (18) en las ecuaciones de equilibrio (17) se obtiene la forma discreta de estas últimas

$$u_\alpha^i - \int P_{(x^i, y, \varepsilon)}^{\alpha\beta} \Phi_{j(y)} d^2y u_{\beta(\tau)}^j = \int K_{(x^i, y, \varepsilon)}^\alpha \Phi_{j(y)} d^2y T^j + \int G_{(x^i, y, \varepsilon)}^{\alpha\beta} \Phi_{j(y)} d^2y g_\beta^j \quad (19)$$

En la (19) x^i es la posición del nodo i y la suma sobre el índice j está implícita. Evidentemente, la (19) es un sistema de $2N$ ecuaciones lineales que puede abreviarse

$$H_{ij}^{\alpha\beta} u_j^\beta = F_i^\alpha$$

donde la matriz global \mathbf{H} se calcula como

$$H_{ij}^{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} - \int P_{(x^i, y, \varepsilon)}^{\alpha\beta} \Phi_{j(y)} d^2y \quad (20)$$

Inspeccionando (20) se revelan algunas características del método. En primer lugar se observa que, a diferencia de lo que ocurre con elementos finitos y otras técnicas, la matriz global se llena por filas y sus elementos tienen una única contribución. Esto facilita considerablemente la paralelización del algoritmo de cálculo. También es evidente que sólo aquellos nodos cuyas funciones de forma son no nulas en el soporte del propagador corriente contribuyen a esa fila, de modo que la matriz será rala (y banda con una numeración juiciosa). Sin embargo, se ve también que la matriz no es simétrica, lo que constituye su principal desventaja. Asimismo, es importante destacar que las condiciones de contorno no aparecen explícitamente en el vector de carga F , como sucede al aplicar formulaciones débiles. Ello se debe a que, cuando el nodo i está en el contorno, los soportes de los propagadores infinitesimales P yacen parcialmente fuera del contorno, donde se imponen los campos *prolongados* dados por las fórmulas (15) que deben reemplazarse en la ecuación general (17). De este modo, para esos nodos debe computarse tanto una contribución *interior*, similar a (19), como una contribución *exterior*. En esta última, los términos de (15) que no contienen desplazamientos nodales (es decir, el desplazamiento o tracción impuestos) se agregan al vector de carga. En particular, esta contribución requiere el cálculo de las derivadas primeras de las funciones de forma.

Por último, es interesante destacar que si en las ecuaciones anteriores retenemos la variable temporal ficticia τ , se obtiene naturalmente un método de solución por relajación. En efecto, en ese caso las ecuaciones (19) pueden expresarse como una transformación afín, actuando sobre el arreglo de desplazamientos nodales \mathbf{u}

$$\mathbf{u}_{(\tau+\varepsilon)} = \mathbf{H}_{(\varepsilon)} \mathbf{u}_{(\tau)} + \mathbf{F} \quad (21)$$

De manera que el campo de desplazamientos de equilibrio puede obtenerse como la correspondiente al estado estacionario, por aplicación sucesiva de (21). Los experimentos numéricos que hemos realizado con ese algoritmo indican que puede obtenerse muy buena

precisión, pero la tasa de convergencia es tan lenta que no constituye una alternativa realista a menos que se disponga de un método confiable de aceleración de la convergencia. Esto podría lograrse utilizando propagadores de orden superior, tales como se indica en las fórmulas (13), opción que no hemos explorado aun.

Aproximación

En principio, cualquier procedimiento de aproximación que tenga continuidad C^2 sobre el soporte de cada propagador infinitesimal puede utilizarse con esta formulación. Con esta restricción, la elección más sencilla son polinomios completos de segundo grado. Así, para cada nodo sólo se requiere elegir una nube de al menos ocho nodos adyacentes y realizar un ajuste por cuadrados mínimos del polinomio. El campo local en la vecindad de la posición del nodo corriente se expresa como

$$\mathbf{u}_{(x,y)} = \mathbf{a}\mathbf{P}_{(x,y)} \quad (22)$$

donde

$$\mathbf{u}_{(x,y)} = (u_{1(x,y)}, u_{2(x,y)})^t; \quad \mathbf{P}_{(x,y)} = (1, x, y, x^2, xy, y^2)^t \quad (23)$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 & a_5^1 & a_6^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & a_5^2 & a_6^2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Los coeficientes de la matriz \mathbf{a} se calculan en términos de los M desplazamientos $\tilde{\mathbf{u}}$ de los nodos vecinos resolviendo¹²

$$\mathbf{V}^t \mathbf{V} \mathbf{a} = \mathbf{V}^t \tilde{\mathbf{u}} \quad (25)$$

donde

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} u_1^0 & u_1^1 & \dots & u_1^M \\ u_2^0 & u_2^1 & \dots & u_2^M \end{bmatrix}; \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & y_0 & x_0^2 & x_0 y_0 & y_0^2 \\ 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & x_M & y_M & x_M^2 & x_M y_M & y_M^2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Resulta conveniente mover el origen a (x_0, y_0) antes de efectuar los cálculos indicados. Es de notar que, no obstante, $a_1^i \neq u_{i(x,0)}$. Con esta sencilla técnica de aproximación, las integrales en (19) pueden ser evaluadas analíticamente. Para nodos interiores, en término de los coeficientes \mathbf{a} del polinomio la ecuación toma la forma

$$u_\alpha^i = {}^i a_1^\alpha + 2(\lambda + 2\mu)\varepsilon^i a_4^\alpha + (\lambda + \mu)\varepsilon^i a_5^\alpha + 2\mu)\varepsilon^i a_6^\alpha \quad (27)$$

Donde hemos omitido fuerzas de volumen y temperatura. Las ecuaciones discretas se expresan en función de los desplazamientos nodales reemplazando los coeficientes \mathbf{a} por

$$\mathbf{a}_{(\tau)} = (\mathbf{V}^t \mathbf{V})^{-1} \mathbf{V}^t \tilde{\mathbf{u}}_{(\tau)} \quad (28)$$

Es interesante destacar que, con este método particular de aproximación, las ecuaciones algebraicas obtenidas son similares a las que se obtendrían con una formulación fuerte. Hay no obstante una sustancial diferencia entre ellas (además del paso de tiempo ε) debido al

término (${}^i a_1^\alpha - u_\alpha^i$), que no se presenta en la formulación fuerte. Tras efectuar el cómputo correspondiente a los nodos de contorno usando las fórmulas (13), es necesario rotar las contribuciones obtenidas antes de incorporarlas a la matriz y el vector de carga. Para esto se usa la fórmula

$$u_i = u_n n_i + u_b b_i \quad (29)$$

Finalmente, tras el cómputo las tensiones se calculan sencillamente como

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)a_2^1 + \lambda a_3^2; \quad \sigma_{12} = \frac{\lambda}{2}(a_3^1 + a_2^2); \quad \sigma_{22} = (\lambda + 2\mu)a_3^2 + \lambda a_2^1 \quad (30)$$

Evidentemente, las fórmulas (27) y (30) no tendrán esa forma tan sencilla cuando se utilizan otros procedimientos de aproximación, y será necesario usar cuadratura numérica para evaluar las integrales. De todos modos, dado que aun con aproximación cuadrática las fórmulas de integración exacta para puntos del contorno son algo engorrosas, preferimos usar cuadratura numérica con 4×4 puntos de Gauss, lo que simplifica la programación considerablemente. El programa fue escrito en FORTRAN y corrió en una PC. El paso de tiempo ε se elige de modo que el soporte máximo de los propagadores infinitesimales $\sqrt{(\lambda + 2\mu)\varepsilon}$ sea igual al mínimo espaciado nodal d multiplicado por una constante C provista por el usuario.

RESULTADOS NUMÉRICOS

Cilindro hueco con presión interna

El primer ejemplo es un tubo infinito, de radio interno $a = 4$ cm y radio externo $b = 6$ cm, sometido a presión interna $P=10$ MPa. La solución analítica¹³ es

$$u_r = H \frac{(1 + \nu)}{E} \left[(1 - 2\nu)r + \frac{b^2}{r} \right]; \quad \sigma_{rr} = H \left[1 - \frac{b^2}{r^2} \right]; \quad \sigma_{\varphi\varphi} = H \left[1 + \frac{b^2}{r^2} \right]$$

donde $H = \frac{Pa^2}{b^2 - a^2}$.

Las propiedades del material utilizadas son $E = 2 \times 10^5$ MPa y $\nu = 0,3$. La solución numérica se computó con un arreglo de 75 nodos como se muestra en la Figura 2. Para calcular el error relativo en norma L_2 , $\varepsilon_R = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| / \|\mathbf{u}_0\|$, es necesario integrar sobre el recinto de cálculo. Paradójicamente, con el presente método esta tarea se ve dificultada por la ausencia de una malla de fondo. En este trabajo recurrimos al sencillo expediente de sumergir el arreglo nodal en una red de elementos finitos bilineales a fin de evaluar las integrales correspondientes. Los mejores resultados se obtienen usando $C = 0,7$, con lo cual resulta $\varepsilon_R = 1\%$, aunque varían sólo marginalmente dentro del rango $0,5 < C < 0,9$. Sólo cuando C difiere sustancialmente del valor óptimo, se produce una degradación apreciable de los resultados. Así por ejemplo para $C = 1,1$ se obtiene $\varepsilon_R = 1,5\%$. Las tensiones se calcularon mediante las fórmulas (30) en los nodos. La Figura 3 muestra la distribución de tensiones circunferenciales a lo largo de la coordenada radial que, como puede verse, resultan suaves, por lo que no se requiere post-procesamiento para suavizarlas. El error relativo en tensiones resulta igual a 3 %. Usando el mismo arreglo nodal, se resolvió el problema usando una formulación fuerte (sin estabilización) que arrojó errores muy superiores. Otra cuestión importante concierne al número de condición de la matriz. Se usaron rutinas de la librería IMSL para estimar la recíproca del número de condición, RCOND, obteniéndose 0,4E-03 para este ejemplo con el método propuesto. Con la formulación fuerte en cambio resultó

RCOND = 0,2E-10. Finalmente, el problema también fue resuelto con una formulación débil usando interpolantes mínimos cuadrados móviles debida al Belytschko *et al.*¹⁴, cuya implementación computacional se describe en la referencia¹⁵. La Figura 4 muestra la tensión de suncho a lo largo de la circunferencia $R = 5$ calculada con ambos métodos. Se observa que el presente método, que es mucho más rápido que MCM, da resultados muy similares para este caso.

Figura 3. Tensión de suncho a lo largo de un radio en tubo con presión interna

Figura 4. Tensión de suncho a lo largo de la circunferencia $R = 5$ cm

Disco rotante

Para ilustrar el desempeño del método en problemas que involucren fuerzas de volumen, se considera el caso de un disco que rota a gran velocidad. En este caso la solución analítica viene dada en coordenadas polares por¹⁶

$$u_r = \frac{\rho\omega^2(1-\nu^2)}{8E}r \left[\frac{(3+\nu)}{(1+\nu)}R^2 - r^2 \right]; \quad \sigma_y = \frac{\rho\omega^2(3+\nu)}{8}[R^2 - r^2]$$

$$\sigma_\theta = \frac{\rho\omega^2}{8}[(3+\nu)R^2 - (1+3\nu)r^2]$$

El cálculo numérico se realizó con la red de 98 nodos mostrada en la Figura 5. Nuevamente los mejores resultados se obtuvieron con $C = 0,75$. El problema se resolvió en coordenadas cartesianas y los resultados fueron posteriormente traducidos a polares. Las Figuras 6 y 7 muestran los desplazamientos radiales y tensiones de suncho respectivamente calculadas en los nodos a lo largo de la coordenada radial. También se muestran allí las soluciones exactas. Puede verse que los desplazamientos están en excelente acuerdo con la solución analítica, con un error relativo de $\varepsilon_R = 1,5\%$. Se observa en particular que la solución numérica identifica correctamente el máximo de desplazamientos, a pesar de que el arreglo nodal es más bien grueso (sólo hay dos nodos, en la dirección radial, desde el máximo hasta el borde del disco). También las tensiones calculadas en los nodos exhiben una distribución suave y acorde con la solución exacta, aunque en el centro del disco están afectadas de considerable error (8 %).

Figura 5. Arreglo nodal usado para simular cilindro con generación interna de calor

Figura 6. Desplazamiento radial en disco rotante. Comparación entre solución numérica y analítica

Figura 7. Tensión de suncho a lo largo de un radio en disco rotante

Deformaciones termoelásticas

Finalmente, se calculó también la deformación de un cilindro con una distribución uniforme de generación interna de calor, tal como sucede por ejemplo en pastillas de combustible nuclear. Se usó para ello el mismo arreglo nodal que en el problema anterior. La relación desplazamiento-temperatura¹³ y la distribución estacionaria de temperaturas¹⁷ vienen dadas por

$$u_{(r)} = \frac{\vartheta (1 + \nu)}{3 (1 - \nu)} \left(\frac{1}{r} + (1 - 2\nu) \frac{r}{b^2} \right) \int_0^y T_{(r')} r' dr'; \quad T_{(r)} = T_0 + \frac{gb^2}{4\kappa} \left(1 - \left(\frac{r}{b} \right)^2 \right)$$

Se usaron las propiedades termomecánicas del UO_2 reportadas por Oguna y Tanabe¹⁸.

Figura 8. Tensión de suncho a lo largo del radio en cilindro con generación interna de calor

En este caso, para el cálculo de tensiones en los nodos hay que agregar a las fórmulas (30) el término de autodeformaciones térmicas. También deben incluirse estas autodeformaciones en las condiciones de contorno de tracción, fórmulas (15). Al igual que en los casos anteriores las tensiones nodales resultan suaves y en buen acuerdo con la solución analítica. Como ejemplo, la Figura 8 ilustra la tensión de suncho calculada en los nodos a lo largo del radio. Aunque estas resultan levemente inferiores a las analíticas, copian correctamente su variación en el recinto de cálculo. Asimismo, observamos que los resultados numéricos resultan insensibles al paso de tiempo elegido en el rango $0,3 < C < 1,1$.

CONCLUSIONES

Los ejemplos numéricos indican que el método propuesto permite obtener buena precisión con un sencillo esquema de interpolación, no requiriéndose alisado posterior de la solución. Esto representa una ventaja, ya que el uso de esquemas de interpolación más elaborados (tales como Mínimos Cuadrados Móviles o RKPM) conduce a mayores anchos de banda y mayor tiempo de cómputo. Asimismo, la ecuación de difusión ficticia en la que se basa la formulación tiene la ventaja de prestarse a un método alternativo de resolución por relajación, lo que podría ser conveniente para problemas de gran envergadura. Sin embargo, por su carácter ficticio es físicamente incorrecta. Alternativamente, es posible formular la ecuación dinámica como una integral funcional, similar a la utilizada en este trabajo. Para ello basta con reemplazar $\varepsilon \rightarrow \varepsilon^2$ y agregar un término proporcional a la velocidad $\varepsilon \dot{\mathbf{u}}$. En efecto, es fácil comprobar mediante un desarrollo análogo al de la fórmula (7), pero expandiendo $\mathbf{u}_{(x,\varepsilon)}$ hasta segundo orden en ε , que se recupera la ecuación dinámica. Sin embargo, el planteamiento completo requiere ahora otra ecuación para actualizar las velocidades, algo que aun no hemos explorado numéricamente y que está en curso de desarrollo. De todos modos, en el equilibrio basta con imponer $\dot{\mathbf{u}} = 0$ y recuperar las ecuaciones (11). Por último, hacemos notar que la ausencia de una red de fondo dificulta el cálculo de parámetros globales, tales como la energía o el error relativo global. Si bien esto puede subsanarse a posteriori, introduciendo una malla de fondo para post-procesamiento, sería conveniente disponer de un método basado exclusivamente en el arreglo nodal original.

REFERENCIAS

- 1 T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming y P. Krysl, “Meshless methods: An overview and recent developments”, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **139**, pp. 3–47, (1996).
- 2 I. Babuska y J.M. Melenk, “The partition of unity method”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **40**, pp. 727–758, (1997).
- 3 B. Nayroles, G. Touzot y P. Villon, “Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements”, *Comp. Mech.*, Vol. **10**, pp. 307–318, (1992).
- 4 T. Belytschko, Y.Y. Lu y L. Gu, “Element-free Galerkin methods”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **37**, pp. 229–256, (1994).
- 5 C.A Duarte y J.T. Oden, “H-p adaptive method using clouds”, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **139**, pp. 237–262, (1996).
- 6 N. Sukumar, B. Moran y T. Belytschko, “The natural element method in solid mechanics”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **43**, pp. 839–887, (1998).

- 7 J.J. Monaghan, "An introduction to SPH", *Comp. Physics Communications*, Vol. **48**, pp. 89–96, (1988).
- 8 W.K. Liu, S. Jun y Y.F. Zhang, "Reproducing kernel particle methods", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **20**, pp. 1081–1106, (1995).
- 9 R.D. Feynman y A.R. Hibbs, "Quantum mechanics and path integrals", McGraw-Hill, (1965).
- 10 P. Ramond, "Field theory: A modern primer", 2a edición, Addison Wesley, (1989).
- 11 P. Lancaster y K. Salkauskas, "Curve and surface fitting", Academic Press, (1986).
- 12 L.D. Landau y E.M. Lifshitz, "Teoría de la elasticidad", Editorial Reverté, (1969).
- 13 Y.Y. Lu, T. Belytschko y L. Gu, "A new implementation of the element-free Galerkin method", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **113**, pp. 397–414, (1994).
- 14 A. Giacopini, H. Arrieta y E. Pardo, "Elasticidad bidimensional con mínimos cuadradros móviles", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **13**, N° 4, pp. 437-454, (1997).
- 15 S. Timoshenko y J.N. Goodier, "Theory of elasticity", McGraw-Hill, 2a edición, (1951).
- 16 M. Necati Özisik, "Transferencia de calor", McGraw-Hill, (1979).
- 17 M. Oguma y I. Tanabe, "Non-destructive evaluation of crack extension in UO₂ pellets subjected to thermal shock at various temperature differences", *Br. Ceram. Trans. J.*, Vol. **89**, pp. 167–170, (1990).