

COSMOLOGÍA N-DIMENSIONAL DE TIPO KALUZA-KLEIN EN EL VACÍO

Carlos Oscar Rodríguez Leal

29 de noviembre de 2013

Índice general

Introducción.	v
1. Obtención de las “Ecs. de Einstein 7D”.	1
2. Comparación de modelos cosmológicos 6D.	15
2.1. Corroboración de cosmología N-D vacía.	15
2.2. Modelo 6D vacío de Peraza-Vladimirov.	30
2.2.1. Modelo plano.	30
2.2.2. Modelo de curvatura negativa (abierto).	30
2.2.3. Modelo de curvatura positiva (cerrado).	31
2.3. Relación entre las soluciones 6D.	31
2.3.1. Modelo plano.	31
2.3.2. Modelo elíptico.	34
2.3.3. Modelo hiperbólico.	36
2.3.4. Análisis general.	38
3. Propuesta de una solución 6D no vacía.	41
3.1. Solución 6D no vacía plana ($\sigma = 0$).	42
3.2. Solución 6D no vacía hiperbólica ($\sigma = -1$).	45
A. Demostración de algunos resultados.	51
A.1. Demostración de las identidades trigonométricas hiperbólicas. . .	51
A.2. Obtención de resultados con Mathematica.	52
A.2.1. Obtención de la integral (2.35).	52
A.2.2. Simplificación de la llave $\{ \}_{S/\mu}$ en la fórmula (2.38). . . .	53
A.2.3. Integración de la fórmula (2.33).	56
A.3. Obtención de una relación alternativa $C_2 = C_2(\alpha)$	57
Conclusiones.	59

Introducción.

La idea de multidimensionalidad en la Física está íntimamente relacionada con la geometrización del espacio, cuyas raíces descansan en los intentos por demostrar el quinto postulado de Euclides sobre las líneas paralelas [18], el cual dice que por un punto exterior a una recta pasa solamente una paralela. Posteriormente en los trabajos de Lobachevski y de B. Riemann son propuestas geometrías no Euclídeas hiperbólica y esférica correspondientemente. Finalmente, a principios del siglo XX con los trabajos de A. Einstein sobre la teoría especial de la relatividad y de A. Poincaré en la concepción topológica de la dimensionalidad, toma fuerza la profunda relación entre las leyes físicas [11] y la geometría, lo cual es mostrado en la expresión para el cuadrado del intervalo 4-dimensional

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta,$$

entre dos puntos separados infinitesimalmente en el espacio-tiempo, donde α, β toman los valores 0, 1, 2, 3. Precisamente, fue Einstein quien sugirió una explicación geométrica de la gravitación en sus trabajos sobre la teoría general de la relatividad de 1915, lo cual está expresado en las ecuaciones de campo de Einstein,

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = -\kappa T_{\alpha\beta}$$

en las que en la parte izquierda están presentes solo cantidades geométricas, en cambio, en la parte derecha están presentes las propiedades de la materia mediante el tensor de energía-momentum $T_{\alpha\beta}$. Las ecuaciones de Einstein expresan la extraordinaria e importante circunstancia que la curvatura del espacio-tiempo está determinada por las características físicas de la materia en él contenida. Existe una densidad crítica (“ ρ_c ”) de 5 protones/ m^3 a partir de la cual se establece una clasificación para el universo, basada en la relación geometría densidad que establece la relatividad general: si $\rho_m > \rho_c$ (“ ρ_m ” es la densidad de materia actual), se dice que es cerrado; si $\rho_m < \rho_c$ se dice que es abierto; y si se tiene que $\rho_m = \rho_c$, entonces el universo es plano.

En las generalizaciones multidimensionales de la relatividad general, la curvatura escalar R juega un importante papel. Señalemos que las fórmulas aquí escritas son válidas también para variedades espacio-temporales de mayor dimensión, es decir, para teorías 5 y 6 dimensionales y más.

Hacia 1919 Teodor Kaluza [7, 14] mostró una manera ingeniosa de unificar las interacciones conocidas por ese tiempo, a saber, la electromagnética y la gravitacional, proponiendo para ello un fondo de espacio-tiempo Riemanniano 5-dimensional. Como Einstein no estaba muy convencido de este procedimiento, sugirió la publicación de dicho artículo solo hasta 1921, que más adelante junto con Bergman fue uno de los puntales del método multidimensional. De esta manera, Kaluza propuso adicionar una coordenada más de tipo espacial oide a la variedad espacio-tiempo cuatridimensional; es decir, sugirió un espacio curvo de 4 dimensiones en lugar de las tres conocidas, donde la cuarta dirección espacial debía estar oculta a nuestra percepción. Sin embargo, dicha dimensión oculta podía tener una influencia detectable en nuestro mundo cuatridimensional, el de nuestra cotidianidad. De esta manera, la interacción electromagnética pasa a ser considerada como una fuerza de origen en la quinta dimensionalidad [12]. Además, había una propiedad adicional de las componentes de la métrica pentadimensional, a saber, que todas sus componentes no debían depender de la quinta coordenada lo cual es hoy reconocido [16] como condición de cilindricidad en la quinta dimensión x_5 .

De esta manera, la métrica o cuadrado del intervalo entre dos eventos separados infinitesimalmente se escribe como

$$dI^2 = G_{AB} dx^A dx^B,$$

donde ahora los índices A, B toman los valores 0, 1, 2, 3, 5, y G_{AB} es una matriz con las 25 componentes del tensor métrico en 5 dimensiones:

$$G_{AB} = \begin{bmatrix} G_{00} & G_{01} & G_{02} & G_{03} & G_{05} \\ G_{10} & G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{15} \\ G_{20} & G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{25} \\ G_{30} & G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{35} \\ G_{50} & G_{51} & G_{52} & G_{53} & G_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{\alpha\beta} & G_{\alpha 5} \\ G_{5\beta} & G_{55} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} g_{\alpha\beta} & A_\alpha \\ A_\beta & G_{55} \end{bmatrix},$$

donde para el caso general, G_{ab} posee solo 15 componentes diferentes. Kaluza distribuyó estas 15 componentes de forma que las 10 componentes $g_{\alpha\beta}$ correspondieran a las 10 de la relatividad general einsteiniana, y $G_{5\alpha}$ corresponderían a las componentes del potencial vectorial electromagnético, por lo que G_{55} quedó como un excedente, con el cual se podría describir un nuevo campo escalar que en principio podría representar un “tipo de materia”. Al aplicar el procedimiento de la 4 + 1-descomposición de las ecuaciones de líneas geodésicas 5-dimensionales, se obtienen las cuatro conocidas ecuaciones cuatridimensionales del movimiento de partículas cargadas en los campos gravitacional y electromagnético; y una quinta ecuación, la cual indica la dependencia de la relación carga/masa de una partícula respecto del campo escalar $G_{5\alpha}$.

En los trabajos de Kaluza [14] fue demostrado de manera general que la unificación del campo gravitacional einsteiniano y las ecuaciones de Maxwell se da teniendo como base un espacio-tiempo Riemanniano 5-dimensional [13]. Algunas decenas de años después, Vladimirov [16] en 1987 muestra que en una teoría 6-dimensional de tipo Kaluza-Klein se logran unificar la interacción gravitacional

einsteiniana con el campo electrodébil de Weinberg-Salam. Además, hacia fines del año 2012 y este 2013 se ha publicado bastante material que indica sobre la presencia de un nuevo tipo de materia, “materia oscura”, en el universo, sobre todo en las regiones de influencia de galaxias elípticas [2]. De esta manera cobra especial interés la búsqueda de soluciones cosmológicas 6-dimensionales de tipo Kaluza-Klein, lo cual aquí es realizado, al menos parcialmente. Los resultados aquí obtenidos habrán de generalizarse en futuros trabajos para posiblemente describir las propiedades de dicha materia especial.

Capítulo 1

Obtención de las “Ecuaciones de Einstein 7D”: formalismo de Cartán, formas diferenciales.

Aún cuando la cosmología de interés particular es la 6-dimensional con sección espacial tridimensional de curvatura nula, positiva y negativa, como es de costumbre, para fines de trabajos futuros aquí mostraremos los cálculos para una cosmología de una dimensión mayor, es decir, 7-dimensional. De las ecuaciones de campo finalmente obtenidas haremos la simplificación para obtener las ecuaciones 6d de campo. En los marcos de la teoría de Kaluza-Klein estos modelos cosmológicos son de especial interés ya que en la teoría 6d [[16]] de las interacciones gravielectrodébiles, las constantes físicas fundamentales resultan conectadas con las componentes adicionales G_{55} , G_{66} , G_{56} de la métrica, las cuales corresponden a tres campos físicos escalares. Dichas constantes son:

$$\begin{aligned} e &= \tilde{e}_0 \sqrt{\frac{1}{-G_{55}G_{66}}}, \bar{g} = \tilde{g}_0 \sqrt{\frac{G_{55} + G_{66}}{-G_{55}G_{66}}}, \sin \theta_w = \sqrt{\frac{G_{66}}{G_{55} + G_{66}}}, \\ m_z &= \tilde{m}_{z0} \sqrt{\frac{G_{55} + G_{66}}{-G_{55}G_{66}}}; \end{aligned}$$

que corresponden a la carga del electrón, la constante de interacción con el campo bosónico, el ángulo de Weinberg y la masa del bosón z. Igualmente las cantidades con tilde son constantes, las cuales deben definirse desde la observación. De esta manera la evolución de los campos escalares debe manifestarse en los valores de dichas constantes. Por otro lado, Yu S. Vladimirov [16] analiza distintas formas de métricas que se obtienen al aplicar la transformación conforme de Weyl a las ecuaciones obtenidas luego de la $1 + 1 + 4$ reducción. De acuerdo con esto último, el coeficiente ante el tensor métrico de partida se puede

elegir de tres maneras diferentes, a saber,

$$1) \ g_{\mu\nu}, \ 2) \ \lambda_5^{-1}g_{\mu\nu}, \ 3) \ \lambda_5^2g_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

donde λ_5 es el factor conforme, el cual por congruencia de la teoría puede ser tomado como la quinta componente del 5-vector monada λ_A contenido en la representación general de la métrica 5-dimensional de partida $G_{AB} = \pm\lambda_5^2 + g_{\mu\nu}$ si hablamos de la 5-dimensionalidad. Según este autor el inciso 3) de la expresión anterior es la forma más adecuada de aplicar la transformación conforme de Weyl, pues conlleva a ecuaciones conocidas (ver (1.2), (1.3) y (1.4)).

Siguiendo a Vladimirov, se tiene que:

- a) Luego de la $n+4$ reducción en las ecuaciones obtenidas se sigue aplicar la transformación conforme, después de lo cual hay que realizar la identificación de las diversas cantidades geométricas con cantidades físicas.
- b) La condición de cilindricidad en las coordenadas adicionales debe cambiarse por la condición más general de cuasicilindricidad, cuando todas las componentes de la métrica de partida dependen de las coordenadas adicionales pero luego de la transformación conforme dicha dependencia es eliminada quedando tan solo en el factor conforme, lo cual corresponde a la idea de Einstein y Bergmann acerca de la periodicidad o cerradura del mundo en las coordenadas adicionales. En la transición a la teoría 4d estándar se realiza la promediación en dichas dimensiones mayores con lo que la dependencia de las cantidades físicas respecto de dichas dimensiones queda eliminada.

Pongamos como ejemplo la 5-dimensionalidad. De las ecuaciones 5d de Einstein

$${}^5R_{AB} - \frac{1}{2}G_{AB}{}^5R + \tilde{\Lambda}G_{AB} = \kappa Q_{AB}$$

finalmente se obtiene el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} {}^4R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}{}^4R + \Lambda\lambda_5^2g_{\mu\nu} &= -\frac{2k}{c^4} \left(F_{\mu\alpha}F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \right) + \kappa T_{\mu\nu} \\ &+ \frac{3}{\lambda_5} \left(\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\lambda_5 - g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\lambda_5 \right) \\ &- \frac{6}{\lambda_5^2}\lambda_{5,\mu}\lambda_{5,\nu}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$-\nabla_{\nu}F^{\nu\mu} - 3F^{\nu\mu}\frac{\lambda_{5,\nu}}{\lambda_5} = \frac{c^2\kappa}{\sqrt{k}}\lambda_5^3Q_B^{\mu}\lambda^B, \quad (1.3)$$

$$g^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\lambda_5 - \frac{1}{6} \left({}^4R + \frac{3k}{4c^2}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \right) \lambda_5 - \frac{1}{3}\Lambda\lambda_5^3 = -\frac{\kappa}{3}\lambda_5^3Q_{AB}\lambda^A\lambda^B, \quad (1.4)$$

donde $T_{\mu\nu} = Q_{AB}g_{\mu}^Ag_{\nu}^B$ es el tensor 4-dimensional de energía-momentum de la materia exterior. Estas ecuaciones son las correspondientes a las ecuaciones

estándar de Einstein (1.2), al segundo par de ecuaciones de Maxwell (1.3) y a la ecuación de Klein-Fock-Gordon (1.4) para el campo escalar λ_5 , mismo que está contenido en la parte derecha como una forma de materia adicional (de procedencia geométrica). De acuerdo con Vladimirov [16] la ecuación (1.4) podría en principio ser aplicada a una forma nueva de materia (por ejemplo a la materia oscura) y definir algunas de sus propiedades y características.

Por esta razón proponemos el cuadrado del intervalo 7-dimensional en forma homogénea e isotrópica con simetría esférica, de acuerdo con el inciso 3) de la expresión (1.1),

$$dI^2 = e^{2\alpha} \left\{ \begin{array}{l} e^{2\beta} [d\eta^2 - d\chi^2 - f^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2)] \\ -e^{2\gamma_1} dx_1^2 - e^{2\gamma_2} dx_2^2 - e^{2\gamma_3} dx_3^2 \end{array} \right\}, \quad (1.5)$$

donde la correspondencia entre coordenadas y variables es la siguiente:

Coordenada	Variable	Dimensión
0	η	temporal
1	χ	radial
2	θ	angular
3	φ	angular ;
5	x^1	quinta
6	x^2	sexta
7	x^3	séptima

Tabla 1

además,

$$\alpha = \alpha(\eta), \beta = \beta(\eta), f = f(\chi), \gamma_1 = \gamma_1(\eta), \gamma_2 = \gamma_2(\eta) \text{ y } \gamma_3 = \gamma_3(\eta) \quad (1.6)$$

son funciones de sus respectivas variables temporal η y radial χ . Una vez obtenidas las correspondientes ecuaciones 7-dimensionales de Einstein, procederemos a su reducción 6-dimensional para su relación con otras soluciones 6-dimensionales obtenidas por Kechkin-Peraza [10].

Los cálculos para obtener las ecuaciones de campo estarán basados en el formalismo de formas diferenciales de Cartán [15], el cual, como es sabido, simplifica bastante los cálculos, además de la elegancia característica del mismo.

Comenzaremos eligiendo una base de “tetradas” $\theta^A = e^{(A)}_\alpha dx^\alpha$ tal que los coeficientes g_{AB} [4, 6] en la expresión $ds^2 = g_{AB}\theta^A\theta^B$ para la métrica, sean constantes. Así pues, la base será

$$\begin{aligned} \theta^0 &= e^{\alpha+\beta} d\eta & d\eta &= \theta^0 e^{-\alpha-\beta} \\ \theta^1 &= e^{\alpha+\beta} d\chi & d\chi &= \theta^1 e^{-\alpha-\beta} \\ \theta^2 &= e^{\alpha+\beta} f d\theta & d\theta &= \theta^2 \frac{e^{-\alpha-\beta}}{f} \\ \theta^3 &= e^{\alpha+\beta} f \sin(\theta) d\varphi & d\varphi &= \theta^3 \frac{e^{-\alpha-\beta}}{f \sin(\theta)} ; \\ \theta^5 &= e^{\alpha+\gamma_1} dx^1 & dx^1 &= \theta^5 e^{-\alpha-\gamma_1} \\ \theta^6 &= e^{\alpha+\gamma_2} dx^2 & dx^2 &= \theta^6 e^{-\alpha-\gamma_2} \\ \theta^7 &= e^{\alpha+\gamma_3} dx^3 & dx^3 &= \theta^7 e^{-\alpha-\gamma_3} \end{aligned}$$

Tabla 2

por lo que sustituyendo esta tabla en nuestra métrica (1.5) obtenemos

$$dI^2 = (\theta^0)^2 - (\theta^1)^2 - (\theta^2)^2 - (\theta^3)^2 - (\theta^5)^2 - (\theta^6)^2 - (\theta^7)^2,$$

donde

$$g_{00} = 1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = g_{55} = g_{66} = g_{77} = -1; \quad (1.7)$$

otros $g_{AB} = 0$. Además, $g^{AB}g_{BC} = \delta_C^A$ [4, 6], por lo que $1 = \delta_0^0 = g^{0S}g_{S0} = g^{00}g_{00} + g^{01}g_{10} + \dots + g^{07}g_{70} = g^{00}g_{00} = g^{00} \cdot 1 = g^{00}$, es decir, $g^{00} = 1$; y de la misma forma se procede con los demás g^{AB} , obteniendo el siguiente resultado:

$$g^{AB} = g_{AB}, \forall A, B = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7\}. \quad (1.8)$$

Ahora obtendremos los diferenciales exteriores de las cantidades θ^N . Así, haciendo uso de las fórmulas

$$d(f\Omega) = fd\Omega + df \wedge \Omega, d^2\Omega = 0, \forall \text{ n-forma } \Omega \text{ y escalar } f,$$

resulta que

$$\begin{aligned} d\theta^0 &= d[(e^{\alpha+\beta})d\eta] = e^{\alpha+\beta}d^2\eta + d(e^{\alpha+\beta}) \wedge d\eta = d(e^{\alpha+\beta}) \wedge d\eta \\ &= (\alpha + \beta)'e^{\alpha+\beta}d\eta \wedge d\eta = 0; \end{aligned}$$

y de igual forma se procede con los demás diferenciales exteriores, obteniendo la siguiente tabla:

$$\begin{aligned} d\theta^0 &= 0 \\ d\theta^1 &= (\alpha + \beta)'e^{-\alpha-\beta}\theta^0 \wedge \theta^1 \\ d\theta^2 &= (\alpha + \beta)'e^{-\alpha-\beta}\theta^0 \wedge \theta^2 + e^{-\alpha-\beta}\frac{f'}{f}\theta^1 \wedge \theta^2 \\ d\theta^3 &= (\alpha + \beta)'e^{-\alpha-\beta}\theta^0 \wedge \theta^3 + e^{-\alpha-\beta}\frac{f'}{f}\theta^1 \wedge \theta^3 + e^{-\alpha-\beta}\frac{\cot(\theta)}{f}\theta^2 \wedge \theta^3 \\ d\theta^5 &= (\alpha + \gamma_1)'e^{-\alpha-\beta}\theta^0 \wedge \theta^5 \\ d\theta^6 &= (\alpha + \gamma_2)'e^{-\alpha-\beta}\theta^0 \wedge \theta^6 \\ d\theta^7 &= (\alpha + \gamma_3)'e^{-\alpha-\beta}\theta^0 \wedge \theta^7 \end{aligned}.$$

Tabla 3

Lo que sigue es comparar estos resultados con las primeras ecuaciones de estructura

$$d\theta^A = -\omega_B^A \wedge \theta^B,$$

para así obtener las 1-formas ω_B^A . Así, $d\theta^0 = 0$, por el valor dado en la tabla 3. También,

$$d\theta^1 = -\omega_0^1 \wedge \theta^0 - \omega_1^1 \wedge \theta^1 - \omega_2^1 \wedge \theta^2 - \omega_3^1 \wedge \theta^3 - \omega_5^1 \wedge \theta^5 - \omega_6^1 \wedge \theta^6 - \omega_7^1 \wedge \theta^7,$$

pero

$$\omega_1^1 = g^{1S}\omega_{S1} = g^{10}\omega_{01} + g^{11}\omega_{11} + \dots + g^{17}\omega_{71} = g^{11}\omega_{11} = 0, \quad (1.9)$$

pues de (1.8) puede verse que las componentes g^{1A} son cero para $A \neq 1$, y $\omega_{AA} = 0$; así que

$$d\theta^1 = -\omega_0^1 \wedge \theta^0 - \omega_2^1 \wedge \theta^2 - \omega_3^1 \wedge \theta^3 - \omega_5^1 \wedge \theta^5 - \omega_6^1 \wedge \theta^6 - \omega_7^1 \wedge \theta^7,$$

lo cual, al compararlo con el valor respectivo en la tabla 3, nos da la igualdad

$$-(\alpha + \beta)' e^{-\alpha-\beta} \theta^1 \wedge \theta^0 = -\omega_0^1 \wedge \theta^0 - \omega_2^1 \wedge \theta^2 - \omega_3^1 \wedge \theta^3 - \omega_5^1 \wedge \theta^5 - \omega_6^1 \wedge \theta^6 - \omega_7^1 \wedge \theta^7,$$

de donde $\omega_0^1 = (\alpha + \beta)' e^{-\alpha-\beta} \theta^1$ y las demás formas para $d\theta^1$ son $\omega_A^1 = E_{1A} \theta^A$ (donde $A = \{2, 3, 5, 6, 7\}$ y E_{1a} es un escalar), pues de acuerdo con la antisimetría del producto cuña [6], $\theta^A \wedge \theta^B = -\theta^B \wedge \theta^A$, de modo que si $A = B$, entonces dicho producto es cero. Y de manera análoga se obtienen otras formas ω_B^A . Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

$$\begin{aligned} \omega_0^1 &= (\alpha + \beta)' e^{-\alpha-\beta} \theta^1 \\ \omega_0^2 &= (\alpha + \beta)' e^{-\alpha-\beta} \theta^2 \\ \omega_1^2 &= e^{-\alpha-\beta} \frac{f'}{f} \theta^2 \\ \omega_0^3 &= (\alpha + \beta)' e^{-\alpha-\beta} \theta^3 \\ \omega_1^3 &= e^{-\alpha-\beta} \frac{f'}{f} \theta^3 \\ \omega_2^3 &= e^{-\alpha-\beta} \frac{\cot(\theta)}{f} \theta^3 \\ \omega_0^5 &= (\alpha + \gamma_1)' e^{-\alpha-\beta} \theta^5 \\ \omega_0^6 &= (\alpha + \gamma_2)' e^{-\alpha-\beta} \theta^6 \\ \omega_0^7 &= (\alpha + \gamma_3)' e^{-\alpha-\beta} \theta^7 \end{aligned}.$$

Tabla 4

Ahora obtendremos más formas haciendo uso del tensor métrico, como se muestra a continuación:

$$\omega_S^R g_{R1} g^{S0} = \omega_{1S} g^{S0} = -\omega_{S1} g^{S0} = -\omega_1^0 = \omega_0^1 g_{11} g^{00} = -\omega_0^1,$$

donde se usó la fórmula $\omega_{AB} = -\omega_{BA}$ y las relaciones (1.7) y (1.8); así que $\omega_1^0 = \omega_0^1$. De manera similar se calculan las demás formas. Los resultados aparecen en la siguiente tabla:

$$\begin{aligned} \omega_1^0 &= \omega_0^1 \\ \omega_2^0 &= \omega_0^2 \\ \omega_2^1 &= -\omega_1^2 \\ \omega_3^0 &= \omega_0^3 \\ \omega_3^1 &= -\omega_1^3 \\ \omega_3^2 &= -\omega_2^3 \\ \omega_5^0 &= \omega_0^5 \\ \omega_6^0 &= \omega_0^6 \\ \omega_7^0 &= \omega_0^7 \end{aligned}.$$

Tabla 5

De acuerdo con el formalismo, las demás formas ω_B^A que no obtuvimos son cero.

Nuestro siguiente paso es calcular los diferenciales exteriores de las 1-formas

ω_B^A de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 d\omega_0^1 &= d[(\alpha + \beta)' e^{-\alpha-\beta} \theta^1] = \left[(\alpha + \beta)'' e^{-\alpha-\beta} - (\alpha + \beta)'^2 e^{-\alpha-\beta} \right] d\eta \wedge \theta^1 \\
 &\quad + (\alpha + \beta)' e^{-\alpha-\beta} d\theta^1 \\
 &= \left[(\alpha + \beta)'' - (\alpha + \beta)'^2 \right] e^{-2\alpha-2\beta} \theta^0 \wedge \theta^1 \\
 &\quad + (\alpha + \beta)'^2 e^{-2\alpha-2\beta} \theta^0 \wedge \theta^1 \\
 &= (\alpha + \beta)'' e^{-2\alpha-2\beta} \theta^0 \wedge \theta^1,
 \end{aligned}$$

donde fueron sustituidos $d\eta$ y $d\theta^1$ desde las tablas 1 y 3 respectivamente; de forma análoga se obtienen otros diferenciales. Los resultados se muestran en seguida:

$$\begin{aligned}
 d\omega_0^1 &= (\alpha + \beta)'' e^{-2\alpha-2\beta} \theta^0 \wedge \theta^1 \\
 d\omega_0^2 &= (\alpha + \beta)'' e^{-2\alpha-2\beta} \theta^0 \wedge \theta^2 + (\alpha + \beta)' e^{-2\alpha-2\beta} \frac{f'}{f} \theta^1 \wedge \theta^2 \\
 d\omega_1^2 &= e^{-2\alpha-2\beta} \frac{f''}{f} \theta^1 \wedge \theta^2 \\
 d\omega_0^3 &= \left\{ \begin{array}{l} (\alpha + \beta)'' e^{-2\alpha-2\beta} \theta^0 \wedge \theta^3 + (\alpha + \beta)' e^{-2\alpha-2\beta} \frac{f'}{f} \theta^1 \wedge \theta^3 \\ \quad + (\alpha + \beta)' e^{-2\alpha-2\beta} \frac{\cot(\theta)}{f} \theta^2 \wedge \theta^3 \end{array} \right\} \\
 d\omega_1^3 &= e^{-2\alpha-2\beta} \frac{f''}{f} \theta^1 \wedge \theta^3 + e^{-2\alpha-2\beta} \frac{f'}{f^2} \cot(\theta) \theta^2 \wedge \theta^3 \\
 d\omega_2^3 &= -\frac{e^{-2\alpha-2\beta}}{f^2} \theta^2 \wedge \theta^3 \\
 d\omega_0^5 &= \left[(\alpha + \gamma_1)'' - (\alpha + \beta)' (\alpha + \gamma_1)' + (\alpha + \gamma_1)'^2 \right] e^{-2\alpha-2\beta} \theta^0 \wedge \theta^5 \\
 d\omega_0^6 &= \left[(\alpha + \gamma_2)'' - (\alpha + \beta)' (\alpha + \gamma_2)' + (\alpha + \gamma_2)'^2 \right] e^{-2\alpha-2\beta} \theta^0 \wedge \theta^6 \\
 d\omega_0^7 &= \left[(\alpha + \gamma_3)'' - (\alpha + \beta)' (\alpha + \gamma_3)' + (\alpha + \gamma_3)'^2 \right] e^{-2\alpha-2\beta} \theta^0 \wedge \theta^7
 \end{aligned}$$

Tabla 6

Otros diferenciales exteriores $d\omega$ se calculan a partir de las equivalencias de la tabla 5 y volviendo a emplear esta tabla 6. Los demás diferenciales exteriores serán cero.

Lo que sigue es calcular las dos-formas Ω_B^A haciendo uso de las segundas ecuaciones de estructura

$$\Omega_B^A = d\omega_B^A + \omega_C^A \wedge \omega_B^C.$$

Así que

$$\begin{aligned}
 \Omega_0^0 &= d\omega_0^0 + \omega_c^0 \wedge \omega_0^c \\
 &= d\omega_0^0 + \omega_0^0 \wedge \omega_0^0 + \omega_1^0 \wedge \omega_0^1 + \omega_2^0 \wedge \omega_0^2 + \omega_3^0 \wedge \omega_0^3 \\
 &\quad + \omega_5^0 \wedge \omega_0^5 + \omega_6^0 \wedge \omega_0^6 + \omega_7^0 \wedge \omega_0^7 \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

de acuerdo con las tablas 4 y 5;

$$\begin{aligned}
 \Omega_1^0 &= d\omega_1^0 + \omega_c^0 \wedge \omega_1^c \\
 &= d\omega_1^0 + \omega_0^0 \wedge \omega_1^0 + \omega_1^0 \wedge \omega_1^1 + \omega_2^0 \wedge \omega_1^2 \\
 &\quad + \omega_3^0 \wedge \omega_1^3 + \omega_5^0 \wedge \omega_1^5 + \omega_6^0 \wedge \omega_1^6 + \omega_7^0 \wedge \omega_1^7 \\
 &= (\alpha + \beta)'' e^{-2\alpha-2\beta} \theta^0 \wedge \theta^1 + (\alpha + \beta)' e^{-\alpha-\beta} \theta^2 \wedge (\alpha + \beta)' e^{-\alpha-\beta} \theta^2 \\
 &\quad + (\alpha + \beta)' e^{-\alpha-\beta} \theta^3 \wedge e^{-\alpha-\beta} \frac{f'}{f} \theta^3 \\
 &= (\alpha + \beta)'' e^{-2\alpha-2\beta} \theta^0 \wedge \theta^1,
 \end{aligned}$$

de acuerdo con los datos de las tablas 4, 5 y 6, y el método empleado en la ecuación (1.9); y análogamente se calculan las demás 2-formas. Aquí se muestran los resultados:

$$\begin{aligned}
 \Omega_0^0 &= 0 \\
 \Omega_1^0 &= (\alpha + \beta)'' e^{-2\alpha-2\beta} \theta^0 \wedge \theta^1 \\
 \Omega_2^0 &= (\alpha + \beta)'' e^{-2\alpha-2\beta} \theta^0 \wedge \theta^2 \\
 \Omega_3^0 &= (\alpha + \beta)'' e^{-2\alpha-2\beta} \theta^0 \wedge \theta^3 \\
 \Omega_5^0 &= \left[-(\alpha + \beta)' (\alpha + \gamma_1)' + (\alpha + \gamma_1)^{r^2} + (\alpha + \gamma_1)'' \right] e^{-2\alpha-2\beta} \theta^0 \wedge \theta^5 \\
 \Omega_6^0 &= \left[-(\alpha + \beta)' (\alpha + \gamma_2)' + (\alpha + \gamma_2)^{r^2} + (\alpha + \gamma_2)'' \right] e^{-2\alpha-2\beta} \theta^0 \wedge \theta^6 \\
 \Omega_7^0 &= \left[-(\alpha + \beta)' (\alpha + \gamma_3)' + (\alpha + \gamma_3)^{r^2} + (\alpha + \gamma_3)'' \right] e^{-2\alpha-2\beta} \theta^0 \wedge \theta^7 \\
 \Omega_0^1 &= \Omega_1^0 \\
 \Omega_1^1 &= 0 \\
 \Omega_2^1 &= \left[(\alpha + \beta)^{r^2} - \frac{f''}{f} \right] e^{-2\alpha-2\beta} \theta^1 \wedge \theta^2 \\
 \Omega_3^1 &= \left[(\alpha + \beta)^{r^2} - \frac{f''}{f} \right] e^{-2\alpha-2\beta} \theta^1 \wedge \theta^3 \\
 \Omega_5^1 &= (\alpha + \beta)' (\alpha + \gamma_1)' e^{-2\alpha-2\beta} \theta^1 \wedge \theta^5 \\
 \Omega_6^1 &= (\alpha + \beta)' (\alpha + \gamma_2)' e^{-2\alpha-2\beta} \theta^1 \wedge \theta^6 \\
 \Omega_7^1 &= (\alpha + \beta)' (\alpha + \gamma_3)' e^{-2\alpha-2\beta} \theta^1 \wedge \theta^7 \\
 \Omega_0^2 &= \Omega_2^0 \\
 \Omega_1^2 &= -\Omega_2^1 \\
 \Omega_2^2 &= 0 \\
 \Omega_3^2 &= \left[\frac{1 - f^{r^2}}{f^2} + (\alpha + \beta)^{r^2} \right] e^{-2\alpha-2\beta} \theta^2 \wedge \theta^3 \\
 \Omega_5^2 &= (\alpha + \beta)' (\alpha + \gamma_1)' e^{-2\alpha-2\beta} \theta^2 \wedge \theta^5
 \end{aligned}$$

Tabla 7, primera parte

$$\begin{aligned}
\Omega_6^2 &= (\alpha + \beta)' (\alpha + \gamma_2)' e^{-2\alpha-2\beta} \theta^2 \wedge \theta^6 \\
\Omega_7^2 &= (\alpha + \beta)' (\alpha + \gamma_3)' e^{-2\alpha-2\beta} \theta^2 \wedge \theta^7 \\
\Omega_0^3 &= \Omega_3^0 \\
\Omega_1^3 &= -\Omega_3^1 \\
\Omega_2^3 &= -\Omega_3^2 \\
\Omega_3^3 &= 0 \\
\Omega_5^3 &= (\alpha + \beta)' (\alpha + \gamma_1)' e^{-2\alpha-2\beta} \theta^3 \wedge \theta^5 \\
\Omega_6^3 &= (\alpha + \beta)' (\alpha + \gamma_2)' e^{-2\alpha-2\beta} \theta^3 \wedge \theta^6 \\
\Omega_7^3 &= (\alpha + \beta)' (\alpha + \gamma_3)' e^{-2\alpha-2\beta} \theta^3 \wedge \theta^7 \\
\Omega_0^5 &= \Omega_5^0 \\
\Omega_1^5 &= -\Omega_5^1 \\
\Omega_2^5 &= -\Omega_5^2 \\
\Omega_3^5 &= -\Omega_5^3 \\
\Omega_5^5 &= 0 \\
\Omega_6^5 &= (\alpha + \gamma_1)' (\alpha + \gamma_2)' e^{-2\alpha-2\beta} \theta^5 \wedge \theta^6 \\
\Omega_7^5 &= (\alpha + \gamma_1)' (\alpha + \gamma_3)' e^{-2\alpha-2\beta} \theta^5 \wedge \theta^7 \\
\Omega_1^6 &= -\Omega_6^1 \\
\Omega_2^6 &= -\Omega_6^2 \\
\Omega_3^6 &= -\Omega_6^3 \\
\Omega_5^6 &= -\Omega_6^5 \\
\Omega_6^6 &= 0 \\
\Omega_7^6 &= (\alpha + \gamma_2)' (\alpha + \gamma_3)' e^{-2\alpha-2\beta} \theta^6 \wedge \theta^7 \\
\Omega_0^7 &= \Omega_7^0 \\
\Omega_1^7 &= -\Omega_7^1 \\
\Omega_2^7 &= -\Omega_7^2 \\
\Omega_3^7 &= \Omega_7^3 \\
\Omega_5^7 &= -\Omega_7^5 \\
\Omega_6^7 &= -\Omega_7^6 \\
\Omega_7^7 &= 0
\end{aligned}$$

Tabla 7, segunda parte

El siguiente paso es calcular las componentes del tensor de Riemann empleando las fórmulas

$$\Omega_B^A = \frac{1}{2} R_{BCD}^A \theta^C \wedge \theta^D$$

y comparándolas con las 2-formas de la tabla 7. De esa manera tenemos que $\Omega_0^0 = R_{0CD}^0 \theta^C \wedge \theta^D = 0$, así que $R_{0CD}^0 = 0$;
 $\Omega_1^0 = R_{1CD}^0 \theta^C \wedge \theta^D = (\alpha + \beta)'' e^{-2\alpha-2\beta} \theta^0 \wedge \theta^1$, por lo que $R_{101}^0 = (\alpha + \beta)'' e^{-2\alpha-2\beta}$ y todos los demás componentes $R_{1CD}^0 = 0$. Pro-

cediendo de la misma forma con el cálculo de los demás componentes R_{BCD}^A obtenemos los resultados de la tabla siguiente:

$$\begin{aligned}
R_{101}^0 &= (\alpha + \beta)'' e^{-2\alpha-2\beta} \\
R_{202}^0 &= R_{101}^0 \\
R_{303}^0 &= R_{101}^0 \\
R_{505}^0 &= \left[-(\alpha + \beta)' (\alpha + \gamma_1)' + (\alpha + \gamma_1)^{r^2} + (\alpha + \gamma_1)'' \right] e^{-2\alpha-2\beta} \\
R_{606}^0 &= \left[-(\alpha + \beta)' (\alpha + \gamma_2)' + (\alpha + \gamma_2)^{r^2} + (\alpha + \gamma_2)'' \right] e^{-2\alpha-2\beta} \\
R_{707}^0 &= \left[-(\alpha + \beta)' (\alpha + \gamma_3)' + (\alpha + \gamma_3)^{r^2} + (\alpha + \gamma_3)'' \right] e^{-2\alpha-2\beta} \\
R_{010}^1 &= -R_{101}^0 \\
R_{212}^1 &= \left[(\alpha + \beta)^{r^2} - \frac{f''}{f} \right] e^{-2\alpha-2\beta} \\
R_{313}^1 &= R_{212}^1 \\
R_{515}^1 &= (\alpha + \beta)' (\alpha + \gamma_1)' e^{-2\alpha-2\beta} \\
R_{616}^1 &= (\alpha + \beta)' (\alpha + \gamma_2)' e^{-2\alpha-2\beta} \\
R_{717}^1 &= (\alpha + \beta)' (\alpha + \gamma_3)' e^{-2\alpha-2\beta} \\
R_{020}^2 &= -R_{101}^0 \\
R_{121}^2 &= R_{212}^1 \\
R_{323}^2 &= \left[\frac{1-f'^2}{f^2} + (\alpha + \beta)^{r^2} \right] e^{-2\alpha-2\beta} \\
R_{525}^2 &= R_{515}^1 \\
R_{626}^2 &= R_{616}^1 \\
R_{727}^2 &= R_{717}^1 \\
R_{030}^3 &= -R_{101}^0 \\
R_{131}^3 &= R_{212}^1 \\
R_{232}^3 &= R_{323}^1 \\
R_{535}^3 &= R_{515}^1 \\
R_{636}^3 &= R_{616}^1 \\
R_{737}^3 &= R_{717}^1 \\
R_{050}^5 &= -R_{505}^0 \\
R_{151}^5 &= R_{515}^1 \\
R_{252}^5 &= R_{515}^1 \\
R_{353}^5 &= R_{515}^1 \\
R_{656}^5 &= (\alpha + \gamma_1)' (\alpha + \gamma_2)' e^{-2\alpha-2\beta} \\
R_{757}^5 &= (\alpha + \gamma_1)' (\alpha + \gamma_3)' e^{-2\alpha-2\beta} \\
R_{060}^6 &= -R_{606}^0 \\
R_{161}^6 &= R_{616}^1 \\
R_{261}^6 &= R_{616}^1 \\
R_{363}^6 &= R_{616}^1 \\
R_{565}^6 &= R_{656}^5 \\
R_{767}^6 &= (\alpha + \gamma_2)' (\alpha + \gamma_3)' e^{-2\alpha-2\beta} \\
R_{070}^7 &= -R_{707}^0 \\
R_{171}^7 &= R_{717}^1
\end{aligned}$$

Tabla 8, primera parte.

$$\begin{aligned}
R^7_{272} &= R^1_{717} \\
R^7_{373} &= R^1_{717} \\
R^7_{575} &= R^5_{757} \\
R^7_{676} &= (\alpha + \gamma_2)' (\alpha + \gamma_3)' e^{-2\alpha-2\beta}.
\end{aligned}$$

Tabla 8, segunda parte

Otras componentes se calculan por la anticommutatividad del producto externo, por ejemplo: $\Omega^0_1 = (\alpha + \beta)'' e^{-2\alpha-2\beta} \theta^0 \wedge \theta^1 = R^0_{1CD} \theta^C \wedge \theta^D$, siendo $R^0_{101} = (\alpha + \beta)'' e^{-2\alpha-2\beta}$, mas también $\Omega^0_1 = -(\alpha + \beta)'' e^{-2\alpha-2\beta} \theta^1 \wedge \theta^0 = R^0_{1CD} \theta^C \wedge \theta^D$, siendo $R^0_{110} = -(\alpha + \beta)'' e^{-2\alpha-2\beta} = -R^0_{101}$; y en general [17, 9]

$$R^A_{BCD} = -R^A_{BDC}. \quad (1.10)$$

Todas las demás componentes del tensor de Riemann son cero.

Ahora procederemos a calcular las componentes del tensor de Ricci, definidas de la siguiente manera:

$$R_{AB} = R^C_{ABC}.$$

Así pues,

$$\begin{aligned}
R_{00} &= R^0_{000} + R^1_{001} + R^2_{002} + R^3_{003} + R^5_{005} + R^6_{006} + R^7_{007} \\
&= -R^1_{010} - R^2_{020} - R^3_{030} - R^5_{050} - R^6_{060} - R^7_{070} \\
&= \left\{ \begin{array}{l} 3(\alpha + \beta)'' e^{-2\alpha-2\beta} \\ + \left[-(\alpha + \beta)' (\alpha + \gamma_1)' + (\alpha + \gamma_1)^{r^2} + (\alpha + \gamma_1)'' \right] e^{-2\alpha-2\beta} \\ + \left[-(\alpha + \beta)' (\alpha + \gamma_2)' + (\alpha + \gamma_2)^{r^2} + (\alpha + \gamma_2)'' \right] e^{-2\alpha-2\beta} \\ + \left[-(\alpha + \beta)' (\alpha + \gamma_3)' + (\alpha + \gamma_3)^{r^2} + (\alpha + \gamma_3)'' \right] e^{-2\alpha-2\beta} \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{l} 3(\alpha + \beta)'' \\ + \sum_{n=1}^3 \left[\begin{array}{l} -(\alpha + \beta)' (\alpha + \gamma_n)' \\ + (\alpha + \gamma_n)^{r^2} + (\alpha + \gamma_n)'' \end{array} \right] \end{array} \right\} e^{-2\alpha-2\beta},
\end{aligned}$$

donde se usaron los valores de la tabla 8 y las antisimetrías (1.10). De igual forma se calculan las demás componentes, obteniendo los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \left\{ \begin{array}{l} 3(\alpha + \beta)'' \\ + \sum_{n=1}^3 \left[-(\alpha + \beta)' (\alpha + \gamma_n)' + (\alpha + \gamma_n)^{r^2} + (\alpha + \gamma_n)'' \right] \end{array} \right\} e^{-2\alpha-2\beta} \\
R_{11} &= \left\{ -(\alpha + \beta)'' + 2 \left[\frac{f''}{f} - (\alpha + \beta)^{r^2} \right] - (\alpha + \beta)' \sum_{n=1}^3 (\alpha + \gamma_n)' \right\} e^{-2\alpha-2\beta} \\
R_{22} &= \left\{ \begin{array}{l} -(\alpha + \beta)'' + \frac{f''}{f} + \frac{f'^2 - 1}{f^2} \\ - 2(\alpha + \beta)^{r^2} - (\alpha + \beta)' \sum_{n=1}^3 (\alpha + \gamma_n)' \end{array} \right\} e^{-2\alpha-2\beta}, \\
R_{33} &= R_{22} \\
R_{55} &= - \left\{ (\alpha + \gamma_1)' (5\alpha + 2\beta + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)' + (\alpha + \gamma_1)'' \right\} e^{-2\alpha-2\beta} \\
R_{66} &= - \left\{ (\alpha + \gamma_2)' (5\alpha + 2\beta + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)' + (\alpha + \gamma_2)'' \right\} e^{-2\alpha-2\beta} \\
R_{77} &= - \left\{ (\alpha + \gamma_3)' (5\alpha + 2\beta + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)' + (\alpha + \gamma_3)'' \right\} e^{-2\alpha-2\beta}
\end{aligned}$$

Tabla 9

y $R_{AB} = 0$ para $A \neq B$.

Lo que sigue es calcular la curvatura de Ricci, dada por la ecuación

$$R = R^I_I. \quad (1.11)$$

Así que

$$\begin{aligned} R &= R^I_I \\ &= g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} + g^{55}R_{55} + g^{66}R_{66} + g^{77}R_{77} \\ &= R_{00} - R_{11} - R_{22} - R_{33} - R_{55} - R_{66} - R_{77}, \end{aligned}$$

debido a los valores del tensor métrico dados en (1.8); por lo que, considerando las componentes del tensor de Ricci desde la tabla 9 y haciendo los respectivos cálculos algebraicos, obtenemos

$$R = \left\{ \begin{array}{l} 2(\alpha + \beta)'(6\alpha + 3\beta + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)' \\ \quad + 6(\alpha + \beta)'' + \sum_{n=1}^3 (\alpha + \gamma_n)^{r^2} \\ - (5\alpha + 2\beta + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)' \sum_{n=1}^3 (\alpha + \gamma_n)' \\ \quad + 2\left(\frac{1-f^2}{f^2}\right) - 4\frac{f''}{f} \end{array} \right\} e^{-2\alpha-2\beta}. \quad (1.12)$$

Ahora, empleando las sustituciones

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= u \\ \alpha + \gamma_1 &= v_1 \\ \alpha + \gamma_2 &= v_2, \\ \alpha + \gamma_3 &= v_3 \end{aligned}$$

Tabla 10

los componentes del tensor de Ricci adquieren la siguiente forma:

$$\begin{aligned} R_{00} &= \left\{ 3u'' + \sum_{n=1}^3 \left[-u'v'_n + v_n^{r^2} + v_n'' \right] \right\} e^{-2u} \\ R_{11} &= \left\{ -u'' + 2\left[\frac{f''}{f} - u'^2\right] - u' \sum_{n=1}^3 v'_n \right\} e^{-2u} \\ R_{22} &= \left\{ -u'' + \frac{f''}{f} + \frac{f^2-1}{f^2} - 2u'^2 - u' \sum_{n=1}^3 v'_n \right\} e^{-2u} \\ R_{33} &= R_{22} \\ R_{55} &= -\left\{ v'_1 (2u + v_1 + v_2 + v_3)' + v_1'' \right\} e^{-2u} \\ R_{66} &= -\left\{ v'_2 (2u + v_1 + v_2 + v_3)' + v_2'' \right\} e^{-2u} \\ R_{77} &= -\left\{ v'_3 (2u + v_1 + v_2 + v_3)' + v_3'' \right\} e^{-2u} \end{aligned};$$

Tabla 11

y la curvatura obtiene la forma

$$R = \left\{ \begin{array}{l} 2u' (3u + v_1 + v_2 + v_3)' + 6(u)'' + \sum_{n=1}^3 v_n'^2 \\ - (2u + v_1 + v_2 + v_3)' \sum_{n=1}^3 v'_n + 2\left(\frac{1-f'^2}{f^2}\right) - 4\frac{f''}{f} \end{array} \right. . \quad (1.13)$$

Por lo tanto con la tabla 11 y la curvatura dada en (1.13) finalmente ya podemos calcular la parte izquierda de las ecuaciones de Einstein, expresadas de la siguiente manera:

$$G_{AB} = -\kappa T_{AB}; \quad (1.14)$$

donde T_{AB} es el tensor de momento-energía, κ es la constante gravitacional einsteniana y G_{AB} se calcula por la fórmula

$$G_{AB} = R_{AB} - \frac{1}{2}g_{AB}R. \quad (1.15)$$

Mas como en nuestro tensor métrico y en nuestro tensor de Ricci sólo los componentes diagonales son distintos de cero, entonces las ecuaciones de Einstein para nuestra métrica se reducen a las siguientes 7 ecuaciones:

$$\begin{aligned} G_{00} &= R_{00} - \frac{1}{2}R = -\kappa T_{00} \\ G_{11} &= R_{11} + \frac{1}{2}R = -\kappa T_{11} \\ G_{22} &= R_{22} + \frac{1}{2}R = -\kappa T_{22} \\ G_{33} &= R_{33} + \frac{1}{2}R = -\kappa T_{33} \\ G_{55} &= R_{55} + \frac{1}{2}R = -\kappa T_{55} \\ G_{66} &= R_{66} + \frac{1}{2}R = -\kappa T_{66} \\ G_{77} &= R_{77} + \frac{1}{2}R = -\kappa T_{77} \end{aligned}$$

Tabla 12

eso debido a los valores del tensor métrico, dados en (1.7). Así que el lado izquierdo de las ecuaciones de Einstein toma la forma

$$\begin{aligned} G_{00} &= - \left[\begin{array}{l} 3u'(u + v_1 + v_2 + v_3)' + v'_1v'_2 + v'_1v'_3 \\ + v'_2v'_3 + \frac{1-f'^2}{f^2} - 2\frac{f''}{f} \end{array} \right] e^{-2u} \\ G_{11} &= \left[\begin{array}{l} u'(u + v_1 + v_2 + v_3)' + v'_1'^2 \\ + v'_2'^2 + v'_3'^2 + v'_1v'_2 + v'_1v'_3 + v'_2v'_3 \end{array} \right] e^{-2u} \\ G_{22} &= \left[\begin{array}{l} (2u + v_1 + v_2 + v_3)'' + \frac{1-f'^2}{f^2} \\ u'(u + v_1 + v_2 + v_3)' + v'_1'^2 \\ + v'_2'^2 + v'_3'^2 + v'_1v'_2 + v'_1v'_3 + v'_2v'_3 \\ + (2u + v_1 + v_2 + v_3)'' - \frac{f''}{f} \end{array} \right] e^{-2u} \\ G_{33} &= G_{22} \\ G_{55} &= \left[\begin{array}{l} u'(3u + 2v_2 + 2v_3)' \\ + v'_2'^2 + v'_3'^2 + v'_1v'_3 \\ + (3u + v_2 + v_3)'' + \frac{1-f'^2}{f^2} - 2\frac{f''}{f} \end{array} \right] e^{-2u} \\ G_{66} &= \left[\begin{array}{l} u'(3u + 2v_1 + 2v_3)' \\ + v'_1'^2 + v'_3'^2 + v'_1v'_3 \\ + (3u + v_1 + v_3)'' + \frac{1-f'^2}{f^2} - 2\frac{f''}{f} \end{array} \right] e^{-2u} \\ G_{77} &= \left[\begin{array}{l} u'(3u + 2v_1 + 2v_2)' \\ + v'_1'^2 + v'_2'^2 + v'_1v'_2 \\ + (3u + v_1 + v_2)'' + \frac{1-f'^2}{f^2} - 2\frac{f''}{f} \end{array} \right] e^{-2u} \end{aligned}$$

Tabla 13

Ahora, si consideramos que la función f de nuestra métrica (definida en (1.6)) toma las siguientes posibles formas (dependiendo de si elejimos un universo plano, elíptico o hiperbólico):

$$f = \begin{cases} \chi, & \text{caso plano} \\ \sin \chi, & \text{caso elíptico} \\ \sinh \chi, & \text{caso hiperbólico} \end{cases}; \quad (1.16)$$

entonces son ciertas las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} \frac{1-f'^2}{f^2} = 0, \quad \frac{f''}{f} = 0 & \quad \text{caso plano} \\ \frac{1-f'^2}{f^2} = \frac{1-\cos^2 \chi}{\sin^2 \chi} = 1, \quad \frac{f''}{f} = -\frac{\sin \chi}{\sin \chi} = -1 & \quad \text{caso elíptico} \\ \frac{1-f'^2}{f^2} = \frac{1-\cosh^2 \chi}{\sinh^2 \chi} = -1, \quad \frac{f''}{f} = \frac{\sinh \chi}{\sinh \chi} = 1 & \quad \text{caso hiperbólico} \end{aligned}; \quad (1.17)$$

Tabla 14

con las cuales las componentes G_{AA} (no hay sumatoria) se simplifican así:

$$\boxed{\begin{aligned} G_{00} &= - \left[\begin{array}{l} 3u'(u+v_1+v_2+v_3)' + v'_1v'_2 + v'_1v'_3 \\ + v'_2v'_3 + 3\sigma \end{array} \right] e^{-2u} \\ G_{11} &= \left[\begin{array}{l} u'(u+v_1+v_2+v_3)' + v'^2_1 + v^2_2 + v'^2_3 + v'_1v'_2 \\ + v'_1v'_3 + v'_2v'_3 + (2u+v_1+v_2+v_3)'' + \sigma \end{array} \right] e^{-2u} \\ G_{22} &= G_{11} \\ G_{33} &= G_{11} \\ G_{55} &= \left[\begin{array}{l} u'(3u+2v_2+2v_3)' + v'^2_2 + v'^2_3 \\ + v'_2v'_3 + (3u+v_2+v_3)'' + 3\sigma \end{array} \right] e^{-2u} \\ G_{66} &= \left[\begin{array}{l} u'(3u+2v_1+2v_3)' + v'^2_1 + v'^2_3 \\ + v'_1v'_3 + (3u+v_1+v_3)'' + 3\sigma \end{array} \right] e^{-2u} \\ G_{77} &= \left[\begin{array}{l} u'(3u+2v_1+2v_2)' + v'^2_1 + v'^2_2 \\ + v'_1v'_2 + (3u+v_1+v_2)'' + 3\sigma \end{array} \right] e^{-2u} \end{aligned}};$$

Tabla 15

donde σ es un parámetro que toma los siguientes valores:

$$\boxed{\sigma = \begin{cases} 0, & \text{caso plano} \\ 1, & \text{caso elíptico} \\ -1, & \text{caso hiperbólico} \end{cases}}. \quad (1.18)$$

Capítulo 2

Comparación de modelos cosmológicos 6D de Kechkin-Peraza y de Peraza-Vladimirov.

Nosotros analizaremos una solución a las ecuaciones N-dimensionales de Einstein propuesta en Kechkin-Peraza [10]. Veremos en particular el caso 6-dimensional con el fin de comparar con las soluciones cosmológicas 6-dimensionales obtenidas en Peraza-Vladimirov [1] y establecer que los métodos de solución empleados en [10] y [1] son equivalentes.

2.1. Corroboration de la cosmología N-dimensional vacía de Kechkin-Peraza. Análisis del modelo 6D en particular.

Kechkin y Peraza proponen un cuadrado del intervalo N-dimensional de la forma

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{AB} dx^A dx^B \\ &= a^2 \left[d\eta^2 - d\chi^2 - \left\{ \begin{array}{c} \sin^2 \chi \\ \chi^2 \\ \sinh^2 \chi \end{array} \right\} (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2) \right] , \quad (2.1) \\ &\quad - \sum_k (\pm b_k)^2 (dv^k)^2 \end{aligned}$$

donde $A, B = 0, \dots, 3 + N$; $k = 1, \dots, N$; $a = a(\eta)$, $b_k = b_k(\eta)$ son funciones desconocidas del tiempo η . Aquí y en lo que siga, las ecuaciones de arriba, de

16 CAPÍTULO 2. COMPARACIÓN DE MODELOS COSMOLÓGICOS 6D.

en medio y de abajo, son expresiones correspondientes a secciones espaciales 3-dimensionales esféricas, planas e hiperbólicas, respectivamente.

Nosotros denotamos $a \equiv e^\alpha$, $b_i \equiv e^{\beta_i}$, $i = 1, \dots, N$; entonces el sistema de ecuaciones de Einstein $R_{AB} = 0$ es escrito de la siguiente manera:

$$3\alpha'' + \sum_k \left[\beta_k'' + \beta_k'^2 - \alpha' \beta_k' \right] = 0, \quad (2.2)$$

$$\alpha'' + 2\alpha'^2 + 2\sigma + \alpha' \sum_k \beta_k' = 0, \quad (2.3)$$

$$\beta_i'' + 2\alpha' \beta_i' + \beta_i' \sum_k \beta_k' = 0, \quad (2.4)$$

donde $\sigma = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$.

Demostración para el caso 7-dimensional.

Como estamos trabajando con una cosmología N-dimensional “vacía”, entonces las ecuaciones de Einstein, dadas en (1.14) (capítulo 1), toman la forma $G_{AB} = 0$, por lo que el sistema de ecuaciones (1.15) adquiere la forma

$$G_{AB} = R_{AB} - \frac{1}{2}g_{AB}R = 0. \quad (2.5)$$

En consecuencia, multiplicando la fórmula anterior por las componentes g^{AB} del tensor métrico y usando la relación (1.11) de la curvatura de Ricci, se tiene que

$$\begin{aligned} g^{AB}G_{AB} &= g^{AB}R_{AB} - \frac{1}{2}g^{AB}g_{AB}R = 0 \\ &= R_B^B - \frac{1}{2}\delta_B^B R \\ &= R - \frac{1}{2} \cdot 7R = 0, \end{aligned}$$

es decir,

$$R = 0. \quad (2.6)$$

Por lo tanto, reemplazando (2.6) en (2.5), llegamos a la expresión

$$R_{AB} = 0.$$

Así que para el “caso 7-dimensional” podemos utilizar las componentes del tensor de Ricci ya calculadas en la tabla 11 (capítulo 1), debido a que la métrica (1.5) es el caso 7-dimensional (con $N = 3$) de la métrica (2.1) bajo las identi-

dades $\alpha + \beta \equiv \alpha$ y $\alpha + \gamma_i \equiv \beta_i$, dándonos el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} R_{00} &= \left\{ 3\alpha'' + \sum_{n=1}^3 \left[-\alpha'\beta'_n + \beta_n'^2 + \beta_n'' \right] \right\} e^{-2\alpha} = 0, \\ R_{11} &= \left\{ -\alpha'' - 2\sigma - 2\alpha'^2 - \alpha' \sum_{n=1}^3 \beta'_n \right\} e^{-2\alpha} = 0, \\ R_{22} &= R_{11} = 0, \\ R_{33} &= R_{11} = 0, \\ R_{55} &= - \left\{ \beta'_1 (2\alpha + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3)' + \beta_1'' \right\} e^{-2\alpha} = 0, \\ R_{66} &= - \left\{ \beta'_2 (2\alpha + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3)' + \beta_2'' \right\} e^{-2\alpha} = 0, \\ R_{77} &= - \left\{ \beta'_3 (2\alpha + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3)' + \beta_3'' \right\} e^{-2\alpha} = 0, \end{aligned}$$

donde hemos empleado las equivalencias (1.17) para la función f y, las identidades $u \equiv \alpha$, $v_i \equiv \beta_i$ (ver tabla 10) y $k \equiv \sigma$ (ver (1.18)). Por lo tanto, dividiendo el sistema anterior entre e^{-2u} obtenemos el siguiente nuevo sistema:

$$\begin{aligned} 3\alpha'' + \sum_{n=1}^3 \left[-\alpha'\beta'_n + \beta_n'^2 + \beta_n'' \right] &= 0, \\ \alpha'' + 2\sigma + 2\alpha'^2 + \alpha' \sum_{n=1}^3 \beta'_n &= 0, \\ \beta'_1 (2\alpha + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3)' + \beta_1'' &= 0, \\ \beta'_2 (2\alpha + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3)' + \beta_2'' &= 0, \\ \beta'_3 (2\alpha + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3)' + \beta_3'' &= 0; \end{aligned}$$

el cual es equivalente al sistema (2.2)-(2.4) (para $N = 3$). Así, queda demostrado el sistema (2.2)-(2.4) para el “caso 7 dimensional”. ■

Nosotros excluimos la consideración de la posibilidad trivial $b_i = \text{const}, \forall i$; por lo que para cualquier i nosotros tenemos $b'_i \neq 0$, i.e. $\beta'_i \neq 0$.

La solución del sistema de ecuaciones (2.2)-(2.4) determina $\alpha(\eta)$ y $\beta_i(\eta)$, junto con constantes de integración; y con ello a y b_i determinan las funciones desconocidas definiendo la métrica g_{AB} .

Nosotros denotamos

$$\alpha' \equiv \mu, \beta'_i \equiv \nu_i, \sum_k \nu_k \equiv S, \sum_k \nu_k^2 \equiv Q, \quad (2.7)$$

entonces en la nueva notación, la ecuación (2.4) toma la forma

$$\nu'_i + 2\mu\nu_i + S\nu_i = 0. \quad (2.8)$$

Sumando sobre i obtenemos

$$S' + (2\mu + S)S = 0, \quad (2.9)$$

y multiplicando por ν_i y sumando sobre i tenemos que

$$\frac{1}{2}Q' + (2\mu + S)Q = 0. \quad (2.10)$$

18 CAPÍTULO 2. COMPARACIÓN DE MODELOS COSMOLÓGICOS 6D.

A causa de que $\nu_i \neq 0$, nosotros tenemos que $Q \neq 0$, y entonces

$$\frac{1}{2} \frac{Q'}{Q} + (2\mu + S) = 0. \quad (2.11)$$

Si además S no es igual a cero, entonces de (2.9) nosotros tenemos

$$\frac{S'}{S} + (2\mu + S) = 0 \quad (2.12)$$

(mas tarde esta asunción será retirada). Por lo tanto

$$\frac{1}{2} \frac{Q'}{Q} = \frac{S'}{S} \quad (2.13)$$

ó, integrando,

$$Q = CS^2, \quad (2.14)$$

donde C es la constante de integración.

Nosotros reemplazamos el sistema original de ecuaciones (2.2)-(2.4) por su equivalente:

$$3\mu' + S' + CS^2 - \mu S = 0, \quad (2.15)$$

$$S' + (2\mu + S)S = 0, \quad (2.16)$$

$$\mu' + 2\mu^2 + 2\sigma + \mu S = 0, \quad (2.17)$$

$$\nu'_i + (2\mu + S)\nu_i = 0, \quad (2.18)$$

$$\sum_k \nu_k = S, \quad (2.19)$$

$$\sum_k \nu_k^2 = Q, \quad (2.20)$$

$$Q = CS^2, \quad (2.21)$$

$$\alpha' = \mu, \quad (2.22)$$

$$\beta'_i = \nu_i; \quad (2.23)$$

obtenido de ellas (ecuaciones (2.2), (2.3) y (2.4) se transforman en (2.15), (2.17) y (2.18)) con la ayuda de la nueva notación (2.7) (que llega a ser ecuaciones. (2.19), (2.20), (2.22) y (2.23)) y con la adición de los dos corolarios (2.9) y (2.14) (ecuaciones. (2.16) y (2.21)).

Ahora resolveremos el sistema (2.15)-(2.23). Primero despejaremos S' en (2.16) y μ' en (2.17), obteniendo

$$S' = -(2\mu + S)S,$$

$$\mu' = -2\mu^2 - 2\sigma - \mu S,$$

y sustituyendo dichas relaciones en (2.15) da como resultado

$$-6\mu^2 - 6\sigma - 3\mu S - (2\mu + S)S + CS^2 - \mu S = 0,$$

lo que al simplificarlo nos resulta

$$\mu^2 + \mu S + \frac{1}{6}S^2 - \frac{1}{6}CS^2 + \sigma = 0; \quad (2.24)$$

además

$$\left(\mu + \frac{1}{2}S\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{2C+1}{3}} \cdot \frac{S}{2}\right)^2 + \sigma = \mu^2 + \mu S + \frac{1}{6}S^2 - \frac{1}{6}CS^2 + \sigma, \quad (2.25)$$

haciendo el álgebra respectiva. Por lo que sustituyendo (2.24) en (2.25) nos da

$$\left(\mu + \frac{1}{2}S\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{2C+1}{3}} \cdot \frac{S}{2}\right)^2 + \sigma = 0. \quad (2.26)$$

Esta ecuación es equivalente a la parametrización

$$\mu + \frac{1}{2}S = \begin{Bmatrix} \sinh \xi \\ \lambda \xi \\ \lambda \cosh \xi \end{Bmatrix}, \quad \sqrt{\frac{2C+1}{3}} \cdot \frac{S}{2} = \begin{Bmatrix} \lambda \cosh \xi \\ \xi \\ \sinh \xi \end{Bmatrix}, \quad (2.27)$$

donde $\lambda = \pm 1$.

Demostración:

Si sustituimos los lados izquierdos de las ecuaciones (2.27) por sus lados derechos y los aplicamos a (2.26), tenemos

$$\begin{Bmatrix} \sinh^2 \xi - \lambda^2 \cosh^2 \xi + 1 \\ \lambda^2 \xi^2 - \xi^2 + 0 \\ \lambda^2 \cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi - 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sinh^2 \xi - \cosh^2 \xi + 1 \\ \xi^2 - \xi^2 + 0 \\ \cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi - 1 \end{Bmatrix} = 0.$$

Además, el parámetro $\lambda = \pm 1$ sirve para considerar todos los posibles valores (tanto positivos como negativos) que pueden tomar las correspondientes funciones dadas en (2.27). ■

Ahora, despejando μ y S de (2.27) y sustituyéndolos en (2.16), dicha ecuación toma la forma

$$\xi' = \begin{Bmatrix} -2 \cosh \xi \\ -2 \lambda \xi^2 \\ -2 \lambda \sinh \xi \end{Bmatrix}. \quad (2.28)$$

Demostración:

Despejando S de la segunda ecuación de (2.27) tenemos

$$S = 2\sqrt{\frac{3}{2C+1}} \cdot \begin{Bmatrix} \lambda \cosh \xi \\ \xi \\ \sinh \xi \end{Bmatrix}, \quad (2.29)$$

y sustituyendo esa igualdad en la primera ecuación de (2.27) obtenemos

$$\mu + \sqrt{\frac{3}{2C+1}} \cdot \begin{Bmatrix} \lambda \cosh \xi \\ \xi \\ \sinh \xi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sinh \xi \\ \lambda \xi \\ \lambda \cosh \xi \end{Bmatrix},$$

por lo que

$$\mu = \begin{Bmatrix} \sinh \xi \\ \lambda \xi \\ \lambda \cosh \xi \end{Bmatrix} - \sqrt{\frac{3}{2C+1}} \cdot \begin{Bmatrix} \lambda \cosh \xi \\ \xi \\ \sinh \xi \end{Bmatrix}. \quad (2.30)$$

Y sustituyendo (2.29) y (2.30) en (2.16) resulta

$$\begin{Bmatrix} \lambda \sinh \xi \\ 1 \\ \cosh \xi \end{Bmatrix} \cdot \xi' + 2 \begin{Bmatrix} \lambda \sinh \xi \cosh \xi \\ \lambda \xi^2 \\ \lambda \sinh \xi \cosh \xi \end{Bmatrix} = 0,$$

haciendo el álgebra y las derivaciones respectivas; de donde

$$\xi' = -2 \begin{Bmatrix} \cosh \xi \\ \lambda \xi^2 \\ \lambda \sinh \xi \end{Bmatrix}. \blacksquare$$

Sustituyendo μ , S y ξ' de (2.30), (2.29) y (2.28), respectivamente, hace de (2.17) una identidad.

El paso que sigue de la solución consiste en lo siguiente. De (2.28) nosotros encontramos $\xi(\eta)$, y por un cambio del origen respecto al eje η en nuestro sistema de referencia nosotros transformamos la constante de integración a cero.

Procedimiento:

Observamos que (2.28) es una ecuación diferencial de variables separables, así que la reescribimos y resolvemos.

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \begin{Bmatrix} -2 \cosh \xi \\ -2\lambda \xi^2 \\ -2\lambda \sinh \xi \end{Bmatrix},$$

por lo que

$$\int \begin{Bmatrix} \frac{d\xi}{\cosh \xi} \\ \frac{d\xi}{\xi^2} \\ \frac{d\xi}{\sinh \xi} \end{Bmatrix} = -2 \int \begin{Bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda \end{Bmatrix} d\eta,$$

e integrando obtenemos

$$\begin{Bmatrix} 2 \arctan(e^\xi) \\ -\frac{1}{\xi} \\ \ln \left| \tanh \frac{\xi}{2} \right| \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2\eta \\ -2\lambda\eta \\ -2\lambda\eta \end{Bmatrix} + D',$$

i.e.

$$\xi = \begin{Bmatrix} \ln \tan(-\eta + D) \\ \frac{1}{2\lambda(\eta+D)} \\ 2 \operatorname{arctanh}(\pm e^{-2\lambda(\eta+D)}) \end{Bmatrix}.$$

Así pues, la función ξ implicará una gráfica en el plano $\eta\xi$ para cada solución, que se desplazará horizontalmente de acuerdo a los distintos valores que le asignemos

a la constante D ; mas como podemos elegir el tiempo inicial en el instante que querramos, podemos recorrer el tiempo cero al instante $-D$, eliminando de esa forma la constante de integración, obteniendo las soluciones

$$\xi = \begin{cases} \ln \tan(-\eta) \\ \frac{1}{2\lambda\eta} \\ 2 \operatorname{arctanh}(\pm e^{-2\lambda\eta}) \end{cases}.$$

Sin embargo, para la expresión inferior consideraremos solamente el valor positivo del argumento del $\operatorname{arctanh}$, es decir $+e^{-2\lambda\eta}$, ya que el valor negativo $-e^{-2\lambda\eta}$ nos genera muchas futuras complicaciones, así que solo tomaremos la solución $2 \operatorname{arctanh}(e^{-2\lambda\eta})$ para nuestros cálculos siguientes; no obstante es importante tener en cuenta que la solución $2 \operatorname{arctanh}(-e^{-2\lambda\eta})$ implicará otros nuevos resultados finales, no muy distintos a los que lleguemos a obtener. Entonces, las soluciones que tomaremos para ξ finalmente serán

$$\xi = \begin{cases} \ln \tan(-\eta) \\ \frac{1}{2\lambda\eta} \\ 2 \operatorname{arctanh}(e^{-2\lambda\eta}) \end{cases}. \blacksquare \quad (2.31)$$

Ahora, de (2.29) y (2.30) obtenemos $S(\eta)$ y $\mu(\eta)$ sustituyendo (2.31):

$$S(\eta) = 2\sqrt{\frac{3}{2C+1}} \cdot \begin{cases} \lambda \cosh \ln \tan(-\eta) \\ \frac{1}{2\lambda\eta} \\ \sinh [2 \operatorname{arctanh}(e^{-2\lambda\eta})] \end{cases}_S \quad (2.32)$$

y

$$\mu(\eta) = \begin{cases} \begin{cases} \sinh \ln \tan(-\eta) \\ \frac{1}{2\eta} \\ \lambda \cosh [2 \operatorname{arctanh}(e^{-2\lambda\eta})] \end{cases}_\mu \\ -\sqrt{\frac{3}{2C+1}} \cdot \begin{cases} \lambda \cosh \ln \tan(-\eta) \\ \frac{1}{2\lambda\eta} \\ \sinh [2 \operatorname{arctanh}(e^{-2\lambda\eta})] \end{cases}_S \end{cases}, \quad (2.33)$$

$$\eta \in \begin{cases} \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \\ (0, \infty) \\ \left(0, \infty\right), \lambda = 1 \\ \left(-\infty, 0\right), \lambda = -1 \end{cases}, \quad (2.34)$$

donde los subíndices S y μ se usan para hacer referencia a las respectivas llaves, y el dominio de η se demuestra a continuación.

Demostración:

El dominio de η para las funciones S y μ se determina obteniendo el dominio para las llaves $\{\}_S$ y $\{\}_\mu$, dadas en (2.32) y (2.33).

Para la función superior \sinh y \cosh siempre están definidos, así que nos enfocamos al dominio de $\ln \tan(-\eta)$, el cual es $\tan(-\eta) > 0$, por lo que $-\eta > 0$, mas como $\tan(-\eta)$ se hace discontinua en $-\eta = \frac{\pi}{2}$, tenemos que $\eta < 0$ y $\eta > -\frac{\pi}{2}$, es decir $\eta \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Para las funciones de en medio, claramente $\eta \neq 0$, así que $\eta \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, sin embargo podemos considerar solo el intervalo de tiempo positivo, i.e. $\eta \in (0, \infty)$.

Para las funciones inferiores, \sinh y \cosh siempre están definidos, así que nos centramos en el dominio de $\operatorname{arctanh}(e^{-2\lambda\eta})$, cuyo argumento se localiza en $(-1, 1)$. Para el caso $\lambda = 1$ tenemos que $-1 < e^{-2\eta} < 1$, por lo que $\eta \in (0, \infty)$. Para el caso $\lambda = -1$, $-1 < e^{2\eta} < 1$, así que $\eta \in (-\infty, 0)$. En conclusión, para la tercera función se tiene que

$$\eta \in \left\{ \begin{array}{ll} (0, \infty), & \lambda = 1 \\ (-\infty, 0), & \lambda = -1 \end{array} \right\}. \blacksquare$$

Con ayuda de (2.32) y (2.33), de (2.18) nosotros obtenemos $\nu_i(\eta)$ y N constantes de integración γ_i .

Obtención:

Sustituyendo (2.32) y (2.33) en (2.18) resulta

$$\nu'_i + \left(2 \{ \} _\mu \right) \nu_i = 0,$$

que es una ecuación diferencial de variables separables, por lo que

$$\int \frac{d\nu_i}{\nu_i} = - \int \left\{ \frac{2 \sinh \ln \tan \left(\frac{1}{\eta} \right)}{2\lambda \cosh \left[2 \operatorname{arctanh} \left(e^{-2\lambda\eta} \right) \right]} \right\} d\eta, \quad (2.35)$$

lo cual, al integrarlo con ayuda del software “Mathematica 7.0”, en el archivo: “Solución Ecs de Einstein en vacío b.nb”; (ver apéndice 2) nos da como resultado

$$\ln |\nu_i| = \left\{ \begin{array}{l} -\ln \left| \frac{1}{2} \sin (2\eta) \right| \\ \ln \left| \frac{1}{\eta} \right| \\ -2\lambda\eta - \ln \left| 2 \left(-1 + e^{-4\lambda\eta} \right) \right| \end{array} \right\} + \gamma''_i,$$

de donde, haciendo el álgebra apropiada tenemos que

$$|\nu_i| = \gamma''_i \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{|\sin(2\eta)|} \\ \frac{1}{|\eta|} \\ \frac{e^{-2\lambda\eta}}{|-1+e^{-4\lambda\eta}|} \end{array} \right\},$$

es decir,

$$\nu_i = \pm \gamma''_i \left\{ \begin{array}{l} 2 |\csc(2\eta)| \\ \frac{1}{|\eta|} \\ \frac{e^{-2\lambda\eta}}{|-1+e^{-4\lambda\eta}|} \end{array} \right\},$$

por lo que

$$\nu_i = \gamma'_i \left\{ \begin{array}{l} 2 |\csc(2\eta)| \\ \frac{1}{|\eta|} \\ |\operatorname{csch}(2\eta)| \end{array} \right\},$$

donde en la expresión inferior se usó la identidad trigonométrica

$$-1 + e^{2x} = 2 \sinh(x) e^x \quad (2.36)$$

(ver su demostración en el apéndice 1). Finalmente ν_i se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\nu_i = \gamma_i \begin{Bmatrix} -2\lambda \csc(2\eta) \\ \frac{\lambda}{\eta} \\ 2\lambda \operatorname{csch}(2\eta) \end{Bmatrix}_\nu; \quad (2.37)$$

donde:

1. El subíndice ν hace referencia a la llave de la ecuación.
2. Los factores λ , λ y 2 se extrajeron de la constante de integración γ'_i (en la primera, segunda y tercera funciones, respectivamente), eso para que al establecer la relación entre C y las γ_i (lo que se hará enseguida), la expresión resulte más simple.
3. Los valores absolutos han desaparecido debido a los dominios dados en (2.34), añadiéndose los factores -1 y λ en las funciones superior e inferior, respectivamente. ■

La sustitución de ν_i en (2.19) y (2.20) muestra que para algunas relaciones entre las constantes C y γ_i el sistema es no contradictorio.

Obtención:

Sustituyendo (2.37) y (2.32) en (2.19) resulta

$$\sum_k \gamma_k \{\}_\nu = 2 \sqrt{\frac{3}{2C+1}} \{\}_S,$$

de donde

$$\begin{aligned} \sum_k \gamma_k &= 2 \sqrt{\frac{3}{2C+1}} \cdot \frac{\{\}_S}{\{\}_\nu} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2C+1}} \cdot \begin{Bmatrix} -\sin(2\eta) \cosh \ln \tan(-\eta) \\ 1 \\ \lambda \sinh(2\eta) \sinh[2 \operatorname{arctanh}(e^{-2\lambda\eta})] \end{Bmatrix}_{S/\nu} \end{aligned} \quad (2.38)$$

mas usando el software "Mathematica 7.0", vemos en el archivo: "Solución Ecs de Einstein en vacío b.nb"; (ver apéndice 2) que la llave $\{\}_{S/\nu}$ de la ecuación anterior equivale a la unidad en las tres expresiones, por lo cual tenemos que

$$\sum_k \gamma_k = \sqrt{\frac{3}{2C+1}}. \quad (2.39)$$

Y sustituyendo (2.37) y (2.21) en (2.20) obtenemos

$$\sum_k \gamma_k^2 \{\}^2_\nu = CS^2,$$

24 CAPÍTULO 2. COMPARACIÓN DE MODELOS COSMOLÓGICOS 6D.

de donde, al sustituir (2.19) por S , tenemos

$$\sum_k \gamma_k^2 \{\}_\nu^2 = C \left(\sum_k \nu_k \right)^2,$$

en lo cual, al extraer $\{\}_\nu^2$ de la sumatoria izquierda y sustituir (2.37) en la sumatoria derecha, resulta

$$\{\}_\nu^2 \sum_k \gamma_k^2 = C \left(\sum_k \gamma_k \{\}_\nu \right)^2 = C \{\}_\nu^2 \left(\sum_k \gamma_k \right)^2,$$

por lo que

$$\sum_k \gamma_k^2 = C \left(\sum_k \gamma_k \right)^2,$$

en donde, al sustituir (2.39) en la sumatoria derecha, finalmente obtenemos

$$\sum_k \gamma_k^2 = \frac{3C}{2C+1}. \quad (2.40)$$

De lo anterior tenemos que son (2.39) y (2.40) nuestras dos relaciones buscadas. ■

Finalmente, la integración de las ecuaciones (2.22) y (2.23) determina $\alpha(\eta)$ y $\beta_i(\eta)$, introduciendo otras $(N+1)$ constantes de integración.

Procedimiento:

Primero, de (2.22) observamos que debemos integrar (2.33) para así obtener a α . Por lo tanto, una vez más a partir de los cálculos hechos en “Mathematica 7.0”, en el archivo: “Solucion Ecs. de Einstein en vacío b.nb”; (ver apéndice 2), obtenemos

$$\alpha = \left\{ \begin{array}{l} \frac{-\lambda}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}} \ln |2 \cos \eta| + \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}} \ln |2 \sin \eta| + \frac{1}{2} \ln |\sin(2\eta)| \\ \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}} \right) \ln |\eta| \\ \lambda \eta - 2\lambda \sqrt{\frac{3}{2C+1}} \ln \left(\left| \frac{-1+e^{2\eta}}{1+e^{2\eta}} \right|^{\frac{1}{4}} \right) + \ln \left(|2(-1+e^{-4\lambda\eta})|^{\frac{1}{2}} \right) \end{array} \right\} + a_0'', \quad (2.41)$$

de donde, empleando las identidades (2.36) y

$$1 + e^{2x} = 2 \cosh(x) e^x \quad (2.42)$$

(ver su demostración en el apéndice 1), tenemos

$$\alpha = \left\{ \begin{array}{l} \ln \left(\left| \frac{2 \sin \eta}{2 \cos \eta} \right|^{\frac{\lambda}{2}} \sqrt{\frac{3}{2C+1}} |\sin(2\eta)|^{\frac{1}{2}} \right) \\ \ln \left(|\eta|^{\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2}} \sqrt{\frac{3}{2C+1}} \right) \\ \lambda \eta + \ln \left(\left| \frac{2 \sinh(\eta) e^\eta}{2 \cosh(\eta) e^\eta} \right|^{\frac{-\lambda}{2}} \sqrt{\frac{3}{2C+1}} \right) + \ln \left(|2 \cdot 2 \sinh(-2\lambda\eta) e^{-2\lambda\eta}|^{\frac{1}{2}} \right) \end{array} \right\} + a_0'',$$

por lo que

$$\begin{aligned} \alpha &= \left\{ \begin{array}{l} \ln \left([-\tan \eta]^{\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}}} [-\sin(2\eta)]^{\frac{1}{2}} \right) \\ \ln \left(\eta^{\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}}} \right) \\ \lambda \eta + \ln \left(|\tanh \eta|^{\frac{-\lambda}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}}} \right) + \ln 2 + \ln \left(|-\lambda \sinh(2\eta)|^{\frac{1}{2}} \right) + \ln(e^{-\lambda \eta}) \end{array} \right\} \\ &+ a_0'' \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \ln \left([-\tan(\eta)]^{\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}}} [-\sin(2\eta)]^{\frac{1}{2}} \right) \\ \ln \left(\eta^{\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}}} \right) \\ \ln \left(|\tanh \eta|^{\frac{-\lambda}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}}} \right) + \ln \left(|\sinh(2\eta)|^{\frac{1}{2}} \right) \end{array} \right\} + a_0', \end{aligned}$$

i.e.

$$\alpha = \left\{ \begin{array}{l} \ln \left\{ [-\tan(\eta)]^{\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}}} [-\sin(2\eta)]^{\frac{1}{2}} \right\} \\ \ln \left(\eta^{\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}}} \right) \\ \ln \left[|\tanh \eta|^{\mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}}} |\sinh(2\eta)|^{\frac{1}{2}} \right] \end{array} \right\} + a_0', \quad (2.43)$$

donde los valores absolutos fueron eliminados en las funciones superior y media como consecuencia del dominio del tiempo η , dado en (2.34).

Ahora, de (2.23) integramos (2.37) para así obtener a las funciones β_i . Por lo tanto

$$\beta_i = \int \gamma_i \left\{ \begin{array}{l} -2\lambda \csc(2\eta) \\ \frac{\lambda}{\eta} \\ 2\lambda \operatorname{csch}(2\eta) \end{array} \right\} d\eta,$$

i.e.

$$\beta_i = \gamma_i \left\{ \begin{array}{l} -\lambda \ln |\tan \eta| \\ \lambda \ln |\eta| \\ \lambda \ln |\tanh \eta| \end{array} \right\} + b_{0i}',$$

expresión de la que podemos eliminar los valores absolutos si consideramos los dominios de η establecidos en (2.34), para así obtener

$$\beta_i = \left\{ \begin{array}{l} \ln [-\tan \eta]^{\mp \gamma_i} \\ \ln \eta^{\pm \gamma_i} \\ \ln [\pm \tanh \eta]^{\pm \gamma_i} \end{array} \right\} + b_{0i}'. \quad (2.44)$$

Finalmente, retomando (2.43) y (2.44) y considerando los dominios para η dados en (2.34), nosotros haremos unas transformaciones de funciones con la finalidad de que el tiempo η esté definido solo en intervalos positivos. Así pues, una expresión previa para α será

$$\alpha = \ln \left\{ \begin{array}{l} [-\tan \left(\eta - \frac{\pi}{2} \right)]^{\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}}} [-\sin(2\eta - \pi)]^{\frac{1}{2}} \\ \eta^{\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}}} \\ [\pm \tanh \eta]^{\mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}}} [\pm \sinh(2\eta)]^{\frac{1}{2}}, \end{array} \right\} + a_0',$$

de donde finalmente obtendremos que

$$\alpha = \ln \left\{ \begin{array}{l} \left[-\tan \left(\eta - \frac{\pi}{2} \right) \right]^{\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}}} \left[-\sin (2\eta - \pi) \right]^{\frac{1}{2}} \\ \eta^{\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}}} \\ \left\{ \begin{array}{l} \left[\tanh \eta \right]^{\mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}}} \left[\sinh (2\eta) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \lambda = 1 \\ \left[-\tanh (\eta - L) \right]^{\mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}}} \left[-\sinh (2\eta - 2L) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \lambda = -1 \end{array} \right. \end{array} \right\} + a'_0, \quad (2.45)$$

donde en la función inferior, para $\lambda = -1$, hacemos un desplazamiento horizontal para que el tiempo inicial parte de $-L$, donde $L > 0$ es un tiempo elegido a conveniencia; y entonces, para ese caso, $\eta \in (0, L)$. Y análogamente, la nueva expresión para β_i será

$$\beta_i = \ln \left\{ \begin{array}{l} \left[-\tan \left(\eta - \frac{\pi}{2} \right) \right]^{\mp \gamma_i} \\ \eta^{\pm \gamma_i} \\ \left\{ \begin{array}{l} \left[\tanh \eta \right]^{\pm \gamma_i}, \quad \lambda = 1 \\ \left[-\tanh (\eta - L) \right]^{\pm \gamma_i}, \quad \lambda = -1 \end{array} \right. \end{array} \right\} + b'_{0i}. \quad (2.46)$$

Además los dominios estarán dados por

$$\eta \in \left\{ \begin{array}{l} (0, 2\pi) \\ (0, +\infty) \\ \left\{ \begin{array}{l} (0, +\infty), \quad \lambda = 1 \\ (0, L), \quad \lambda = -1 \end{array} \right. \end{array} \right\}. \blacksquare \quad (2.47)$$

El resultado final, en términos de $a = e^\alpha$ y $b_i = e^{\beta_i}$ es

$$a(\eta) = a_0 \left\{ \begin{array}{l} \left[\tan \left(\frac{\pi}{2} - \eta \right) \right]^{\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}}} \left[\sin (\pi - 2\eta) \right]^{\frac{1}{2}} \\ \eta^{\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}}} \\ \left\{ \begin{array}{l} \left[\tanh \eta \right]^{\mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}}} \left[\sinh (2\eta) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \lambda = 1 \\ \left[\tanh (L - \eta) \right]^{\mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}}} \left[\sinh (2L - 2\eta) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \lambda = -1 \end{array} \right. \end{array} \right\}, \quad (2.48)$$

$$b_i(\eta) = b_{0i} \left\{ \begin{array}{l} \left[\tan \left(\frac{\pi}{2} - \eta \right) \right]^{\mp \gamma_i} \\ \eta^{\pm \gamma_i} \\ \left\{ \begin{array}{l} \left[\tanh \eta \right]^{\pm \gamma_i}, \quad \lambda = 1 \\ \left[\tanh (L - \eta) \right]^{\pm \gamma_i}, \quad \lambda = -1 \end{array} \right. \end{array} \right\}, \quad (2.49)$$

$$\eta \in \left\{ \begin{array}{l} (0, 2\pi) \\ (0, +\infty) \\ \left\{ \begin{array}{l} (0, +\infty), \quad \lambda = 1 \\ (0, L), \quad \lambda = -1 \end{array} \right. \end{array} \right\}, \quad (2.50)$$

$$\sum_k \gamma_k = \sqrt{\frac{3}{2C+1}}, \quad \sum_k \gamma_k^2 = \frac{3C}{2C+1}, \quad (2.51)$$

donde hemos empleado las relaciones (2.45), (2.46), (2.47), (2.39) y (2.40).

Remarcación 1.

Sumando sobre k en (2.37) obtenemos

$$\sum_k \nu_k = \{\}_{\nu} \sum_k \gamma_k,$$

de donde al sustituir (2.19) resulta

$$S = \{\}_{\nu} \sum_k \gamma_k,$$

por lo que $S \sim \sum_k \gamma_k$; por lo tanto, usando el resultado izquierdo de (2.51), vemos que para $C \rightarrow +\infty$ nosotros tenemos $\sum_k \gamma_k \rightarrow 0$, i.e $S \rightarrow 0$ (eso es cierto en el caso $N \geq 2$, debido a los resultados (2.54) y (2.55) obtenidos en la Remarcación 2, donde “ C y γ son constantes para $N = 1$ ”). Si este límite es introducido en esta solución con $S \neq 0$, entonces el resultado se introducirá en el sistema (2.15)-(2.23), en donde la ecuación (2.21) es reemplazada por $S = 0$, i.e para $N \geq 2$ existe una solución con $C = +\infty$.

Remarcación 2.

Las relaciones que conectan las constantes C y γ_i pueden ser resueltas para cualquier N . Por ejemplo, para $N = 1$ (5^a dimensión) nosotros tenemos $C = \gamma = 1$.

Demostración.

De (2.51) tenemos que

$$\gamma = \sqrt{\frac{3}{2C+1}} \quad (2.52)$$

y

$$\gamma^2 = \frac{3C}{2C+1}. \quad (2.53)$$

Elevando al cuadrado (2.52) se obtiene

$$\gamma^2 = \frac{3}{2C+1};$$

y dividiendo (2.53) entre el resultado anterior tenemos que

$$1 = C. \quad (2.54)$$

Y al sustituir (2.54) en (2.52) obtenemos el valor

$$\gamma = 1. \blacksquare \quad (2.55)$$

En el caso $N = 2$ (6 dimensiones) nosotros encontramos

$\gamma_{1,2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}} \cdot (1 \pm \sqrt{2C-1}), \quad C \in [\frac{1}{2}, +\infty]$

(2.56)

Demostración.

Sustituyendo los resultados (2.56) en las ecuaciones (2.51) obtenemos

$$\begin{aligned}\gamma_1 + \gamma_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}} \cdot (1 + \sqrt{2C-1}) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}} \cdot (1 - \sqrt{2C-1}) \\ &= \sqrt{\frac{3}{2C+1}}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\gamma_1^2 + \gamma_2^2 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2C+1} \cdot (1 + 2\sqrt{2C-1} + 2C-1) + \\ &\quad + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2C+1} \cdot (1 - 2\sqrt{2C-1} + 2C-1) \\ &= \frac{2 \cdot 2C}{4} \cdot \frac{3}{2C+1} \\ &= \frac{3C}{2C+1},\end{aligned}$$

que son justo las expresiones derechas de las ecuaciones (2.51), por lo que dichos resultados sí son soluciones de tales ecuaciones. Además, por simetría de las ecuaciones (2.56), otro par de soluciones será

$$\gamma'_{1,2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}} \cdot (1 \mp \sqrt{2C-1}), \quad (2.57)$$

por lo que

$$\gamma'_1 = \gamma_2 \text{ y } \gamma'_2 = \gamma_1; \quad (2.58)$$

mas podemos considerar solo la pareja de soluciones (2.56) al resultar indiferente de la pareja (2.57) debido a los renombramientos (2.58)

Ahora, para asegurar que no existen más soluciones a las ecuaciones (2.51), haremos lo siguiente. Supongamos que existe otro par de soluciones a las ecuaciones (2.51) (sin considerar permutaciones como en (2.58)), al cual llamaremos:

$$\gamma'_1 = \gamma'_1(C) \text{ y } \gamma'_2 = \gamma'_2(C),$$

(donde la comilla superíndice no significa derivada) por lo que podemos obtener las diferencias

$$\gamma'_1 - \gamma_1 = h_1(C) \text{ y } \gamma'_2 - \gamma_2 = h_2(C),$$

de donde

$$\gamma'_1 = \gamma_1 + h_1 \text{ y } \gamma'_2 = \gamma_2 + h_2. \quad (2.59)$$

Entonces, sustituyendo (2.59) en la ecuación izquierda del sistema (2.51) tenemos que

$$\gamma'_1 + \gamma'_2 = \gamma_1 + \gamma_2 + h_1 + h_2 = \sqrt{\frac{3}{2C+1}} + h_1 + h_2,$$

por lo que $h_1 + h_2 = 0$, es decir,

$$h_2 = -h_1. \quad (2.60)$$

Por lo tanto, al sustituir (2.60) en (2.59) y renombrar $h_1 \equiv h$, se obtiene

$$\gamma'_1 = \gamma_1 + h \text{ y } \gamma'_2 = \gamma_2 - h. \quad (2.61)$$

Sustituyendo el resultado (2.61) en la ecuación derecha de (2.51) nos resulta

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 2h(\gamma_1 - \gamma_2 + h) = \frac{3C}{2C+1} + 2h(\gamma_1 - \gamma_2 + h),$$

de donde

$$h = 0 \text{ ó } h = \gamma_2 - \gamma_1;$$

si $h = 0$, de (2.61) vemos que

$$\gamma'_1 = \gamma_1 \text{ y } \gamma'_2 = \gamma_2,$$

i.e. es la misma solución; y si $h = \gamma_2 - \gamma_1$, nuevamente de (2.61) vemos que

$$\gamma'_1 = \gamma_2 \text{ y } \gamma'_2 = \gamma_1,$$

lo cual es la solución permutada (2.58). Así pues, no existen otras parejas de soluciones.

Y si consideramos el caso no de una nueva pareja de soluciones, sino de una pareja que incluya a una γ' nueva y a otra γ que pertenezca a la pareja encontrada en (2.56), entonces podemos volver a aplicar la misma demostración anterior de inexistencia de nuevas soluciones haciendo un $h_i = 0$; por ejemplo, podemos elegir, sin pérdida de generalidad, la pareja

$$\gamma'_1 = \gamma_1 + h_1 \text{ y } \gamma'_2 = \gamma_2,$$

donde hemos hecho $h_2 = 0$, y entonces llegaremos a la relación (2.60), obteniendo

$$0 = h_2 = -h_1,$$

es decir

$$h_1 = h_2 = 0,$$

por lo que

$$\gamma'_1 = \gamma_1 \text{ y } \gamma'_2 = \gamma_2,$$

i.e. concluiremos definitivamente que no existen más soluciones.

Y por último, el dominio $C \in [\frac{1}{2}, +\infty]$ se obtiene observando la solución $\gamma_{1,2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}} \cdot (1 \pm \sqrt{2C-1})$ (dada en (2.56)) y viendo que solo hay problemas de indefinición en los argumentos de ambas raíces. Para la raíz $\sqrt{\frac{3}{2C+1}}$ tenemos que $2C+1 > 0$, por lo que $C > -\frac{1}{2}$. Y para la raíz $\sqrt{2C-1}$ resulta que $2C-1 \geq 0$, de donde $C \geq \frac{1}{2}$. Por lo tanto, haciendo la intersección de ambos dominios obtenemos $C \geq \frac{1}{2}$, mas como $C = +\infty$ está incluido en la solución.(ver **Remarcación 1**) concluimos que $C \in [\frac{1}{2}, +\infty]$. ■

2.2. Modelo cosmológico 6D vacío de Peraza-Vladimirov.

En el trabajo [1] Peraza y Vladimirov consideraron una métrica de la forma

$$dI^2 = \varphi^2 \{ a^2 [dx_0^2 - dx_1^2 - f^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] - dx_5^2 - \psi^2 dx_6^2 \},$$

en un espacio-tiempo 6-dimensional, resolviéndose para el caso más general de ecuaciones de Einstein, mostrando en los tres tipos de curvatura una densidad de materia $\mu = 0$.

Considerando las transformaciones $b = a\varphi$, $\xi = \varphi\psi$, φ , se obtuvieron las siguientes soluciones.

2.2.1. Modelo plano.

$$\begin{aligned} b &= b_0 \left(c \pm \sqrt{\lambda} x_0 \right)^{\frac{\sqrt{\lambda} \pm (\alpha+1)}{2\sqrt{\lambda}}} \\ \varphi &= \varphi_0 \left(c \pm \sqrt{\lambda} x_0 \right)^{\mp \frac{1}{\sqrt{\lambda}}} \\ \xi &= \xi_0 \left(c \pm \sqrt{\lambda} x_0 \right)^{\mp \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}} \\ a &= a_0 \left(c \pm \sqrt{\lambda} x_0 \right)^{\frac{\sqrt{\lambda} \pm (\alpha+3)}{2\sqrt{\lambda}}} \\ \psi &= \psi_0 \left(c \pm \sqrt{\lambda} x_0 \right)^{\mp \frac{\alpha-1}{\sqrt{\lambda}}} \end{aligned}$$

Tabla 16

donde, aquí y en lo que sigue, $a_0 = \frac{b_0}{\varphi_0}$, b_0 , x_0 , ψ_0 , φ_0 , ξ_0 son constantes y c es una constante de integración.

2.2.2. Modelo de curvatura negativa (abierto).

$$\begin{aligned} b &= b_0 (\sinh \theta)^{\frac{1}{2}} \left(\tanh \frac{\theta}{2} \right)^{\pm \frac{\alpha+1}{2\sqrt{\lambda}}} \\ \varphi &= \varphi_0 \left(\tanh \frac{\theta}{2} \right)^{\mp \frac{1}{\sqrt{\lambda}}} \\ \xi &= \xi_0 \left(\tanh \frac{\theta}{2} \right)^{\mp \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}} \\ a &= a_0 (\sinh \theta)^{\frac{1}{2}} \left(\tanh \frac{\theta}{2} \right)^{\pm \frac{\alpha+3}{2\sqrt{\lambda}}} \\ \psi &= \psi_0 \left(\tanh \frac{\theta}{2} \right)^{\mp \frac{\alpha-1}{\sqrt{\lambda}}} \end{aligned}$$

Tabla 17

donde $\theta = c - 2x_0$.

2.2.3. Modelo de curvatura positiva (cerrado).

$$\begin{aligned}
 b &= b_0 (\cos \beta)^{\frac{1}{2}} \left[\tan \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]^{\mp \frac{\alpha+1}{2\sqrt{\lambda}}} \\
 a &= a_0 (\cos \beta)^{\frac{1}{2}} \left[\tan \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]^{\mp \frac{\alpha+3}{2\sqrt{\lambda}}} \\
 \xi &= \xi_0 \left[\tan \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]^{\pm \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}} \\
 \psi &= \psi_0 \left[\tan \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]^{\pm \frac{\alpha-1}{\sqrt{\lambda}}} \\
 \varphi &= \varphi_0 \left[\tan \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]^{\pm \frac{1}{\sqrt{\lambda}}}
 \end{aligned}$$

Tabla 18

donde $\beta = c + 2x_0$.

Además, α y $\lambda = \alpha^2 + \frac{2}{3}\alpha + 1$ son constantes generales cuyos valores no deben conllevar a singularidades en los coeficientes métricos φ , a y ψ .

2.3. Obtención de la relación entre las soluciones 6D de los modelos de Kechkin-Peraza (KP) y Peraza-Vladimirov (PV).

Para poder comparar las soluciones 6-dimensionales de KP [10] y de PV [1] hay que considerar lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 a_K &= a_V \varphi_V = b_V \\
 (\pm b_{1K})^2 &= \varphi_V^2 = \varphi_V^2 \\
 (\pm b_{2K})^2 &= \varphi_V^2 \psi_V^2 = \xi_V^2
 \end{aligned}$$

Tabla 19

donde los subíndices k y V hacen referencia a las ecuaciones en los artículos de KP y PV, respectivamente. Con estas igualdades es posible establecer la relación entre las constantes C y γ_n de KP y las constantes α y c de PV.

Primeramente observamos que en los tres modelos, en PV, podemos hacer un conveniente desplazamiento temporal de modo que $c = 0$, por lo que podemos quitarla. Además, las γ_k de KP están en función de C . Por lo que solo hay que establecer la relación entre la C de KP y la α de PV.

Así pues, procederemos a establecer dicha relación para los tres modelos.

2.3.1. Modelo plano.

Primero encontraremos la relación entre las constantes C y α para la igualdad $a_K = b_V$. De la tabla 16 vemos que $b_V = b_0 \left(c \pm \sqrt{\lambda}x_0 \right)^{\frac{\sqrt{\lambda} \pm (\alpha+1)}{2\sqrt{\lambda}}}$, mas como

hemos hecho $c = 0$, tenemos ahora que

$$\begin{aligned} b_V &= b_0 \left(\pm \sqrt{\lambda} x_0 \right)^{\frac{\sqrt{\lambda} \pm (\alpha+1)}{2\sqrt{\lambda}}} \\ &= b_0 (\lambda)^{\frac{\sqrt{\lambda} \pm (\alpha+1)}{4\sqrt{\lambda}}} (\pm x_0)^{\frac{\sqrt{\lambda} \pm (\alpha+1)}{2\sqrt{\lambda}}} \\ &= b_0 \lambda_0 (\pm x_0)^{\frac{\sqrt{\lambda} \pm (\alpha+1)}{2\sqrt{\lambda}}}, \end{aligned}$$

donde $(\lambda)^{\frac{\sqrt{\lambda} \pm (\alpha+1)}{4\sqrt{\lambda}}} = \lambda_0 = cte$, por lo que

$$b_V = b'_0 \left[(\pm x_0)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{\sqrt{\lambda} \pm (\alpha+1)}{\sqrt{\lambda}}} = b'_0 \left(x_0^{\frac{1}{2}} \right)^{1 \pm \frac{(\alpha+1)}{\sqrt{\lambda}}}, \quad (2.62)$$

en donde: $b'_0 = b_0 \lambda_0$ y hemos eliminado la posibilidad $-x_0$ para poder hacer la comparación entre ambos artículos. Además, en (2.48) obtuvimos que

$$a_K = a_0 \eta^{\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}}} = a_0 \left(\eta^{\frac{1}{2}} \right)^{1 \mp \sqrt{\frac{3}{2C+1}}}. \quad (2.63)$$

Por lo tanto, de la comparación de (2.62) con (2.63) tenemos las equivalencias

$$a_0 = b'_0, \eta = x_0, 1 \mp \sqrt{\frac{3}{2C+1}} = 1 \pm \frac{(\alpha+1)}{\sqrt{\lambda}},$$

por lo que

$$\sqrt{\frac{3}{2C+1}} = -\frac{(\alpha+1)}{\sqrt{\lambda}}, \quad (2.64)$$

de donde despejando C establecemos la siguiente relación:

$$C = \frac{\alpha^2 + 1}{(\alpha+1)^2}; \quad (2.65)$$

la cual es la condición para la igualdad de las soluciones de KP y PV. Mas falta hacer la comprobación de la expresión anterior para asegurarnos de que no se trata de una solución extraña; así que sustituyendo (2.65) en la parte izquierda de (2.64) se tiene

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{3}{2 \left(\frac{\alpha^2+1}{(\alpha+1)^2} \right) + 1}} &= \sqrt{\frac{3}{\frac{2\alpha^2+2}{(\alpha+1)^2} + 1}} = \sqrt{\frac{3}{\frac{2\alpha^2+2+(\alpha^2+2\alpha+1)}{(\alpha+1)^2}}} \\ &= |\alpha+1| \sqrt{\frac{3}{3\alpha^2+2\alpha+3}} = |\alpha+1| \sqrt{\frac{1}{\frac{3\alpha^2+2\alpha+3}{3}}} \\ &= |\alpha+1| \sqrt{\frac{1}{\alpha^2 + \frac{2}{3}\alpha + 1}} = \frac{|\alpha+1|}{\sqrt{\alpha^2 + \frac{2}{3}\alpha + 1}} \\ &= \frac{|\alpha+1|}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\alpha+1}{\sqrt{\lambda}} = -\frac{\alpha+1}{\sqrt{\lambda}}, \text{ para } \alpha < -1; \end{aligned}$$

por lo que efectivamente la expresión (2.65) sí es solución para la ecuación (2.64) en el dominio $\alpha < -1$.

Ahora haremos la permutación $b'_{1K} = b_{2K}$ y $b'_{2K} = b_{1K}$, ya que podemos ver indistintamente las soluciones 1^a y 2^a en el orden dado o al revés, mas nos conviene verlas de esta forma permutada porque así las futuras relaciones que establezcamos entre C y α serán la misma que la relación (2.65) encontrada al comparar a_K con b_V .

Lo que sigue es encontrar la relación entre C y α para la igualdad $\pm b_{2K} = \varphi_V$ y no para la igualdad $\pm b_{1K} = \varphi_V$, debido a la permutación anterior. Primera-mente, de la tabla 16 tenemos que $\varphi = \varphi_0 \left(\pm \sqrt{\lambda} x_0 \right)^{\mp \frac{1}{\sqrt{\lambda}}}$ (haciendo $c = 0$), por lo que

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_0 \left(\sqrt{\lambda} \right)^{\mp \frac{1}{\sqrt{\lambda}}} (\pm x_0)^{\mp \frac{1}{\sqrt{\lambda}}} \\ &= \varphi_0 \lambda_0 x_0^{\mp \frac{1}{\sqrt{\lambda}}},\end{aligned}$$

i.e.

$$\varphi = \varphi'_0 x_0^{\mp \frac{1}{\sqrt{\lambda}}}, \quad (2.66)$$

donde $\lambda_0 = \left(\sqrt{\lambda} \right)^{\mp \frac{1}{\sqrt{\lambda}}}$, $\varphi'_0 = \varphi_0 x_0$ y hemos eliminado la posibilidad $-x_0$ para poder hacer la comparación entre ambos artículos. Enseguida, de (2.49) tenemos que

$$\pm b_2 = \varepsilon b_{02} \eta^{\pm \gamma_2} = b'_{02} \eta^{\pm \gamma_2}, \quad (2.67)$$

donde $\varepsilon = \pm 1$, y $b'_{02} = \varepsilon b_{02}$. Por lo tanto, comparando (2.66) con (2.67) y sustituyendo (2.56) se obtienen las equivalencias

$$b'_{02} = \varphi'_0, \quad \eta = x_0$$

y

$$\gamma_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}} \cdot \left(1 - \sqrt{2C-1} \right) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}; \quad (2.68)$$

así que para encontrar dicha relación en la ecuación (2.68), de hecho sustituiremos en esa ecuación la relación (2.65) encontrada para la comparación de a_K con b_V , esperando llegar a una identidad, lo que probaría que una solución a la ecuación (2.68) es la misma que la solución obtenida para (2.64), como es de esperarse si ambos artículos son correctos. Así pues, sustituyendo la relación (2.65) en la ecuación (2.68) tenemos que

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2 \left(\frac{\alpha^2+1}{(\alpha+1)^2} \right) + 1}} \cdot \left(1 - \sqrt{2 \left(\frac{\alpha^2+1}{(\alpha+1)^2} \right) - 1} \right) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}},$$

donde, haciendo álgebra en el lado izquierdo de la ecuación anterior obtenemos, análogamente al procedimiento pasado,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2 \left(\frac{\alpha^2+1}{(\alpha+1)^2} \right) + 1}} \cdot \left(1 - \sqrt{2 \left(\frac{\alpha^2+1}{(\alpha+1)^2} \right) - 1} \right) &= \frac{|\alpha+1|}{2\sqrt{\lambda}} \cdot \left(1 - \frac{|\alpha-1|}{|\alpha+1|} \right) \\
 &= -\frac{\alpha+1}{2\sqrt{\lambda}} \left(1 - \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \right) \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \text{ para } \alpha < -1;
 \end{aligned}$$

lo cual demuestra que las soluciones $\pm b_{2K}$ y φ_V están relacionadas por la misma fórmula (2.65) que relaciona a las soluciones a_K y b_V .

Por último, procederemos a encontrar la relación entre C y α para igualación $\pm b_{1K} = \xi_V$. De la tabla (16) tenemos que $\xi = \xi_0 \left(\pm \sqrt{\lambda} x_0 \right)^{\mp \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}}$, y por un procedimiento análogo al hecho con las soluciones anteriores vemos que

$$\xi = \xi'_0 x_0^{\mp \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}}. \quad (2.69)$$

Y de (2.49) obtenemos

$$\pm b_1 = \varepsilon b_{01} \eta^{\pm \gamma_1} = b'_{01} \eta^{\pm \gamma_1}. \quad (2.70)$$

Por lo tanto, comparando (2.69) con (2.70) y sustituyendo (2.56) llegamos a la ecuación

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}} \cdot \left(1 + \sqrt{2C-1} \right) = -\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}; \quad (2.71)$$

y sustituyendo la solución (2.65) en el lado izquierdo de la ecuación (2.71) nos resulta, con un poco de álgebra:

$$-\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}} = -\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}, \alpha < -1;$$

i.e. tenemos que la relación (2.65) también se aplica para este caso.

Así que el hecho de que obtuviéramos la misma relación $C = \frac{\alpha^2+1}{(\alpha+1)^2}$, con $\alpha < -1$, para los tres pares de soluciones a las Ecuaciones de Einstein para un universo plano, muestra la congruencia deseada entre ambos artículos.

2.3.2. Modelo elíptico.

Primeramente encontraremos la relación entre las constantes C y α para la igualdad $a_K = b_V$. De la tabla 18 vemos que

$b_V = b_0 (\cos \beta)^{\frac{1}{2}} \left[\tan \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]^{\mp \frac{\alpha+1}{2\sqrt{\lambda}}}$, donde, haciendo las sustituciones $\beta = c + 2x_0$ y $c = 0$, tenemos

$$b_V = b_0 \left[\tan \left(x_0 + \frac{\pi}{4} \right) \right]^{\mp \frac{\alpha+1}{2\sqrt{\lambda}}} [\cos(2x_0)]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.72)$$

Además, de (2.48) tenemos

$$a_K = a_0 \left[\tan \left(\frac{\pi}{2} - \eta \right) \right]^{\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}}} [\sin(\pi - 2\eta)]^{\frac{1}{2}},$$

donde, aplicando trigonometría obtenemos

$$\begin{aligned} a_K &= a_0 [\cot(\eta)]^{\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}}} [\sin(2\eta)]^{\frac{1}{2}} \\ &= a_0 [\tan \eta]^{\mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}}} [\sin(2\eta)]^{\frac{1}{2}} \\ &= a_0 [\tan \eta]^{\mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}}} \left[\cos \left(2\eta - \frac{\pi}{2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= a_0 [\tan \eta]^{\mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}}} \left\{ \cos \left[2 \left(\eta - \frac{\pi}{4} \right) \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

por lo que desplazando convenientemente el tiempo $\eta - \frac{\pi}{4}$ hacia la derecha, resulta

$$a_K = a_0 \left[\tan \left(\eta + \frac{\pi}{4} \right) \right]^{\mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}}} [\cos(2\eta)]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.73)$$

Así que la comparación de (2.72) con (2.73) nos da la igualdad

$$\sqrt{\frac{3}{2C+1}} = \frac{\alpha+1}{\sqrt{\lambda}}, \quad (2.74)$$

ecuación idéntica a la ecuación (2.64) para el caso plano, salvo por la omisión del signo “-” en el lado derecho de la ecuación, así que su solución será la misma relación (2.65): $C = \frac{\alpha^2+1}{(\alpha+1)^2}$; pero con dominio $\alpha > -1$ en lugar de $\alpha < -1$.

Lo que sigue es encontrar la relación entre C y α para la igualación $\pm b_{2K} = \varphi_V$, debido a la permutación entre b_{1K} y b_{2K} mencionada en el caso plano. Por ello, de la tabla 18 tenemos que

$$\varphi = \varphi_0 \left[\tan \left(x_0 + \frac{\pi}{4} \right) \right]^{\pm \frac{1}{\sqrt{\lambda}}}, \quad (2.75)$$

una vez sustituidos $\beta = c + 2x_0$ y $c = 0$. Además de (2.49) deducimos que

$$\begin{aligned} \pm b_{2K} &= \varepsilon b_{02} \left[\tan \left(\frac{\pi}{2} - \eta \right) \right]^{\mp \gamma_2} \\ &= b'_{02} (\cot \eta)^{\mp \gamma_2} \\ &= b'_{02} (\tan \eta)^{\pm \gamma_2}, \end{aligned}$$

por lo que haciendo un corrimiento del tiempo $\eta - \frac{\pi}{4}$ hacia la derecha, obtenemos

$$\pm b_{2K} = b'_{02} \left[\tan \left(\eta + \frac{\pi}{4} \right) \right]^{\pm \gamma_2}. \quad (2.76)$$

Así que comparando (2.75) con (2.76) y sustituyendo (2.56) establecemos la igualdad

$$\gamma_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}} \cdot \left(1 - \sqrt{2C-1} \right) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \quad (2.77)$$

ecuación que es idéntica a la ecuación (2.68), salvo por la omisión del signo “–” en el lado derecho de la ecuación, por lo que una solución será también la relación (2.65), pero con $\alpha > -1$.

Ya por último debemos encontrar la relación $C = C(\alpha)$ para la igualdad $\pm b_{1K} = \xi_V$. Entonces, de la tabla 18 observamos que

$$\xi = \xi_0 \left[\tan \left(x_0 + \frac{\pi}{4} \right) \right]^{\pm \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}}, \quad (2.78)$$

donde hemos hecho $\beta = c + 2x_0$ y $c = 0$. Además, de (2.49) vemos que

$$\begin{aligned} \pm b_{1K} &= \varepsilon b_{01} \left[\tan \left(\frac{\pi}{2} - \eta \right) \right]^{\mp \gamma_1} \\ &= b'_{01} (\cot \eta)^{\mp \gamma_2} \\ &= b'_{01} (\tan \eta)^{\pm \gamma_1}, \end{aligned}$$

por lo que haciendo un desplazamiento del tiempo $\frac{\pi}{4}$ hacia la derecha, obtenemos

$$\pm b_{1K} = b'_{01} \left[\tan \left(\eta + \frac{\pi}{4} \right) \right]^{\pm \gamma_1}. \quad (2.79)$$

Así pues, comparando (2.78) con (2.79) y sustituyendo (2.56) establecemos que

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}} \cdot \left(1 + \sqrt{2C-1} \right) = \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}, \quad (2.80)$$

ecuación que es la misma a la dada en (2.71), excepto por la omisión del signo “–” en el lado derecho de la igualdad, por lo que una solución a ella también será la relación (2.65), pero con $\alpha > -1$.

En conclusión, podemos decir que para el caso elíptico 6-D también hay congruencia entre ambos artículos, ya que una solución a las comparaciones $a_K = b_V$, $b_{2K} = \varphi_V$ y $b_{1K} = \xi_V$ es, en los tres casos, la relación (2.65) ($C = \frac{\alpha^2+1}{(\alpha+1)^2}$), pero con $\alpha > -1$.

2.3.3. Modelo hiperbólico.

Primeramente encontraremos la relación entre las constantes C y α para la igualdad $a_K = b_V$. De (2.48) vemos que

$$a_K = a_0 \left\{ \begin{array}{l} [\tanh \eta]^{\mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}}} [\sinh (2\eta)]^{\frac{1}{2}}, \\ [\tanh (L - \eta)]^{\mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}}} [\sinh (2L - 2\eta)]^{\frac{1}{2}}, \end{array} \begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda = -1 \end{array} \right\}. \quad (2.81)$$

Y de la tabla 17 vemos que $b_V = b_0 (\sinh \theta)^{\frac{1}{2}} (\tanh \frac{\theta}{2})^{\pm \frac{\alpha+1}{2\sqrt{\lambda}}}$, donde, haciendo las sustituciones $\theta = c - 2x_0$ y $c = 0$, tenemos

$$b_V = b_0 [\tanh (-x_0)]^{\pm \frac{\alpha+1}{2\sqrt{\lambda}}} [\sinh (-2x_0)]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.82)$$

Por lo que, para el caso $\lambda = 1$, para poder realizar la comparación entre (2.81) y (2.82) debemos hacer la “extraña equivalencia” $\eta = -x_0$, con lo cual ya podemos establecer la igualdad

$$\sqrt{\frac{3}{2C+1}} = -\frac{\alpha+1}{\sqrt{\lambda}};$$

sin embargo, para $\lambda = -1$ la comparación resulta “más natural” si “para este modelo hacemos $c \neq 0$ ”, teniendo entonces

$$b_V = b_0 \left[\tanh \left(\frac{c}{2} - x_0 \right) \right]^{\pm \frac{\alpha+1}{2\sqrt{\lambda}}} [\sinh(c - 2x_0)]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.83)$$

con lo cual se pueden considerar las siguientes equivalencias entre (2.81) y (2.83):

$$a_0 = b_0, \eta = x_0, L = \frac{c}{2} \text{ y } \sqrt{\frac{3}{2C+1}} = -\frac{\alpha+1}{\sqrt{\lambda}};$$

donde la última equivalencia es idéntica a la ecuación (2.64), razón por la cual una solución para ella también será la relación (2.65), con $\alpha < -1$.

El siguiente paso es encontrar la relación $C = C(\alpha)$ para la igualación $\pm b_{2K} = \varphi_V$. Así que, de (2.49) tenemos

$$\begin{aligned} \pm b_{2K} &= \varepsilon b_{02} \left\{ \begin{array}{ll} [\tanh \eta]^{\pm \gamma_2}, & \lambda = 1 \\ [\tanh(L - \eta)]^{\pm \gamma_2}, & \lambda = -1 \end{array} \right\} \\ &= b'_{02} \left\{ \begin{array}{ll} [\tanh \eta]^{\pm \gamma_2}, & \lambda = 1 \\ [\tanh(L - \eta)]^{\pm \gamma_2}, & \lambda = -1 \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Y de la tabla 17 vemos que

$$\varphi = \varphi_0 \left[\tanh \left(\frac{c}{2} - x_0 \right) \right]^{\mp \frac{1}{\sqrt{\lambda}}}, \quad (2.85)$$

donde hemos hecho la sustitución $\theta = c - 2x_0$. Por lo que, comparando (2.84) (con $\lambda = -1$) con (2.85) y reemplazando (2.56), determinamos las equivalencias

$$L = \frac{c}{2} \text{ y } \gamma_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}} \cdot (1 - \sqrt{2C-1}) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}},$$

donde la segunda ecuación es la ecuación (2.68) para el universo plano, i.e. una solución a ella será la relación (2.65), con $\alpha < -1$.

Y para terminar tenemos que encontrar la relación $C = C(\alpha)$ para la igualdad $\pm b_{1K} = \xi_V$. Por (2.49) tenemos

$$\begin{aligned} \pm b_{1K} &= \varepsilon b_{01} \left\{ \begin{array}{ll} [\tanh \eta]^{\pm \gamma_1}, & \lambda = 1 \\ [\tanh(L - \eta)]^{\pm \gamma_1}, & \lambda = -1 \end{array} \right\} \\ &= b'_{01} \left\{ \begin{array}{ll} [\tanh \eta]^{\pm \gamma_1}, & \lambda = 1 \\ [\tanh(L - \eta)]^{\pm \gamma_1}, & \lambda = -1 \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Y de la tabla 17 tomamos

$$\xi = \xi_0 \left[\tanh \left(\frac{c}{2} - x_0 \right) \right]^{\mp \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}}, \quad (2.87)$$

donde hicimos $\theta = c - 2x_0$. Así que, correlacionando (2.86) (para $\lambda = -1$) con (2.87) y empleando (2.56), llegamos a la equivalencia

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}} \cdot \left(1 + \sqrt{2C-1} \right) = -\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}},$$

que es la misma ecuación (2.71) del modelo plano, siendo entonces una solución a ella la relación (2.65), con $\alpha < -1$.

En conclusión, para el modelo hiperbólico 6-D encontramos una concordancia entre ambos artículos, al ser la expresión (2.65) ($C = \frac{\alpha^2+1}{(\alpha+1)^2}$) la relación entre las constantes C de KP y α de PV en todos los casos, donde $\alpha < -1$.

2.3.4. Análisis general.

Relación encontrada.

En general, en los tres modelos encontramos siempre la misma relación (2.65) entre C y α ($C(\alpha) = \frac{\alpha^2+1}{(\alpha+1)^2}$), con $\alpha < -1$ en los modelos plano e hiperbólico, y $\alpha > -1$ en el modelo elíptico.

Mas haciendo un poco de análisis a la función $C(\alpha)$ observamos que ésta es estrictamente creciente en $\alpha \in (-\infty, -1)$, estrictamente decreciente en $\alpha \in (-1, 1)$, y estrictamente creciente en $\alpha \in (1, +\infty)$, como se demuestra a continuación.

Demostración:

Aplicando el método de derivación vemos que,

$$\frac{dC}{d\alpha} = \frac{2\alpha(\alpha+1)^2 - 2(\alpha^2+1)(\alpha+1)}{(\alpha+1)^4} = \frac{2(\alpha-1)}{(\alpha+1)^3},$$

y de ahí resulta que

$$\frac{dC}{d\alpha} = \frac{2(\alpha-1)}{(\alpha+1)^3} \text{ es } \begin{cases} > 0, \text{ para } \alpha \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ < 0, \text{ para } \alpha \in (-1, 1) \end{cases}. \blacksquare$$

Además, cuando $\alpha \rightarrow -\infty$ tenemos

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} C(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{\alpha^2+1}{(\alpha+1)^2} = 1,$$

cuando $\alpha \rightarrow -1$ vemos que

$$\lim_{\alpha \rightarrow -1} C = \lim_{\alpha \rightarrow -1} \frac{\alpha^2+1}{(\alpha+1)^2} = +\infty,$$

cuando $\alpha \rightarrow 1$ obtenemos

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} C = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\alpha^2 + 1}{(\alpha + 1)^2} = C(1) = \frac{1}{2},$$

y cuando $\alpha \rightarrow +\infty$ observamos que

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} C = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^2 + 1}{(\alpha + 1)^2} = 1.$$

Así que en los dominios $\alpha \in (-\infty, -1)$ y $\alpha \in (-1, 1) \cup (1, +\infty)$, los codominios para $C(\alpha)$ son $(1, +\infty)$ y $(\frac{1}{2}, +\infty)$, respectivamente; todos ellos valores de imagen válidos de acuerdo al dominio para C dado en (2.56), en la **remarcación 2** (sección 2.1); pero $C = +\infty$ es un valor aceptado en la **remarcación 1** (sección 2.1), y $C \rightarrow 1$ cuando $\alpha \rightarrow \pm\infty$, por lo que podemos incluir $\alpha = -\infty$ y $\alpha = -1$ en el dominio de $C(\alpha)$ para los universos plano e hiperbólico, e igualmente podemos incluir los valores $\alpha = -1$ y $\alpha = +\infty$ en el dominio de $C(\alpha)$ para el universo elíptico; i.e., $\alpha \in [-\infty, -1]$ en los casos plano e hiperbólico, y $\alpha \in [-1, +\infty]$ en el caso elíptico.

Por lo tanto, como conclusión final podemos decir que

$$C = \frac{\alpha^2 + 1}{(\alpha + 1)^2}, \quad (2.88)$$

es una relación entre la constante C del artículo de KP y la constante α del artículo de PV, en los tres modelos de universo y para el caso 6-D, donde para los universos plano e hiperbólico $\alpha \in [-\infty, -1]$, y para el universo elíptico $\alpha \in [-1, +\infty]$.

Relación $C_2 = C_2(\alpha)$ alternativa.

Además de la relación (2.88) entre C y α , nosotros podemos encontrar con ayuda de software matemático una solución alternativa a la ecuación (2.68) ($\gamma_2 = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$), la cual aparece en los modelos plano e hiperbólico como consecuencia de la comparación $b_{2K} = \varphi_V$. Así que utilizando el software “Mathematica 7.0” encontramos en el archivo: “Relación C K-P y alfa P-V.nb”; la solución alterna (ver apéndice 3)

$$C_2 = \frac{9\alpha^2 + 12\alpha + 13}{(3\alpha - 1)^2}, \quad (2.89)$$

la cual, al comprobarla sustituyéndola en la ecuación (2.68) (para asegurar que no es una solución extraña) nos arroja el siguiente resultado:

$$\begin{aligned}
 \gamma_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2 \left(\frac{9\alpha^2 + 12\alpha + 13}{(3\alpha - 1)^2} \right) + 1}} \cdot \left(1 - \sqrt{2 \left(\frac{9\alpha^2 + 12\alpha + 13}{(3\alpha - 1)^2} \right) - 1} \right) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\frac{(18\alpha^2 + 24\alpha + 26) + (9\alpha^2 - 6\alpha + 1)}{(3\alpha - 1)^2}}} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{(18\alpha^2 + 24\alpha + 26) - (9\alpha^2 - 6\alpha + 1)}{(3\alpha - 1)^2}} \right) \\
 &= \frac{|3\alpha - 1|}{2} \sqrt{\frac{3}{27\alpha^2 + 18\alpha + 27}} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{(9\alpha^2 + 30\alpha + 25)}}{|3\alpha - 1|} \right) \\
 &= \frac{3\alpha - 1}{2 \cdot \sqrt{9\alpha^2 + 6\alpha + 9}} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{9\alpha^2 + 30\alpha + 25}}{3\alpha - 1} \right) \\
 &= \frac{3\alpha - 1}{2 \cdot \sqrt{3(3\alpha^2 + 2\alpha + 3)}} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{(3\alpha + 5)^2}}{3\alpha - 1} \right) \\
 &= \frac{3\alpha - 1}{6 \cdot \sqrt{\alpha^2 + \frac{2}{3}\alpha + 1}} \cdot \left(\frac{(3\alpha - 1) - (3\alpha + 5)}{3\alpha - 1} \right) \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \frac{2}{3}\alpha + 1}} = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \text{ para } \alpha > \frac{1}{3};
 \end{aligned}$$

por lo que queda comprobado que en efecto sí es una solución alternativa a la ecuación (2.68), donde $\alpha > \frac{1}{3}$.

Además, la solución (2.89) también satisface a la ecuación (2.77) para el modelo elíptico ($\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$), con $\alpha < -\frac{5}{3}$.

Mas dicha solución (2.89) no satisface a las ecuaciones (2.71) y (2.80) ($\gamma_1 = -\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ y $\gamma_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$), derivadas de la comparación $b_{1K} = \xi_V$ en sus respectivos universos, ni tampoco satisface a las ecuaciones (2.64) y (2.74)

($\sqrt{\frac{3}{2C+1}} = -\frac{\alpha+1}{\sqrt{\lambda}}$ y $\sqrt{\frac{3}{2C+1}} = \frac{\alpha+1}{\sqrt{\lambda}}$), derivadas de las comparaciones $a_K = b_V$ en sus universos correspondientes.

Capítulo 3

Propuesta de una solución particular 6D no vacía.

Si en la métrica 7-dimensional (1.5) del capítulo 1 hacemos $\alpha + \gamma_3 \equiv v_3 = cte$, entonces la séptima coordenada ya no tiene un papel activo, y eso equivale a tener una métrica 6-dimensional de la forma

$$dI^2 = e^{2\alpha} \{ e^{2\beta} [d\eta^2 - d\chi^2 - f^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2)] - e^{2\gamma_1} dx_1^2 - e^{2\gamma_2} dx_2^2 \},$$

donde f se define según la fórmula (1.16). Por lo tanto, las ecuaciones de Einstein (1.14), que se pueden obtener mediante la sustitución de la tabla 15 en la 12, tomarán la forma

$$\begin{aligned} -[3u' (u + v_1 + v_2)' + v_1' v_2' + 3\sigma] e^{-2u} &= -\kappa \mu_{6d} \\ \left[u' (u + v_1 + v_2)' + v_1'^2 + v_2'^2 + v_1' v_2' + (2u + v_1 + v_2)'' + \sigma \right] e^{-2u} &= 0 \end{aligned}$$

$$\left[u' (3u + 2v_2)' + v_2'^2 + (3u + v_2)'' + 3\sigma \right] e^{-2u} = 0$$

$$\left[u' (3u + 2v_1)' + v_1'^2 + (3u + v_1)'' + 3\sigma \right] e^{-2u} = 0$$

Tabla 20

donde la ecuación correspondiente a G_{77} es eliminada del análisis en tanto que las ecuaciones de la tabla 20 corresponden a una cosmología 6-dimensional, además hemos considerado la fórmula (1.18), las equivalencias de la tabla 10, que $v_3' = 0$ y que existe densidad de materia (universo no vacío), tomando el caso en que todas las componentes del tensor momento-energía son cero, excepto la componente $T_{00} = \mu_{6d}$, en donde μ_{6d} es una función incógnita que depende solo de la coordenada temporal η . Ahora podemos simplificar el sistema de

la tabla 20 para así obtener el sistema de ecuaciones algebraico-diferenciales

1. $\left[3(\alpha')^2 + 3\alpha'\beta'_1 + 3\alpha'\beta'_2 + \beta'_1\beta'_2 + 3\sigma \right] e^{-2\alpha} = \kappa\mu_{6d}$
2. $(\alpha')^2 + \alpha'\beta'_1 + \alpha'\beta'_2 + \beta'_1^2 + \beta'_2^2 + \beta'_1\beta'_2 + 2\alpha'' + \beta''_1 + \beta''_2 + \sigma = 0$
3. $3(\alpha')^2 + 2\alpha'\beta'_1 + \beta'_1^2 + 3\alpha'' + \beta''_1 + 3\sigma = 0$
4. $3(\alpha')^2 + 2\alpha'\beta'_2 + \beta'_2^2 + 3\alpha'' + \beta''_2 + 3\sigma = 0$

Tabla 21

donde hemos empleado las equivalencias $u \equiv \alpha$ y $v_i \equiv \beta_i$.

Para resolver el sistema de la tabla 21 podemos observar que basta con resolver el subsistema formado por las ecuaciones 2 a 4, luego de lo cual hay que sustituir las variables α , β_1 y β_2 en la ecuación 1 y despejar μ_{6d} . Por lo tanto, el sistema de ecuaciones diferenciales

2. $(\alpha')^2 + \alpha'\beta'_1 + \alpha'\beta'_2 + \beta'_1^2 + \beta'_2^2 + \beta'_1\beta'_2 + 2\alpha'' + \beta''_1 + \beta''_2 + \sigma = 0$
3. $3(\alpha')^2 + 2\alpha'\beta'_1 + \beta'_1^2 + 3\alpha'' + \beta''_1 + 3\sigma = 0$
4. $3(\alpha')^2 + 2\alpha'\beta'_2 + \beta'_2^2 + 3\alpha'' + \beta''_2 + 3\sigma = 0$

Tabla 22

será nuestro sistema a resolver para encontrar las funciones incógnitas α , β_1 y β_2 .

3.1. Solución particular 6D no vacía plana ($\sigma = 0$).

Para resolver el sistema de la tabla 22, lo primero que hay que hacer es una reducción de orden [5], pues todas las variables incógnitas aparecen con derivada primera o mayor. Por lo tanto, haremos los cambios de variables

$$\alpha' = a, \beta'_1 = b_1 \text{ y } \beta'_2 = b_2, \quad (3.1)$$

quedándonos el nuevo sistema

- 2'. $a^2 + ab_1 + ab_2 + b_1^2 + b_2^2 + b_1b_2 + 2a' + b'_1 + b'_2 + \sigma = 0$
- 3'. $3a^2 + 2ab_1 + b_1^2 + 3a' + b'_1 + 3\sigma = 0$
- 4'. $3a^2 + 2ab_2 + b_2^2 + 3a' + b'_2 + 3\sigma = 0$

Tabla 23

Enseguida, por razones de simetría entre las ecuaciones 3' y 4' de la tabla 23, podemos argumentar que toda solución b_1 en la ecuación 3' es una solución válida para b_2 en la ecuación 4', y viceversa. Así que podemos considerar una sola solución $b \equiv b_1 = b_2$ para b_1 y b_2 , con lo cual el sistema de la tabla 23 se transformará en el nuevo sistema

- 2''. $a^2 + 2ab + 3b^2 + 2a' + 2b' + \sigma = 0$
- 3''. $3a^2 + 2ab + b^2 + 3a' + b' + 3\sigma = 0$

Tabla 24

Ahora, por el método de eliminación, en la tabla anterior podemos restar la ecuación 2'' a la ecuación 3'', obteniendo

$$2a^2 - 2b^2 + a' - b' + 2\sigma = 0,$$

ó,

$$2a^2 + a' = 2b^2 + b' - 2\sigma,$$

en donde para el caso plano ($\sigma = 0$) la ecuación se transformará en

$$2a^2 + a' = 2b^2 + b',$$

ecuación en la que, una vez más por razones de simetría, podemos hacer $a = b$, por lo que al sustituir dicha igualdad en el sistema de la tabla 24, éste se transformará finalmente en

$$2a' + 3a^2 = 0, \quad (3.2)$$

para el caso plano (con $\sigma = 0$).

Así que todo se reduce a resolver la ecuación diferencial (3.2) de la siguiente forma: la ecuación es de variables separables, por lo que la podemos reexpresar como

$$\frac{da}{a^2} = -\frac{3}{2}d\eta,$$

de donde

$$\frac{1}{a} = \frac{3}{2}\eta + C_1',$$

ó,

$$a = \frac{2}{3(\eta + C_1)}. \quad (3.3)$$

Mas como $a = b_1 = b_2$ y $\alpha' = \beta'_1 = \beta'_2 = a$ (según (3.1)), entonces para obtener a α , β_1 y β_2 debemos de integrar la ecuación (3.3), resultando

$$\alpha = \int \frac{2d\eta}{3(\eta + C_1)} = \frac{2}{3} \ln |\eta + C_1| + C_2, \quad (3.4)$$

$$\beta_1 = \frac{2}{3} \ln |\eta + C_1| + C_3, \quad (3.5)$$

$$\beta_2 = \frac{2}{3} \ln |\eta + C_1| + C_4. \quad (3.6)$$

Lo que sigue es sustituir la solución particular (3.4)-(3.6) en el sistema de la tabla 22 (con el fin de verificar que no se trata de una solución extraña), lo que equivale a utilizar la solución (3.3) en la tabla 23, lo que significa reemplazar (3.3) en la tabla 24, lo que finalmente nos conduce a sustituir (3.3) en la ecuación (3.2), para así obtener

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{2}{3(\eta + C_1)} \right)' + 3 \left(\frac{2}{3(\eta + C_1)} \right)^2 &= 0 \\ \frac{4}{3} \cdot \frac{-1}{(\eta + C_1)^2} + \frac{4}{3} \frac{1}{(\eta + C_1)^2} &= 0 \\ 0 &= 0, \end{aligned}$$

lo que demuestra que nuestra solución particular (3.4)-(3.6) sí es una solución que satisface al sistema de la tabla 22 para el caso plano ($\sigma = 0$).

Por último debemos encontrar la expresión para la variable μ_{6d} en la ecuación 1 del sistema de la tabla 21 (para $\sigma = 0$), para lo cual sustituiremos la solución (3.4)-(3.6) en dicha ecuación y despejaremos a μ_{6d} . Despejando a μ_{6d} obtenemos

$$\mu_{6d} = \frac{1}{\kappa} \left[3(\alpha')^2 + 3\alpha'\beta'_1 + 3\alpha'\beta'_2 + \beta'_1\beta'_2 \right] e^{-2\alpha},$$

y sustituyendo la solución (3.4)-(3.6) resulta

$$\begin{aligned} \mu_{6d} &= \frac{1}{\kappa} \left[\frac{3 \left(\frac{2}{3(\eta+C_1)} \right)^2 + 3 \left(\frac{2}{3(\eta+C_1)} \right)^2}{\left(\frac{2}{3(\eta+C_1)} \right)^2 + \left(\frac{2}{3(\eta+C_1)} \right)^2} \right] e^{-\frac{4}{3} \ln |\eta+C_1| - 2C_2} \\ &= \frac{1}{\kappa} \left[\frac{40}{9(\eta+C_1)^2} \right] e^{\ln(|\eta+C_1|^{-\frac{4}{3}}) - 2C_2} \\ &= \frac{C'_5}{\kappa} \left[\frac{40}{9(\eta+C_1)^2} \right] |\eta+C_1|^{-\frac{4}{3}} \\ &= \frac{C_5}{\kappa} \left[\frac{|\eta+C_1|^{-\frac{4}{3}}}{(\eta+C_1)^2} \right] \\ &= \frac{C_5}{\kappa} \left[\frac{(\eta+C_1)^{-\frac{4}{3}}}{(\eta+C_1)^2} \right], \end{aligned}$$

es decir

$$\mu_{6d} = \frac{C_5}{\kappa} \cdot (\eta+C_1)^{-\frac{10}{3}}, \quad C_5 > 0, \quad (3.7)$$

ya que $C_5 = \frac{40}{9}C'_5 = \frac{40}{9}e^{-2C_2} > 0$.

Así que finalmente, retomando las soluciones (3.4)-(3.7) para el sistema de ecuaciones algebraico-diferenciales planteado en la tabla 21, concluimos que una solución particular 6-D no vacía a las ecuaciones de Einstein de dicha tabla, derivadas de la métrica 6-dimensional

$$dI^2 = e^{2\alpha} [d\eta^2 - d\chi^2 - f^2 (\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2)] - e^{2\beta_1} dx_1^2 - e^{2\beta_2} dx_2^2$$

(ver la definición (1.16) para f), es, en el caso plano ($f = \chi, \sigma = 0$):

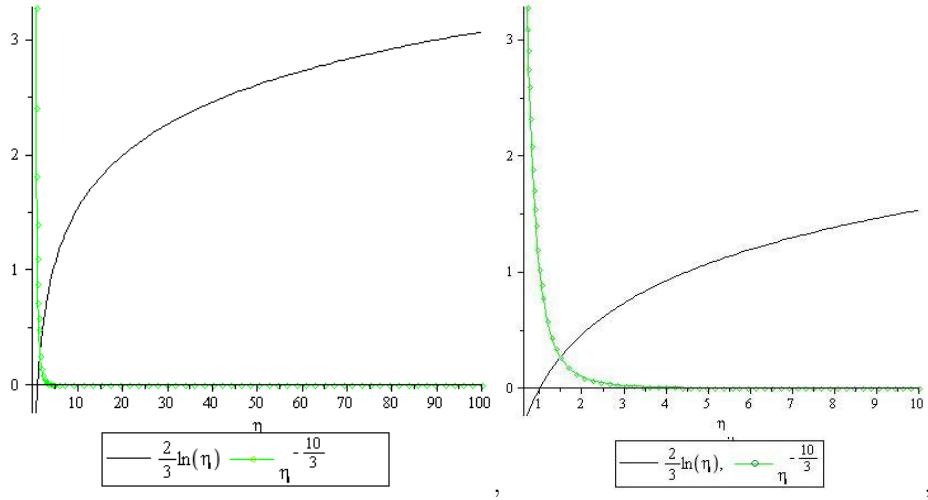
$$\boxed{\alpha = \frac{2}{3} \ln |\eta+C_1| + C_2}, \quad (3.8)$$

$$\boxed{\beta_1 = \frac{2}{3} \ln |\eta+C_1| + C_3}, \quad (3.9)$$

$$\boxed{\beta_2 = \frac{2}{3} \ln |\eta+C_1| + C_4}, \quad (3.10)$$

$$\boxed{\mu_{6d} = \frac{C_5}{\kappa} \cdot (\eta+C_1)^{-\frac{10}{3}}, \quad C_5 > 0}. \quad (3.11)$$

A continuación mostramos un gráfico del comportamiento de las soluciones (3.8)-(3.11) a través de la coordenada temporaloide η :



donde las soluciones α , β_1 y β_2 están representadas por la linea negra (con $C_i = 0$) y la densidad de materia μ_{6d} está representada por la linea con círculos (con $\frac{C_5}{\kappa} = 1$).

De acuerdo con este gráfico, la densidad de materia 6-d obtenida posee un comportamiento de carácter friedmanniano [8, 3], es decir, el universo parte de una gran explosión (big-bang) y luego evoluciona en el tiempo decreciendo asintóticamente en el infinito, como es esperado para los modelos planos de Friedmann.

3.2. Solución particular 6D no vacía hiperbólica ($\sigma = -1$).

En esta sección trataremos de encontrar más soluciones a las ecuaciones de Einstein planteadas en la tabla 21. Para ello, volveremos a enfocarnos en el sistema de ecuaciones diferenciales de la tabla 22 y, en su reducción de orden (3.1) y en la igualdad $b \equiv b_1 = b_2$, para así llegar otra vez al sistema de ecuaciones diferenciales de la tabla 24, el cual se puede reescribir de la siguiente forma:

$$(a^2 + 2ab + b^2 + 2a' + b' + 2k)_1 + (2b^2 + b' - \sigma)_2 = 0, \quad (3.12)$$

$$(a^2 + 2ab + b^2 + 2a' + b' + 2k)_1 + (2a^2 + a' + \sigma)_3 = 0, \quad (3.13)$$

donde los subíndices 1, 2 y 3 hacen referencia a sus respectivos paréntesis.

En el sistema anterior podemos hacer los despejes $\mathcal{O}_2 = -\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_3 = -\mathcal{O}_1$, por lo cual concluimos que

$$\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_3 = f(\eta), \quad (3.14)$$

donde $f(\eta)$ es una función desconocida de η . Entonces resulta que

$$\mathcal{O}_1 = -f(\eta).$$

Por lo tanto tendremos que $2b^2 + b' - \sigma = f$ y $2a^2 + a' + \sigma = f$, de donde

$$b' = f - 2b^2 + \sigma, \quad (3.15)$$

$$a' = f - 2a^2 - \sigma. \quad (3.16)$$

Así que sustituyendo las ecuaciones (3.15) y (3.16) en cualquiera de las ecuaciones del sistema (3.12) y (3.13), y usando la relación (3.14), obtendremos $[a^2 + 2ab + b^2 + (2f - 4a^2 - 2\sigma) + (f - 2b^2 + \sigma) + 2\sigma]_1 + f = 0$, de donde $-3a^2 + 2ab - b^2 + \sigma = -4f$, por lo que

$$f = \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2 - \frac{\sigma}{4}. \quad (3.17)$$

Mas sustituyendo (3.17) en (3.15) y (3.16), llegamos al sistema:

$$a' = -\frac{5}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2 - \frac{5}{4}\sigma,$$

$$b' = \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab - \frac{7}{4}b^2 + \frac{3}{4}\sigma;$$

el cual podemos reexpresarlo como el siguiente sistema simplificado de ecuaciones diferenciales:

$$a' = \left(-\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab - \frac{3}{4}b^2 - \frac{1}{4}\sigma \right) - (a^2 - b^2 + \sigma), \quad (3.18)$$

$$b' = \left(-\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab - \frac{3}{4}b^2 - \frac{1}{4}\sigma \right) + (a^2 - b^2 + \sigma); \quad (3.19)$$

del que podemos garantizar que todas las soluciones que obtengamos serán exactamente todas las soluciones del sistema original de la tabla 24, ya que como hemos llegado al sistema (3.18) y (3.19) por simples despejes algebraicos válidos reversibles, no hay pérdidas de soluciones ni añadidura de soluciones extrañas en dicho sistema con respecto al sistema de la tabla 24.

Ahora, para encontrar una solución al sistema anterior, propondremos que $a \equiv a_0$ y $b \equiv b_0$ son constantes, con lo que $a' = b' = 0$, originándose el siguiente nuevo sistema:

$$\left(-\frac{1}{4}a_0^2 - \frac{1}{2}a_0b_0 - \frac{3}{4}b_0^2 - \frac{1}{4}\sigma \right)_{1'} - (a_0^2 - b_0^2 + \sigma)_{2'} = 0, \quad (3.20)$$

$$\left(-\frac{1}{4}a_0^2 - \frac{1}{2}a_0b_0 - \frac{3}{4}b_0^2 - \frac{1}{4}\sigma \right)_{1'} + (a_0^2 - b_0^2 + \sigma)_{2'} = 0, \quad (3.21)$$

donde los subíndices $1'$ y $2'$ hacen referencia a sus respectivas llaves; este sistema ya no será un sistema de ecuaciones diferenciales, sino simplemente un sistema de ecuaciones algebraicas. En dicho sistema no es difícil ver que $(\cdot)_{2'} = 0$, por lo que también $(\cdot)_{1'} = 0$, originándose de esa manera el nuevo sistema:

$$a_0^2 - b_0^2 + \sigma = 0, \quad (3.22)$$

$$\frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2}a_0b_0 + \frac{3}{4}b_0^2 + \frac{1}{4}\sigma = 0; \quad (3.23)$$

que es el sistema que verdaderamente se resolverá.

Para resolver el sistema (3.22) y (3.23) primero despejaremos a_0 en (3.22), obteniendo

$$a_0 = \pm \sqrt{b_0^2 - \sigma}. \quad (3.24)$$

Luego, sustituyendo (3.24) en (3.23) tendremos

$$\frac{1}{4}(b_0^2 - \sigma) \pm \frac{1}{2}b_0\sqrt{b_0^2 - \sigma} + \frac{3}{4}b_0^2 + \frac{1}{4}\sigma = 0,$$

de donde, haciendo álgebra llegaremos a

$$-2b_0^2 = \pm b_0\sqrt{b_0^2 - \sigma},$$

por lo que

$$4b_0^4 = b_0^2(b_0^2 - \sigma),$$

i.e.

$$b_0^2(3b_0^2 + \sigma) = 0. \quad (3.25)$$

De la ecuación (3.25) se desprenden varias posibilidades, que analizaremos a continuación:

a) Si $\sigma = 0$ (universo plano), entonces tendremos que $3b_0^4 = 0$, por lo que $b_0 = 0$ y $a = 0$ (por (3.24)), la cual es una solución trivial.

b) Si $\sigma = +1$ (universo elíptico), entonces se tendrá que $b_0^2(3b_0^2 + 1) = 0$, de donde:

1. Si $b_0^2 = 0$, entonces $b_0 = 0$ y $a_0 = \pm i$ (por (3.24)), resultando ser una solución imaginaria que por lo tanto desecharímos.

2. Si $(3b_0^2 + 1) = 0$, entonces $b_0 = \pm\sqrt{-\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}i$, que es una solución imaginaria y por lo tanto eliminada.

c) Si $\sigma = -1$ (universo hiperbólico), entonces tenemos que $b_0^2(3b_0^2 - 1) = 0$, por lo que:

1. Si $b_0^2 = 0$, entonces $b_0 = 0$ y $a_0 = \pm 1$, la cual es una solución trivial.

2. Si $(3b_0^2 - 1) = 0$, entonces $b_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $a_0 = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ ó $\mp\frac{2}{\sqrt{3}}$, siendo ésta la única solución interesante.

Ahora, las soluciones encontradas en **c)-2** se sustituirán en el sistema (3.22) y (3.23) para descartar posibles soluciones extrañas. Así que sustituyendo $b_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ y $a_0 = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$, con $\sigma = -1$, tenemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\right) - 1 &= 0, \\ 0 &= 0, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right) + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4}(-1) &= 0, \\ + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} &= 0, \\ \frac{2}{3} &= 0; \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción i.e. las dos parejas de soluciones $(a_0, b_0) = \left(\pm \frac{2}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ se descartan al ser soluciones extrañas. Y ahora, sustituyendo las otras dos parejas, $b_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ y $a_0 = \mp \frac{2}{\sqrt{3}}$, en el sistema (3.22) y (3.23), encontramos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\right) - 1 &= 0, \\ 0 &= 0, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{3}\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right) + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4}(-1) &= 0, \\ + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} &= 0, \\ 0 &= 0; \end{aligned}$$

por lo cual las dos parejas $(a_0, b_0) = \left(\pm \frac{2}{\sqrt{3}}, \mp \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ sí son soluciones verdaderas.

A continuación resumiremos los resultados del análisis anterior, para la obtención de soluciones al sistema (3.22) y (3.23), en la siguiente tabla.

- a) $\sigma = 0 \rightarrow \{b_0 = 0, a_0 = 0\}$. Solución trivial.
- b) $\sigma = +1 \rightarrow \begin{cases} \mathbf{1.} b_0 = 0, a_0 \in \text{Im.} & \text{Solución inválida.} \\ \mathbf{2.} b_0 \in \text{Im.} & \text{Solución inválida} \end{cases}$
- c) $\sigma = -1 \rightarrow \begin{cases} \mathbf{1.} b_0 = 0, a_0 = \pm 1. & \text{Solución trivial.} \\ \mathbf{2.} b_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, a_0 = \mp \frac{2}{\sqrt{3}}. & \text{***Solución interesante.***} \end{cases}$

Tabla 25

En conclusión, de la tabla 25 podemos decir que la única solución real no trivial que hemos encontrado para el sistema de la tabla 24 con $\sigma = -1$ (caso

hiperbólico) es

$$a = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ y } b = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (3.26)$$

es decir, la solución **c2**.

Por lo tanto, debido a la reducción de orden (3.1) y a las igualdades $b = b_1 = b_2$, tenemos que

$$\alpha = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}\eta + C_1, \quad (3.27)$$

$$\beta_1 = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}\eta + C_2, \quad (3.28)$$

$$\beta_2 = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}\eta + C_3; \quad (3.29)$$

expresiones que deben ser soluciones al sistema de la tabla 22 para $\sigma = -1$, lo cual es cierto, ya que sustituir esas expresiones en dicho sistema equivale a sustituir las soluciones (3.26) en el sistema de la tabla 24 (debido a (3.1) y a las igualdades $b = b_1 = b_2$), lo que significa sustituir (2.28) en el sistema (3.18) y (3.19), lo que es lo mismo que sustituir (3.26) en el sistema (3.22) y (3.23), lo cual acabamos de hacer al descartar las soluciones extrañas, comprobándose su validez. Así pues, las soluciones a las ecuaciones 2, 3 y 4 de la tabla 21 ($\sigma = -1$) serán las ecuaciones (3.27)-(3.29), y sustituyendo dichas soluciones en la ecuación 1 de esa tabla obtendremos

$$\left[3 \left(\pm \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 + 3 \left(\pm \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \left(\mp \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + 3 \left(\pm \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \left(\mp \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \left(\mp \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left(\mp \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + 3(-1) \right] e^{-2\left(\pm \frac{2}{\sqrt{3}}\eta + C_1\right)} = \kappa \mu_{6d},$$

por lo que

$$\mu_{6d} = \frac{1}{\kappa} \left(-\frac{8}{3} \right) e^{\left(\mp \frac{4}{\sqrt{3}}\eta - 2C_1 \right)},$$

es decir

$$\mu_{6d} = -\frac{C_4}{\kappa} e^{\mp \frac{4}{\sqrt{3}}\eta}, \quad C_4 > 0, \quad (3.30)$$

pues $C_4 = \frac{8}{3} e^{-2C_1} > 0$.

Así que finalmente, retomando las soluciones (3.27)-(3.30) al sistema de ecuaciones algebraico-diferenciales planteado en la tabla 21, concluimos que una solución particular 6-D no vacía a las ecuaciones de Einstein de esa tabla, derivadas de la métrica 6-dimensional

$$dI^2 = e^{2\alpha} [d\eta^2 - d\chi^2 - f^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2)] - e^{2\beta_1} dx_1^2 - e^{2\beta_2} dx_2^2$$

(ver la definición (1.16) para f), es, en el caso hiperbólico ($f = \sinh \chi$, $\sigma = -1$):

$$\alpha = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}\eta + C_1, \quad (3.31)$$

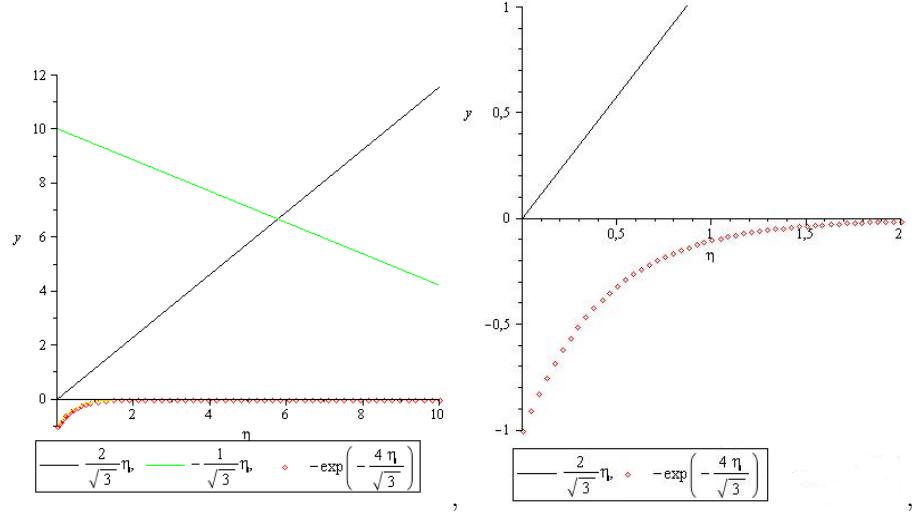
$$\beta_1 = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}\eta + C_2, \quad (3.32)$$

$$\beta_2 = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}\eta + C_3, \quad (3.33)$$

$$\mu_{6d} = -\frac{C_4}{\kappa} e^{\mp \frac{4}{\sqrt{3}}\eta}, \quad C_4 > 0. \quad (3.34)$$

De la ecuación (3.34) se observa que la densidad de materia 6-dimensional μ_{6d} es negativa. De acuerdo con [7, 16, 18] hay dos métodos esenciales para interpretar físicamente los campos escalares β_1 y β_2 . En especial nos referimos al segundo método, en el cual el campo escalar se manifiesta en formas conocidas (no geométricas) de materia, y en este contexto, en los procesos de creación y aniquilamiento de materia. Sin embargo, esto último no es aquí analizado y por ende esta solución no es físicamente aceptable. Únicamente el factor de escala α coincide en este caso con los modelos de Friedmann, donde crece con el transcurso del tiempo; sin embargo difiere en la forma de la tendencia, ya que en nuestro caso la tendencia es lineal, en cambio en el modelo de Friedmann es logarítmica.

A continuación mostramos un gráfico del comportamiento de las soluciones (3.31)-(3.34) a través del tiempo η :



donde hemos tomado las soluciones superiores y hemos hecho $C_1 = 0$, $C_{2,3} = 10$ y $\frac{C_4}{\kappa} = 1$.

Apéndice A

Demostración de algunos resultados usados en el artículo.

A.1. Demostración de las identidades trigonométricas hiperbólicas $e^{2x} - 1 = 2 \sinh(x) e^x$ y $e^{2x} + 1 = 2 \cosh(x) e^x$.

Proposición	Justificación
1. $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	Por definición.
2. $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	"
3. $\sinh(x) + \cosh(x) = e^x$	Sumando 1 y 2.
4. $e^{2x} = \sinh^2(x) + 2 \sinh(x) \cosh(x) + \cosh^2(x)$	Elevando al cuadrado 3.
5. $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$	Identidad trigonométrica.
6. $\begin{aligned} e^{2x} - 1 &= \left\{ \begin{bmatrix} \sinh^2(x) \\ +2 \sinh(x) \cosh(x) \\ +\cosh^2(x) \\ -[\cosh^2(x) - \sinh^2(x)] \end{bmatrix} \right\} \\ &= 2 \sinh(x) [\sinh(x) + \cosh(x)] \\ &= 2 \sinh(x) e^x \end{aligned}$	Restando 4-5 y sustituyendo 3 al final.

$$7. \quad e^{2x} + 1 = \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \sinh^2(x) \\ + 2 \sinh(x) \cosh(x) \\ + \cosh^2(x) \end{array} \right] \\ + [\cosh^2(x) - \sinh^2(x)] \\ = 2 \cosh(x) [\sinh(x) + \cosh(x)] \\ = 2 \cosh(x) e^x \end{array} \right\}$$

Sumando 4 y 5 y
sustituyendo 3 al final.

Y 6 y 7 es lo que queríamos demostrar. ■

A.2. Obtención de algunos resultados de la sección 2.1 con ayuda del software Mathematica 7.0.

*Nota: Todos los cálculos hechos en esta sección se localizan en el archivo “Solución Ecs. de Einstein en vacío b.nb”.

A.2.1. Obtención de la integral (2.35).

En (2.35) tenemos la ecuación

$$\int \frac{d\nu_i}{\nu_i} = - \int \left\{ \frac{2 \sinh \ln \tan(-\eta)}{2\lambda \cosh [2 \operatorname{arctanh}(e^{-2\lambda\eta})]} \right\} d\eta,$$

por lo que al auxiliarnos de Mathematica para resolver la integral derecha obtenemos lo siguiente:

es decir, para las funciones superior e inferior tenemos que

$$\begin{aligned}
 - \int \left\{ \frac{2 \sinh \ln \tan(-\eta)}{2\lambda \cosh [2 \operatorname{arctanh}(e^{-2\lambda\eta})]} \right\} d\eta &= \left\{ \begin{array}{l} -\ln |\cos \eta| - \ln |\sin \eta| \\ -2\lambda\eta - \ln |2(-1 + e^{-4\lambda\eta})| \end{array} \right\} \\
 &\quad + cte \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} -\ln |\sin(\eta) \cdot \cos(\eta)| \\ -2\lambda\eta - \ln |2(-1 + e^{-4\lambda\eta})| \end{array} \right\} \\
 &\quad + cte \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} -\ln \left| \frac{1}{2} \sin(2\eta) \right| \\ -2\lambda\eta - \ln |2(-1 + e^{-4\lambda\eta})| \end{array} \right\} \\
 &\quad + \gamma_i''',
 \end{aligned}$$

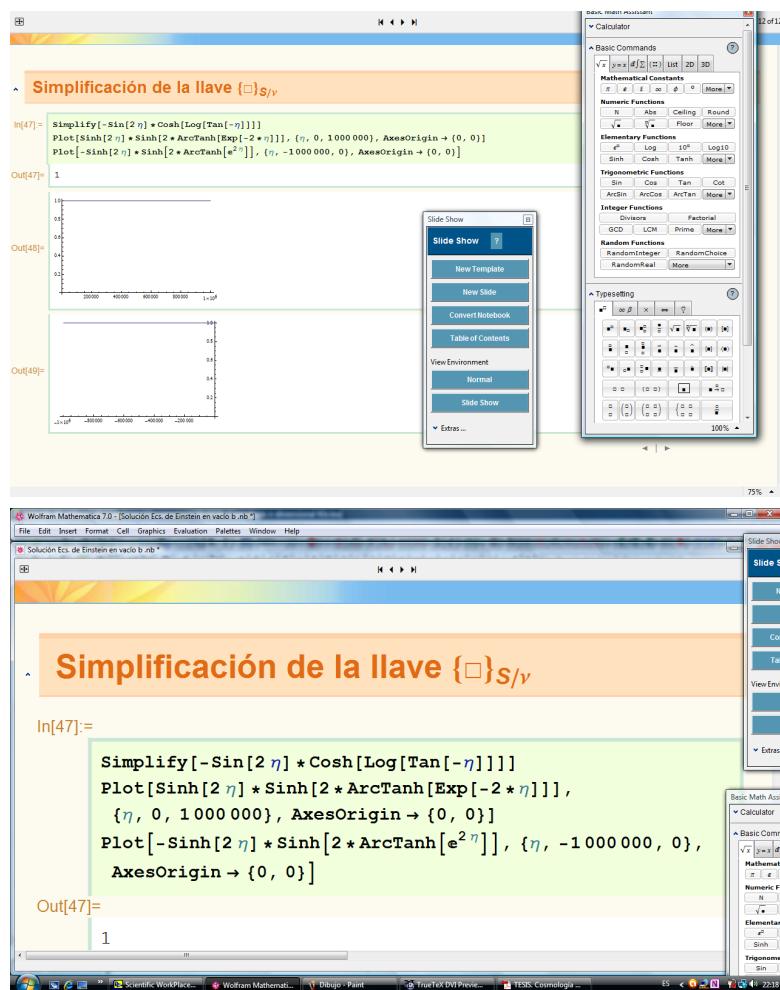
donde hemos considerado el caso más general, con valor absoluto en los argumentos de los logaritmos, y, $\gamma_i''' \equiv cte$.

A.2.2. Simplificación de la llave $\{\}_{S/\mu}$ en la fórmula (2.38).

En la fórmula (2.38) tenemos la expresión

$$\left\{ \begin{array}{l} -\sin(2\eta) \cosh \ln \tan(-\eta) \\ 1 \\ \lambda \sinh(2\eta) \sinh [2 \operatorname{arctanh}(e^{-2\lambda\eta})] \end{array} \right\}_{S/\nu},$$

la cual podemos simplificar con ayuda de Mathematica, para así obtener

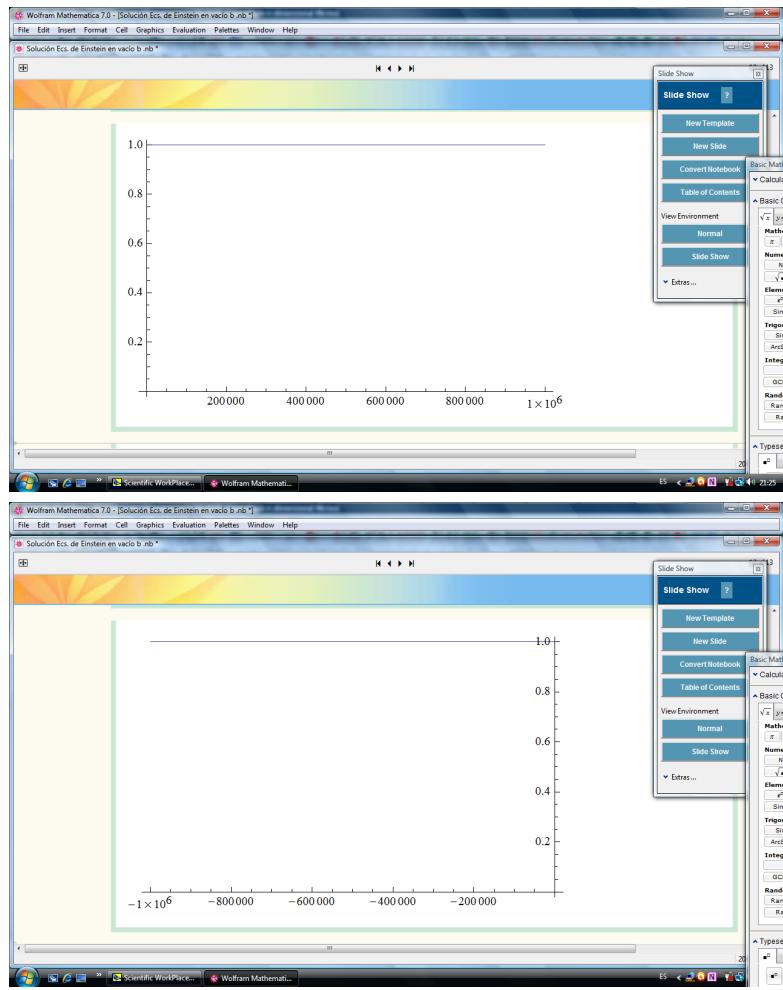


The screenshot shows a Mathematica notebook interface. The top cell (In[47]) contains the following input:

```
In[47]:= Simplify[-Sin[2 η] * Cosh[Log[Tan[-η]]]]
Plot[Sinh[2 η] * Sinh[2 * ArcTanh[Exp[-2 * η]]], {η, 0, 1000000}, AxesOrigin -> {0, 0}]
Plot[-Sinh[2 η] * Sinh[2 * ArcTanh[e^2 η]], {η, -1000000, 0}, AxesOrigin -> {0, 0}]
```

The output (Out[47]) is 1. Below this, two plots are shown. The first plot (Out[48]) shows a function with a sharp peak at η = 0, decreasing as η increases. The second plot (Out[49]) shows a function with a sharp peak at η = 0, decreasing as η increases. A context menu is open over the second plot, with 'Slide Show' selected. The right side of the interface shows the Mathematica palette, with the 'Calculator' tab selected.

The bottom cell (In[47]) contains the same input as the top cell. The output (Out[47]) is 1. The right side of the interface shows the Mathematica palette, with the 'Calculator' tab selected.



donde hemos considerado para las gráficas los intervalos de definición de η dados en (2.34); es decir, podemos concluir que

$$\left\{ \begin{array}{c} -\sin(2\eta) \cosh \ln \tan(-\eta) \\ 1 \\ \lambda \sinh(2\eta) \sinh [2 \operatorname{arctanh}(e^{-2\lambda\eta})] \end{array} \right\}_{S/\nu} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\}.$$

A.2.3. Integración de la fórmula (2.33).

Integrando la fórmula (2.33) con ayuda de Mathematica obtenemos

Integración de μ para obtener a α .

In[50]:=

$$\text{Integrate}[\text{Sinh}[\text{Log}[\text{Tan}[-\eta]]] - \sqrt{\frac{3}{2 c + 1}} * \text{Cosh}[\text{Log}[\text{Tan}[-\eta]]], \eta]$$

$$\text{Integrate}[\text{Sinh}[\text{Log}[\text{Tan}[-\eta]]] + \sqrt{\frac{3}{2 c + 1}} * \text{Cosh}[\text{Log}[\text{Tan}[-\eta]]], \eta]$$

$$\left\{ \text{Integrate}\left[\left(1 - \sqrt{\frac{3}{2 c + 1}}\right) * \frac{1}{2 \eta}, \eta\right], \text{Integrate}\left[\left(1 + \sqrt{\frac{3}{2 c + 1}}\right) * \frac{1}{2 \eta}, \eta\right] \right\}$$

$$\text{Integrate}[\text{Cosh}[2 \text{ArcTanh}[e^{-2 \eta}]] - \sqrt{\frac{3}{2 c + 1}} \text{Sinh}[2 \text{ArcTanh}[e^{-2 \eta}]], \eta]$$

$$\text{Integrate}[-\text{Cosh}[2 \text{ArcTanh}[e^{2 \eta}]] - \sqrt{\frac{3}{2 c + 1}} \text{Sinh}[2 \text{ArcTanh}[e^{2 \eta}]], \eta]$$

$$\text{Out}[50]= -\frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{1+2 c}} \text{Log}[2 \text{Cos}[\eta]] + \frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{1+2 c}} \text{Log}[2 \text{Sin}[\eta]] + \frac{1}{2} \text{Log}[\text{Sin}[2 \eta]]$$

$$\text{Out}[51]= \frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{1+2 c}} \text{Log}[2 \text{Cos}[\eta]] - \frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{1+2 c}} \text{Log}[2 \text{Sin}[\eta]] + \frac{1}{2} \text{Log}[\text{Sin}[2 \eta]]$$

$$\text{Out}[52]= \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{1+2 c}}\right) \text{Log}[\eta], \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{1+2 c}}\right) \text{Log}[\eta] \right\}$$

$$\text{Out}[53]= \eta + \frac{1}{2} \text{Log}[2 \left(-1 + e^{-4 \eta}\right)] - 2 \sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{1+2 c}} \left(\frac{1}{4} \text{Log}[-1 + e^{2 \eta}] - \frac{1}{4} \text{Log}[1 + e^{2 \eta}]\right)$$

$$\text{Out}[54]= -\eta + 2 \sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{1+2 c}} \left(\frac{1}{4} \text{Log}[-1 + e^{2 \eta}] - \frac{1}{4} \text{Log}[1 + e^{2 \eta}]\right) + \frac{1}{2} \text{Log}[2 \left(-1 + e^{4 \eta}\right)]$$

Integración de μ para obtener a α .

In[50]:=

$$\text{Integrate}[\text{Sinh}[\text{Log}[\text{Tan}[-\eta]]] - \sqrt{\frac{3}{2 c + 1}} * \text{Cosh}[\text{Log}[\text{Tan}[-\eta]]], \eta]$$

$$\text{Integrate}[\text{Sinh}[\text{Log}[\text{Tan}[-\eta]]] + \sqrt{\frac{3}{2 c + 1}} * \text{Cosh}[\text{Log}[\text{Tan}[-\eta]]], \eta]$$

$$\left\{ \text{Integrate}\left[\left(1 - \sqrt{\frac{3}{2 c + 1}}\right) * \frac{1}{2 \eta}, \eta\right], \text{Integrate}\left[\left(1 + \sqrt{\frac{3}{2 c + 1}}\right) * \frac{1}{2 \eta}, \eta\right] \right\}$$

$$\text{Integrate}[\text{Cosh}[2 \text{ArcTanh}[e^{-2 \eta}]] - \sqrt{\frac{3}{2 c + 1}} \text{Sinh}[2 \text{ArcTanh}[e^{-2 \eta}]], \eta]$$

$$\text{Integrate}[-\text{Cosh}[2 \text{ArcTanh}[e^{2 \eta}]] - \sqrt{\frac{3}{2 c + 1}} \text{Sinh}[2 \text{ArcTanh}[e^{2 \eta}]], \eta]$$

Out[51]=

$$-\frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{1+2c}} \operatorname{Log}[2 \cos[\eta]] + \frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{1+2c}} \operatorname{Log}[2 \sin[\eta]] + \frac{1}{2} \operatorname{Log}[\sin[2\eta]]$$

Out[52]=

$$\left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{1+2c}} \right) \operatorname{Log}[\eta], \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{1+2c}} \right) \operatorname{Log}[\eta] \right\}$$

Out[53]=

$$\eta + \frac{1}{2} \operatorname{Log}[2(-1 + e^{-4\eta})] - 2\sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{1+2c}} \left(\frac{1}{4} \operatorname{Log}[-1 + e^{2\eta}] - \frac{1}{4} \operatorname{Log}[1 + e^{2\eta}] \right)$$

Out[54]=

$$-\eta + 2\sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{1+2c}} \left(\frac{1}{4} \operatorname{Log}[-1 + e^{2\eta}] - \frac{1}{4} \operatorname{Log}[1 + e^{2\eta}] \right) + \frac{1}{2} \operatorname{Log}[2(-1 + e^{4\eta})]$$

Out[55]=

es decir, tenemos que la integral es igual a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{-\lambda}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}} \ln |2 \cos \eta| + \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}} \ln |2 \sin \eta| + \frac{1}{2} \ln |\sin(2\eta)| \\ \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{3}{2C+1}} \right) \ln |\eta| \\ \lambda \eta - 2\lambda \sqrt{\frac{3}{2C+1}} \cdot \frac{1}{4} (\ln(|-1 + e^{2\eta}| - \ln|1 + e^{2\eta}|)) + \frac{1}{2} \ln |2(-1 + e^{-4\lambda\eta})| \\ + a_0'' \end{array} \right\}$$

donde hemos considerado el caso general con valor absoluto en el argumento de los logaritmos. Y la expresión anterior evidentemente equivale a la fórmula (2.41).

A.3. Obtención de una relación alternativa $C_2 = C_2(\alpha)$ con ayuda del software Mathematica 7.0.

Con ayuda de Mathematica vemos, en el archivo: "Relación C K-P y alfa P-V.nb"; que dos soluciones a la ecuación (2.68)

$(\gamma_2 = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}})$ son

Soluciones $C = C(\alpha)$ para la igualdad

$$\gamma_2 = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

In[55]:=

$$\lambda := \alpha^2 + \frac{2}{3} \alpha + 1;$$

$$\gamma_2 := \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\alpha + 1}} (1 - \sqrt{2\alpha - 1});$$

$$\{ \text{solve}[\gamma_2 == -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \alpha] \}$$

Out[57]=

$$\left\{ \left\{ \left\{ C \rightarrow \frac{1 + \alpha^2}{(1 + \alpha)^2} \right\}, \left\{ C \rightarrow \frac{13 + 12\alpha + 9\alpha^2}{(-1 + 3\alpha)^2} \right\} \right\} \right\}$$

es decir, una solución es la conocida ecuación (2.65) ($C = \frac{\alpha^2+1}{(\alpha+1)^2}$), pero una solución alternativa es la ecuación $C_2 = \frac{9\alpha^2+12\alpha+13}{(3\alpha-1)^2}$.

Conclusiones.

En el capítulo 1 de este trabajo se partió de la métrica 7-dimensional $dI^2 = e^{2\alpha} \{ e^{2\beta} [d\eta^2 - d\chi^2 - f^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2)] - e^{2\gamma_1} dx_1^2 - e^{2\gamma_2} dx_2^2 - e^{2\gamma_3} dx_3^2 \}$, donde la función f , como ya es conocido, puede tomar tres formas diferentes dependiendo de la sección espacial de la geometría analizada; a saber,

$$f = \begin{cases} \chi, & \text{caso plano} \\ \sin \chi, & \text{caso elíptico} \\ \sinh \chi, & \text{caso hiperbólico} \end{cases}.$$

A partir de esa métrica se obtuvo, mediante el formalismo de formas diferenciales de Cartán [15], las diversas componentes no nulas del seudotensor de Einstein: $G_{00}, G_{22}, \dots, G_{77}$.

En la sección 2.1 se corroboraron los resultados mostrados en el artículo de Kechkin-Peraza [10] sobre la obtención de una solución general a las ecuaciones de Einstein N-dimensionales “vacías”, calculadas a partir de una métrica como la dada en la sección 1, pero generalizada a N dimensiones. En particular, se obtuvieron las soluciones para los casos 5-dimensional y 6-dimensional.

En la sección 2.3 se comparó una solución 6-d a las ecuaciones de Einstein vacías [1] con la solución particular de Kechkin-Peraza para el caso 6-dimensional (obtenida en la sección 2.1), con el fin de demostrar la equivalencia de ambos métodos de solución, lo cual arrojó que debe cumplirse entre sus respectivas constantes de integración la relación: $C = \frac{\alpha^2 + 1}{(\alpha + 1)^2}$, donde C es una constante en [10] y α es una constante en [1].

En la subsección 2.3.4 (subsubsección “Relación $C_2 = C_2(\alpha)$ alternativa”) fue encontrada, con ayuda del software matemático: “Mathematica 7.0”; una relación alternativa entre C y α , la cual fue

$C_2 = \frac{9\alpha^2 + 12\alpha + 13}{(3\alpha - 1)^2}$, sin embargo, dicha relación solo era válida para la comparación de “algunos” de los términos respectivos de las métricas dadas en [10] y [1], y por lo tanto no era una relación general entre las constantes C y α de las respectivas soluciones en ambos artículos.

En el capítulo 3 se partió de la métrica 7-dimensional del capítulo 1, y se le redujo a su forma correspondiente 6-dimensional considerando $\alpha + \gamma_3 = cte$, y bajo esa condición, se utilizaron directamente los resultados de dicho capítulo, con la diferencia de que se eliminó a $(\alpha + \gamma_3)'$ y a la componente G_{77} , como así es señalado el método de reducción de una variedad dada a otra de menor

dimensión en [16]. Con esto fue posible establecer las ecuaciones de Einstein “con densidad de materia 6-dimensional”, donde todas las componentes G_{AA} estarían igualadas a cero, excepto la componente G_{00} , siendo $G_{00} = -\kappa\mu_{6d}$. Una vez establecidas dichas ecuaciones, se encontraron dos soluciones particulares para ellas, una para un universo plano y la otra para un universo hiperbólico.

Se espera que los resultados aquí mostrados sean un caso particular de una solución más general 6-dimensional con la cual pudiera ser posible, en principio, describir propiedades de nuevas formas de materia, como la materia oscura y otras.

Bibliografía

- [1] **Américo Peraza Álvarez And Vladimirov Yu. S.** Variations of Constants and Red-Shift in 6D Cosmology, General Relativity and Gravitation. Vol. 28, N1, 1996.
- [2] **Ch. Yamauchi, Tomotsugu Goto.** Are Passive Spiral Galaxies Truly “Passive” and “Spiral”? A Near-Infrared Perspective. Royal Astronomical Society, Volume 352, Issue 3, 2004 (pp. 815-822).
- [3] **D. F. Lawden.** Introduction to Tensor Calculus, Relativity and Cosmology. Dover Publications, Inc, Mineola, New York, 2002.
- [4] **David C. Kay, Lorenzo Abellanas (Traductor).** Teoría y Problemas de Cálculo Tensorial. Serie de Compendios Schaum, McGraw-Hill, España, 1990.
- [5] **I. Bronshtein, K. Semendiaev.** Manual de Matemáticas para Ingenieros y Estudiantes. Ediciones Quinto Sol, 1987.
- [6] **Juan Marquez.** Apuntes de Álgebra Multilineal On-Line (<http://juanmarqz.wordpress.com>). Wordpress, Página Actualizada.
- [7] **Michio Kaku.** Hiperespacio, Editorial Crítica, España, 1996.
- [8] **Misner C. W., Thorne K.S., Wheeler J.A.** Gravitation. W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1973.
- [9] **N.V. Mitskievich.** Física Relativista (en ruso). Editorial URSS, Moscú, 2012.
- [10] **O.V. Kechkin and A. A. Peraza.** A Class of Exact Cosmological Solutions for Multidimensional Vacuum Einstein Equations. Russian Physics Journal, Physics, T.36, N. 3, 1993 (P. 114).
- [11] **Paul G. Hewitt.** Física Conceptual. Serie Awli, 1999.
- [12] **Paul S. Wesson.** Space-Time Matter: Modern Kaluza-Klein Theory. World Scientific, 2000.

- [13] **Rodolfo Gutiérrez Torres, Américo Peraza Álvarez.** Dinámica en Cosmología 5-dimensional. EAE-Berlín, 2013.
- [14] **T. Kaluza.** En Torno al Problema de la Unidad de la Física, "Albert Einstein y Teoría de la Gravitación". Moscú, Mir, 1979.
- [15] **W. Israel.** Differential Forms in General Relativity. Dublin Institute for Advanced Studies, Series A, N. 19, 1970.
- [16] **Yu. S. Vladimirov.** Dimensionalidad del Espacio-Tiempo Físico y Unificación de las Interacciones. Editorial Universidad de Moscú, 1987.
- [17] **Yu. S. Vladimirov.** Teoría Clásica de la Gravedad (en ruso). Editorial URSS, Moscú, 2009.
- [18] **Yu. S. Vladimirov, Américo Peraza A. (Traductor).** Espacio-Tiempo: Dimensiones Manifiestas y Ocultas. Editorial Ciencia, Moscú, 1989.