

IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DE ESTIMADOR DE ERRO BASEADO EM TÉCNICAS SUPERCONVERGENTES DE RECUPERAÇÃO

ESTEVAM B. LAS CASAS
e
MAX DE CASTRO MAGALHÃES

*Departamento de Engenharia de Estruturas
Universidade Federal de Minas Gerais
Av. Contorno, 842-andar 2
30110-060 Belo Horizonte MG, Brasil*

SUMÁRIO

O trabalho descreve uma análise de estimador de erro “a posteriori” proposto por Zienkiewicz e Zhu³ implementado utilizando o ambiente computacional SDP desenvolvido no Laboratório Nacional de Computação Científica⁵. Este estimador se propõe a apresentar convergência assintótica de efetividade devido a uma nova técnica superconvergente de recuperação de gradientes da solução (estimador Z^2 modificado). Um segundo estimador de erro¹ é utilizado para comparação, através de um exemplo de aplicação à elasticidade plana. Utiliza-se na análise elementos triangulares quadráticos e lineares, com o objetivo de verificar a performance dos dois estimadores.

SUMMARY

This work describes an analysis of the Zienkiewicz-Zhu³ “a posteriori” error estimator, implemented using the SDP computer environment developed at the National Laboratory for Scientific Computation⁵. This estimator is expected to present asymptotic convergence due to a new superconvergent recovery technique (modified Z^2 estimator). A second error estimator¹ is used in the comparisons, in the context of plane elasticity. Quadratic and linear triangular elements are used in the analysis, aiming at a verification of the performance of the proposed estimators.

Recibido: Enero 1995

INTRODUÇÃO

Uma técnica geral de recuperação é descrita para determinar as derivadas (tensões) das soluções dos elementos finitos nos nós do modelo. Segundo Zienkiewicz, uma convergência de quarta ordem dos valores nodais dos gradientes para elemento triangular quadrático é relatada pela primeira vez. A performance da técnica é comparada ao procedimento de suavização pelo uso da projeção local L_2 (estimador Z^2 na forma original).

A nova técnica superconvergente de recuperação é usada na computação do estimador de erro "a posteriori" (Z^2), o qual tem provado ser econômico e efetivo. A qualidade e a confiabilidade do estimador de erro é dependente, portanto, dos procedimentos de suavização utilizados. Este novo estimador evita certas dificuldades previamente encontradas para elementos quadráticos onde era necessário uma grande quantidade de ajustes para se obter resultados satisfatórios.

PROBLEMA MODELO

Tem-se para um problema genérico de Elasticidade Linear

$$Lu = q \rightarrow S^T D S u - q = 0 \quad (1)$$

$u = \bar{u}$ no contorno

$S \rightarrow$ Operador linear

$D \rightarrow$ Matriz de elasticidade

$$u_h = N\bar{u} : \quad \varepsilon_h = S N\bar{u} \quad \Rightarrow \quad \sigma_h = D \varepsilon_h \quad (2)$$

As soluções aproximadas u_h, σ_h diferem dos valores exatos u e σ (modelo analítico). A diferença é o erro de discretização. Logo

$$e = u - u_h \quad (3)$$

$$e_\sigma = \sigma - \sigma_h \quad (4)$$

Uma das medidas mais comuns é a *norma de energia*, descrita para um problema de Elasticidade Plana como

$$\|e\| = \left(\int_{\Omega} (e_\sigma)^T D^{-1} (e_\sigma) d\Omega \right)^{1/2} \quad (5)$$

onde

$$\|e\|^2 = \sum_{i=1}^m \|e\|_i^2$$

$m \Rightarrow n^2$ de elementos

$\|\cdot\| \Rightarrow$ norma calculada para cada elemento

Para uma malha ótima, busca-se fazer estas contribuições $\|e\|_i$ iguais para todos os elementos. Posteriormente, calcula-se a porcentagem relativa η do erro total e o índice de efetividade dos estimadores. Temos então

$$\eta = \frac{\|e\|}{\|E\|} 100\% \quad (6)$$

onde

$\|E\| \Rightarrow$ energia potencial total

$\|e\| \Rightarrow$ erro total do modelo

A partir da medida de η , avalia-se a qualidade da discretização.

Após a análise final ter sido completada, a seguinte condição deve ser satisfeita sobre todo o domínio

$$\eta \leq \bar{\eta} \quad (7)$$

Pode-se definir $\bar{\eta}$ como sendo o erro máximo permissível.

ESTIMADOR DE ERRO

Zienkiewicz e Zhu¹, propuseram um estimador que consiste em aproximar o campo de tensões exatas por um campo de tensões contínuas suavizadas. Uma vez contínuo o campo de tensões, pode-se obter uma estimativa da norma de energia do erro.

Estimador Z^2 na forma original

O estimador de erro proposto¹ se baseia na suavização das derivadas descontínuas da solução, projetando-as sobre as funções de forma N , as quais interpolam a solução aproximada, satisfazendo assim as condições de contorno do problema. Logo, é definido um campo de derivadas suavizadas σ^L mais exato do que a solução pós-processada σ_h .

A técnica descrita será aplicada a nível de elemento (local), já que a utilização de uma projeção global torna o processo bastante dispendioso.

Na análise estrutural, σ^L é um campo de tensões que é interpolado pela mesma função de forma dos deslocamentos e σ_h representa as tensões obtidas diretamente da solução em elementos finitos.

$$\sigma^L = N\bar{\sigma}^L \quad (8)$$

$$\sigma_h = (DSN)\bar{u} \quad (9)$$

Pelo método de projeção local

$$\int_{\Omega} N^T (\sigma^L - \sigma_h) d\Omega_e = 0 \quad (10)$$

Substituindo (8) e (9) em (10), tem-se

$$\int_{\Omega_e} N^T (N \bar{\sigma}^L - D S N \bar{u}) d\Omega_e = 0 \quad (11)$$

Logo, as tensões nodais extrapoladas (projeção de σ_h) serão

$$\bar{\sigma}^L = A^{-1} \int_{\Omega_e} N^T \sigma_h d\Omega_e \quad (12)$$

$$A = \int_{\Omega_e} N^T N d\Omega_e \quad (13)$$

Com as tensões nodais $\bar{\sigma}^L$ já determinadas, calcula-se em cada nó a média aritmética dos valores fornecidos.

Na norma de energia, tem-se

$$\|\bar{e}\|^L = \left(\int \left(e_{\sigma}^L \right)^T D^{-1} \left(e_{\sigma}^L \right) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

O Estimador Z^2 modificado

O método de projeção local descrito na seção anterior tem mostrado ser de grande eficiência e aplicabilidade. Entretanto, este método é muito impreciso para valores pares do polinômio de aproximação p ($p=2,4,\dots$).

Uma expansão polinomial, (singular e contínua) da função que descreve as derivadas é usada sobre um grupo de elementos adjacentes aos nós nos quais a recuperação é desejada. Esta expansão será feita para ajustar localmente os pontos superconvergentes pelo método dos *mínimos quadrados*.

O objetivo da recuperação das derivadas é encontrar parâmetros nodais tais que o campo de tensões contínuo suavizado σ^* (definido pela função base N e pelos parâmetros nodais $\bar{\sigma}^*$) seja mais exato do que σ_h . Então, define-se $\bar{\sigma}^*$ como pertencendo à expansão polinomial σ_p^* , cuja ordem completa p é a mesma da função base N , que é definida sobre um grupo composto de todos os elementos contendo um nó comum. Tem-se então

$$\sigma_p^* = P \mathbf{a} \quad (15)$$

Para elementos triangulares planos e expansão linear, tem-se

$$P = [1, x, y] \quad (16)$$

e para expansão quadrática

$$P = [1, x, y, x^2, xy, y^2] \quad (17)$$

A determinação dos parâmetros desconhecidos $\mathbf{a}$ da expansão dada pela equação (15) é feita pelo ajuste dos mínimos quadrados para um conjunto de pontos superconvergentes do grupo considerado.

Para isto, minimiza-se

$$F(a) = \sum_{i=1}^n \left(\sigma_h(x_i, y_i) - \sigma_p^*(x_i, y_i) \right)^2 = \sum_{i=1}^n (\sigma_h(x_i, y_i) - P(x_i, y_i)a)^2 \quad (18)$$

onde (x_i, y_i) são as coordenadas de um grupo de pontos amostrais. Assim, n é o número total de pontos amostrais definido como

$$n = mk \quad (19)$$

Na equação acima, m é o número de elementos do grupo e k é o número de pontos amostrais sobre cada elemento. A condição de minimização de $F(a)$ implica que a satisfaz

$$\sum_{i=1}^n P^T(x_i, y_i) P(x_i, y_i) a = \sum_{i=1}^n P^T(x_i, y_i) \sigma_h(x_i, y_i) \quad (20)$$

que pode ser descrito na forma matricial como

$$a = A^{-1}b \quad (21)$$

onde

$$A = \sum_{i=1}^n P^T(x_i, y_i) P(x_i, y_i) \quad (22)$$

$$b = \sum_{i=1}^n P^T(x_i, y_i) \sigma_h(x_i, y_i) \quad (23)$$

Na norma de energia, tem-se

$$\|\bar{e}\|^* = \left(\int (e_\sigma^*)^T D^{-1} (e_\sigma^*) d\Omega \right)^{1/2} \quad (24)$$

Considerando elementos triangulares lineares (3 nós), ambas as derivadas recuperadas σ^L e σ^* são superconvergentes ($0(h^{p+1})$) e estão localizadas entre a descontinuidade da solução σ_h .

Utilizando elementos triangulares quadráticos (6 nós), a convergência de σ^L tem a taxa padrão de $0(h^2)$, pois apesar dos valores nodais recuperados estarem localizados entre a descontinuidade de σ_h , não são superconvergentes. Isto significa que uma simples média dos valores descontínuos da solução em elementos finitos não resultará em valores nodais superconvergentes para elementos quadráticos como em elementos lineares. Entretanto, σ^* mostra ultraconvergência da ordem de ($0(h^4)$).

A superconvergência ocorre com o novo estimador para os nós internos e do contorno, mas o fenômeno da ultraconvergência ($0(h_{p+2})$) é limitado somente aos nós internos do domínio. Deve-se observar que a utilização da técnica modificada para o contorno exige um ajuste, pois não é possível definir um grupo de elementos

envolvendo completamente o nó. Assim sendo, os valores de tensões suavizados são obtidos utilizando um grupo interno de elementos, afetando assim a qualidade dos resultados.

A qualidade do estimador de erro $\|\bar{e}\|^R$ é medida pelo seu índice de efetividade dado pela razão entre o erro estimado e o erro exato, isto é

$$\theta = \frac{\|\bar{e}\|^R}{\|e\|} \quad (25)$$

O índice R denota um dos procedimentos de recuperação descritos anteriormente.

EXEMPLO

Neste exemplo, tem-se uma viga bi-apoiada de seção retangular delgada, submetida a uma carga uniformemente distribuída de intensidade q , como mostra a Figura 1

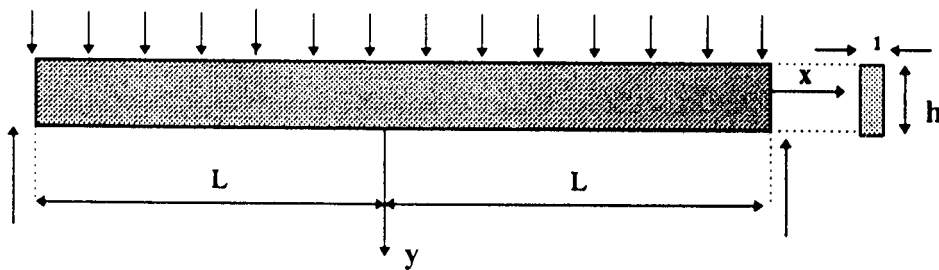


Figura 1. Exemplo de aplicação

Dados

$$I = 83333.33 \text{ cm}^4$$

$$E = 21000 \text{ kN/cm}^2$$

$$L = 500 \text{ cm}$$

$$h = 2c = 100 \text{ cm}$$

$$q = 0.1 \text{ kN/cm}$$

A seguir faz-se uma análise dos valores nodais recuperados. Taxas médias de convergência das componentes de tensões foram calculadas em alguns pontos do modelo discreto. Após refinamentos uniformes, três níveis de malhas foram obtidos a partir de uma malha inicial com 32 elementos. Para nós internos (pertencentes ao domínio), tem-se os resultados mostrados nas Tabelas I a IV.

Em elementos triangulares quadráticos pode-se observar que as taxas médias de convergência das tensões nodais recuperadas pelo procedimento modificado são no mínimo iguais a quatro (ultraconvergentes). Já pela técnica de projeção local verifica-se taxa padrão de convergência.

Em elementos triangulares lineares, taxas médias superconvergentes ($0(h^2)$) dos valores nodais foram encontradas para os dois métodos de suavização considerados. Nas

h	$ \sigma_x - \sigma_x^L $	$ \sigma_x - \sigma_x^* $	$ \sigma_y - \sigma_y^L $	$ \sigma_y - \sigma_y^* $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^L $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^* $
1/2	.13439E1	.13439E1	.23452E-1	.23452E-1	.30165E-1	.30165E-1
1/4	.46726	.46726	.81382E-2	.81382E-2	.10467E-1	.10467E-1
1/8	.12946	.12946	.22531E-2	.22531E-2	.28980E-2	.28980E-2
Taxa	2	2	2	2	2	2

Tabela I. Taxa de convergência dos valores nodais recuperados no ponto de coordenada (125.0,25.0) para elementos de 3 nós

h	$ \sigma_x - \sigma_x^L $	$ \sigma_x - \sigma_x^* $	$ \sigma_y - \sigma_y^L $	$ \sigma_y - \sigma_y^* $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^L $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^* $
1/2	.22846E-1	.20390E-2	.98273E-3	.23167E-3	.10918E-1	.34114E-3
1/4	.64417E-2	.81568E-4	.45068E-3	.33840E-4	.27870E-2	.70209E-4
1/8	.16467E-2	.51059E-5	.10405E-3	.57588E-6	.76633E-3	.15598E-5
Taxa	2	4	2	4	2	4

Tabela II. Taxa de convergência dos valores nodais recuperados no ponto de coordenada (125.0,25.0) para elementos de 6 nós

h	$ \sigma_x - \sigma_x^L $	$ \sigma_x - \sigma_x^* $	$ \sigma_y - \sigma_y^L $	$ \sigma_y - \sigma_y^* $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^L $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^* $
1/2	.36759E-1	.36759E-1	.39413E-1	.39413E-1	.66472E-1	.66472E-1
1/4	.12753E-1	.12753E-1	.13664E-1	.13664E-1	.23065E-1	.23065E-1
1/8	.35310E-2	.35310E-2	.37832E-2	.37832E-2	.63858E-2	.63858E-2
Taxa	2	2	2	2	2	2

Tabela III. Taxa de convergência dos valores nodais recuperados no ponto de coordenada (187.5,0.0) para elementos de 3 nós

h	$ \sigma_x - \sigma_x^L $	$ \sigma_x - \sigma_x^* $	$ \sigma_y - \sigma_y^L $	$ \sigma_y - \sigma_y^* $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^L $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^* $
1/2	.29066E-1	.11577E-3	.28903E-3	.14469E-3	.10706E-1	.50645E-3
1/4	.73166E-2	.37932E-5	.66919E-5	.33474E-5	.29037E-2	.13013E-4
1/8	.18498E-2	.64318E-8	.56382E-5	.13234E-7	.76662E-3	.33525E-7
Taxa	2	7	3	7	2	7

Tabela IV. Taxa de convergência dos valores nodais recuperados no ponto de coordenada (187.5,0.0) para elementos de 6 nós

Tabelas de V a VIII tem-se os resultados obtidos para as tensões nodais recuperadas em nós do contorno.

Para elementos de 6 nós do contorno, a maioria das componentes (tensões)

suavizadas σ^* convergiu a uma taxa média superconvergente $O(h^3)$, onde a ordem da convergência variou entre 1 e 3. Utilizando a técnica de projeção, as componentes convergiram à uma taxa padrão de $O(h^2)$.

h	$ \sigma_x - \sigma_x^L $	$ \sigma_x - \sigma_x^* $	$ \sigma_y - \sigma_y^L $	$ \sigma_y - \sigma_y^* $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^L $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^* $
1/2	.3585572E1	.3309266E1	.12129833	.406859E-2	.36954288	.145645E-1
1/4	.1507971E1	.1309487E1	.896285E-1	.217121E-2	.2622935	.749477E-2
1/8	.56325196	.45385292	.503184E-1	.706270E-3	.14636914	.241289E-2
Taxa	1	1	1	1	1	1

Tabela V. Taxa de convergência dos valores nodais recuperados no ponto de coordenada (0.0,-50.0) para elementos de 3 nós

h	$ \sigma_x - \sigma_x^L $	$ \sigma_x - \sigma_x^* $	$ \sigma_y - \sigma_y^L $	$ \sigma_y - \sigma_y^* $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^L $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^* $
1/2	.383140E-2	.314212E-1	.125112E-2	.215480E-3	.631406E-2	.156626E-1
1/4	.226095E-2	.381851E-2	.544150E-3	.186221E-3	.181356E-2	.206308E-2
1/8	.654876E-3	.415522E-3	.148626E-3	.746786E-4	.474766E-3	.276178E-3
Taxa	2	3	2	1	2	3

Tabela VI. Taxa de convergência dos valores nodais recuperados no ponto de coordenada (0.0,-50.0) para elementos de 6 nós

h	$ \sigma_x - \sigma_x^L $	$ \sigma_x - \sigma_x^* $	$ \sigma_y - \sigma_y^L $	$ \sigma_y - \sigma_y^* $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^L $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^* $
1/2	.3344609E1	.2982628E1	.12331742	.303198E-1	.42810470	.813061E-1
1/4	.1392867E1	.1165531E1	.819203E-1	.112809E-1	.29406088	.388174E-1
1/8	.51394942	.39704870	.435280E-1	.322839E-2	.16150184	.156045E-1
Taxa	1	1	1	2	1	1

Tabela VII. Taxa de convergência dos valores nodais recuperados no ponto de coordenada (-125.0,-50.0) para elementos de 3 nós

h	$ \sigma_x - \sigma_x^L $	$ \sigma_x - \sigma_x^* $	$ \sigma_y - \sigma_y^L $	$ \sigma_y - \sigma_y^* $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^L $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^* $
1/2	.269132E-1	.408892E-1	.233543E-2	.385349E-2	.152939E-1	.167064E-1
1/4	.804109E-2	.616399E-2	.806685E-3	.768238E-3	.409177E-	.231617E-2
1/8	.217636E-2	.102757E-2	.235646E-3	.175305E-3	.109328E-2	.338011E-3
Taxa	2	3	2	2	2	3

Tabela VIII. Taxa de convergência dos valores nodais recuperados no ponto de coordenada (-125.0,-50.0) para elementos de 6 nós

Já em elementos triangulares lineares, taxas médias $0(h^1)$ dos valores nodais foram encontradas para σ^L (projeção local), e para σ^* , as taxas variaram entre $0(h^1)$ e $0(h^2)$.

A análise da convergência da solução recuperada na norma de energia é mostrada nas Tabelas IX e X. Os valores obtidos mostram convergência padrão para a solução aproximada pelo Método dos Elementos Finitos.

h	$\ u - u_h\ _E$	$\ u - u^L\ _E$	$\ u - u^*\ _E$
1/2	.42486697E1	.31132785E1	.29047306E1
1/4	.25063282E1	.11277103E1	.10280371E1
1/8	.13194334E1	.32946578E1	.28991308E1
Taxa	1	1.5	1.5

Tabela IX. Convergência da solução obtida pelo método dos elementos finitos e das soluções recuperadas para elementos de 3 nós

h	$\ u - u_h\ _E$	$\ u - u^L\ _E$	$\ u - u^*\ _E$
1/2	.10700786	.4990888E-1	.18996195E-1
1/4	.29352225E-1	.12585315E-1	.30810543E-2
1/8	.76694342E-2	.32319160E-2	.54101536E-3
Taxa	2	2	2.5

Tabela X. Convergência da solução obtida pelo método dos elementos finitos e das soluções recuperadas para elementos de 6 nós

Para elementos lineares, as soluções recuperadas apresentam taxas de convergência de ordem $0(h^{1.5})$. Entretanto, para elementos quadráticos, a solução recuperada pela técnica de projeção local apresentou taxa de convergência igual a $0(h^2)$. Para o novo procedimento de recuperação, a solução convergiu segundo uma taxa de $0(h^{2.5})$.

O desempenho das estimativas empregadas na computação do erro de discretização das malhas utilizadas é verificada nos gráficos das Figuras 2 e 3 através do índice de efetividade θ definido anteriormente. Para elementos lineares, os índices globais de efetividade dos estimadores considerados têm praticamente os mesmos valores correspondentes aos níveis considerados de refinamento, e convergem para a unidade ($\theta \rightarrow 1$). Já para elementos quadráticos, os índices de efetividade do estimador Z^2 modificado variam em torno da unidade, e para o Z^2 original, θ se aproxima de 0.5.

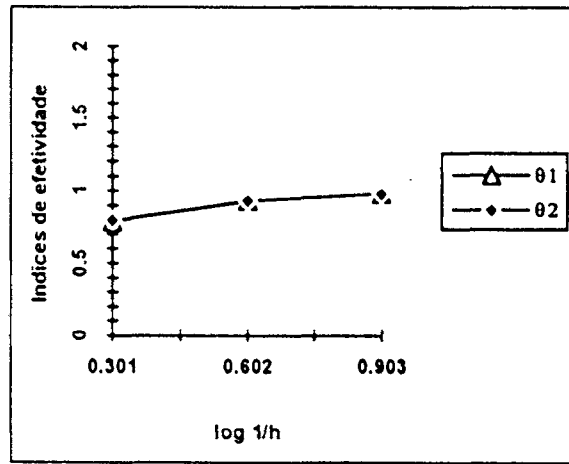


Figura 2. Convergência dos índices de efetividade θ_1 (estimador Z^2 - forma original) e θ_2 (estimador Z^2 - modificado) para elementos triangulares de três nós

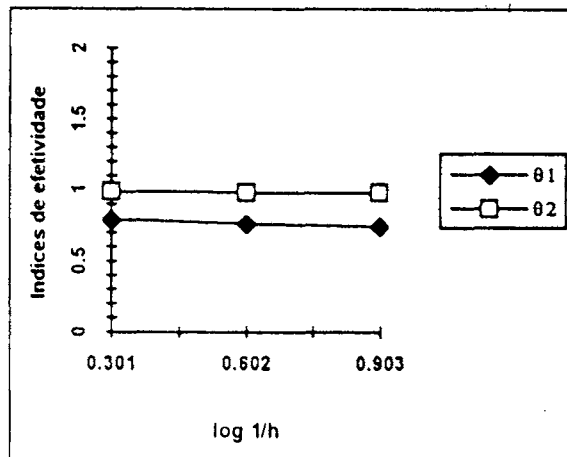


Figura 3. Convergência dos índices de efetividade θ_1 (estimador Z^2 - forma original) e θ_2 (estimador Z^2 - modificado) para elementos triangulares de seis nós

CONCLUSÕES

Com os resultados obtidos, pôde-se comprovar numericamente o fenômeno da superconvergência ($O(h^{p+1})$) das derivadas nodais e a eficiência do estimador, sendo que este fenômeno, no entanto, não se verificou em todos os casos.

Para elementos triangulares de 6 nós, utilizando-se o estimador padrão foram encontradas taxas médias de ($O(h^3)$) para a maioria das componentes de tensões em nós do contorno; e para os nós internos, o valor mínimo obtido para as taxas foi

ultraconvergente da ordem de $(0(h^4))$. Pela técnica de projeção, quase todas as tensões nodais convergiram à uma taxa média padrão de $(0(h^2))$.

Já em elementos de 3 nós, todas as componentes de tensões (para os nós internos) obtiveram taxas médias superconvergentes de $(0(h^2))$ utilizando os dois métodos de recuperação. A taxa de convergência das tensões no contorno foi de $0(h)$, também para ambos os métodos considerados.

Os valores para o índice de efetividade do estimador Z^2 *original* e *modificado* em aproximações lineares foram semelhantes aos computados por Zienkiewicz e Zhu^{3,4}, fornecendo estimativas razoáveis para o erro de discretização. Em aproximações quadráticas, a técnica de projeção local empregada na suavização das derivadas descontínuas resultou em subestimação do erro; entretanto, a efetividade do estimador Z^2 *modificado* manteve-se em torno da unidade.

Assim, o exemplo numérico mostrado neste trabalho ilustra a boa qualidade do estimador Z^2 na forma de energia para malhas de elementos triangulares lineares e quadráticos.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao suporte financeiro da FAPEMIG (processo TEC 207/90) e ao Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC/CNPQ) pela utilização do programa SDP.

REFERÊNCIAS

1. O.C. Zienkiewicz and J.Z. Zhu, "A simple error estimator and procedures for practical engineering analysis", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. **24**, pp. 337–357, (1987).
2. O.C. Zienkiewicz and J.Z. Zhu, "The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique.", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. **33**, pp. 1331–1364, (1992).
3. O.C. Zienkiewicz and J.Z. Zhu, "The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2: Error estimates and adaptivity.", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. **33**, pp. 1365–1382, (1992).
4. S.P. Timoshenko e J.N. Goodier, "Teoria da Elasticidade", 3ª edição, Guanabara Dois S/A, (1980).
5. J.P. Gouveia, "SDP - Sistema para Desenvolvimento de Programas Baseados no Método dos Elementos Finitos", *Anais do IX COBEM*, pp. 561–564, (1987).