

Detección de anomalías 2D por un método de inversión tomográfica por mínima dispersión

Carlos Adolfo Calvo

Departamento de Matemática Aplicada
Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de San Juan
Libertador Genral San Martin 1109 (oeste)
5400 Capital, San Juan, Argentina
Tel.: 54 264 421 1700; Fax: 54 264 420 0289
e-mail: ccalvo@unsj.edu.ar

Armando Luis Imhof

Instituto Geofísico Sismológico Volponi
Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales
Universidad Nacional de San Juan
Ruta 12 Km17
5413 Rivadavia, San Juan, Argentina
Tel./Fax: 54 264 494 5015
e-mail: aimhof@unsj.edu.ar

Resumen

Existen numerosos métodos de inversión por la técnica de tomografía en tiempo de viaje. En este trabajo se desarrolló un procedimiento original para la determinación de anomalías convexas, homogéneas e isotrópicas en un medio con las mismas dos últimas características. Los emisores, receptores y la inclusión ubicados en forma arbitraria en un dominio bi-dimensional. Se hace uso de un criterio de mínima dispersión que conduce a un sistema lineal de ecuaciones. La experimentación numérica muestra la validez del método en lo que respecta a la ubicación, forma y tamaño de la anomalía.

Palabras clave: *tomografía, inversión sísmica, dispersión, sistemas lineales.*

2D ANOMALY DETECTION BY A TOMOGRAPHIC INVERSION METHOD USING MINIMUM DISPERSION

Summary

There exist several inversion methods by the travel time tomography technique. In this work it was developed an original procedure to invert convex, homogeneous and isotropic anomalies inside a medium with the same two last characteristics. The sources, receivers and the inclusion are located arbitrarily in a bi-dimensional domain. The method takes usage of a minimum dispersion criteria that leads to a linear equation system. Numeric experimentation shows the validity of the procedure respect to location, form and size of the anomaly.

Keywords: *tomography, seismic inversion, dispersion, linear system.*

INTRODUCCIÓN

Mediante la técnica tomográfica se pretende determinar la forma y ubicación de una inclusión (anomalía) inserta en un medio que la contiene. Se considera medio homogéneo e isótropo, por lo cual los rayos que se propagan son rectos. Aunque la presencia de inclusiones produce refracciones (lo que altera la hipótesis de homogeneidad y linealidad), el error cometido no es grande¹. Se deberá tener en cuenta sin embargo, que a mayor contraste de velocidades entre el medio base (V_1) y la inclusión (V_2), mayor será la diferencia entre la superficie real y la modelada por cualquier método de inversión². Además, a partir de cierta profundidad la hipótesis de linealidad y, por lo tanto, de isotropía y homogeneidad se cumple, por lo que la aplicación práctica del método es válida.

El tiempo de viaje (i.e. primeras llegadas) de estos rayos resulta una característica de estas ondas y la alteración de este tiempo es un indicador de la presencia de una anomalía. Los planteos generales de solución discretizan el dominio en pequeñas celdas rectangulares denominadas píxeles³ planteando las ecuaciones de tiempo de viaje recorridos por los rayos, siendo las incógnitas la velocidad en cada píxel. Se llega a un sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$, cuyo segundo miembro son los tiempos medidos experimentalmente; \mathbf{A} es la matriz de distancia y \mathbf{x} es la lentitud (inversa de la velocidad), que es la incógnita buscada. Se trata entonces de un tipo de problema inverso. Este sistema subdeterminado (más incógnitas que ecuaciones) requiere incorporar información adicional para su solución. A partir de aquí los métodos difieren, sin existir uno considerado superior. Algunos son: Método de Ockham, MLS (minimum length solution), DLSS (damped least-squares solution), RLSS (regularized least-squares solution), SVD (descomposición en valores singulares), etc.⁴. En un trabajo anterior⁵ se intentó un enfoque nuevo, utilizando un principio variacional logrando buenos resultados. En la presente investigación se propone un esquema relacionado con técnicas de mínimos cuadrados que mejora tiempos de cálculo y robustez con una implementación computacional más sencilla.

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Dado un medio homogéneo con velocidad de propagación V_1 , con una inclusión del mismo tipo en su interior con velocidad V_2 , se pretende modelar (determinar su forma y ubicar) la misma mediante la técnica tomográfica por tiempo de viaje⁶. Los tiempos de primeras llegadas de los rayos originados en los emisores s_i y captados en los receptores r_j , son alterados por la presencia de la inclusión. Interpretar esta alteración permitirá modelar la misma (Figura 1).

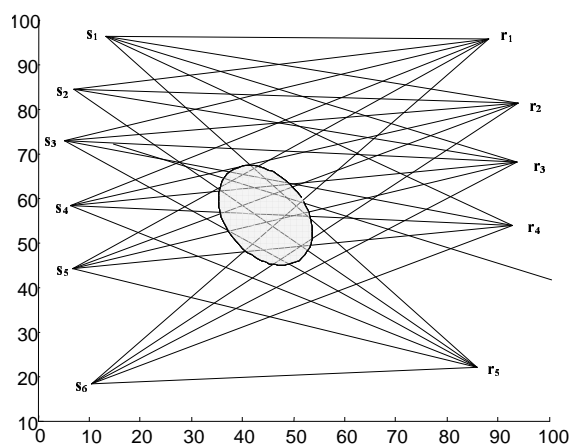


Figure 1. Emisores s_i . Receptores r_j . Inclusión de forma elíptica

CARACTERÍSTICAS

La ubicación de los emisores y los receptores es arbitraria en una región plana; tratándose por tanto de un problema bidimensional. Tanto el medio base como la inclusión son homogéneos lo que supone propagación de rayos rectos con velocidades V_1 y V_2 , respectivamente. Además la última es de forma convexa, pudiéndose sustituir por la menos restrictiva condición que un rayo corte a lo sumo en dos puntos al contorno de la misma, excepto en el punto de tangencia.

FORMULACIÓN DEL MÉTODO

Como primera medida a fin de definir la forma de la anomalía, se debe determinar cuáles rayos la atraviesan, así como ubicar las coordenadas de los puntos de ingreso E y salida S de los mismos.

Como información del problema se conocen la ubicación de los emisores s y receptores r y los tiempos de viaje entre ellos. También son datos las velocidades en cada uno de los medios V_1 y V_2 .

Para cada par emisor s_i y receptor r_j corresponde un rayo $i-j$ con tiempo de viaje T_{ij} y distancia total recorrida D_{ij} ; mientras que en el interior de la anomalía la distancia de viaje será d_{ij} . (Figura 2a)

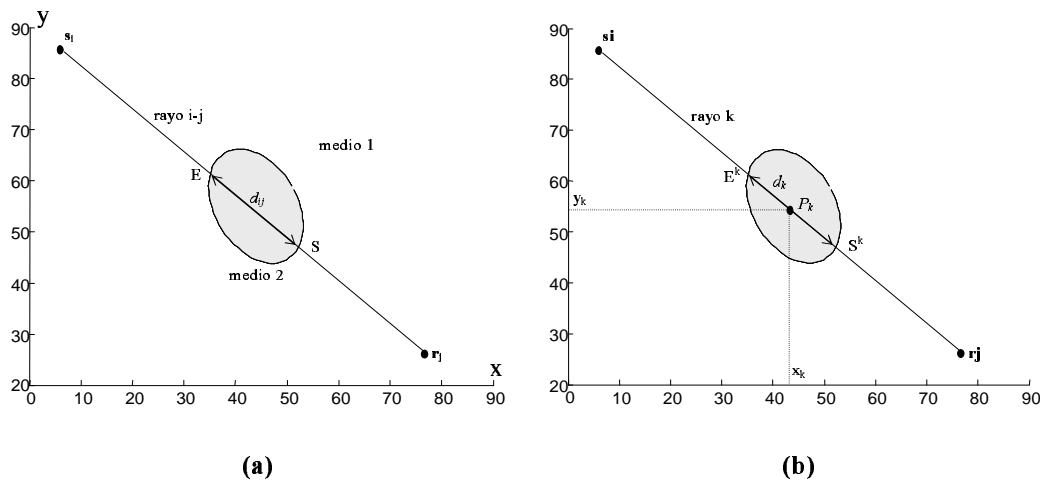


Figure 2. (a): Trayectoria de un rayo. Puntos E y S de entrada/salida a la inclusión (b): El rayo k determina d_k dentro de la anomalía. P_k punto medio del segmento

Cada uno de estos escalares conforman una matriz:

$$T = \{T_i\} \quad D = \{D_{ij}\} \quad D_{ij} = \|s_i - r_j\| \quad d = \{d_{ij}\} \quad i = 1..n, j = 1..m$$

Se descompone el tiempo de viaje en el recorrido externo (V_1) e interno a la anomalía (V_2):

$$T_{ij} = \frac{(D_{ij} - d_{ij})}{V_1} + \frac{d_{ij}}{V_2} \quad (1)$$

despejando d_{ij}

$$d_{ij} = (T_{ij} - \frac{D_{ij}}{V_1}) (\frac{V_1 V_2}{V_1 - V_2}) \quad (2)$$

Expresando en notación matricial

$$\mathbf{d} = (\mathbf{T} - \frac{\mathbf{D}}{V_1}) (\frac{V_1 V_2}{V_1 - V_2}) \quad (3)$$

Es importante notar que la matriz \mathbf{d} ($n \times m$) tiene elementos $d_{ij} > 0$ para aquellos rayos i - j que cruzan a la inclusión. Los valores próximos a cero (p. ej. menores al 3% del máximo de los d_{ij}) se anulan. Esto tiene mucha aplicación práctica cuando los datos (i.e. errores en la estimación de las primeras llegadas) presentan ruido, y permitirán seleccionar aquellos tiempos que con seguridad corresponden a rayos que atraviesan la inclusión.

Se seleccionan los elementos no nulos de \mathbf{d} , renombrando a estos rayos con k ($k=1..N$) y denominando (x_k, y_k) a la coordenada de P_k , punto medio de dicho segmento de longitud d_k . (Figura 2b).

La ubicación de los segmentos (o los puntos E y S) queda unívocamente determinada por los x_k , (los y_k dependen de estas abscisas). Entonces, la forma y ubicación de la anomalía se resuelve encontrando sólo estos valores.

Para la determinación de dichos puntos se desarrollaron dos métodos:

a) Variacional: se determina el mínimo de la funcional *longitud* del contorno de la anomalía^{5,7}

b) Mínima dispersión: Se calcula el mínimo de la función *dispersión*.

El primero es un método iterativo que requiere valores iniciales de x_k ; el segundo (a desarrollarse en este trabajo) es un método de mínimos cuadrados directo reducido a resolver un sistema lineal.

PRINCIPIO DE LA DISPERSIÓN MÍNIMA

Dado el conjunto P_k ; una medida de la dispersión de los mismos es⁸

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N w_k (x_k - \bar{x})^2 + \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N w_k (y_k - \bar{y})^2 \quad (4)$$

Donde σ es la desviación estándar, $w_k = \frac{d_k}{L}$ son los pesos, $L = \sum_{k=1}^N d_k$, $\bar{x} = \sum_{j=1}^N w_j x_j$, $\bar{y} = \sum_{j=1}^N w_j y_j$ coordenadas del centro de gravedad.

Puesto que se conoce la trayectoria recta del rayo k ($y = m_k x + b_k$), σ^2 resulta ser sólo función de x_k : $\sigma^2 = \sigma^2(x_1, x_2, \dots, x_N)$

Distintas formas de la inclusión, a los que corresponden diferentes valores de la dispersión, se generan al deslizar los segmentos sobre los rayos k . En la Figura 3 se observa que al alejarse de la posición óptima, la dispersión de los P_k aumenta. Por ello, se adopta el siguiente criterio: *La forma de la anomalía corresponde a la dispersión mínima de los puntos P_k*

Las ecuaciones $\frac{\partial \sigma^2}{\partial x_k} = 0$ conducen a la obtención de los x_k .

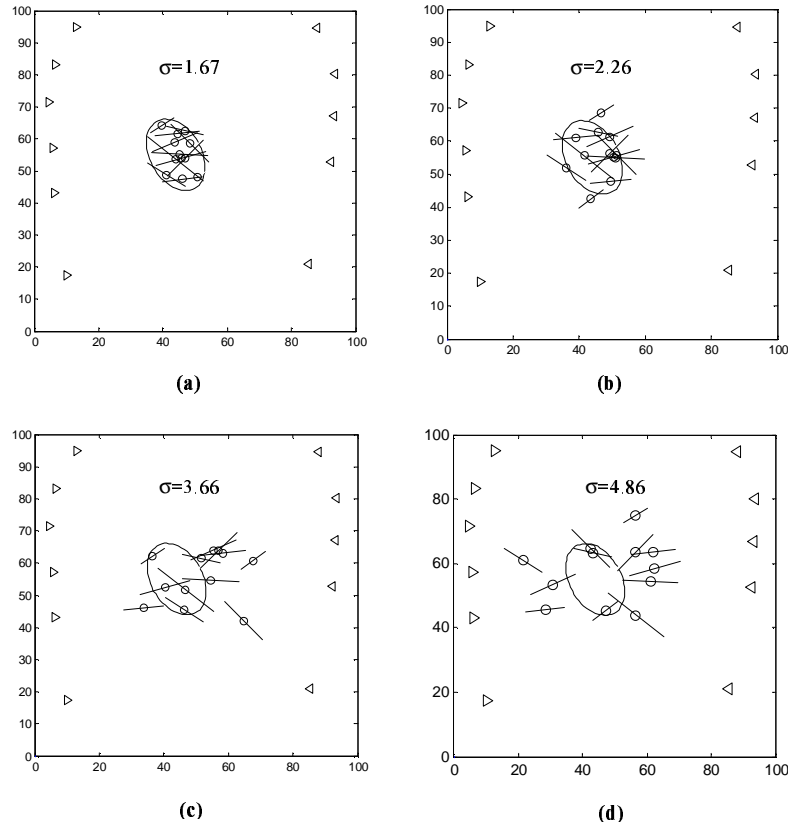


Figure 3. (a)-(d) Inclusión elíptica, puntos P_k y segmentos para diferentes casos de aumento de la dispersión

DESARROLLO DEL PROCESO DE DERIVACIÓN

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N w_k (x_k - \bar{x})^2 + \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N w_k (y_k - \bar{y})^2 \quad (5)$$

$$\text{Siendo } \frac{\partial x_k}{\partial x_i} = \frac{\partial y_k}{\partial y_i} = \delta_{ki} \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{y}}{\partial y_i} = w_i \quad y_i = m_i x_i + b_i \quad \frac{\partial y_i}{\partial x_i} = m_i$$

δ_{ki} : delta de Kroneker

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial x_i} = 0 = \frac{2}{N-1} \sum_{k=1}^N w_k (x_k - \bar{x}) (\delta_{ki} - w_i) + \frac{2}{N-1} \sum_{k=1}^N w_k (y_k - \bar{y}) (\delta_{ki} - w_i) m_i \quad (6)$$

Analizamos los términos del segundo miembro de (6)

$$(x_k - \bar{x}) = \sum_{j=1}^N \delta_{kj} x_j - \sum_{j=1}^N w_j x_j = \sum_{j=1}^N (\delta_{kj} - w_j) x_j \quad (7a)$$

$$(y_k - \bar{y}) = \sum_{j=1}^N (\delta_{kj} - w_j) y_j = \sum_{j=1}^N (\delta_{kj} - w_j) (m_j x_j + b_j) \quad (7b)$$

reemplazando la ecuación (7a-b) en ec. (6) e intercambiando el orden de las sumatorias:

$$0 = \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=1}^N (\delta_{kj} - w_j) w_k (\delta_{ki} - w_i) \right) x_j + \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=1}^N (\delta_{kj} - w_j) w_k (\delta_{ki} - w_i) \right) m_i (m_j x_j + b_j) \quad (8)$$

agrupando en el primer miembro los términos que acompañan a x_j

$$\sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=1}^N (\delta_{kj} - w_j) w_k (\delta_{ki} - w_i) \right) (1 + m_i m_j) x_j = -m_i \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=1}^N (\delta_{kj} - w_j) w_k (\delta_{ki} - w_i) \right) b_j$$

denominando:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^N (\delta_{kj} - w_j) w_k (\delta_{ki} - w_i) \quad a_{ij} = c_{ij} (1 + m_i m_j) \quad f_i = -m_i \sum_{j=1}^N c_{ij} b_j$$

se obtiene finalmente el sistema lineal ($N \times N$)

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} x_j = f_i \text{ o, en forma matricial}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (9)$$

La resolución del sistema lineal (9) permite conocer los x_k y de esta forma las coordenadas de los puntos de entrada E^k y salida S^k del rayo k :

$$\begin{aligned} x_E &= x_k - \frac{d_k}{2} \cos(\varphi_k) & y_E &= y_k - \frac{d_k}{2} \sin(\varphi_k) & E^k &= (x_E, y_E) \\ x_S &= x_k + \frac{d_k}{2} \cos(\varphi_k) & y_S &= y_k + \frac{d_k}{2} \sin(\varphi_k) & S^k &= (x_S, y_S) \\ y &= m_k x + b_k & \varphi_k &= \arctan(m_k) \end{aligned}$$

Los puntos E^k y S^k , $k=1 \dots N$ determinan el contorno aproximado de la anomalía (Figura 4a). También puede ser ajustado por una curva cerrada (p. ej. elipse, Figura 4b)

VALIDACIÓN NUMÉRICA

Simulación de resultados

Para simular resultados se lleva a cabo la construcción de un modelo, según los siguientes pasos:

1) Alrededor de una región base cuadrada ($L \times L$), se realiza una distribución regular de zonas rectangulares y dentro de ellas se ubican los emisores y receptores en forma aleatoria, siguiendo el criterio de alteraciones pequeñas dentro de una distribución aproximadamente regular (Figura 5). Se calculan m_i y b_i para todos los rayos.

2) Ubicación de una elipse (elipse de entrada EE , que simula la anomalía) en la zona rectangular central con parámetros elegidos aleatoriamente: coordenadas (x_c, y_c) de su centro, orientación θ del eje mayor y semiejes a, b con $a > b$

3) Determinación de la matriz \mathbf{d} de distancias de segmentos interiores (ver Anexo), lo que permite calcular w_i .

4) Construcción, usando m_i , b_i y w_i , del sistema lineal $\sum_{j=1}^N a_{ij} x_j = f_i$. Resolución del mismo y determinación de los puntos del contorno de la anomalía. Ajuste con una elipse (elipse de salida, ES), obteniendo: $(x_c^*, y_c^*); q^*; a^*; b^*$.

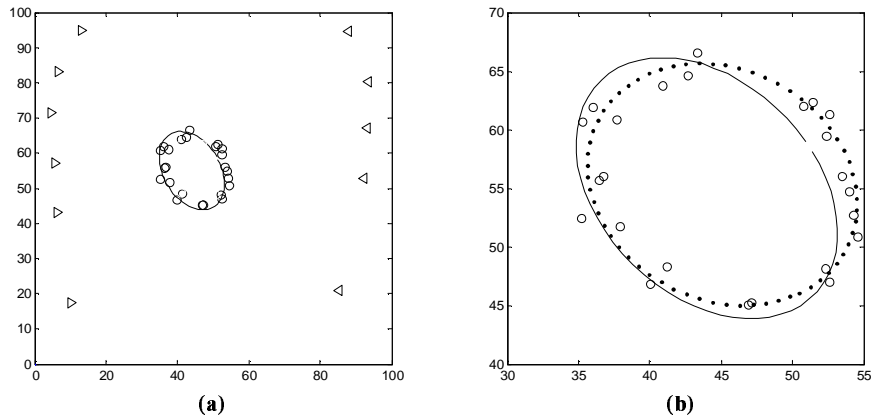


Figure 4. (a): Anomalia de forma elíptica y puntos $E^k P^k$ (b): Anomalia de forma elíptica (línea continua). Puntos $E^k P^k$ (o) y ajuste con una elipse (puntos)

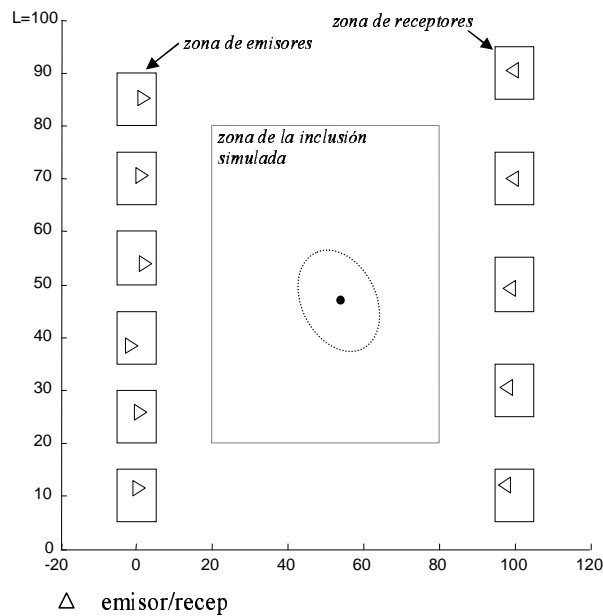


Figure 5. Los emisores y los receptores distribuidos aleatoriamente en zonas rectangulares. El centro de la elipse de entrada ubicada aleatoriamente en la zona rectangular central

Evaluación del modelo

Los parámetros que se eligieron para evaluar la calidad del modelo son aquéllos que tienen en cuenta la capacidad de transmitir errores de los datos (κ) y los que tienen en cuenta las alteraciones de ubicación (δ), forma ($\Delta\theta$ y $\Delta\varepsilon$) y tamaño (ρ) entre las elipses de entrada y de salida (Figura 6), siendo:

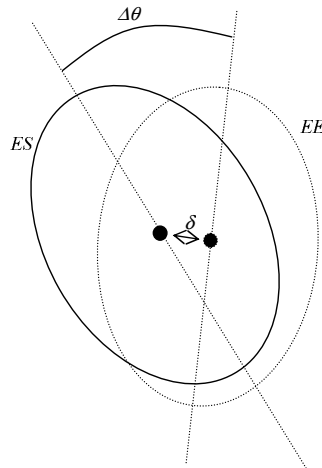


Figure 6. Cambios de ubicación (δ) y de forma ($\Delta\theta$) entre EE (elipse de entrada) y ES (elipse de salida)

- a) $\kappa(A)$ Condición de la matriz **A** del sistema lineal.
- b) $\delta = \sqrt{(x_c - x_c^*)^2 + (y_c - y_c^*)^2}$ separación entre centros
- c) $\Delta\theta = \theta - \theta^*$ cambio de orientación
- d) $\Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon^*$ cambio de excentricidad donde $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$
- e) $\rho = \frac{\pi a^* b^*}{\pi a b}$ relación de áreas entre la elipse de salida y de entrada

Resultados obtenidos

Se simularon 10.000 casos, con los siguientes datos:

Región base cuadrada $L = 100$.

Parámetros utilizados: $8 \leq b \leq a \leq 30$ $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ $30 \leq x_c \leq 70$ $30 \leq y_c \leq 70$.

Los resultados registrados en la Tabla I incluyen valores promedio y máximo, y en la última columna una medida de dispersión de los valores de los parámetros.

Parámetro	Valor promedio	Valor máximo	$V_{.99} (*)$
$K(\mathbf{A})$	11.8	194	39
δ	1.5	5.2	4.8
$\Delta\theta$	$6^\circ 20'$	30°	19°
$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}$	0.26	0.45	0.44
ρ	1.02	1.09	1.04

Tabla I. (*) $V_{.99}$ valor que incluye el 99 % de los casos

La condición relativamente baja ($\kappa \sim 10^1$) indica la pérdida de un dígito de precisión de los datos al resolver el sistema lineal.

La ubicación del centro de la anomalía es muy precisa. Este dato es importante porque indica el punto hacia el que se dirige la exploración.

El cambio en la orientación es apreciable, pero no determinante en la detección de la anomalía.

La disminución notable de la excentricidad, es consecuencia del método utilizado. La dispersión mínima corresponde a formas más cercanas a la circunferencia ($\varepsilon = 0$).

Las áreas de las elipses se mantienen aproximadamente. El pequeño aumento del tamaño, mediante una disminución del eje mayor y aumento del menor magnifica el cambio de excentricidad.

CONCLUSIONES

El método propuesto conduce a un sistema lineal muy bien condicionado. El procedimiento resulta simple, directo, robusto y de fácil implementación computacional. La experimentación numérica con distribuciones aleatorias de emisores, receptores y anomalías para un número alto de simulaciones demuestra la validez del método en lo que respecta a la ubicación, tamaño y orientación de la anomalía y, en menor medida, referido a la forma.

RECONOCIMIENTOS

El presente trabajo de investigación forma parte de los proyectos “Método de Inversión para detección de anomalías 2D en configuraciones genéricas con datos sísmicos” y “Estudio de Propagación de Ondas Sísmicas con Piezocristales en Muestras de Suelos Aluvionales Sometidos a Esfuerzos Efectivos Variables”, subvencionados por la Secretaría de Ciencia y Técnica (CICITCA) de la Universidad Nacional de San Juan.

REFERENCIAS

- 1 J.C. Santamarina y A.C. Reed, “Ray tomography: Errors and error Functions”, *Journal of Applied Geophysics*, Vol **32**, pp. 347-355, (1994).
- 2 J.C. Santamarina, K.A. Klein y M.A. Fam, “*Soils and Waves*”, Ed. John Wiley & Sons, (2001).
- 3 A.L. Imhof, Tesis Doctoral, UNCu, En preparación.
- 4 J.C. Santamarina y D. Fratta “*Discrete Signals and Inverse Problems. An Introduction for Engineers and Scientists*”, Ed. John Wiley & Sons (2005).
- 5 A.L. Imhof y C.A. Calvo, “A variational formulation to image inclusions in 2D travel time tomography”, *Brazilian Journal of Geophysics*, Vol. **21**, N° 3, (2003).
- 6 R.E. Sheriff y L.P. Geldard, “*Exploration Seismology*”, 2nd Edition, Cambridge University Press, NY. p. 575, (1995).
- 7 C.A. Calvo y A.L. Imhof “A Variational Formulations to Image Inclusions”, Scientific Session of MEPhI. Vol. **5**, pp. 156-158, ISBN 5-7262-0555-3, Moscow, (2005).
- 8 D.C. Montgomery y G.C. Runger, “*Probabilidad y Estadística Aplicada a la Ingeniería*”, Ed. Mc Graw Hill, (2004).

Anexo - Determinación del segmento d

La ecuación de la elipse referida a los ejes (X, Y) (Figura 7) es:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

La relación entre sistemas de ejes coordenados:

$$\begin{aligned} x &= x_c + X \cos(\theta) - Y \sin(\theta) \\ y &= y_c + X \sin(\theta) + Y \cos(\theta) \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} X &= (x - x_c) \cos(\theta) + (y - y_c) \sin(\theta) \\ Y &= -(x - x_c) \sin(\theta) + (y - y_c) \cos(\theta) \end{aligned}$$

Remplazando X e Y en (1) se arriba a la ecuación de la elipse referida a (x, y) :

$$A x^2 + B x y + C y^2 + D x + E y + F = 0 \quad (2)$$

Interceptando la elipse de ecuación (2) con la recta.

$$\begin{cases} A x^2 + B x y + C y^2 + D x + E y + F = 0 \\ y = m x + b \end{cases}$$

Se resuelve el sistema mixto eliminando la ordenada y obteniendo:

$$\alpha x^2 + \beta x + \delta = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= A + B m + C m^2 \\ \beta &= B b + 2 C m b + D + E m \\ \delta &= C b^2 + E b + F \end{aligned}$$

Buscando las raíces de (3): x_1 y x_2

En caso de ser reales: $y_1 = m x_1 + b$, $y_2 = m x_2 + b$

Finalmente, d resulta:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

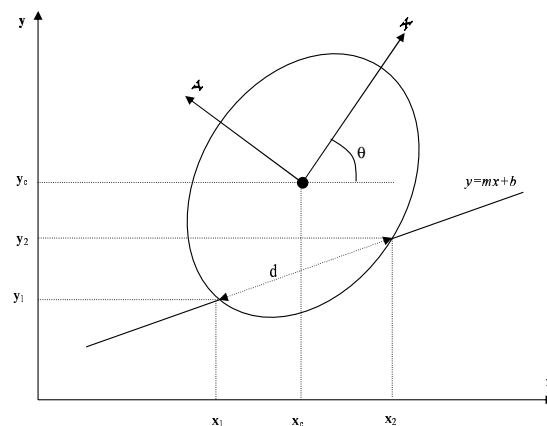


Figure 7. Determinación del segmento de recta interno a una elipse