

Cálculo de inestabilidades de un proceso de solidificación en dominios de simetría cilíndrica: I. Formulación del modelo

Mario Durán^{1,2}

Departamento de Ingeniería Matemática
Universidad de Chile
Casilla 170/3, Santiago 3, Chile
Tel.: 56-2-678 45 86, Fax: 56-2-688 38 21
e-mail: mduran@dim.uchile.cl

Elva Ortega-Torres^{1,2}

Departamento de Matemática
Universidad de Antofagasta
Casilla 170, Antofagasta, Chile
Tel.: 56-55-637 298, Fax: 56-55-637 803
e-mail: eortega@uantof.cl

Roberto Stein¹

Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica
Casilla 306, Santiago 22, Chile
Tel.: 56-2-686 58 16, Fax: 56-2-552 59 16
e-mail: rstein@mat.puc.cl

Resumen

En los procesos de solidificación de aleaciones de metales pueden producirse complejos fenómenos de convección que generan inhomogeneidades en los materiales. A través del estudio de un modelo de solidificación de una aleación binaria, pretendemos dar una mayor y mejor comprensión a una clase de estas inestabilidades. Más precisamente, nos interesamos en estudiar el origen de las llamadas chimeneas de convección, así como de la formación de inhomogeneidades o *freckles*. El modelo matemático que describe la evolución de este proceso está conformado por las ecuaciones de conservación de la masa, momentum y energía para un sistema binario a dos fases y que considera el transporte de soluto en la mezcla. Mediante el análisis numérico del modelo estacionario en un dominio a simetría cilíndrica estudiamos el fenómeno de bifurcación, que está en la base de la problemática de pérdida de estabilidad descrita anteriormente.

COMPUTATION OF INSTABILITIES OF A SOLIDIFICATION PROCESS IN AXISYMMETRICAL DOMAINS: I. MODELLING

Summary

In the solidification processes of metal alloys, complex convection phenomena can be produced that generate unhomogeneousities in materials or substances. Through the study of a solidification model of a binary alloy, we intend to give a greater and better understanding of a class of there instabilities. More precisely, we are interested in studying the origin of the so-called convection chimneys as well as the forming of unhomogeneousities or freckles. The mathematical model that describes the evolution of this process consists of conservation of mass, momentum and energy equations for a two-phase binary system and that considers the transportation of the solute in the mixture. By means of the numerical analysis of the stationary model considered on an axisymmetrical domain, we study the bifurcation phenomenon, which is in the basis of the problematic of the loss of instability described above.

¹ Financiado parcialmente por proyecto # 1971056 (FONDECYT)

² Financiado parcialmente por el Centro de Modelamiento Matemático de la Universidad de Chile

INTRODUCCIÓN

Nuestro objetivo es proponer un método numérico eficaz para determinar los valores de ciertos parámetros físicos que pueden crear inestabilidades, y por tanto producir bifurcación de la (o las) solución(es) de un modelo matemático que intenta describir un proceso de solidificación de una aleación binaria confinada en un dominio a simetría cilíndrica.

La modelación y el estudio del comportamiento de aleaciones de metales durante el proceso de solidificación ha atraído la atención de un gran número de investigadores e ingenieros estos últimos años. La compleja dinámica que se desarrolla durante este proceso ha conducido a la elaboración de finas teorías que intentan explicar macroscópicamente el avance del frente de solidificación, así como microscópicamente, el crecimiento dendrítico de la zona en estado sólido. Desde un punto de vista termodinámico podemos señalar el riguroso trabajo de Hills *et al.*²² y desde el punto de vista de una modelación simple el de Rappaz y Voller²⁶, quienes obtienen aceptables conclusiones y resultados basados en propiedades de promedios termodinámicos.

Desde un punto de vista numérico, algunos softwares implementados resuelven parcialmente el problema evolutivo de la solidificación de una aleación de multicomponentes. Podemos señalar los programas de Ahmad¹, Prakash y Voller²⁵, Cervera *et al.*³⁰ y Cruchaga y Celentano³¹ en el dominio de los Elementos Finitos y a Combeau y Lesoult⁷ en el de Volúmenes Finitos. Es importante decir que sólo en los softwares desarrollados en^{1,7} es posible simular el comportamiento de chimeneas de convección.

Con respecto al problema de estudiar numéricamente la formación de inhomogeneidades o *freckles* durante el proceso de solidificación, existen claramente dos enfoques distintos. El primero de ellos necesita un software evolutivo del modelo en estudio y consiste simplemente en una búsqueda experimental y empírica de las condiciones que producen inestabilidades y por consecuencia *freckles*. Son de esta óptica los trabajos de Ahmad¹ y Felicelli *et al.*¹⁴ La segunda metodología, usada en Fowler¹⁷ y Felicelli *et al.*^{15,16}, consiste en estudiar los valores de ciertos parámetros físicos relevantes que hacen al modelo matemático estacionario inestable. En algunos trabajos más recientes, como por ejemplo los de Anderson y Worster^{2,3}, se estudia la dinámica de la zona de mezcla a dos fases de la materia, es decir, de coexistencia de materia en estado sólido y líquido, intentando describir la formación de vórtices de convección. Cabe reseñar también el trabajo visual realizado por Steube y Hellawell²⁹, en donde se aprecian nítidamente la formación de chimeneas de convección y *freckles* durante la realización de un experimento en laboratorio. Usualmente estas inestabilidades son llamadas *inestabilidades termo-solutales*.

DEDUCCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

En esta sección nos interesamos por deducir el modelo matemático que usamos para estudiar el fenómeno de pérdida de estabilidad en el proceso de solidificación en cuestión.

El problema físico

La defectuosa solidificación de piezas de metal durante su moldeo es una de las principales razones de falla antes de lo previsto por el diseño industrial. El más popular procedimiento de moldeo de piezas de metal consiste en verter un material (puro o compuesto) en estado líquido a alta temperatura en un molde. Una vez vertida la materia incandescente, ésta perderá calor y comenzará a solidificar. Dependiendo de varios factores, entre ellos, el gradiente de temperatura y la concentración de soluto en el solvente, es posible que durante la solidificación dentro del molde, el fluido tienda a separarse en regiones con distintas características, creándose nódulos de soluto, rodeados de solvente con un mayor grado de pureza que el material original. Una consecuencia importante de esta segregación es que la

pieza metálica resultante tendrá en algunos sectores propiedades metalúrgicas distintas a lo calculado. Entre éstas las más importantes son la dureza y la ductibilidad.

El compuesto binario se vierte en el molde de tal modo que al llenarlo, la parte inferior esté en contacto con la pared inferior a baja temperatura, mientras que la parte superior se mantiene a la temperatura de fusión. Esto puede ocasionar un fuerte gradiente de temperatura, debido al cual el proceso de solidificación producirá un material heterogéneo. En la parte superior del dominio se verá una sección líquida y en el fondo de éste se tendrá el material ya solidificado, dejando una zona media en la que el proceso de solidificación aún no está completo. Esta sección de mezcla está caracterizada por la coexistencia de material en estado sólido y líquido.

El modelo de solidificación para una aleación binaria

En una mezcla binaria el elemento llamado soluto es aquel que se diluye en el otro, denominado el solvente. Sin pérdida de generalidad, en estado líquido se puede asumir que esta mezcla es homogénea. Así, al comenzar el proceso aparece un frente de solidificación que consiste de dendritas de material sólido, alrededor de las cuales se irá adheriendo materia en estado líquido hasta llegar a una completa fase sólida. Como es sabido, este proceso de solidificación está fundamentalmente controlado por las variables termodinámicas de concentración de soluto y la temperatura en el molde. A su vez, éstas determinan el estado de la materia a través del diagrama de fase (Figura 2). Como referencia fundamental podemos reseñar, entre otros, los textos^{24,28} y las tesis de doctorado^{1,18,20,21}.

En el dominio podemos distinguir entonces tres regiones, dependientes de la concentración c y de la temperatura θ . Denotando por Ω el molde en el cual se ha vertido la materia fundida, llamamos Ω_l , Ω_m y Ω_s a las regiones ocupadas por la materia en estado líquido, mezcla (coexistencia de sólido y líquido) y sólido, respectivamente. Además, identificamos las interfaces entre estos tres subdominios, llamando Γ_{ml} la interface mezcla-líquido y Γ_{sm} la correspondiente a sólido-mezcla. Con el objeto de considerar condiciones en los límites, fijaremos también notaciones para tres regiones de la frontera exterior $\partial\Omega$.

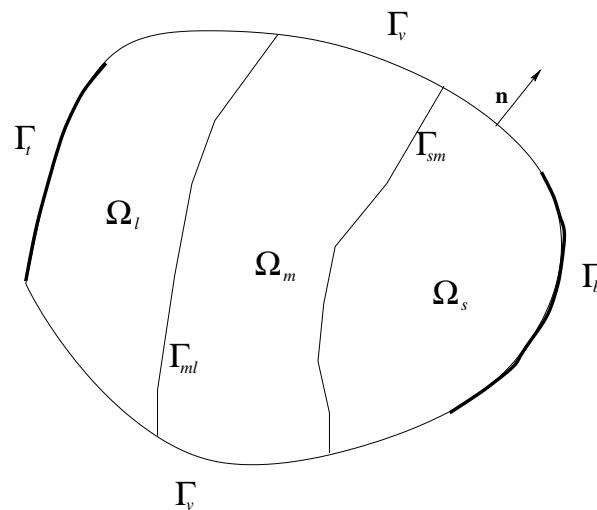


Figura 1. Molde de solidificación

En la región de mezcla sólido-líquido tiene sentido definir una función que indique la fracción de materia que se encuentre aún en estado sólido f_s y líquido f_l , por unidad de

volumen. Es claro que $f_l = 1 - f_s$. De hecho, f_s depende de la concentración c y de la temperatura θ , y se puede calcular mediante la función (ver Figura 2)

$$f_s(c, \theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } (c, \theta) \in \Theta_l \\ \frac{a}{a+b} & \text{si } (c, \theta) \in \Theta_m \\ 1 & \text{si } (c, \theta) \in \Theta_s \end{cases} \quad (1)$$

Para modelar en forma más precisa el fenómeno de transporte en la región de mezcla, es necesario definir las funciones de concentración de soluto en fase líquida c_l y en fase sólida c_s . Así entonces, la función incógnita de concentración que interviene en las ecuaciones no es más que un promedio ponderado entre c_l y c_s , es decir

$$c = c_l(1 - f_s) + c_s f_s \quad (2)$$

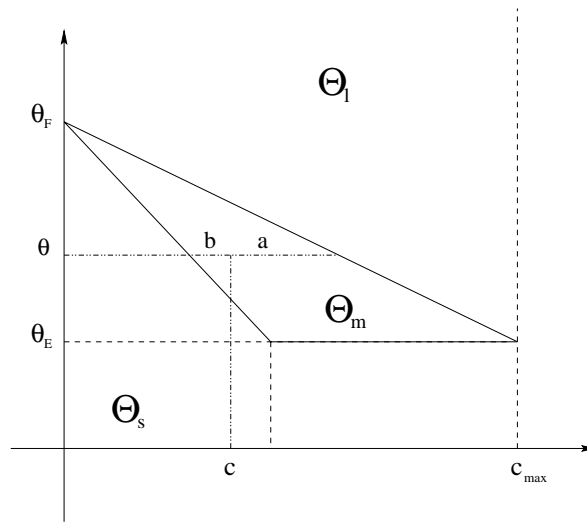


Figura 2. Diagrama de fase

Más aún, estas concentraciones c_l, c_s pueden ser determinadas precisamente a través del diagrama de fase anterior, suponiendo que las *curvas de líquidus y de sólidus* son líneas rectas²⁷. En tal situación se tendrá

$$c_l(c, \theta) = \begin{cases} c & \text{si } (c, \theta) \in \Theta_l \\ k_{\max}(\theta_F - \theta) & \text{si } (c, \theta) \in \Theta_m \\ 0 & \text{si } (c, \theta) \in \Theta_s \end{cases} \quad (3)$$

donde k_{\max} está dado por

$$k_{\max} = \frac{c_{\max}}{\theta_F - \theta_E} \quad (4)$$

También es claro que, la descripción de las diferentes regiones dentro del molde Ω , pueden ser determinadas de manera precisa utilizando el diagrama de fase. En efecto, las zonas líquida Ω_l , mezcla Ω_m y sólida Ω_s están definidas por

$$\Omega_l = \{x \in \Omega \mid (c(x), \theta(x)) \in \Theta_l\} \quad (5)$$

$$\Omega_m = \{x \in \Omega \mid (c(x), \theta(x)) \in \Theta_m\} \quad (6)$$

$$\Omega_s = \Omega \setminus \overline{\Omega_l \cup \Omega_m} \quad (7)$$

Tomando en cuenta estas expresiones, proponemos modelar la dinámica de la mezcla desde que se ha vertido en el molde en fase líquida hasta que termina su solidificación. Es claro que a medida que pasa el tiempo, las zonas Ω_l , Ω_m y Ω_s irán apareciendo, evolucionando y desapareciendo. De esta manera se generará un gradiente de concentración y de temperatura, que sumado a la acción de la fuerza de gravedad, que actúa sobre la aleación, puede desarrollar un movimiento de velocidad \mathbf{v} y campo de presión p en el interior de la mezcla, $\Omega_{ml} \equiv \Omega_l \cup \Omega_m \cup \Omega_s$.

Modelamos el transporte durante el proceso de solidificación mediante las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles acopladas con términos de fuerzas (externa e interna) como sigue¹⁸

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{v} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{F}_i(c, \theta, \mathbf{v}) + \nabla p = \mathbf{F}_e(c, \theta) \quad \text{en } \Omega_{ml} \times (0, T] \quad (8)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad \text{en } \Omega_{ml} \times (0, T] \quad (9)$$

donde ρ es la densidad media de la mezcla (considerada constante) y ν es la viscosidad. La fuerza externa $\mathbf{F}_e(\cdot, \cdot)$ está dada por la aproximación de Boussinesq

$$\mathbf{F}_e(c, \theta) = \rho \mathbf{g} (1 + \alpha(\theta - \theta_r) + \beta(c_l(c, \theta) - c_r)) \quad (10)$$

siendo $\mathbf{g} = (0, 0, -g)^t$ la fuerza gravitacional, α y β constantes reales conocidas y (c_r, θ_r) valores de referencia para la temperatura y la concentración.

El término $\mathbf{F}_i(\cdot, \cdot, \cdot)$ representa la fuerza interna en un material poroso que se opone al movimiento del fluido. Es conocida como la ley de Carman-Kozeny y está dada por ($C_0 > 0$)

$$\mathbf{F}_i(c, \theta, \mathbf{v}) = C_0 \frac{f_s^2(c, \theta)}{[1 - f_s(c, \theta)]^3} \mathbf{v} \quad (11)$$

Es evidente que en la región líquida este término desaparece, puesto que $f_s = 0$. Por otra parte, suponemos que el campo de velocidad es despreciable, y por tanto considerado nulo sobre la zona sólida y continuo sobre todo el dominio Ω .

Los procesos de difusión de la concentración y de transferencia de calor en una mezcla de multicomponentes se describen por un sistema no-lineal de ecuaciones parabólicas. Las variables involucradas son la concentración, la temperatura y la velocidad. Estas ecuaciones toman en cuenta los fenómenos de difusión y transporte y se deducen considerando las leyes de conservación de soluto en la mezcla y de la energía. Simplificando estas ecuaciones, usando las leyes de Fourier y Fick^{24,28}, se obtiene

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \eta \Delta c + \mathbf{v} \cdot \nabla c_\ell(c, \theta) = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, T] \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} H(c, \theta) - \kappa \Delta \theta + \rho C_p \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, T] \quad (13)$$

donde η y κ son dos constantes reales estrictamente positivas representando las difusiones físicas, $c_\ell(\cdot, \cdot)$ es la concentración líquida y $H(\cdot, \cdot)$ es la entalpía. Cabe señalar que estas dos últimas funciones dependen de manera no-lineal de (c, θ) .

Las condiciones iniciales son determinadas a partir del momento en el cual se vierte la materia fundida en el molde de solidificación y son por lo general funciones regulares. Las condiciones en los límites consideradas son:

- adherencia del fluido sobre $\Gamma_t \cup \Gamma_b$; el flujo normal y el esfuerzo tangencial nulos sobre Γ_v ;
- el flujo normal de concentración nulo sobre $\partial\Omega$ y una concentración total de soluto fija en el dominio;
- la temperatura conocida sobre $\Gamma_t \cup \Gamma_b$ y la pared adiabática en Γ_v .

Desde un punto de vista teórico podemos señalar que la cuestión de la existencia y unicidad de solución para el modelo evolutivo (8)-(13) está básicamente abierta, pues se trata de un problema parabólico degenerado de alta complejidad matemática. Algunos trabajos relacionados que podemos mencionar son las referencias^{5,4,8,23}. Por el contrario, para el modelo estacionario asociado se tienen varios trabajos sobre la existencia y unicidad de solución. Podemos citar algunos de ellos^{6,9,10,11,12,13,19,20}.

EL MODELO ESTACIONARIO EN UN DOMINIO CILÍNDRICO

En esta sección nos preocupamos de reformular de manera equivalente nuestro modelo matemático, de modo a considerar las hipótesis geométricas sobre el dominio. Primeramente, escribimos el modelo completo y luego su formulación diferencial en el sistema de coordenadas cilíndricas. El problema que nos interesa estudiar es la estabilidad de la(s) solución(es) del sistema diferencial siguiente: encontrar funciones $(c, \theta, \mathbf{v}, p) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^6$ satisfaciendo las ecuaciones

$$-\eta \Delta c + \mathbf{v} \cdot \nabla c_\ell(c, \theta) = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (14)$$

$$\frac{\partial c}{\partial n} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad (15)$$

$$\int_{\Omega} c \, dx = c_g \quad (16)$$

$$-\kappa \Delta \theta + \rho C_p \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (17)$$

$$\theta = \theta_b \quad \text{sobre } \Gamma_b \quad (18)$$

$$\theta = \theta_t \quad \text{sobre } \Gamma_t \quad (19)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_v \quad (20)$$

$$-\nu \Delta \mathbf{v} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{F}_i(c, \theta, \mathbf{v}) + \nabla p = \mathbf{F}_e(c, \theta) \quad \text{en } \Omega_{ml} \quad (21)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{en } \Omega_{ml} \quad (22)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega_s \quad (23)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_b \cup \Gamma_t \quad (24)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_v \quad (25)$$

$$\sigma(\mathbf{v}, p) \mathbf{n} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_v \quad (26)$$

siendo c_g la cantidad total de soluto en la mezcla, C_p la capacidad calórica, $\theta_b(\cdot)$, $\theta_t(\cdot)$ funciones conocidas que entregan la temperatura inferior y superior en el molde de solidifi-

cación, \mathbf{n} denota el vector normal exterior unitario a la superficie $\partial\Omega$ y $\sigma(\mathbf{v}, p)$ representa el tensor de esfuerzos dado por

$$\sigma(\mathbf{v}, p) = -pI + 2\nu e(\mathbf{v}) \quad (\text{Ley de Stokes})$$

donde $e(\mathbf{v})$ es el gradiente simetrizado de \mathbf{v} .

Para efectuar el cambio de coordenadas cartesianas a cilíndricas, los pasos son fácilmente deducibles, salvo la condición (26) que es algo más compleja, por lo que la desarrollamos en detalle. Sobre Γ_v se tiene $\mathbf{n} = (1, 0, 0)^t = \hat{r}$ y que el vector tangente genérico se escribe como combinación lineal de $\hat{\varphi}, \hat{\mathbf{k}}$, es decir

$$\hat{\tau} = \delta_\varphi \hat{\varphi} + \delta_k \hat{\mathbf{k}} = (0, \delta_\varphi, \delta_k)^t \quad \forall \delta_\varphi, \delta_k \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto, de (26) se deduce que sobre Γ_v

$$\sigma(\mathbf{v}, p) \mathbf{n} \cdot \hat{\tau} = 2\nu e(\mathbf{v})(1, 0, 0)^t \cdot (0, \delta_\varphi, \delta_k)^t = 0$$

esto es, en términos de coordenadas

$$\delta_\varphi e_{\varphi r} + \delta_k e_{zr} = 0 \quad \forall \delta_\varphi, \delta_k \in \mathbb{R}$$

lo cual implica $e_{\varphi r} = e_{zr} = 0$, y por lo tanto

$$\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_v \quad (27)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_v \quad (28)$$

Así, el modelo estacionario de solidificación en coordenadas cilíndricas está dado como sigue: encontrar funciones $(c, \theta, \mathbf{v}, p) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^6$ satisfaciendo las ecuaciones

Difusión de la concentración

$$-\eta \left(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial c_l}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial c_l}{\partial \varphi}, \frac{\partial c_l}{\partial z} \right) \mathbf{v} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (29)$$

$$\frac{\partial c}{\partial n} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad (30)$$

$$\int_{\Omega} c \, dx = c_g \quad (31)$$

Transferencia de calor

$$-\kappa \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) + \rho C_p \left(\frac{\partial \theta}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi}, \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \mathbf{v} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (32)$$

$$\theta = \theta_b \quad \text{sobre } \Gamma_b \quad (33)$$

$$\theta = \theta_t \quad \text{sobre } \Gamma_t \quad (34)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_v \quad (35)$$

Ecuaciones de transporte

$$\begin{aligned}
 & -\nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] + \rho \left[v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right] \\
 & + \left[\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\varphi) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} \right] + \rho \left[v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\varphi v_r}{r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right] + \\
 & \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \right] + \rho \left[v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] + \\
 & + \left[\frac{\partial p}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{\partial p}{\partial z} + C_0 \frac{f_s^2(c, \theta)}{[1 - f_s(c, \theta)]^3} \mathbf{v} = \rho \mathbf{g} \left(1 + \alpha(\theta - \theta_r) + \beta(c_l(c, \theta) - c_r) \right) \quad \text{en } \Omega_{ml}
 \end{aligned} \tag{36}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \text{en } \Omega_{ml} \tag{37}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega_s \tag{38}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_b \cup \Gamma_t \tag{39}$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_v \tag{40}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_v \tag{41}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_v \tag{42}$$

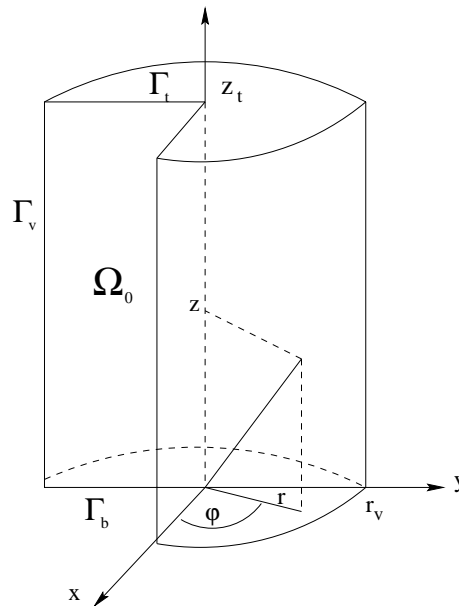


Figura 3. Molde de solidificación con simetría cilíndrica

Para describir una sección transversal, generando todo el volumen Ω y con el propósito de no recargar la notación, adoptamos la siguiente descripción geométrica

$$\Omega = \Omega_0 \times [0, 2\pi] \quad (43)$$

$$\Gamma_t = \Gamma_t \times [0, 2\pi] \quad (44)$$

$$\Gamma_v = \Gamma_v \times [0, 2\pi] \quad (45)$$

$$\Gamma_b = \Gamma_b \times [0, 2\pi] \quad (46)$$

donde $\Omega_0 = \{(r, z) \mid 0 < r < r_v, 0 < z < z_t\}$ y $\partial\Omega_0 = \Gamma_0 \cup \Gamma_b \cup \Gamma_t \cup \Gamma_v$ siendo $\Gamma_0 = \{(r, z) \mid r = 0, 0 < z < z_t\}$.

PERTURBACIÓN LINEAL DEL PROBLEMA

El método de perturbación lineal en un problema diferencial consiste en adicionar a una solución conocida un término “pequeño”. Esto reemplazado en las ecuaciones y considerando sólo los términos de primer orden, nos entrega un problema lineal. Este nuevo modelo se denomina el *problema perturbado*, también conocido como *estudio de estabilidad lineal* del sistema en cuestión. Nos proponemos en esta sección determinar una solución trivial o básica de (29)-(42) y luego formular el problema perturbado asociado como un problema de bifurcación(es) en función de un parámetro físico determinado (a saber, $\mu \equiv \theta_t - \theta_b$ definido más adelante).

Cálculo de una solución trivial o básica

Una solución trivial o básica del problema se obtiene suponiendo que el sistema es homogéneo, y por lo tanto desprovisto de inestabilidades. Bajo estas consideraciones no es difícil demostrar que la única solución trivial o básica de nuestro problema, $U_{ob} \equiv (c_{ob}, \theta_{ob}, \mathbf{v}_{ob}, p_{ob})$, está definida por

$$c_{ob} = \text{constante} \quad (47)$$

$$\theta_{ob}(z) = \frac{\mu}{h}z + \theta_b \quad \forall 0 \leq z \leq z_t \quad (48)$$

$$\mathbf{v}_{ob} = \mathbf{0} \quad (49)$$

$$p_{ob}(z) = -\rho g \left(\alpha \left(\frac{\mu}{2h} z^2 + (\theta_b - \theta_r)z \right) + \beta (\xi(z) - c_r)z + z + C \right) \quad z \in [0, z_t] \quad (50)$$

siendo $h = z_t$ la altura del cilindro, $g = |\mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{k}}|$, C una constante de integración $\xi(z)$ definida por

$$\xi(z) = \begin{cases} c_{ob} & \text{si } (r, \varphi, z) \in \Omega_l \\ k_{\max} (\theta_F - \theta_b) - \frac{k_{\max} \mu}{2h} z & \text{si } (r, \varphi, z) \in \Omega_m \\ 0 & \text{si } (r, \varphi, z) \in \Omega_s \end{cases}$$

y la constante física μ dada por

$$\mu = \theta_t - \theta_b \quad (51)$$

Modelo perturbado

Como dijimos anteriormente, buscamos perturbar el sistema de modo de perder la estabilidad y encontrar otra solución diferente de la anterior. Más precisamente, nos interesamos por una solución del problema (29)-(42) de la forma

$$U_1 = (c_1, \theta_1, \mathbf{v}_1, p_1) \equiv U_{ob} + U \quad (52)$$

El término $U = (c, \theta, \mathbf{v}, p)$ se denomina la perturbación de la solución básica y satisface un sistema de ecuaciones diferenciales que es determinado reemplazando U_1 en las ecuaciones (29)-(42), aproximando las expresiones no lineales y eliminando los términos de orden cuadrático. Es importante señalar que para realizar este análisis de perturbaciones, sólo vamos a considerar el dominio de solidificación dado por la solución trivial o básica.

Linealización de $\nabla c_l(c_1, \theta_1)$ y $\mathbf{F}_i(c_1, \theta_1, \mathbf{v}_1)$

La expresión de la función $c_l(\cdot, \cdot)$ es desarrollada en serie de Taylor en torno del punto (c_{ob}, θ_{ob}) y luego truncada al primer orden. Para esto, recordemos que la concentración líquida $c_l(\cdot, \cdot)$ (ver (3) y (4)) está definida por

$$c_l(c, \theta) = \begin{cases} c & \text{si } (c, \theta) \in \Theta_l \\ k_{\max}(\theta_F - \theta) & \text{si } (c, \theta) \in \Theta_m \\ 0 & \text{si } (c, \theta) \in \Theta_s \end{cases} \quad (53)$$

y luego sus derivadas parciales están dadas por

$$\frac{\partial c_l(c, \theta)}{\partial c} = \begin{cases} 1 & \text{en } \Theta_l \\ 0 & \text{en } \Theta_m \\ 0 & \text{en } \Theta_s \end{cases} \quad \text{y} \quad \frac{\partial c_l(c, \theta)}{\partial \theta} = \begin{cases} 0 & \text{en } \Theta_l \\ -k_{\max} & \text{en } \Theta_m \\ 0 & \text{en } \Theta_s \end{cases}$$

Equivalentemente podemos escribir

$$\nabla_{(c, \theta)} c_l(c, \theta) = \begin{cases} (1, 0)^t & \text{en } \Theta_l \\ (0, -k_{\max})^t & \text{en } \Theta_m \\ (0, 0)^t & \text{en } \Theta_s \end{cases} \quad (54)$$

Ahora bien, el cálculo del gradiente con respecto a las variables espaciales, evaluado en $(c_{ob}, \theta_{ob}(z))$, nos entrega

$$\nabla c_l(c_{ob}, \theta_{ob}(z)) = \left(\frac{\partial c_l}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial c_l}{\partial \varphi}, \frac{\partial c_l}{\partial z} \right)^t = \left(0, 0, \frac{\partial c_l}{\partial \theta}(c_{ob}, \theta_{ob}) \frac{\partial \theta_{ob}}{\partial z} \right)^t$$

y así entonces

$$\nabla c_l(c_{ob}, \theta_{ob}) = \begin{cases} (0, 0, 0)^t & \text{si } (r, \varphi, z) \in \Omega_l \cup \Omega_s \\ (0, 0, \frac{-k_{\max} \mu}{h})^t & \text{si } (r, \varphi, z) \in \Omega_m \end{cases} \quad (55)$$

Una vez calculado $\nabla c_l(c_{ob}, \theta_{ob})$, se efectúa una aproximación de $c_l(c_1, \theta_1)$ por serie de Taylor en torno a (c_{ob}, θ_{ob}) , resultando

$$c_l(c_1, \theta_1) = c_l(c_{ob}, \theta_{ob}) + (c_1 - c_{ob}) \frac{\partial c_l}{\partial c}(c_{ob}, \theta_{ob}) + (\theta_1 - \theta_{ob}) \frac{\partial c_l}{\partial \theta}(c_{ob}, \theta_{ob}) + o(2)$$

siendo $o(2)$ un error de orden cuadrático que despreciamos. Pero de (52) se tiene que $c = c_1 - c_{ob}$ y $\theta = \theta_1 - \theta_{ob}$, de donde

$$c_l(c_1, \theta_1) \approx c_l(c_{ob}, \theta_{ob}) + c \frac{\partial c_l}{\partial c}(c_{ob}, \theta_{ob}) + \theta \frac{\partial c_l}{\partial \theta}(c_{ob}, \theta_{ob}) \quad (56)$$

y en consecuencia aproximamos $\nabla c_l(c_1, \theta_1)$ por

$$\nabla c_l(c_1, \theta_1) \approx \nabla c_l(c_{ob}, \theta_{ob}) + \frac{\partial c_l}{\partial c}(c_{ob}, \theta_{ob}) \nabla c + \frac{\partial c_l}{\partial \theta}(c_{ob}, \theta_{ob}) \nabla \theta \quad (57)$$

De igual modo, una aproximación para $\mathbf{F}_i(c_1, \theta_1, \mathbf{v}_1)$ se obtiene al desarrollar en serie de Taylor en torno a (c_{ob}, θ_{ob}) , la función $\mathcal{K}(c, \theta)$ definida por

$$\mathcal{K}(c, \theta) = C_0 \frac{f_s^2(c, \theta)}{[1 - f_s(c, \theta)]^3} \quad (58)$$

En efecto, de (11) y (49) es claro que

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i(c_1, \theta_1, \mathbf{v}_1) &= \mathcal{K}(c_1, \theta_1) \mathbf{v}_1 = \mathcal{K}(c_1, \theta_1) \mathbf{v} \\ &= \left(\mathcal{K}(c_{ob}, \theta_{ob}) + c \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial c}(c_{ob}, \theta_{ob}) + \theta \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \theta}(c_{ob}, \theta_{ob}) + o(2) \right) \mathbf{v} \end{aligned}$$

Luego, despreciando términos cuadráticos, deducimos la aproximación

$$\mathbf{F}_i(c_1, \theta_1, \mathbf{v}_1) \approx \mathcal{K}(c_{ob}, \theta_{ob}) \mathbf{v} \quad (59)$$

Es importante señalar que

$$f_s(c_{ob}, \theta_{ob}) = \frac{a_1 + a_2 \mu z}{a_3 + a_4 \mu z} \quad 0 \leq z \leq z_t$$

con $a_i \in \mathbb{R}$ conocidas y por ende $\mathcal{K}(c_{ob}, \theta_{ob})$ es sólo función de las variables (μ, z) , es decir

$$\mathcal{K}(c_{ob}, \theta_{ob}) = \mathcal{K}(c_{ob}, \theta_{ob})(\mu, z) \quad (60)$$

Ecuación de concentración

La solución perturbada debe satisfacer la ecuación (14), es decir

$$-\eta \Delta c_1 + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla c_l(c_1, \theta_1) = 0 \quad \text{en } \Omega$$

por lo que de (47), (49), (52), (57) y eliminando términos cuadráticos tenemos que

$$-\eta \Delta c + \mathbf{v} \cdot \nabla c_l(c_{ob}, \theta_{ob}) = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (61)$$

Ahora bien, tomando en cuenta (4), (55) y denotando

$$S = \begin{cases} 0 & \text{si } (r, \varphi, z) \in \Omega_s \cup \Omega_l \\ -\frac{k_{\max}}{h} & \text{si } (r, \varphi, z) \in \Omega_m \end{cases} \quad (62)$$

deducimos que el sistema perturbado para la concentración está dado por

$$-\eta \Delta c + \mu S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (63)$$

$$\frac{\partial c}{\partial n} = 0 \quad \text{sobre } \partial \Omega \quad (64)$$

$$\int_{\Omega} c \, dx = 0 \quad (65)$$

Ecuación de temperatura

La ecuación perturbada asociada a la temperatura se obtiene reemplazando en (17)

$$-\kappa\Delta\theta_1 + \rho C_p \mathbf{v}_1 \cdot \nabla\theta_1 = 0 \quad \text{en } \Omega$$

Así, de (48), (49) y (52) y eliminando el término cuadrático resulta

$$-\kappa\Delta\theta + \rho C_p \mathbf{v} \cdot \nabla\theta_{ob} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (66)$$

Denotando el coeficiente de transferencia de calor por

$$P = \frac{\rho C_p}{h} \quad (67)$$

deducimos que la ecuación perturbada es

$$-\kappa\Delta\theta + \mu P \mathbf{v} \cdot \widehat{\mathbf{k}} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (68)$$

$$\theta = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_b \cup \Gamma_t \quad (69)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_v \quad (70)$$

Ecuación de transporte

Las ecuaciones de Stokes correspondientes (21) y (22) nos entregan

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{v}_1 + \rho(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla)\mathbf{v}_1 + \mathbf{F}_i(c_1, \theta_1, \mathbf{v}_1) + \nabla p_1 &= \mathbf{F}_e(c_1, \theta_1) & \text{en } \Omega_{ml} \\ \text{div } \mathbf{v}_1 &= 0 & \text{en } \Omega_{ml} \end{aligned}$$

Luego considerando (48), (49), (50), (52), (56) y (59) y eliminando términos cuadráticos obtenemos

$$-\nu\Delta\mathbf{v} + \nabla p + \mathcal{K}(c_{ob}, \theta_{ob}) \mathbf{v} = \rho \mathbf{g} \left(\alpha \theta + \beta c \frac{\partial c_l}{\partial c}(c_{ob}, \theta_{ob}) + \beta \theta \frac{\partial c_l}{\partial \theta}(c_{ob}, \theta_{ob}) \right) \quad \text{en } \Omega_{ml}$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad \text{en } \Omega_{ml}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega_s$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_b \cup \Gamma_t$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_v$$

$$\sigma(\mathbf{v}, p) \mathbf{n} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_v$$

Entonces, adoptando la notación

$$G_\theta = \begin{cases} \rho g \alpha & \text{si } (r, \varphi, z) \in \Omega_l \cup \Omega_s \\ \rho g (\alpha - \beta k_{\max}) & \text{si } (r, \varphi, z) \in \Omega_m \end{cases} \quad (71)$$

$$G_c = \begin{cases} \rho g \beta & \text{si } (r, \varphi, z) \in \Omega_l \\ 0 & \text{si } (r, \varphi, z) \in \Omega_m \cup \Omega_s \end{cases} \quad (72)$$

el sistema de ecuaciones de Stokes se escribe

$$-\nu \Delta \mathbf{v} + \nabla p + \mathcal{K}(c_{ob}, \theta_{ob}) \mathbf{v} = -G_\theta \theta \hat{\mathbf{k}} - G_c c \hat{\mathbf{k}} \quad \text{en } \Omega_{ml} \quad (73)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{en } \Omega_{ml} \quad (74)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega_s \quad (75)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_b \cup \Gamma_t \quad (76)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_v \quad (77)$$

$$\sigma(\mathbf{v}, p) \mathbf{n} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_v \quad (78)$$

El problema perturbado

En conclusión, el problema perturbado o estudio de estabilidad lineal del sistema (29)-(42) es: encontrar los valores de $\mu \in \mathbb{C}$ para los cuales existan funciones $(c, \theta, \mathbf{v}, p) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^6$, no todas nulas, satisfaciendo las ecuaciones

$$-\eta \Delta c + \mu S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (79)$$

$$\frac{\partial c}{\partial n} = 0 \quad \text{sobre } \partial \Omega \quad (80)$$

$$\int_{\Omega} c \, dx = 0 \quad (81)$$

$$-\kappa \Delta \theta + \mu P \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (82)$$

$$\theta = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_b \cup \Gamma_t \quad (83)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_v \quad (84)$$

$$-\nu \Delta \mathbf{v} + \nabla p + \mathcal{K}(c_{ob}, \theta_{ob}) \mathbf{v} = -G_\theta \theta \hat{\mathbf{k}} - G_c c \hat{\mathbf{k}} \quad \text{en } \Omega_{ml} \quad (85)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{en } \Omega_{ml} \quad (86)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega_s \quad (87)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_b \cup \Gamma_t \quad (88)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_v \quad (89)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_v \quad (90)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_v \quad (91)$$

Es importante recalcar que, desde un punto de vista matemático, el problema perturbado anterior es un sistema espectral altamente no trivial. En efecto, notemos que el parámetro μ , en adelante denominado *parámetro de bifurcación*, no solamente aparece de manera standard, sino que además define los frentes de solidificación Γ_{sm} y Γ_{ml} , y por ende las tres regiones o subdominios Ω_s , Ω_m , Ω_l que conforman la totalidad del molde de solidificación. Es decir, el dominio en donde se definen las ecuaciones depende del parámetro de bifurcación μ (ver (62), (71), (72)). Además, el término hipersingular $\mathcal{K}(c_{ob}, \theta_{ob})$ también se define a partir de este parámetro (ver (60)). Una caracterización teórica de este parámetro en un caso más simple puede ser encontrada en la referencias¹².

MODELO PERTURBADO EN UN DOMINIO A SIMETRÍA CILÍNDRICA

Para aprovechar la simetría cilíndrica del dominio, proponemos descomponer las funciones incógnitas $(c, \theta, \mathbf{v}, p)$ en series de Fourier. Además, y con objeto de no recargar la notación, utilizamos las siguientes notaciones de operadores diferenciales

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \nabla_{(r,z)} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \Delta_{(r,z)} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Descomposición en series de Fourier

Procedemos a descomponer las funciones del modelo perturbado en sus respectivas series de Fourier en torno del eje azimutal. Así, se obtienen las funciones incógnitas como suma de elementos más simples, en el sentido de que se reduce el número de coordenadas espaciales a dos, que son r y z . Más precisamente, si consideramos la base de $L^2(0, 2\pi)$, $\{1/\sqrt{2\pi}, (1/\sqrt{\pi} \cos kx)_{k \geq 1}\}$, se tendrá

$$c(r, \varphi, z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(r, z) \cos k\varphi \quad (92)$$

$$\theta(r, \varphi, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k(r, z) \cos k\varphi \quad (93)$$

$$\mathbf{v}(r, \varphi, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{v}_k(r, z) \cos k\varphi \quad (94)$$

$$p(r, \varphi, z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(r, z) \cos k\varphi \quad (95)$$

donde los coeficientes se obtienen $\forall (r, z) \in \Omega_0, \forall k > 0$ como sigue

$$\Lambda_k(r, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Lambda(r, \varphi, z) \cos(k\varphi) d\varphi \quad \Lambda \in \{c, \theta, v_1, v_2, v_3, p\} \quad (96)$$

Ecuación de concentración

Al aplicar (92) en la ecuación de concentración (79), se obtiene

$$-\eta \Delta_{(r,z)} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(r, z) \cos k\varphi + \eta \frac{k^2}{r^2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(r, z) \cos k\varphi + \mu S \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{v}_k(r, z) \cos k\varphi \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$$

lo cual es formalmente equivalente a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\eta \Delta_{(r,z)} c_k(r, z) + \eta \frac{k^2}{r^2} c_k(r, z) + \mu S \mathbf{v}_k(r, z) \cdot \hat{\mathbf{k}} \right) \cos k\varphi = 0$$

de donde concluimos que $\forall k \geq 0$

$$-\eta\Delta_{(r,z)}c_k(r,z) + \eta\frac{k^2}{r^2}c_k(r,z) + \mu S\mathbf{v}_k(r,z) \cdot \widehat{\mathbf{k}} = 0 \quad \text{en } \Omega_0$$

La condición en los límites (80) deviene

$$\sum_{k=0}^{\infty} \nabla c_k(r,z) \cdot \mathbf{n} \cos k\varphi = 0$$

Pero esta condición sólo se aplica en el manto del cilindro y en sus tapas, por lo que el vector normal sólo puede ser $(1, 0, 0)$ o $(0, 0, \pm 1)$, luego el término en la dirección $\widehat{\varphi}$ queda anulado y se tiene $\forall k \geq 0$

$$\nabla_{(r,z)} c_k(r,z) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_b \cup \Gamma_t \cup \Gamma_v$$

Es importante consignar que esta misma condición es natural en Γ_0 y luego consideramos flujo de concentración nulo sobre todo $\partial\Omega$.

La condición de media nula (81) se escribe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega} c_k(r,z) \cos k\varphi r dr d\varphi dz = 0$$

de lo cual deducimos que

$$\int_{\Omega_0} c_k(r,z) r dr dz = 0 \quad \forall k \geq 0$$

donde la sección transversal Ω_0 está definida en (43). Así, la ecuación para la concentración está dada $\forall k \geq 0$ por

$$-\eta\Delta_{(r,z)}c_k(r,z) + \eta\frac{k^2}{r^2}c_k(r,z) + \mu S\mathbf{v}_k(r,z) \cdot \widehat{\mathbf{k}} = 0 \quad \text{en } \Omega_0 \quad (97)$$

$$\nabla_{(r,z)} c_k(r,z) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega_0 \quad (98)$$

$$\int_{\Omega_0} c_k(r,z) r dr dz = 0 \quad (99)$$

Ecuación de temperatura

De igual modo se deduce que el sistema asociado a la ecuación de la temperatura (82), (83) y (84) está dada $\forall k \geq 0$

$$-\kappa\Delta_{(r,z)}\theta_k(r,z) + \kappa\frac{k^2}{r^2}\theta_k(r,z) + \mu P\mathbf{v}_k(r,z) \cdot \widehat{\mathbf{k}} = 0 \quad \text{en } \Omega_0 \quad (100)$$

$$\theta_k = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_b \cup \Gamma_t \quad (101)$$

$$\nabla_{(r,z)}\theta_k(r,z) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_v \cup \Gamma_0 \quad (102)$$

Ecuación de transporte

Observemos que en coordenadas cilíndricas el operador divergencia está expresado por

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(r, \varphi, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

De (86) y (94) tenemos formalmente que $\operatorname{div} \mathbf{v} = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{div}(\mathbf{v}_k(r, z) \cos k\varphi) = 0$, entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v_{kr}) + \frac{\partial v_{kz}}{\partial z} \right) \cos k\varphi - \frac{k}{r} v_{k\varphi} \sin k\varphi \right] = 0$$

Por lo tanto, $\forall k \geq 0$ concluimos que

$$\frac{\partial}{\partial r}(r v_{kr}) + \frac{\partial}{\partial z}(r v_{kz}) = 0 \quad \text{y} \quad k v_{k\varphi} = 0 \quad (103)$$

Luego, tenemos que: a) cuando $k = 0$, las componentes de \mathbf{v} son independientes de φ , pero puede existir $v_{k\varphi}$ no nulo, b) cuando $k > 0$, \mathbf{v} depende de (r, φ, z) y $v_{k\varphi} = 0$. De lo anterior se concluye que

$$\mathbf{v}(r, \varphi, z) = \mathbf{v}_0(r, z) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{v}_k(r, z) \cos k\varphi \quad (104)$$

o equivalentemente

$$\mathbf{v}(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} v_{0r}(r, z) \\ v_{0\varphi}(r, z) \\ v_{0z}(r, z) \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} v_{kr}(r, z) \cos k\varphi \\ 0 \\ v_{kz}(r, z) \cos k\varphi \end{pmatrix}$$

Así, para determinar la ecuación de transporte es necesario considerar los dos casos siguientes:

1. Caso homogéneo, $k = 0$

De la ecuación de transporte (85), tenemos

$$-\nu \Delta \mathbf{v}_0(r, z) + \nabla p_0(r, z) + \mathcal{K}(c_{ob}, \theta_{ob}) \mathbf{v}_0(r, z) = -[G_c c_0(r, z) + G_\theta \theta_0(r, z)] \hat{\mathbf{k}}$$

lo cual nos lleva a

$$-\nu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v_{0r}) \right] + \frac{\partial^2 v_{0r}}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial p_0}{\partial r} + \mathcal{K}(c_{ob}, \theta_{ob}) v_{0r} = 0 \quad (105)$$

$$-\nu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v_{0\varphi}) \right] + \frac{\partial^2 v_{0\varphi}}{\partial z^2} \right) + \mathcal{K}(c_{ob}, \theta_{ob}) v_{0\varphi} = 0 \quad (106)$$

$$-\nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_{0z}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_{0z}}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial p_0}{\partial z} + \mathcal{K}(c_{ob}, \theta_{ob}) v_{0z} = -(G_c c_0 + G_\theta \theta_0) \quad (107)$$

Ahora, nuestro objetivo es eliminar la presión p_0 . Para esto, derivamos (105) con respecto a z y (107) con respecto a r , obteniendo

$$-\nu \left[\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_{0r}) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^2 v_{0r}}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial^2 p_0}{\partial z \partial r} + \frac{\partial \mathcal{K}(c_{ob}, \theta_{ob})}{\partial z} v_{0r} + \mathcal{K}(c_{ob}, \theta_{ob}) \frac{\partial v_{0r}}{\partial z} = 0 \quad (108)$$

$$-\nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_{0z}}{\partial r} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial^2 v_{0z}}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial^2 p_0}{\partial r \partial z} + \mathcal{K}(c_{ob}, \theta_{ob}) \frac{\partial v_{0z}}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} (G_c c_0 + G_\theta \theta_0) \quad (109)$$

y entonces, sustrayendo (109) de (108), tenemos

$$\begin{aligned} & -\nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_{0r}}{\partial z} - r \frac{\partial v_{0z}}{\partial r} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial v_{0r}}{\partial z} - r \frac{\partial v_{0z}}{\partial r} \right) \right) \right] + \frac{\partial \mathcal{K}(c_{ob}, \theta_{ob})}{\partial z} v_{0r} \\ & + \mathcal{K}(c_{ob}, \theta_{ob}) \left(\frac{\partial v_{0r}}{\partial z} - \frac{\partial v_{0z}}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} (G_c c_0 + G_\theta \theta_0) \end{aligned} \quad (110)$$

Trataremos de forma implícita la condición de incompresibilidad ($\text{div } \mathbf{v} = 0$). La ecuación (103) nos sugiere un cambio de variable. Teniendo en cuenta (103), (106) y (110), hacemos el siguiente cambio de variable: consideramos las funciones escalares $\psi_0, w_0, \phi_0 : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} (v_{0r}, v_{0z}) &= \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial \psi_0}{\partial z}, \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \right) = -\frac{1}{r} \text{rot } \psi_0 \\ w_0 &= -r (\text{rot } \mathbf{v}_0)_\varphi = -r \left(\frac{\partial v_{0r}}{\partial z} - \frac{\partial v_{0z}}{\partial r} \right) \\ \phi_0 &= r v_{0\varphi} \end{aligned}$$

Luego, definiendo el operador

$$L = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (111)$$

de (110) tenemos que

$$-\nu L w_0 + \mathcal{K}(c_{ob}, \theta_{ob}) \frac{w_0}{r} + \frac{\partial \mathcal{K}(c_{ob}, \theta_{ob})}{\partial z} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} = -G_c \frac{\partial c_0}{\partial r} - G_\theta \frac{\partial \theta_0}{\partial r} \quad \text{en } \Omega_0 \quad (112)$$

Además, de la definición se obtiene

$$-L \psi_0 + \frac{w_0}{r} = 0 \quad \text{en } \Omega_0 \quad (113)$$

y de (106) se tendrá

$$-\nu L \phi_0 + \mathcal{K}(c_{ob}, \theta_{ob}) \frac{\phi_0}{r} = 0 \quad \text{en } \Omega_0 \quad (114)$$

A continuación, veamos las condiciones en los límites.

a) Sobre $\Gamma_b \cup \Gamma_t$. De (88) tenemos que $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$, esto es, $v_{0r} = v_{0\varphi} = v_{0z} = 0$. Entonces, por definición de w_0 y ϕ_0 , se tiene $w_0 = 0$ y $\phi_0 = 0$. Además, como

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} = v_{0r} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} = v_{0z} = 0$$

se tiene que ψ_0 es constante con respecto a r y z , lo cual implica que $\psi_0 = cte$. Así, podemos concluir que

$$\phi_0 = 0, \quad \psi_0 = 0, \quad y \quad w_0 = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_b \cup \Gamma_t \quad (115)$$

b) Sobre Γ_v . De (89) se tiene $\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} = 0$ donde $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$. Luego $v_{0r} = 0$, esto es, $\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} = 0$. Por lo tanto

$$\psi_0(r_v, z) \equiv \psi_0(r_v) \quad \forall (r_v, z) \in \Gamma_v \quad (116)$$

Ahora bien, $v_{0r} = 0$ implica $\frac{\partial v_{0r}}{\partial z} = 0$ y de (90) se tiene $\frac{\partial v_{0z}}{\partial r} = 0$. Así, de la definición de w_0 , podemos concluir que

$$w_0 = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_v \quad (117)$$

De (91) tenemos que $\frac{\partial v_{0r}}{\partial \varphi} + r \frac{\partial v_{0\varphi}}{\partial r} - v_{0\varphi} = 0$. Como v_{0r} es independiente de φ , esto implica $r \frac{\partial v_{0\varphi}}{\partial r} - v_{0\varphi} = 0$. Por lo tanto, teniendo en cuenta que $\phi_0 = r v_{0\varphi}$, se obtiene

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial r} = \frac{2}{r_v} \phi_0 \quad \text{sobre } \Gamma_v \quad (118)$$

c) Sobre Γ_0 . De manera natural se obtiene $\phi_0 = 0$.

Observando (90) y el hecho que $v_{0r} = 0$, se deduce que $w_0 = 0$. También, de (90) y $v_{0r} = 0$ se deduce que $\frac{\partial v_{0z}}{\partial r} = 0$, luego teniendo en cuenta $v_{0z} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial r}$, obtenemos

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} = 0, \quad \text{lo que es equivalente a } \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2} = 0 \quad y \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial r} = 0$$

Luego, dado que $\frac{\partial \psi_0}{\partial z} = 0$, se tiene $\psi_0 = cte$. Por lo tanto, concluimos que

$$\phi_0 = 0, \quad \psi_0 = 0, \quad w_0 = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_0 \quad (119)$$

2. Caso no homogéneo, $k > 0$

Como vimos se tiene que $\mathbf{v}_k(r, z) = (v_{kr}, 0, v_{kz})$. Entonces la ecuación de transporte (85) nos entrega el siguiente sistema

$$-\nu \left(\Delta_{(r,z)} - \frac{1}{r^2} \right) v_{kr} + \frac{\nu k^2}{r^2} v_{kr} + \frac{\partial p_k}{\partial r} + \mathcal{K}(c_{ob}, \theta_{ob}) v_{kr} = 0 \quad \text{en } \Omega_0 \quad (120)$$

$$\frac{2\nu}{r} v_{kr} - p_k = 0 \quad \text{en } \Omega_0 \quad (121)$$

$$-\nu \Delta_{(r,z)} v_{kz} + \frac{\nu k^2}{r^2} v_{kz} + \frac{\partial p_k}{\partial z} + \mathcal{K}(c_{ob}, \theta_{ob}) v_{kz} = -(G_c c_k + G_\theta \theta_k) \quad \text{en } \Omega_0 \quad (122)$$

Ahora bien, derivando (120) y (122) con respecto a z y r , respectivamente, y luego sustrayendo obtenemos

$$\begin{aligned}
& -\nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_{kr}}{\partial z} - r \frac{\partial v_{kz}}{\partial r} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial v_{kr}}{\partial z} - r \frac{\partial v_{kz}}{\partial r} \right) \right) \right] + \frac{\nu k^2}{r^2} \left(\frac{\partial v_{kr}}{\partial z} - \frac{\partial v_{kz}}{\partial r} \right) \\
& + \frac{2\nu k^2}{r^3} v_{kz} + \frac{\partial \mathcal{K}(c_{ob}, \theta_{ob})}{\partial z} v_{kr} + \mathcal{K}(c_{ob}, \theta_{ob}) \left(\frac{\partial v_{kr}}{\partial z} - \frac{\partial v_{kz}}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} (G_c c_k + G_\theta \theta_k)
\end{aligned} \tag{123}$$

Teniendo en cuenta (103) y (123), hacemos un cambio de variable, considerando las funciones escalares $\psi_k, w_k : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned}
(v_{kr}, v_{kz}) &= \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial \psi_k}{\partial z}, \frac{\partial \psi_k}{\partial r} \right) = -\frac{1}{r} \text{rot } \psi_k \\
w_k &= -r \left(\frac{\partial v_{kr}}{\partial z} - \frac{\partial v_{kz}}{\partial r} \right)
\end{aligned}$$

Así, en estas nuevas variables, L definido en (111), la ecuación (123) es equivalente a

$$-\nu L w_k + \left(\frac{\nu k^2}{r^3} + \frac{\mathcal{K}(c_{ob}, \theta_{ob})}{r} \right) w_k + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{K}(c_{ob}, \theta_{ob})}{\partial z} \frac{\partial \psi_k}{\partial z} - \frac{2\nu k^2}{r^4} \frac{\partial \psi_k}{\partial r} = -G_c \frac{\partial c_k}{\partial r} - G_\theta \frac{\partial \theta_k}{\partial r} \text{ en } \Omega_0 \tag{124}$$

y por definición

$$-L \psi_k + \frac{w_k}{r} = 0 \text{ en } \Omega_0 \tag{125}$$

Las condiciones de borde se obtienen en forma similar al caso $k = 0$, y no es difícil deducir de (116), (117) y (119) que

$$\psi_k = 0, \quad w_k = 0 \text{ sobre } \partial\Omega_0 \tag{126}$$

El problema perturbado con simetría cilíndrica homogéneo en la velocidad

En conclusión, para el caso $k = 0$, de (97)-(102) y (112)-(119) obtenemos el problema: encontrar los valores de $\mu \in \mathbb{C}$ para los cuales existan funciones $(c_0, \theta_0, w_0, \psi_0, \phi_0) : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^5$, no todos nulos, tales que

$$-\eta \Delta_{(r,z)} c_0 + \mu S \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} = 0 \text{ en } \Omega_0 \tag{127}$$

$$\nabla_{(r,z)} c_0 \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega_0 \tag{128}$$

$$\int_{\Omega_0} c_0(r, z) r \, dr \, dz = 0 \tag{129}$$

$$-\kappa \Delta_{(r,z)} \theta_0 + \mu P \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} = 0 \text{ en } \Omega_0 \tag{130}$$

$$\theta_0 = 0 \text{ sobre } \Gamma_b \cup \Gamma_t \tag{131}$$

$$\nabla_{(r,z)} \theta_0 \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \Gamma_v \cup \Gamma_0 \tag{132}$$

$$-\nu L w_0 + \mathcal{K}(c_{ob}, \theta_{ob}) \frac{w_0}{r} + \frac{\partial \mathcal{K}(c_{ob}, \theta_{ob})}{\partial z} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} = -G_c \frac{\partial c_0}{\partial r} - G_\theta \frac{\partial \theta_0}{\partial r} \text{ en } \Omega_0 \tag{133}$$

$$-L \psi_0 + \frac{w_0}{r} = 0 \text{ en } \Omega_0 \tag{134}$$

$$-\nu L\phi_0 + \mathcal{K}(c_{ob}, \theta_{ob}) \frac{\phi_0}{r} = 0 \quad \text{en } \Omega_0 \quad (135)$$

$$w_0 = 0, \quad \psi_0 = 0, \quad \phi_0 = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_b \cup \Gamma_t \cup \Gamma_0 \quad (136)$$

$$w_0 = 0, \quad \psi_0 = 0, \quad \frac{\partial \phi_0}{\partial r} = \frac{2}{r_v} \phi_0 \quad \text{sobre } \Gamma_v \quad (137)$$

El problema perturbado con simetría cilíndrica no homogéneo en la velocidad

Para el caso $k > 0$, de (97)-(102) y (124)-(126) obtenemos el problema: encontrar los valores de $\mu \in \mathbb{C}$ para los cuales existan funciones $(c_k, \theta_k, w_k, \psi_k) : \Omega_0 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, no todos nulos, tales que

$$-\eta \Delta_{(r,z)} c_k + \eta \frac{k^2}{r^2} c_k + \mu S \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_k}{\partial r} = 0 \quad \text{en } \Omega_0 \quad (138)$$

$$\nabla_{(r,z)} c_k \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \partial \Omega_0 \quad (139)$$

$$\int_{\Omega_0} c_k(r, z) r \, dr \, dz = 0 \quad (140)$$

$$-\kappa \Delta_{(r,z)} \theta_k + \kappa \frac{k^2}{r^2} \theta_k + \mu P \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_k}{\partial r} = 0 \quad \text{en } \Omega_0 \quad (141)$$

$$\theta_k = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_b \cup \Gamma_t \quad (142)$$

$$\nabla_{(r,z)} \theta_k \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_v \cup \Gamma_0 \quad (143)$$

$$-\nu L w_k + \left(\frac{\nu k^2}{r^3} + \frac{\mathcal{K}(c_{ob}, \theta_{ob})}{r} \right) w_k + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{K}(c_{ob}, \theta_{ob})}{\partial z} \frac{\partial \psi_k}{\partial z} - \frac{2\nu k^2}{r^4} \frac{\partial \psi_k}{\partial r} = -G_c \frac{\partial c_k}{\partial r} - G_\theta \frac{\partial \theta_k}{\partial r} \quad \text{en } \Omega_0 \quad (144)$$

$$-L \psi_k + \frac{w_k}{r} = 0 \quad \text{en } \Omega_0 \quad (145)$$

$$\psi_k = 0, \quad w_k = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_0 \cup \Gamma_v \cup \Gamma_b \cup \Gamma_t \quad (146)$$

En los cambios de variables para la velocidad y en la presentación de los modelos matemáticos anteriores hemos supuesto que toda la materia en el molde de solidificación se encuentra en fase mezcla y líquida, o equivalentemente:

$$(c(x), \theta(x)) \in \overline{\Theta_m \cup \Theta_l} \quad \forall x \in \Omega_0,$$

de modo que la región sólida en la sección transversal es vacía, esto es

$$\Omega_{0s} = \Phi \quad \wedge \quad \Omega_{0ml} = \Omega_0.$$

En caso contrario se tendría que

$$w_0 = 0, \quad \psi_0 = \text{constante}, \quad \phi_0 = 0 \quad \text{en } \Omega_{0s}.$$

REFERENCIAS

- 1 N.M. Ahmad, “Numerical simulation of transport processes in multicomponent systems related to solidification problems”, Ph.D. Thesis DMA-EPFL 1349, (1995).
- 2 D.M. Anderson y M. Grae Worster, “Weakly nonlinear analysis of convection in a mushy layer during the solidification of binary alloys”, *J. Fluid Mec.*, Vol. **302**, pp. 307–331, (1995).
- 3 D.M. Anderson y M. Grae Worster, “A new oscillatory instability in a mushy layer during the solidification of binary alloys”, *J. Fluid Mec.*, Vol. **307**, pp. 245–267, (1996) .
- 4 A. Bermúdez y C. Saguez, “Mathematical formulation and numerical solution of an alloy solidification problem”, en “*Free boundary problems: theory and applications*”, A. Fasano y M. Primicerio (Eds.), **1**, Pitmann, pp. 237–247, (1983).
- 5 P. Blanc y L. Gasser, “Existence of a weak solution of a binary alloy problem”, Technical Report 12.92 DMA-EPFL, (1992).
- 6 P. Blanc, L. Gasser y J. Rappaz, “Existence for a stationary model of binary alloy solidification”, *M2AN*, Vol. **29**, pp. 687–699, (1995).
- 7 H. Combeau y G. Lesoult, “Simulation of freckles formation and related segregation during directional solidification of metallic alloys”, en “*Modelling of casting, welding and advanced solidification processes 6*” V. Voller, T.S. Pivonka y L. Katgerman (Eds.), pp. 201–208, (1993).
- 8 J.D.P. Donnelly, “A model for non-equilibrium thermodynamic processes involving phase changes”, *J. Inst. Math. Appl*, Vol. **24**, pp. 425–438, (1979).
- 9 M. Durán, E. Ortega-Torres y J. Rappaz, “On the existence and uniqueness of stationary and reproductive solutions of a binary alloy solidification model”, en preparación (2001).
- 10 M. Durán y F. Gaillard, “Numerical analysis of a solidification process”, *Proceeding 29 Congrès Nationale d’Analyse Numérique*, Francia, (1997).
- 11 M. Durán, F. Gaillard y J. Rappaz, “Analyse mathématique et numérique des mouvements de convection dans un alliage en cours de solidification”, *Proceeding 28 Congrès Nationale d’Analyse Numérique*, Francia, (1996).
- 12 M. Durán, E. Ortega-Torres y J. Rappaz, “On bifurcation in a convection-diffusion model describing a solidification process”, *Proceeding ECCOMAS 2000, Conference on Computational Fluid Dynamics*, Barcelona, España, (2000).
- 13 M. Durán, J. Rappaz y M. Rojas-Medar, “An existence and uniqueness result for a stationary model describing a non-homogeneous binary solidification process”, Informe técnico PUC/FM-99/03, Facultad de Matemáticas, P. Universidad Católica de Chile, (1999).
- 14 S.D. Felicelli, J.C. Heinrich y D.R. Poirier, “Simulation of freckles during vertical solidification of binary alloys”, *Metall. Trans.*, Vol. **B 22B**, pp. 847–859, (1991).
- 15 S. Felicelli, J.C. Heinrich, P. Nandapurkar y D.R. Poirier, “Thermosolutal convection during dendritic solidification of alloys. Part 1: Linear stability analysis”, *Metall. Trans.*, Vol. **B 20B**, pp. 711–721, (1989).
- 16 S. Felicelli, J.C. Heinrich, P. Nandapurkar y D.R. Poirier, “Thermosolutal convection during dendritic solidification of alloys. Part 2: Non-linear convection”, *Metall. Trans.*, Vol. **B 20B**, pp. 883–891, (1989).
- 17 A.C. Fowler, “The formation of freckles in binary alloys”, *IMA J. Appl. Maths.*, Vol. **35**, pp. 159–174, (1985).

- 18 F. Gaillard, “Modélisation et analyse numérique d’instabilités développées lors de la solidification d’alliages binaires”, Ph.D. Thesis DMA-EPFL, (1998).
- 19 F. Gaillard y J. Rappaz, “*Analysis and numerical simulation for models of binary alloy solidification*”, Periaux Contributed Book, John Wiley & Sons, Ltd., (1997).
- 20 L. Gasser, “Existence analysis and numerical schemes for models of binary alloy solidification”, Ph.D. Thesis DMA-EPFL 1421, (1995).
- 21 P.A. Gremaud, “Analyse numérique de problèmes de changements de phase liés à des phénomènes de solidification”, Ph.D. Thesis DMA-EPFL 941, (1991).
- 22 R.N. Hills, D.E. Loper y P.H. Roberts, “A thermodynamically consistent model of a mushy zone”, *Q. J. Mech. Appl. Math.*, Vol. **36**, pp. 505–539, (1983).
- 23 S. Luckhaus y A. Visintin, “Phase transition in multicomponent systems”, *Manuscripta Math.*, Vol. **43**, pp. 261–288, (1983).
- 24 L.M. Milne-Thomson, “*Theoretical hydrodynamics*”, Dover Publications, Inc., New York, (1996).
- 25 C. Prakash y V.R. Voller, “A fixed grid numerical modelling methodology for convection-diffusion mushy region phase-change problems.”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. **30**, pp. 1709–1719, (1987).
- 26 M. Rappaz y V.R. Voller, “Modelling of micro-macroseggregation in solidification processes”, *Metall. Trans.*, Vol. **A 21A**, pp. 749–753, (1990).
- 27 F.W. Sears, “*An introduction to thermodynamics, the kinetic of gases, and statistical mechanics*”, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Massachusetts, (1959).
- 28 A.H. Shapiro, “*The dynamics and thermodynamics of compressible flow*”, Ronald Press, New York, (1953).
- 29 S.S. Steube y A. Hellawell, “Fluid Flow and the development of channel segregation during alloy solidification”, Videotape, Michigan Technological University, Houghton.
- 30 M. Cervera, C. Agelet De Saracibar y M. Chiumenti, “Thermomechanical analysis of industrial solidification processes”, *Int. J. Num. Methods Engng.*, Vol. **46**, pp. 1575–1591, (1999).
- 31 M. Cruchaga y D. Celentano, “A finite element thermally coupled flow formulation for phase-change problems”, *Int. J. Num. Methods Fluids.*, Vol. **34**, pp. 279–305, (2000).