

Modelización de sistemas multicuerpo flexibles para análisis dinámico con no linealidad geométrica

Ruth Gutiérrez, Urbano LUGRÍS, Javier Cuadrado y Luis E. Romera

Escuela Politécnica Superior, Universidad de A Coruña
C/ Esteiro s/n, 15403 Ferrol, España
Tel.: 981 16 70 00 ext. 3884, Fax: 981 33 74 10
e-mail: rutgut@udc.es

Resumen

Las herramientas de simulación en el análisis de sistemas multicuerpo son un campo de investigación vivo y abierto, que permite la reducción de tiempos y costes en el proceso de diseño de sistemas mecánicos. Durante los últimos años, los autores han desarrollado un método de análisis de sistemas multicuerpo con componentes rígidos y flexibles, basado en la aproximación de sistema de referencia móvil. En este tipo de métodos se usan coordenadas que separan el movimiento de gran amplitud del mecanismo, del de pequeña amplitud, debido a la deformación de componentes. Son muy eficientes y están muy extendidos, pero son válidos cuando los componentes flexibles experimentan pequeñas deformaciones. Con componentes suficientemente flexibles trabajando a velocidades elevadas deja de ser admisible la hipótesis de pequeñas deformaciones y aparecen efectos de segundo orden que influyen decisivamente en la predicción del movimiento del sistema. Este trabajo estudia la modelización del fenómeno de rigidización geométrica en el análisis de sistemas multicuerpo con componentes flexibles, con un doble objetivo, la determinación precisa del estado tensional en componentes y la consecución de tiempo real en la simulación de este tipo de sistemas en ordenadores convencionales. Para ello se analiza un sistema en el que esta no linealidad elástica geométrica es significativa y se ensayan dos propuestas basadas, respectivamente, en el aumento del número de modos axiales y en la consideración del movimiento axial causado por la flexión o "foreshortening". Dichas propuestas permiten mejorar la precisión y la eficiencia de las formulaciones actuales.

Palabras clave: *Simulación, Sistemas Multicuerpo Flexibles, Rigidización geométrica, Eficiencia.*

FLEXIBLE MULTIBODY SYSTEMS MODELING FOR A DYNAMIC ANALYSIS WITH GEOMETRIC NONLINEARITY

Summary

Simulation tools are an open and active research field for analysis of multibody systems, as it permits time and cost reduction in the design process of mechanical systems. During the last years, the authors have developed a method for the analysis of rigid-flexible multibody systems. The flexible bodies are modeled by means of the floating frame of reference formulation. This group of methods works with two kind of coordinates, elastic and reference coordinates, which allow us to consider separately the movement of large and small amplitude. It is the most widely used group of methods in the computer simulation of flexible multibody systems and they are accurate considering small deformation hypothesis behavior of the components. With large flexible components rotating to high speed, the small deformation hypothesis behavior are no longer admissible and the second order effects are determinant in the movement prediction. This work investigates the geometric stiffness phenomena modeling in the analysis of flexible multibody systems with a double objective, the accurate determination of the stress field and the achievement of real-time performance on conventional PC platforms. A system where this geometric nonlinearity is relevant is analyzed. Two proposals are explored, incrementing the number of axial deformation modes and considering the foreshortening effect, respectively, in order to improve the accuracy and the efficiency of the current formulations.

Keywords: *Simulation, Flexible Multibody Systems, Geometric Stiffness, Efficiency*

INTRODUCCIÓN

El diseño y cálculo de sistemas mecánicos con componentes flexibles frecuentemente requiere, además de la información del movimiento, el estado tensional. La industria asociada demanda sistemas mecánicos que son cada vez más desafiantes para el diseñador, más versátiles, más flexibles, que operan a mayor velocidad, se emplean nuevos materiales... etc. El tiempo que transcurre desde la necesidad de un nuevo diseño, hasta su puesta en el mercado es inversamente proporcional al beneficio obtenido y, en algunos casos, determinante por la competencia existente. Así, la agilidad es un valor muy apreciable que las herramientas de simulación posibilitan.

Existen dos grandes familias de formulaciones que permiten la obtención de tensiones en mecanismos: la familia basada en la aproximación de sistema de referencia móvil y la familia de formulaciones globales. La primera estudia el movimiento de gran amplitud de cada componente y el movimiento de pequeña amplitud debido a la deformación a través de coordenadas distintas, definiendo estas últimas en un sistema de referencia móvil asociado con el componente flexible considerado. La segunda familia no realiza esta separación, utilizando coordenadas en un sistema de referencia inercial. Ambas presentan ventajas e inconvenientes en su aplicación. La familia que emplea sistemas de referencia móviles se aplica a mecanismos cuyos componentes trabajan bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones. La familia de métodos globales contempla hipótesis de trabajo más amplias, permitiendo abordar problemas con no linealidad geométrica, de grandes deformaciones, comportamiento no lineal del material, cambio de condiciones de contorno, etc. Sin embargo, esta familia de métodos necesita un número elevado de variables y emplea siempre las complejas relaciones necesarias para abordar estos problemas, incluso cuando el comportamiento es sencillo. Por comparación, el número de variables que necesita emplear la primera permanece moderado. Además, en la práctica, existe un gran número de mecanismos en los que la hipótesis de pequeñas deformaciones de componentes resulta adecuada. Por ello, esta primera familia de formulaciones, que es la más extendida, presenta ventajas importantes que justifican su estudio en el marco de la mejora de las herramientas de simulación para diseño de mecanismos.

Los autores han desarrollado una metodología para el análisis de la Dinámica de Sistemas Multicuerpo con componentes rígidos y Flexibles, denominada en adelante metodología DSMF, que se basa en la aproximación de sistema de referencia móvil, técnica bien establecida para el análisis de sistemas mecánicos con componentes flexibles^{1,2}. Existen numerosos trabajos previos que emplean dicha técnica, sin embargo, una metodología basada en estas técnicas puede ser formulada de diferentes maneras que no son equivalentes. La combinación de las coordenadas de modelización seleccionadas, las ecuaciones dinámicas, el método de integración escogido y otros temas de implementación como por ejemplo, el empleo de la aproximación co-rotacional o el uso de técnicas de síntesis modal, determinan el rendimiento de la formulación en términos de precisión, eficiencia, robustez y facilidad de implementación.

Las características principales de la metodología DSMF son: el empleo de coordenadas naturales para la modelización¹, el uso de la aproximación co-rotacional para simplificar los términos inerciales asociados a los componentes flexibles³, el establecimiento de las ecuaciones del movimiento con una formulación lagrangiana aumentada en índice 3 con proyecciones de velocidad y aceleración⁴, y su integración numérica mediante un método implícito de paso simple, la regla trapezoidal⁵. Como se ha mencionado, la flexibilidad de los sólidos se introduce mediante aproximación de sistema de referencia móvil², utilizando el método de superposición modal para describir las deformaciones locales⁶, con modos estáticos y dinámicos definidos en un sistema de referencia tangente^{7,8}. La descripción de la metodología DSMF para el análisis dinámico de sistemas multicuerpo con elementos rígidos

y flexibles se efectúa en⁹. En¹⁰ se emplea dicho método para analizar el movimiento y el estado tensional de un sistema multicuerpo complejo, como es un vehículo automóvil, considerando los componentes flexibles trabajando en régimen elástico lineal, bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones.

Con componentes suficientemente flexibles deja de ser aplicable al hipótesis de pequeñas deformaciones, y para analizar este tipo de mecanismos se hace necesario adaptar los métodos basados en la aproximación de sistema de referencia móvil ya que fallan por una prematura linealización. En este trabajo se describe la adaptación de la metodología de los autores para contemplar no linealidades geométricas como el fenómeno de rigidización dinámica. Asimismo, se comprueba que es capaz de captar perfectamente dicho fenómeno, comparando los resultados producidos por la misma, sobre un ejemplo tipo benchmark, con los publicados por otros autores. Finalmente, se ensayan propuestas para determinar una formulación óptima para el cálculo de esfuerzos, que permita mejorar la precisión manteniendo la eficiencia de la metodología. Dichas propuestas se basan respectivamente en la introducción de un mayor número de modos de deformación que complete el campo de desplazamientos supuesto, y en el empleo de otras coordenadas para los desplazamientos de pequeña magnitud, concretamente, en la consideración del movimiento axial causado por la flexión o “foreshortening”. Dichas propuestas permiten la obtención eficiente de tensiones en este tipo de mecanismos.

ADAPTACIÓN DE LA METODOLOGÍA DSMF ANTE EL FENÓMENO DE RIGIDIZACIÓN GEOMÉTRICA

Se ha demostrado la incapacidad de los modelos dinámicos basados en las relaciones lineales deformación-desplazamiento para reproducir el fenómeno de rigidización geométrica¹¹, fenómeno crucial en la modelización, por ejemplo, de vigas esbeltas experimentando grandes rotaciones de sólido rígido a velocidades elevadas. En casos como éste, es necesario introducir la no linealidad geométrica en el modelo.

En el contexto de la simulación de sistemas multicuerpo, el objetivo es encontrar el vector de fuerzas internas elásticas basado en las relaciones deformación-desplazamiento no lineales, manteniendo la aproximación de sistema de referencia móvil en la descripción del movimiento. En este caso, el tratamiento del movimiento de sólido rígido de cada cuerpo se independiza de la modelización de la deformación, permitiendo una relativamente fácil extensión de muchas de las formulaciones dinámicas existentes a regímenes de movimiento donde los efectos geométricos no lineales son importantes.

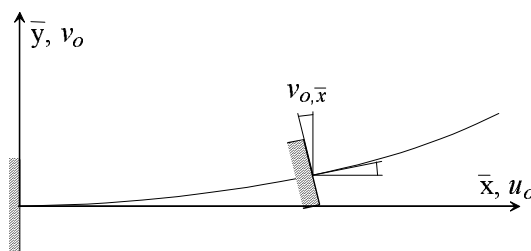


Figura 1. Desplazamientos elásticos de una viga plana de Euler-Bernoulli

El fenómeno de rigidización geométrica en vigas se ha introducido efectuando la descripción cinemática del campo de deformaciones en términos de los desplazamientos elásticos convencionales, e introduciendo las relaciones deformación-desplazamiento no lineales en la formulación de la energía de deformación. Este es el planteamiento más extendido y es en el que se basa la propuesta de los autores^{12,13,14,15}.

Se realiza el planteamiento en una viga esbelta (hipótesis de Euler-Bernoulli) de sección constante A , inercia I y longitud L , con movimiento plano, cuyo campo de desplazamientos elásticos queda descrito por el vector \mathbf{u} :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_o - \bar{y}v_{o,\bar{x}} \\ v_o \end{bmatrix} \quad (1)$$

Siendo u_o y v_o los desplazamientos en las direcciones axial y perpendicular de la viga de los puntos del eje elástico, respectivamente, y $v_{o,\bar{x}} = \frac{\partial v_{o,\bar{x}}}{\partial \bar{x}}$ el giro de la sección. El planteamiento es generalizable a vigas con movimiento espacial¹⁶. Las relaciones deformación-desplazamiento no lineales para este sistema se concretan en la siguiente expresión:

$$E_{xx} = u_{,\bar{x}} + \frac{1}{2} \left[(u_{,\bar{x}})^2 + (v_{,\bar{x}})^2 \right] \cong u_{,\bar{x}} + \frac{1}{2} (v_{,\bar{x}})^2 = u_{o,\bar{x}} - \bar{y}v_{o,\bar{x}\bar{x}} + \frac{1}{2} (v_{o,\bar{x}})^2 \quad (2)$$

Es una práctica habitual despreciar el término $(u_{,\bar{x}})^2$ frente a $u_{,\bar{x}}$. Se formula la función energía de deformación:

$$V = \frac{E}{2} \int_V (E_{xx})^2 dV \quad (3)$$

Introduciendo la expresión (1) del campo de desplazamientos y desarrollando se obtienen los siguientes términos,

$$V = \underbrace{\frac{EA}{2} \int_L (u_{o,\bar{x}})^2 dx}_{V_1} + \underbrace{\frac{EI}{2} \int_L (v_{o,\bar{x}\bar{x}})^2 dx}_{V_2} + \underbrace{\frac{EA}{8} \int_L (v_{o,\bar{x}})^4 dx}_{V_2} + \underbrace{\frac{EA}{2} \int_L u_{o,\bar{x}} (v_{o,\bar{x}})^2 dx}_{V_3} \quad (4)$$

Despreciando el término V_2 , la expresión de la energía potencial queda

$$V = \frac{EA}{2} \int_L (u_{o,\bar{x}})^2 dx + \frac{EI}{2} \int_L (v_{o,\bar{x}\bar{x}})^2 dx + \frac{EA}{2} \int_L u_{o,\bar{x}} (v_{o,\bar{x}})^2 dx \quad (5)$$

en la que, además de los términos clásicos, se ha incluido el término de tercer orden que acopla el desplazamiento axial y el desplazamiento transversal.

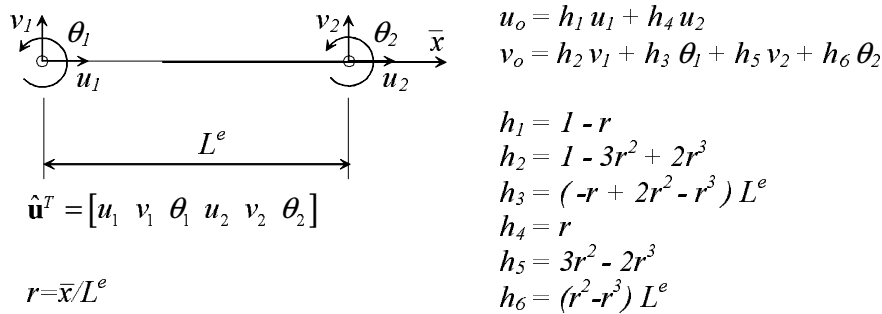


Figura 2. Elemento finito viga con movimiento plano: funciones de interpolación y grados de libertad

Se considera un elemento finito tipo viga de Euler Bernoulli con movimiento plano, con tres grados de libertad por nudo, los dos desplazamientos en el plano y el giro respecto de la dirección perpendicular al mismo. El elemento finito, el vector de grados de libertad nodales y las funciones de aproximación empleadas para interpolar el campo de desplazamientos se muestran en la Figura 2.

En la expresión (5) de la energía potencial, se introduce el campo de desplazamientos propuesto para este elemento, reflejado en la Figura 2, y se obtiene la energía de deformación para un elemento finito:

$$V^e = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{K}_{LMEF}^e \hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{K}_{GMEF}^e \hat{\mathbf{u}} \quad (6)$$

siendo $\hat{\mathbf{u}}$ el vector de desplazamientos nodales del elemento finito y, \mathbf{K}_{LMEF}^e y \mathbf{K}_{GMEF}^e , las matrices de rigidez clásicas lineal y geométrica, respectivamente, del método de elementos finitos, para dicho elemento.

$$\mathbf{K}_{LMEF}^e = \begin{bmatrix} EA/L^e & 0 & 0 & -EA/L^e & 0 & 0 \\ & 12EI/L^{e3} & 6EI/L^{e2} & 0 & -12EI/L^{e3} & 6EI/L^{e2} \\ & & 4EI/L^e & 0 & -6EI/L^{e2} & 2EI/L^e \\ sim & & & EA/L^e & 0 & 0 \\ & & & & 12EI/L^{e3} & -6EI/L^{e2} \\ & & & & & 4EI/L^e \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{K}_{GMEF}^e = \frac{EA}{L^e} (u_2 - u_1) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 6/5L^e & 1/10 & 0 & -6/5L^e & 1/10 \\ & & 2L^e/15 & 0 & -1/10 & L^e/30 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ sim & & & & 6/5L^e & -1/10 \\ & & & & & 2L^e/15 \end{bmatrix} \quad (8)$$

La matriz de rigidez geométrica depende linealmente de los desplazamientos nodales axiales del elemento. Para poner de manifiesto esta dependencia, dicha matriz se puede descomponer en una matriz constante, denominada \mathbf{K}_{GLMEF}^e , que depende únicamente de la longitud elemental y afecta únicamente a los grados de libertad v y θ , multiplicada por el factor $\frac{EA}{L^e} (u_2 - u_1)$. Así, la expresión (6) queda:

$$V^e = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{K}_{LMEF}^e \hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \frac{EA}{L^e} (u_2 - u_1) \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{K}_{GLMEF}^e \hat{\mathbf{u}} \quad (9)$$

Se considera un sólido flexible discretizado en nef elementos finitos de igual longitud L^e y sección A , y nnd nudos. La energía de deformación para este sólido flexible se construye a partir de la contribución de cada uno de los elementos finitos, y viene dada por la expresión:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{nef} \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{K}_{LMEF}^i \hat{\mathbf{U}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{nef} \frac{EA}{L^i} (u_2^i - u_1^i) \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{K}_{GLMEF}^i \hat{\mathbf{U}} \quad (10)$$

En esta expresión se emplean las matrices de rigidez elementales ampliadas al tamaño del vector de grados de libertad de la discretización, $\hat{\mathbf{U}}^T$.

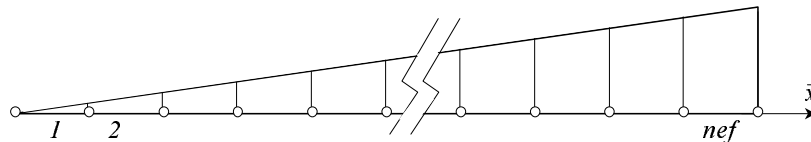


Figura 3. Campo de desplazamientos axiales en la discretización de elementos finitos

Se considera una variación lineal para el campo de desplazamientos axiales en el interior del sólido flexible. En este caso, se cumple que el factor que introduce la no linealidad en la matriz de rigidez geométrica es constante e igual para todos los elementos:

$$EA \frac{(u_2^i - u_1^i)}{L^i} = EA \frac{\Delta L^i}{L^i} = EA \frac{\Delta L}{L} = P \quad (11)$$

Esto permite el ensamblaje de las matrices de rigidez elementales, para formar la matriz de rigidez geométrica global de la discretización.

$$\begin{aligned} V &= \sum_{i=1}^{nef} \left[\frac{1}{2} \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{K}_{LMEF}^i \hat{\mathbf{U}} + \frac{1}{2} P \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{K}_{GLMEF}^i \hat{\mathbf{U}} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \hat{\mathbf{U}}^T \left(\sum_{i=1}^{nef} \mathbf{K}_{LMEF}^i \right) \hat{\mathbf{U}} + \frac{1}{2} P \hat{\mathbf{U}}^T \left(\sum_{i=1}^{nef} \mathbf{K}_{GLMEF}^i \right) \hat{\mathbf{U}} = \\ &= \frac{1}{2} \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{K}_{LMEF} \hat{\mathbf{U}} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{U}}^T P \mathbf{K}_{GLMEF} \hat{\mathbf{U}} \end{aligned} \quad (12)$$

En esta expresión, la carga axial, P , es constante para todos los elementos de la discretización, de valor proporcional al incremento de longitud del sólido elástico en cada instante de tiempo. La matriz de rigidez geométrica para una discretización cualquiera se puede obtener, en una fase de preproceso, de un programa comercial de elementos finitos, para cargas unitarias. Se introduce en la formulación multiplicada por el factor P en cada instante de tiempo. Así, la energía de deformación es,

$$V = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{K}_{MEF} \hat{\mathbf{U}} \quad (13)$$

expresión en la que la matriz de rigidez del método de elementos finitos está compuesta de dos términos, la matriz de rigidez constante y la matriz de rigidez geométrica.

$$\mathbf{K}_{MEF} = \mathbf{K}_{LMEF} + P \mathbf{K}_{GLMEF} \quad (14)$$

En cada instante de tiempo, la deformación del sistema queda determinada por el producto de los modos de deformación multiplicados por las amplitudes correspondientes.

$$\hat{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} u_{o1} \\ v_{o1} \\ \theta_1 \\ \vdots \\ u_{onnd} \\ v_{onnd} \\ \theta_{nnd} \end{bmatrix} = \left[\bar{\Phi}_1 \quad \cdots \quad \bar{\Phi}_{ne} \quad \bar{\Psi}_1 \quad \cdots \quad \bar{\Psi}_{nd} \right] \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_{ne} \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{nd} \end{bmatrix} = \mathbf{X} \mathbf{y} \quad (15)$$

siendo u_{oi} y v_{oi} los desplazamientos del eje elástico en cada instante de tiempo en el sistema de referencia móvil, θ_i el ángulo girado por la sección, correspondientes al nudo i , $\bar{\Phi}_j, \bar{\Psi}_k$, representan los ne modos estáticos y los nd modos dinámicos de vibración respectivamente y η_l, ξ_m , representan las amplitudes de dichos. Estos modos ordenados por columnas forman la matriz modal \mathbf{X} , y sus amplitudes correspondientes el vector de amplitudes modales \mathbf{y} . Sustituyendo en la expresión (13) de la energía potencial, se obtiene

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{X}^T \mathbf{K}_{LMEF} \mathbf{X} \mathbf{y} + \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{X}^T P \mathbf{K}_{GLMEF} \mathbf{X} \mathbf{y} \quad (16)$$

Del producto $\mathbf{X}^T \mathbf{K}_{LMEF} \mathbf{X}$ se obtiene la matriz de rigidez constante \mathbf{X}_L del sólido flexible referida a las variables modales. El producto $\mathbf{X}^T P \mathbf{K}_{GLMEF} \mathbf{X}$ es el término de la

matriz de rigidez responsable del efecto de rigidización dinámica, y de él se obtiene la matriz de rigidez geométrica \mathbf{K}_G del sólido flexible referida a las variables modales.

Así, la energía de deformación referida a las variables modales queda

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{K} \mathbf{y} \quad (17)$$

siendo \mathbf{K} la matriz de rigidez proyectada a los modos del componente flexible considerado. El vector de fuerzas elásticas del sólido flexible considerado se obtiene a partir de esta expresión, derivando respecto a las variables básicas de dicho sólido:

$$\mathbf{Q}_{elast} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} \quad (18)$$

siendo $\mathbf{q}^T = [\mathbf{r}_o^T \quad \mathbf{u}^T \quad \mathbf{v}^T \quad \boldsymbol{\eta}^T \quad \boldsymbol{\xi}^T]$ el vector de variables básicas del sólido flexible considerado. Puesto que la energía de deformación depende únicamente del vector de amplitudes modales, las componentes no nulas del vector de fuerzas elásticas se sitúan en la posición de dichas amplitudes y se pueden agrupar para formar el vector \mathbf{Q}_{el} ,

$$\mathbf{Q}_{el} = -\mathbf{K} \mathbf{y} \quad (19)$$

Cálculo de esfuerzos

El vector de variables de un sistema mecánico incluye las amplitudes de los modos de deformación estáticos y dinámicos de cada componente considerado flexible. Dichas amplitudes determinan el campo de desplazamientos elásticos de un componente flexible, en el sistema de referencia móvil asociado a dicho sólido flexible, $\hat{\mathbf{U}}$, y su estado tensional, que se obtiene al final de cada paso de tiempo.

$$\hat{\mathbf{U}} = \sum_{i=1}^{ne} \bar{\boldsymbol{\Phi}}_i \eta_i + \sum_{j=1}^{nd} \bar{\boldsymbol{\Psi}}_j \xi_j \quad (20)$$

Este vector contiene los desplazamientos nodales del componente estructural considerado flexible. La extracción de los desplazamientos nodales elementales, $\hat{\mathbf{u}}$, en los puntos de cálculo permiten la obtención del estado tensional en dichos puntos, retomando la discretización de elementos finitos. En particular, para obtener los esfuerzos en una discretización de elementos viga en la que la forma analítica de los modos de deformación es conocida, en primer lugar se obtiene la posición deformada de la barra en el sistema de referencia móvil multiplicando dichas funciones por las amplitudes de los modos de deformación según la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} u_o &= \Phi_1 \eta_1 \\ v_o &= \Phi_2 \eta_2 + \Psi_1 \xi_1 + \Psi_2 \xi_2 \\ \theta &= v'_o = \Phi'_2 \eta_2 + \Psi'_1 \xi_1 + \Psi'_2 \xi_2 \end{aligned} \quad (21)$$

Esta expresión nos permite calcular los desplazamientos nodales, $\hat{\mathbf{u}}$, de cualquier elemento de una discretización propuesta. En segundo lugar, el vector de esfuerzos nodales elementales, \mathbf{S}^e , se obtiene,

$$\mathbf{S}^e = \mathbf{K}^e \hat{\mathbf{u}} \quad (22)$$

siendo \mathbf{K}^e , la matriz de rigidez elemental. Cuando se considera el fenómeno de rigidización dinámica, la matriz de rigidez elemental \mathbf{K}^e empleada en el cálculo del estado tensional tiene la siguiente expresión

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{K}_L^e + P \mathbf{K}_{GL}^e \quad (23)$$

siendo \mathbf{K}_L^e la matriz de rigidez elemental constante, \mathbf{K}_{GL}^e la parte constante de la matriz de rigidez geométrica y P el esfuerzo axial del elemento considerado que depende de u_1 y u_2 , grados de libertad de desplazamiento axial de dicho elemento.

Esta forma de modelización del fenómeno de rigidización geométrica exige la introducción de, al menos, un modo de deformación axial, ya que si no, el término no lineal de las fuerzas elásticas sería nulo. Como indica la expresión (11), el modo más sencillo es considerar un único modo global con variación lineal para el desplazamiento axial. Con este modelo, en cada instante de tiempo el esfuerzo axial obtenido es constante en toda la barra, y puede escribirse como,

$$N = EAu_{o,x} = EA\Phi_{1,x}\eta_1 = \frac{EA}{L}\eta_1 \quad (24)$$

Esta modelización permite obtener el momento flector en cualquier sección de la barra, a partir de la expresión (22) incluyendo la contribución de la matriz de rigidez lineal y geométrica. Sin embargo, no permite obtener la variación longitudinal de los esfuerzos axiales. Considerando la forma de la matriz de rigidez geométrica, expresión (8), y la expresión (22) para el cálculo de esfuerzos, la contribución de los términos no lineales al esfuerzo axial es nula. Así, la introducción de la matriz de rigidez geométrica en la metodología DSMF permite la modelización precisa y eficiente del fenómeno de rigidización geométrica, pero la precisión en el cálculo de esfuerzos es mejorable. A continuación se efectúan dos propuestas para mejorar este campo.

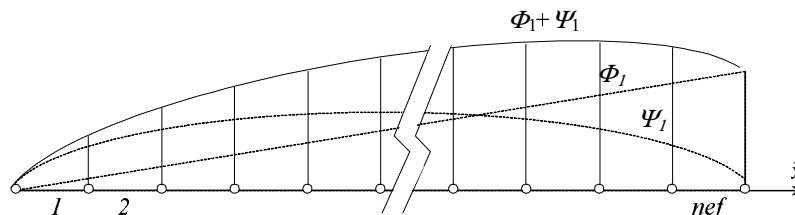


Figura 4. Campo de desplazamientos axiales en la discretización de elementos finitos

PROPUESTAS DE MEJORA

Aumento del número de modos axiales de deformación

Para conseguir una variación longitudinal más precisa del esfuerzo axial, se puede mejorar el campo de desplazamientos axiales, incluyendo modos dinámicos de deformación que completen el campo de desplazamientos axiales en el sólido flexible. Se propone la consideración de dos modos de deformación axiales, el estático, lineal, y uno dinámico, senoidal.

$$u_o = \Phi_1\eta_1 + \Psi_1\xi_1 \quad (25)$$

La expresión de la energía potencial se modifica en el sentido de que el factor que multiplica a al producto $\hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{K}_{GLMEF}^i \hat{\mathbf{U}}$ para cada elemento de la discretización, deja de ser constante e igual para todos los elementos.

La deformación axial de cada elemento se puede obtener en función de los modos estáticos y dinámicos introducidos; así, el factor queda,

$$EA \frac{u_2^i - u_1^i}{L^i} = EA \frac{\Delta L^i}{L^i} = \frac{EA}{L^i} [\Phi_1(x_2^i)\eta_1 + \Psi_1(x_2^i)\xi_1] - \frac{EA}{L^i} [\Phi_1(x_1^i)\eta_1 + \Psi_1(x_1^i)\xi_1] \quad (26)$$

Si se divide en una parte constante y una variable,

$$EA \frac{u_2^i - u_1^i}{L^i} = EA \frac{\Delta L^i}{L^i} = EA \left[\left(\frac{\Delta L}{L} \right)_{const} + \left(\frac{\Delta L}{L} \right)_{var} \right] = P_{const} + P_{var} \quad (27)$$

la energía potencial, comparada con la expresión (16) en la que el campo de desplazamientos axiales considerado es lineal, tiene *nef* términos adicionales.

Formulación foreshortening

Esta formulación permite adaptar la metodología DSMF para contemplar el movimiento de sistemas mecánicos que sufren rigidización geométrica, introduciendo en la expresión de la energía potencial las relaciones deformación-desplazamiento lineales. En este caso, la no linealidad geométrica se introduce directamente en el campo de desplazamientos, a través del ‘*foreshortening*’ o acortamiento por flexión de la componente longitudinal de los desplazamientos elásticos. El campo de desplazamientos axiales considerado es:

$$u_0 = s_0 + u_{fs} = s_0 - \frac{1}{2} \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}} (v_{o,\bar{x}})^2 d\bar{x} \quad (28)$$

donde u_0 y v_0 son los desplazamiento en dirección axial y transversal a la viga de los puntos del eje elástico. u_0 se divide en dos componentes, s_0 y u_{fs} . La componente s_0 es el desplazamiento axial debido a la deformación del eje elástico, y u_{fs} es el movimiento en dirección axial debido a la flexión de la viga, calculado a partir de un punto de referencia x_0 . En la expresión de la energía de deformación interviene el acortamiento del eje elástico por deformación axial y tiene la expresión:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EA (s_{0,\bar{x}})^2 d\bar{x} + \frac{1}{2} \int_0^L EI (v_{0,\bar{x}\bar{x}})^2 d\bar{x} \quad (29)$$

cuya forma es la misma que en el caso lineal, pero que contiene los términos no lineales que permiten caracterizar el fenómeno de rigidización geométrica si consideramos la expresión (28). Se considera el campo de desplazamientos propuesto en la Figura 2 para un elemento finito tipo viga, expresado en forma matricial

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \mathbf{S} \hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_l^e \\ \mathbf{S}_t^e \end{pmatrix} \hat{\mathbf{u}} \quad (30)$$

donde \mathbf{u} es el desplazamiento de un punto \bar{x}^e interior al elemento, $\hat{\mathbf{u}}$ son los desplazamientos de los nudos del elemento, y \mathbf{S}_l^e y \mathbf{S}_t^e son los vectores de funciones de interpolación longitudinales y transversales respectivamente. Si se añade el *foreshortening*, la expresión resultante es:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_l^e \\ \mathbf{S}_t^e \end{pmatrix} \hat{\mathbf{u}} + \begin{pmatrix} u_{fs}^e \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_{fs}^e = -\frac{1}{2} \int_0^{\bar{x}^e} (v_{0,\bar{x}^e})^2 d\bar{x}^e \quad (31)$$

donde u_{fs}^e es el acortamiento por flexión particularizado para el elemento e .

Si comparamos las expresiones (30) y (31) observamos u_0 es el desplazamiento del eje elástico en dirección axial, sólo que en la expresión (30) se considera una única causa del movimiento axial, la deformación axial, y en la expresión (31) se consideran dos causas, la deformación axial y el *foreshortening* o movimiento axial debido a la flexión.

Introduciendo las funciones de interpolación del desplazamiento v_o , se obtiene el desplazamiento axial por flexión, respecto al nudo inicial, de un punto interior al elemento, \bar{x}^e , en función de los desplazamientos nodales:

$$u_{fs}^e = -\frac{1}{2} \int_0^{\bar{x}^e} \hat{\mathbf{u}}^T \left(\frac{\partial \mathbf{S}_t^e}{\partial \bar{x}^e} \right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{S}_t^e}{\partial \bar{x}^e} \right) \hat{\mathbf{u}} d\bar{x}^e = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{H}^e \hat{\mathbf{u}} \quad (32)$$

La matriz \mathbf{H}^e , que es simétrica, depende únicamente de \bar{x}^e , y puede particularizarse a los nudos, definiendo una matriz constante:

$$\mathbf{H}_L^e = \int_0^{L^e} \left(\frac{\partial \mathbf{S}_t^e}{\partial \bar{x}} \right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{S}_t^e}{\partial \bar{x}} \right) d\bar{x} \quad (33)$$

que permite calcular el acortamiento por *foreshortening* total sufrido por un elemento a partir de sus desplazamientos nodales lineales:

$$u_{fs}^{e*} = -\frac{1}{2} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{H}_L^e \hat{\mathbf{u}} \quad (34)$$

Si la barra está compuesta por varios elementos, el desplazamiento total debido al *foreshortening* sufrido por un nudo i , (nudo inicial del elemento e), es la suma de los acortamientos de todos los elementos anteriores (del 1 al $e-1$). Dicho desplazamiento vale para el nudo i :

$$u_{fs}^{i*} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{e-1} \hat{\mathbf{u}}^{jT} \mathbf{H}_L^j \hat{\mathbf{u}}^j \quad (35)$$

Esta ecuación se puede expresar en forma matricial para incluir el vector completo de desplazamientos nodales $\hat{\mathbf{U}}$, denominando \mathbf{H}_n^i a la matriz total correspondiente al nudo i .

$$u_{fs}^{i*} = -\frac{1}{2} \hat{\mathbf{U}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{H}_L^1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_L^2 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \mathbf{H}_L^{e-1} & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{U}} = -\frac{1}{2} \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{H}_n^i \hat{\mathbf{U}} \quad (36)$$

Así, queda completamente definido el campo de desplazamientos axiales introducido. El vector de fuerzas elásticas se deduce de la expresión de la energía de deformación. Esta formulación tiene la misma precisión que se obtiene teniendo en cuenta todos los términos al calcular la energía de deformación, pero utilizando una matriz de rigidez lineal^{13,14,15}.

EJEMPLO

Se considera una viga articulada a un punto fijo en uno de sus extremos moviéndose en un plano horizontal según se indica en la Figura 5. Se desprecian los efectos de la gravedad. La viga tiene las siguientes propiedades: densidad, $\rho = 3000 \text{ Kg/m}^3$, módulo de elasticidad, $E = 7.0 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$, longitud, $L = 10 \text{ m}$, sección, $A = 4.0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, momento de inercia geométrico, $I = 2.0 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$.

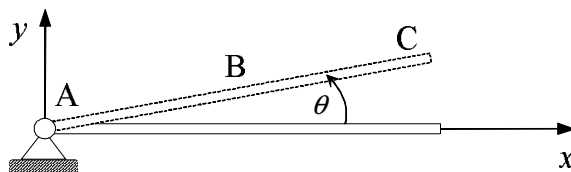


Figura 5. Viga articulada con coordenada guiada

Se presenta la resolución del movimiento y el estado tensional del sistema, en los puntos A, B y C, sometido a la siguiente maniobra, que se introduce a través de la coordenada guiada θ .

$$\theta(t) = \frac{w_s}{T_s} \left(\frac{t^2}{2} + \left(\frac{T_s}{2\pi} \right)^2 \left[\cos \left(\frac{2\pi t}{T_s} \right) - 1 \right] \right) \quad 0 \leq t \leq T_s \quad (37)$$

con los siguientes parámetros: $w_s = 6 \text{ rad/s}$ y $T_s = 15 \text{ s}$

Es un ejemplo tipo benchmark, incluido en varios trabajos^{12,16}, seleccionado para caracterizar el fenómeno de rigidización dinámica. La maniobra que describe la barra giratoria es lo suficientemente rápida para que fallen las formulaciones que emplean la expresión de la energía de deformación clásica, porque los esfuerzos axiales, debidos a las fuerzas centrífugas, contribuyen efectivamente a disminuir las deformaciones por flexión.

Se efectúan tres simulaciones en las que se emplea la metodología DSMF sobre tres modelos diferentes de la barra giratoria, que se describen a continuación. La diferencia entre ellos radica en la descripción del movimiento de pequeña amplitud, responsable de la deformación en el sistema de referencia móvil, y el campo de desplazamientos axiales, que se presupone por la selección de los modos globales estáticos y dinámicos de deformación incluidos en el cálculo.

Modelo #1: se emplean las coordenadas típicas en elasticidad para una viga con movimiento plano en pequeñas deformaciones: los desplazamientos en las direcciones axial y perpendicular de los puntos del eje elástico y el giro del mismo respecto a la dirección perpendicular al plano del movimiento. El campo de desplazamientos axiales propuesto es lineal.

Modelo #2: se emplean las coordenadas típicas en elasticidad para una viga con movimiento plano, pero se mejora el campo de desplazamientos axiales, proponiendo la superposición de dos modos, uno estático y uno dinámico, con variación lineal y senoidal, respectivamente.

Modelo #3: se emplean como coordenadas de la viga con movimiento plano el desplazamiento en la dirección axial denominado “foreshortening”, que es el desplazamiento en la dirección longitudinal de una sección de la viga debida a la deformación por flexión del sistema. Además, se utiliza el desplazamiento en la dirección perpendicular de los puntos del eje elástico y el giro del mismo respecto a la dirección perpendicular al plano del movimiento. En este caso no es necesaria la introducción de un modo de deformación axial para modelizar el fenómeno de rigidización geométrica.

Se efectúa asimismo, una cuarta simulación de la maniobra descrita con un programa comercial de elementos finitos, COSMOS/M v2.9, que tiene como objetivo la comparación de los esfuerzos. Como se ha mencionado, el método de elementos finitos en régimen dinámico no lineal contempla automáticamente todos los efectos no lineales, incluidos los relativos a una no linealidad geométrica; además, es una técnica de cálculo completamente distinta de la metodología propuesta, accesible y ampliamente empleada para el análisis de tensiones y deformaciones de sistemas estructurales, por lo que los resultados de esta cuarta y última simulación se usan como referencia en precisión.

A continuación se describen los modelos, representados en la Figura 6.

Para configurar el modelo #1, en la articulación de la barra se sitúa la base formada por el punto $\mathbf{p1}$ y los vectores $\mathbf{v1}$ y $\mathbf{v2}$. En el extremo de la barra se define el punto $\mathbf{p2}$. El desplazamiento local unitario en la dirección axial del punto $\mathbf{p2}$ da lugar al modo de deformación estática axial Φ_1 . El desplazamiento unitario de dicho punto en dirección perpendicular al elemento da lugar al modo de deformación estática a flexión Φ_2 . Además, para representar con más exactitud la configuración deformada de la barra, se añaden los modos de deformación dinámicos Ψ_1 y Ψ_2 , que son los modos naturales de vibración a flexión

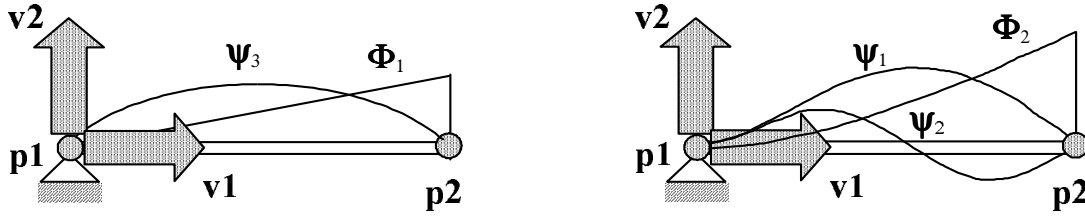


Figura 6. Modelización de una viga articulada flexible: a) modos axiales de deformación; b) modos transversales de deformación

de la barra con las fronteras fijas, es decir, los correspondientes a una viga empotrado-articulada. El modo axial senoidal, Ψ_3 , no interviene en este modelo. La forma de las funciones Φ_1, Φ_2, Ψ_1 y Ψ_2 es conocida¹⁷ y se representan en la Figura 6. Su expresión matemática es la siguiente:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{x}{L} & \Phi_2 &= \frac{3}{2} \left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L}\right)^3 & 0 \leq x \leq L \\ \psi_1 &= \text{sen} \left(\beta_{11} \frac{x}{L}\right) - \text{Sh} \left(\beta_{11} \frac{x}{L}\right) + \alpha_1 [\text{Ch} \left(\beta_{11} \frac{x}{L}\right) - \cos \left(\beta_{11} \frac{x}{L}\right)] & \beta_{11} &= 3,926602 & \alpha_1 &= \frac{\text{sen}(\beta_{11}) - \text{Sh}(\beta_{11})}{\cos(\beta_{11}) - \text{Ch}(\beta_{11})} \\ \psi_2 &= \text{sen} \left(\beta_{12} \frac{x}{L}\right) - \text{Sh} \left(\beta_{12} \frac{x}{L}\right) + \alpha_2 [\text{Ch} \left(\beta_{12} \frac{x}{L}\right) - \cos \left(\beta_{12} \frac{x}{L}\right)] & \beta_{12} &= 7,068583 & \alpha_2 &= \frac{\text{sen}(\beta_{12}) - \text{Sh}(\beta_{12})}{\cos(\beta_{12}) - \text{Ch}(\beta_{12})} \end{aligned} \quad (38)$$

En este modelo se ha incluido un único modo lineal de deformación axial que es el modo más sencillo que permite caracterizar el movimiento del sistema propuesto en este ejemplo. La selección de los modos de vibración de flexión es debida a que el sistema considerado, bajo la carga descrita, es suficientemente esbelto como para tener un comportamiento de viga plana de Euler-Bernoulli, pudiendo despreciarse la energía de deformación por cortante. El vector de variables del problema queda:

$$\mathbf{q}^T = [\theta \quad v1_x \quad v1_y \quad v2_x \quad v2_y \quad \eta_1 \quad \eta_2 \quad \xi_1 \quad \xi_2 \quad p2_x \quad p2_y] \quad (39)$$

donde η_1, η_2, ξ_1 y ξ_2 son las amplitudes de los modos estáticos y dinámicos, respectivamente. Por tanto, el número total de variables es 11, de las que sólo 5 son independientes.

En cada instante de tiempo, la deformación del sistema queda determinada por el producto de los modos de deformación descritos multiplicados por las amplitudes correspondientes. La energía de deformación expresada en función de las amplitudes de los modos de deformación queda:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EA (\Phi_1' \eta_1)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI (\Phi_2'' \eta_2 + \Psi_1'' \xi_1 + \Psi_2'' \xi_2)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EA \Phi_1' \eta_1 (\Phi_2' \eta_2 + \Psi_1' \xi_1 + \Psi_2' \xi_2)^2 dx \quad (40)$$

Así, la energía de deformación del sistema puede ser expresada en forma matricial como,

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{K}_L \mathbf{y} + \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{K}_G \mathbf{y} = \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{K} \mathbf{y} \quad (41)$$

siendo \mathbf{y} el vector de amplitudes modales y \mathbf{K} la matriz de rigidez condensada a los modos, que está formada por dos términos: la matriz de rigidez constante y la matriz de rigidez geométrica, que es lineal con respecto a la coordenada elástica η_1 . Si los modos de deformación se introducen mediante las funciones teóricas conocidas mostradas en la expresión (38), los términos de estas matrices, \mathbf{K}_L y \mathbf{K}_G , y por tanto, la matriz de rigidez condensada a los modos, \mathbf{K} , se puede obtener en una fase de preproceso.

El modelo #2 queda reflejado en la Figura 6; mejora el campo de desplazamientos axiales, u_o , del modelo #1, introduciendo, un modo dinámico adicional de deformación, que se representa en dirección perpendicular a la viga en dicha figura junto con el modo axial lineal. El campo de desplazamientos v_o , es el mismo en ambos modelos.

$$\psi_3 = \text{sen} \left(\frac{\pi x}{L} \right) \quad (42)$$

En el modelo #3 no es necesario introducir ningún campo de desplazamientos axiales para modelizar el fenómeno de rigidización geométrica. Para caracterizar el movimiento se emplean tres modos de deformación transversal, uno estático, Φ_2 , y dos dinámicos, Ψ_1 y Ψ_2 . Estas funciones son las mismas que las mencionadas para el modelo #1.

Para la cuarta simulación, con el método de elementos finitos, se emplea el modelo EF, consistente en una malla de diez elementos viga bidimensional (BEAM2D), de igual longitud, con tres grados de libertad por nudo: los dos desplazamientos en el plano y el giro perpendicular al mismo. Las condiciones de contorno consisten en imponer traslaciones nulas en el primer nudo, que es fijo. El programa permite asociar el grado de libertad giro del primer nudo del primer elemento, a una curva temporal, definida por la expresión (37); esto permite guiar cinemáticamente la viga. Se realiza un análisis dinámico no lineal con control en fuerzas, empleando el código comercial COSMOS/M 2.9. Las ecuaciones dinámicas de equilibrio se integran utilizando el método de Newmark, con parámetros $\delta=0.5$ y $\alpha=0.5625$, para introducir un ligero amortiguamiento numérico que reduce parte de la inestabilidad de la solución. Como procedimiento iterativo se emplea el método de Newton-Raphson, calculando la matriz de rigidez del sistema en cada iteración, dentro de cada paso.

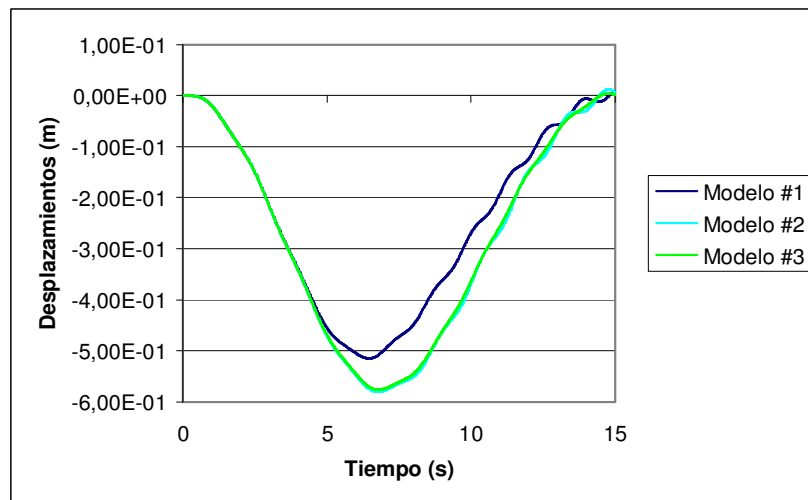


Figura 7. Desplazamiento elástico v_o del extremo de la viga

En la Figura 7 se presentan los desplazamientos del extremo de la viga, v_o , para los tres modelos. Los resultados de la simulación efectuada se pueden comparar con los publicados por otros autores^{12,16}, para constatar la extensión sencilla y eficiente de la metodología DSMF al tratamiento del fenómeno de la rigidización geométrica. En esta figura no aparecen los resultados de la simulación por elementos finitos porque este tipo de programas no ofrecen los movimientos que provocan deformación en la viga, que es lo que refleja dicha figura, sino los movimientos globales, suma del movimiento de sólido rígido y el de deformación. La simulación por elementos finitos se emplea en el cálculo de tensiones.

En la Figura 8 se pueden observar tres gráficas de los esfuerzos axiales sufridos por la viga en los puntos A, B, y C, que son el punto de unión con la articulación, el punto medio de la barra y extremo libre respectivamente. En cada una de las gráficas se exponen los resultados de los modelos descritos, en las cuatro simulaciones de 15 segundos de duración. Se observa que los máximos se producen en el punto A.

El modelo #1 produce un esfuerzo constante en toda la viga, por lo que se ve la misma función en las tres gráficas. Observando su variación a lo largo del tiempo en cualquiera de las tres gráficas, se puede ver el fenómeno de rigidización dinámica, cómo aumentan los esfuerzos axiales a medida que la viga va girando más rápido, estabilizándose cuando se alcanza la velocidad de funcionamiento de 6 rad/s.

El modelo #2 mejora los resultados del modelo #1. Se puede observar la variación longitudinal del esfuerzo axial. Los resultados se acercan más a los producidos por la simulación de elementos finitos.

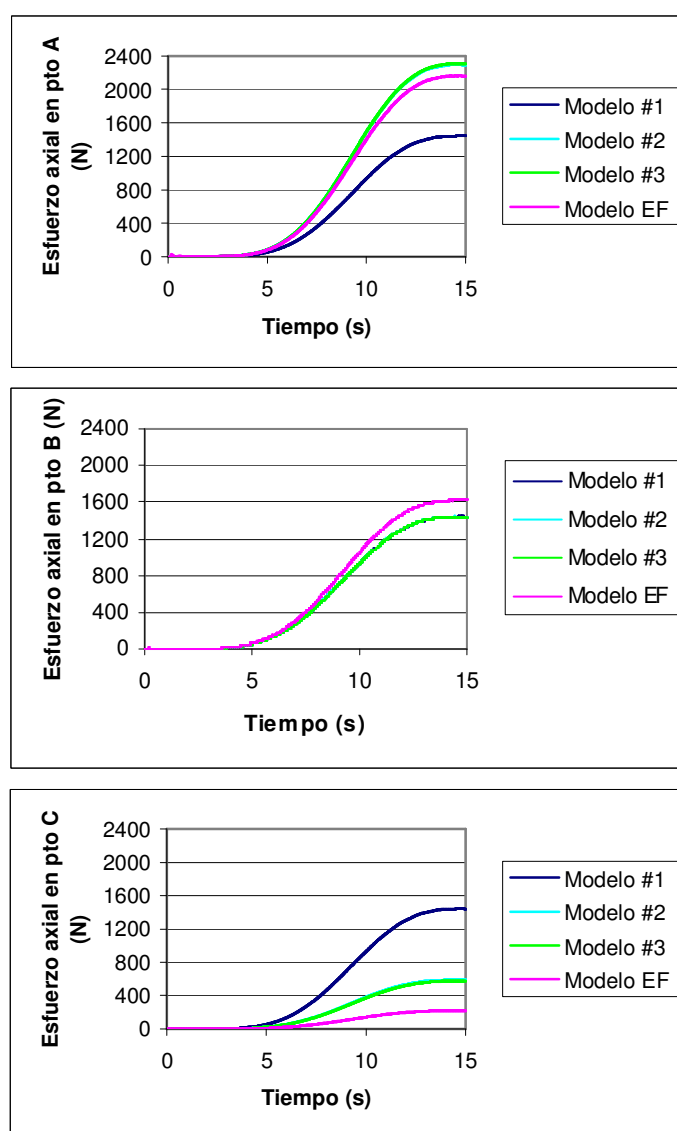


Figura 8. Esfuerzos axiales en los puntos A, B y C de la viga

El modelo #3 no produce esfuerzos axiales si no se introducen modos de deformación axial. Sin embargo, la introducción de dichos modos permite, a través de la expresión (31) el cálculo de esfuerzos axiales. Los modos de deformación asociados a desplazamientos axiales tienen una rigidez mayor que los modos asociados a desplazamientos longitudinales, y su introducción dificulta el proceso de integración. Por ello, la eficiencia del algoritmo se ve afectada. Así, la introducción en el modelo #3 de los dos modos axiales de deformación reflejados en la Figura 6 produce esfuerzos axiales con el mismo nivel de precisión que el modelo #2, pero su eficiencia disminuye tal y como se refleja en la Tabla I.

Todos los modelos debieran dar esfuerzo axial nulo en el punto C. No ocurre esto en el modelo #1 porque el esfuerzo que produce es constante en toda la viga, incluido el extremo libre; El modelo #2 da un valor mucho más cercano al valor teórico nulo, porque introduce una aproximación mejor de los desplazamientos axiales. El modelo de elementos finitos, modelo EF, tampoco produce esfuerzo axial nulo por considerar masas concentradas en nudos. En el último elemento las fuerzas de inercia axiales provocan un esfuerzo axial.

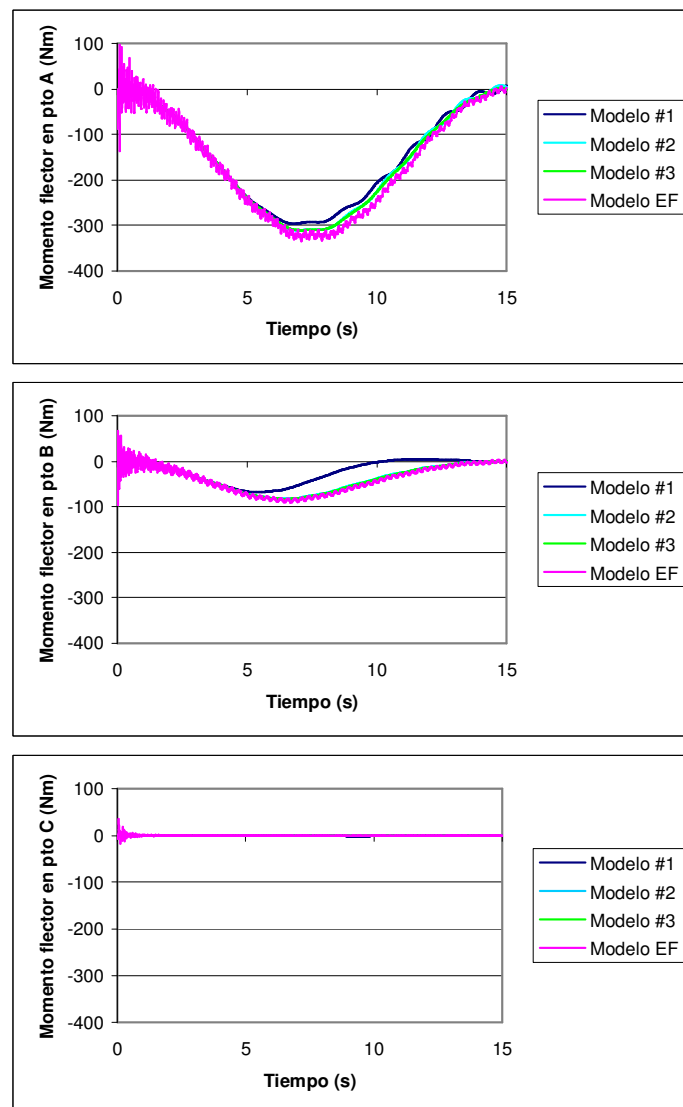


Figura 9. Momentos flectores en los puntos A, B y C de la viga

Los resultados de momento flector se muestran en la Figura 9. Las tres gráficas corresponden a los puntos A, B y C de la viga. En cada gráfica se muestran los fletores de los cuatro modelos descritos. Los máximos se producen en A. En este caso, los fletores predichos por todos los modelos se anulan en C.

Las simulaciones se han llevado a cabo sobre la misma plataforma, en un ordenador convencional con sistema operativo Windows XP, dotado de un procesador AMD AthlonTM XP 2600+ a 1.92 GHz. Para efectuar las primeras simulaciones se han programado aplicaciones específicas en FORTRAN, empleando un paso de tiempo de 0.001 s. La última simulación se realiza con el programa comercial de elementos finitos, COSMOS/M v2.90, empleando asimismo un paso de tiempo de 0.001 s. El tiempo de CPU empleado por cada uno de los modelos se muestra en la Tabla I. Los tres modelos ensayados son muy eficientes, efectuando la simulación de 15 s. de duración en un tiempo por debajo del tiempo real. La diferencia con respecto a la simulación efectuada con el modelo de elementos finitos es importante, sin embargo, se debe ponderar considerando que se efectúa con un programa de elementos finitos de propósito general en vez de con aplicaciones específicas, dedicando 180 s. de los 357 s. a preproceso y postproceso de datos.

Modelo	Tiempo CPU (s)
Modelo #1	11.03
Modelo #2	12.96
Modelo #3	10.13/16.01
Modelo EF	357.00

Tabla I. Tiempos de CPU empleados en las simulaciones.

CONCLUSIONES

- Los tres modelos empleados permiten la modelización del fenómeno de rigidización geométrica. En este trabajo se ha analizado la precisión de los esfuerzos obtenidos con cada uno de ellos y la eficiencia de las simulaciones efectuadas.

- El modelo #1 permite el cálculo de diagramas de momentos fletores del sistema en cada paso de tiempo. En la caracterización del fenómeno de rigidización geométrica, el término de acoplamiento entre los desplazamientos en dirección axial y transversal es decisivo. Así, el modelo #2 mejora la precisión de los momentos fletores al completar el campo de desplazamientos axiales. Dicho modelo también produce una mayor precisión en el cálculo de los esfuerzos axiales, obteniendo una variación a lo largo del eje longitudinal de la barra, acorde con los esfuerzos axiales que provocan las fuerzas de inercia centrífugas debidas al giro respecto de un extremo fijo.

- El modelo #3 permite la caracterización del fenómeno de rigidización geométrica sin introducir modos axiales de deformación y calcula los momentos fletores con una precisión similar a la del modelo #2. La introducción de modos axiales permite la obtención de esfuerzos axiales, pero hace disminuir la eficiencia.

- Los tres modelos ensayados son capaces de efectuar la simulación de 15 segundos de duración en un tiempo por debajo del tiempo real, sobre un ordenador personal convencional, siendo el modelo #3 el más eficiente. En este aspecto, la diferencia respecto a los métodos globales es importante, y crece con la complejidad del sistema simulado, representando una ventaja comparativa en tareas de diseño de este tipo de sistemas, donde conocer el estado tensional en condiciones de funcionamiento resulta importante.

- En resumen, el modelo #1 es la forma más sencilla de incluir el fenómeno de rigidización geométrica; da resultados precisos en un gran número de casos, aunque no permite la obtención de esfuerzos axiales con precisión. El modelo #2 incluye un mayor número de

modos de deformación, permitiendo una caracterización más precisa del fenómeno y mejorando el campo de esfuerzos axiales respecto del anterior. El modelo #3 es una forma menos sistemática de introducir dicho fenómeno, aunque tan precisa como el modelo #2 y más eficiente para la obtención de movimientos.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado en el contexto del proyecto DPI2003-05547C0201 Financiado por el MCYT y del incentivo al mismo PGIDIT04PXIC16601PN aportado por la Secretaría General de I+D de la Xunta de Galicia.

REFERENCIAS

- 1 J. García de Jalón y E. Bayo, *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems – The Real-Time Challenge*, Springer-Verlang, (1994).
- 2 A.A. Shabana, *Dynamics of Multibody Systems*, 2nd Edition, Cambridge University Press, (1998).
- 3 M. Geradin y A. Cardona, *Flexible Multibody Dynamics – A Finite Element Approach–*, John Wiley and Sons, (2001).
- 4 E. Bayo y R. Ledesma, “Augmented Lagrangian and Mass-Orthogonal Projection Methods for Constrained Multibody Dynamics”, *Nonlinear Dynamics*, Vol. **9**, pp. 113-130, (1996).
- 5 L.F. Shampine, *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*, Chapman & Hall, (1994).
- 6 L. Meirovitch y M.K. Kwak, “Convergence of the Classical Rayleigh-Ritz Method and the Finite Element Method”, *AIAA Journal*, Vol. **28**, N° 8, pp. 1509-1516, (1990).
- 7 J. Cuadado, J. Cardenal y J. García de Jalón, “Flexible Mechanism through natural coordinates and component synthesis: An approach fully compatible with the rigid case”, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. **39**, pp. 3535-3551, (1996).
- 8 R. Schwertassek, O. Wallrapp y A.A. Shabana, “Flexible Multibody Simulation and Choice of Shape Functions”, *Nonlinear Dynamics*, Vol. **20**, N° , pp. 361-380 (1999).
- 9 J. Cuadrado, R. Gutierrez, M.A. Naya y P. Morer, “A comparison in terms of accuracy and efficiency between a MBS dynamic formulation with stress analysis and a non-linear FEA code”, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. **51**, N° 9, pp. 1033-1052, (2001).
- 10 J. Cuadrado, R. Gutierrez, M.A. Naya y P. Morer, “Experimental validation of a flexible MBS dynamic formulation through comparison between measured and calculated stresses on a prototype car”, *Multibody Syst.Dyn.*, Vol. **11**, N° 2, pp. 147-166, (2004).
- 11 T.R. Kane, R.R. Ryan y A.K. Banerjee, “Dynamics of a cantilever beam attached to a moving base”, *Journal of Guidance and Control*, Vol. **10**, pp. 139-151, (1987).
- 12 I. Sharf, “Geometrically non-linear beam element for dynamics simulation of multibody systems”, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. **39**, pp. 763-786, (1996).
- 13 J. Mayo, J. Domínguez y A.A. Shabana, “Geometrically non-linear formulations of beams in flexible multibody dynamics”, *Journal of Vibrations and Acoustics*, Vol. **117**, pp. 501-509, (1995).
- 14 J. Mayo y J. Domínguez, “Geometrically non-linear formulations of flexible multibody systems in terms of beams elements: geometric stiffness”, *Computers and Structures*, Vol. **59**, pp. 1039-1050, (1996).
- 15 J. Mayo, D.García-Vallejo y J.Dominguez, “Study of the geometric stiffening effect: Comparison of different formulations”, *Multibody Syst.Dyn.*, Vol. **11**, N° 4, pp. 321-341, (1994).

- 16 A. Avello, "Simulación dinámica interactiva de mecanismos flexibles con pequeñas deformaciones", Tesis Doctoral, Universidad de Navarra, España, (1995).
- 17 S.S. Rao *Mechanical Vibrations*. Third Edition. Addison-Wesley Publishing Company Reading, Massachusetts, (1995).