Rev. Int. Mét. Num. Cálc. Dis. Ing.
Vol. **25, 2,** 163-190 (2009)

**Revista Internacional de
Métodos Numéricos para
Cálculo y Diseño en Ingeniería**

Uma abordagem unificada da formulação co-rotacional para elementos de treliça 2D, treliça 3D e viga 2D

William Taylor Matias e Luciano Mendes

Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Tecnologia
Universidade de Brasília - UnB
Campus Darcy Ribeiro, 70910-900 Brasília-DF, Brasil
Tel.: 55 61 33072303; Fax: 55 61 32741517
e-mail: taylor@unb.br, lmbz@unb.br

Resumen

Neste trabalho apresenta-se uma descrição unificada para retratar a cinemática co-rotacional de elementos de barra deformáveis, que podem ser discretizados com elementos de treliça plana, de treliça espacial ou de viga 2D. A cinemática co-rotacional se basea na separação do movimento em uma parte deformacional, e a outra, em movimento de corpo rígido. Para o caso de translações e rotações, definidas por um único parâmetro angular, o movimento deformacional é obtido analíticamente. Demonstra-se que a obtenção do deslocamento deformacional se basea em uma expressão vetorial única independente do tipo de elemento de barra adotado. Em seguida, obtém-se o vetor de força interna e a matriz de rigidez tangente através das derivadas direcionais, de primeira e segunda ordem, da energia de deformação.

Palavras chaves: *formulação co-rotacional, análise não-linear geométrica, elementos de barra.*

A COROTATIONAL UNIFIED FORMULATION FOR TRUSSES AND 2D BEAMS ELEMENTS

Summary

This article presents a unified corotational kinematics of deformable bar elements that can be represented as plane truss, spatial truss or 2D beam elements. The corotational kinematics is based on the separation of the motion on deformational and rigid body components. For the case of translations and rotations, determined by a single angular parameter, the deformational motions are expressible in closed form. It is demonstrated that the determination of the deformational motions are based on a unique vectorial expression independent on the bar element used. In addition, the element internal force and consistent tangent stiffness matrix are derived by taking variations of the internal energy with respect to nodal freedoms.

Keywords: *corotational description, geometrically nonlinear structural analysis, bar elements.*

 ISSN: 0213–1315 Recibido: Octubre 2008 Aceptado: Enero 2009

INTRODUÇÃO

O desenvolvimento da *formulação co-rotacional* (CR) na análise não-linear do sólido teve um impulso no início dos anos 80, com os trabalhos[1,2], entre outros. Entretanto, segundo Felippa & Haugen[3], a formulação CR, ainda, não há logrado difundir-se nos códigos comerciais do método dos elementos finitos, talvez, pelos os desafios que esta formulação deve vencer, tais como: a) obtenção de uma matriz de rigidez simétrica consistente para rotações finitas em 3D[4−7], b) obtenção do vetor de forças internas auto-equilibrado, além do equilibrio global, considerando rotações finitas em 3D[8,9]. Por outro lado, na análise dinâmica não-linear muitos aspectos teóricos desta formulação encontram-se em aberto; [10−12]. Neste trabalho, sem pretenções de resolver os problemas acima mencionados, descreve-se a cinemática dos elementos de treliça plana, de treliça espacial e de viga 2D, através da formulação CR, com o objetivo de unificar os aspectos teóricos desta formulação no tratamento de rotações finitas em 2D e na extração dos movimentos deformacionais. O conceito chave da formulação CR se basea na decomposição da configuração de referência em duas, Felippa & Haugen[3]:

1. Uma configuração *inicial indeformada* ou de *referência* $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$, que é fixada em cada elemento da malha quando o sólido está em repouso.

2. Uma configuração *co-rotacionada* $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}$ que se move junto com cada elemento. A configuração $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}$ expressa o movimento de corpo rígido do elemento em relação à configuração $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$. O movimento deformacional se mede através da configuração *deformada* $\mathcal{C}$ com relação à configuração $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}$.

Na Figura 1 mostra-se a interpretação geométrica das configurações $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$, $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}$ e $\mathcal{C}$, respectivamente. Além disso, ainda, nesta figura, podem ser identificados os movimentos de corpo rígido e deformacional, respectivamente. Observe que a configuração $\mathcal{C}$ foi grosseiramente deformada, a partir de $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}$, para facilitar a distinção visual entre ambas configurações.

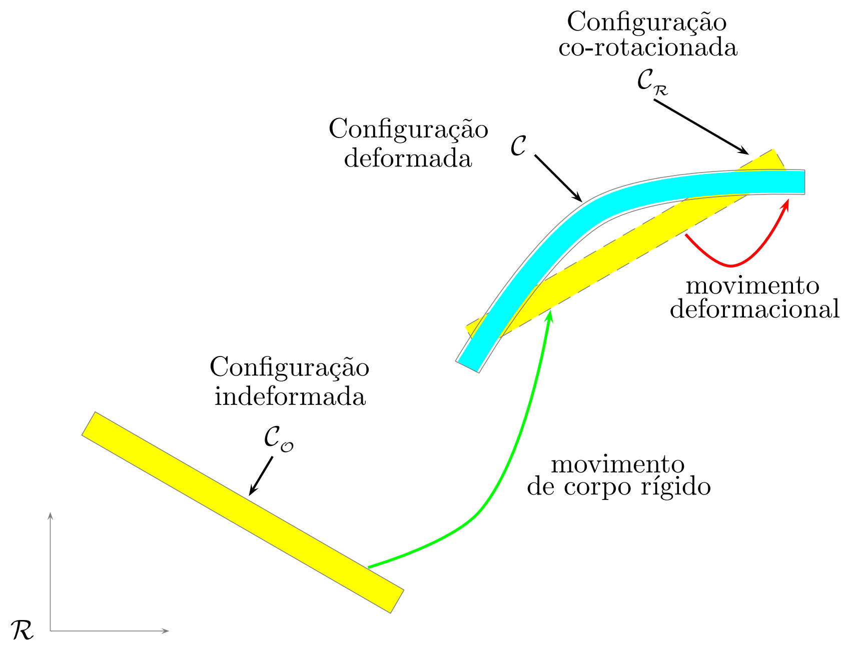

Figura 1. Descrição cinemática da formulação co-rotacional

Os elementos de treliça plana e espacial se caracterizam pela ausência de graus de liberdades rotacionais, enquanto que o elemento de viga 2D apresenta duas translações e um grau de liberdade rotacional, cujo eixo de rotação permance sempre perpendicular ao plano que contém o sólido. Portanto, as rotações em 2D se definem através de um único parâmetro angular. Devido à caracteristicas cinemáticas, anteriormente comentadas, a respeito desses elementos, é possível determinar a relação entre os movimentos de corpo rígido e deformacional explicitamente através da álgebra vetorial. Além disso, a interpetração geométrica desses movimentos é extremamente simples. Neste trabalho, demonstra-se que a equação vetorial que expressa o movimento deformacional de uma partícula arbitrária de um sólido é a mesma, quando este sólido é discretizado por elementos de treliça plana, ou por elementos de treliça espacial ou por elementos de viga 2D. Para isto, é necessário descrever uma transformação tensorial, transformação ortogonal, entre as bases ortonormais que são fixadas nas configurações *indeformada*, *co-rotacionada* e *deformada*, respectivamente. Uma vez definidas essas transformações ortogonais e as equações de movimento, chega-se à expressão do movimento deformacional.

ELEMENTO DE TRELIÇA 2D

Em primeiro lugar, adota-se um sistema de coordenadas globais cuja base ortonormal é dada por $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Para expressar as variáveis cinemáticas na configuração *indeformada* utilizam-se as coordenadas materiais (X, Y), enquanto que, na configuração *deformada* usam-se as coordenadas espaciais (x, y). Considere, agora, um corpo deformável discretizado por um elemento de treliça plana com dois nós, situados em suas extremidades, cujas coordenadas na configuração *indeformada* são dadas por $\mathbf{X}_1 = (X_1, Y_1)$ e $\mathbf{X}_2 = (X_2, Y_2)$, conforme mostra-se na Figura 2. O comprimento da barra em $\mathcal{C}_\mathcal{O}$ é $L_0 = \sqrt{X_{21}^2 + Y_{21}^2}$, com $X_{21} = X_2 - X_1$ e $Y_{21} = Y_2 - Y_1$. Nesta configuração é fixado, no centróide do elemento, um sistema de coordenadas locais cuja base ortonormal é dada por $(\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*)$. Após o corpo sofrer translações e rotações de corpo rígido e deformacionais, este ocupa uma posição dada pelas coordenadas espaciais de seus nós, que se expressam como $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2)$, respectivamente. A configuração *deformada* é definida por estas coordenadas como pode ser observado na Figura 2. Por outro lado, as coordenadas espaciais nodais podem ser escritas em função dos deslocamentos nodais como $\mathbf{x}_1 = \mathbf{X}_1 + \mathbf{u}_1$ e $\mathbf{x}_2 = \mathbf{X}_2 + \mathbf{u}_2$, respectivamente. O comprimento da barra na configuração *deformada* é

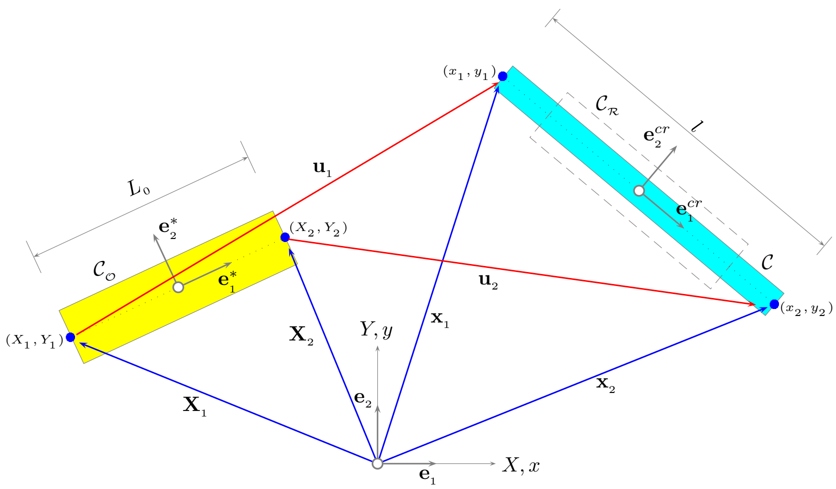

Figura 2. Cinemática co-rotacional do elemento de treliça 2D

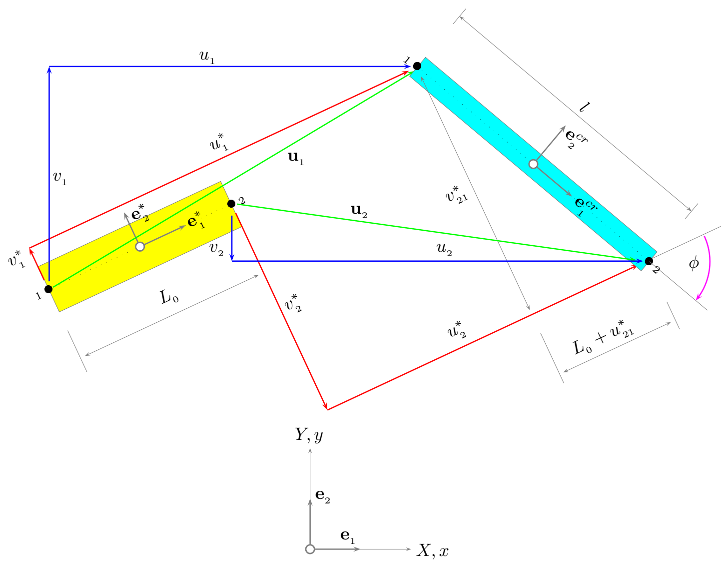

Figura 3. Componentes dos deslocamentos nodais em relação às bases $\mathbf{e}_i$ e $\mathbf{e}_i^*$

dado por $l = \sqrt{x_{21}^2 + y_{21}^2}$, com $x_{21} = x_2 - x_1 = (X_2 + u_2) - (X_1 + u_1) = X_{21} + u_{21}$ e $y_{21} = y_2 - y_1 = (Y_2 + v_2) - (Y_1 + v_1) = Y_{21} + v_{21}$, sendo $u_{21} = u_2 - u_1$ e $v_{21} = v_2 - v_1$, as componentes dos deslocamentos nodais em relação à base $\mathbf{e}_i$. Portanto, pode-se escrever que $l = \sqrt{(X_{21} + u_{21})^2 + (Y_{21} + v_{21})^2}$. Alternativamente, conforme mostra-se na Figura 3, esse comprimento pode ser expresso como $l = \sqrt{(L_0 + u_{21}^*)^2 + v_{21}^{*\,2}}$, sendo $u_{21}^* = u_2^* - u_1^*$ e $v_{21}^* = v_2^* - v_1^*$, as componentes dos deslocamentos nodais em relação à base $\mathbf{e}_i^*$. Ainda, como mostra-se na Figura 2, para identificar as translações e rotações de corpo rígido define-se uma configuração *co-rotacionada* que acompanha a configuração *deformada* do corpo. É fixada no centróide da configuração *co-rotacionada* um sistema de coordenadas locais cuja base ortonormal é dada por $(\mathbf{e}_1^{cr}, \mathbf{e}_2^{cr})$.

Uma vez que, são usadas grandezas vetoriais para descrever as variáveis cinemáticas da formulação co-rotacional, estas podem ser decompostas em relação a qualquer uma das bases ortonormais anteriormente descritas, isto é, $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_i^*$ e $\mathbf{e}_i^{cr}$. Portanto, é necessário definir as transformações ortogonais entre essas bases. A transformação ortogonal $\mathbf{Q}$ entre as bases $\mathbf{e}_i$ e $\mathbf{e}_i^*$ é dada por

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{e}_1^* = \frac{X_{21}}{L_0}\mathbf{e}_1 + \frac{Y_{21}}{L_0}\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3^* = \frac{\mathbf{e}_1^*\times\mathbf{e}_2}{|\mathbf{e}_1^*\times\mathbf{e}_2|} \implies \mathbf{e}_1^* \not\parallel \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2^* = \mathbf{e}_3^* \times \mathbf{e}_1^* \end{array}\right. \implies \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1^* \\ \mathbf{e}_2^* \\ \mathbf{e}_3^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_{21}}{L_0} & \frac{Y_{21}}{L_0} & 0 \\ -\frac{Y_{21}}{L_0} & \frac{X_{21}}{L_0} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{Bmatrix} \implies \mathbf{e}_i^* = \mathbf{Q}\mathbf{e}_i \qquad (1)$$

Por outro lado, a transformação ortogonal $\mathbf{Q}^*$ entre as bases $\mathbf{e}_i^{cr}$ e $\mathbf{e}_i^*$ é definida pelas seguintes relações

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{e}_1^{cr} = \frac{L_0+u_{21}^*}{l}\mathbf{e}_1^* + \frac{v_{21}^*}{l}\mathbf{e}_2^* \\ \mathbf{e}_3^{cr} = \frac{\mathbf{e}_1^{cr}\times\mathbf{e}_2^*}{|\mathbf{e}_1^{cr}\times\mathbf{e}_2^*|} \implies \mathbf{e}_1^{cr} \not\parallel \mathbf{e}_2^* \\ \mathbf{e}_2^{cr} = \mathbf{e}_3^{cr} \times \mathbf{e}_1^{cr} \end{array}\right. \implies \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1^{cr} \\ \mathbf{e}_2^{cr} \\ \mathbf{e}_3^{cr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_0+u_{21}^*}{l} & \frac{v_{21}^*}{l} & 0 \\ -\frac{v_{21}^*}{l} & \frac{L_0+u_{21}^*}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1^* \\ \mathbf{e}_2^* \\ \mathbf{e}_3^* \end{Bmatrix} \implies \mathbf{e}_i^{cr} = \mathbf{Q}^*\mathbf{e}_i^* \qquad (2)$$

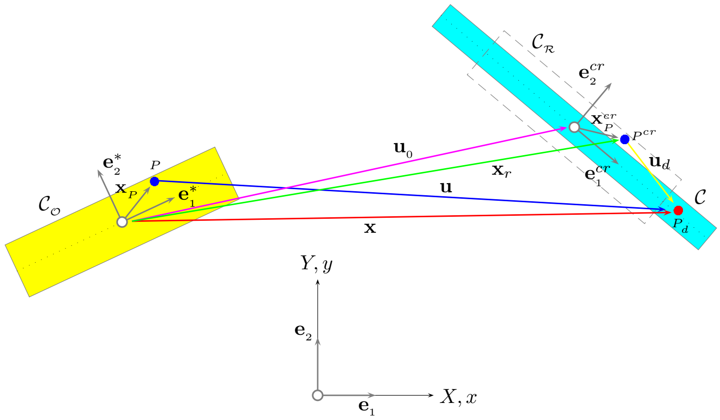

Figura 4. Movimento deformacional de uma partícula do elemento de treliça 2D

Finalmente, a transformação ortogonal $\hat{\mathbf{Q}}$ entre as bases $\mathbf{e}_i^{cr}$ e $\mathbf{e}_i$ é dada por

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1^{cr} = \frac{x_{21}}{l}\mathbf{e}_1 + \frac{y_{21}}{l}\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3^{cr} = \frac{\mathbf{e}_1^{cr} \times \mathbf{e}_2}{|\mathbf{e}_1^{cr} \times \mathbf{e}_2|} \implies \mathbf{e}_1^{\mathbf{cr}} \nparallel \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2^{cr} = \mathbf{e}_3^{cr} \times \mathbf{e}_1^{cr} \end{cases} \implies \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1^{cr} \\ \mathbf{e}_2^{cr} \\ \mathbf{e}_3^{cr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_{21}}{l} & \frac{y_{21}}{l} & 0 \\ -\frac{y_{21}}{l} & \frac{x_{21}}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{Bmatrix} \implies \mathbf{e}_i^{cr} = \hat{\mathbf{Q}}\mathbf{e}_i \quad (3)$$

Note que as componentes de $\mathbf{e}_1^*$ em (1) representam os co-senos diretores da barra na configuração *indeformada* com relação ao sistema de referência global $\mathbf{e}_i$. As componentes de $\mathbf{e}_1^{cr}$ em (2) denotam os co-senos diretores da barra na configuração *co-rotacionada* com relação à base $\mathbf{e}_i^*$, enquanto que, as componentes de $\mathbf{e}_1^{cr}$ em (3) denotam os co-senos diretores da barra na configuração *co-rotacionada* com relação à base $\mathbf{e}_i$. Substituindo a equação (1) na equação (2), chega-se a $\mathbf{e}_i^{cr} = \mathbf{Q}^*\mathbf{Q}\mathbf{e}_i$. Comparando-se este resultado com a equação (3), conclui-se que $\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}^*\mathbf{Q}$.

Movimento deformacional de uma partícula

Para descrever o movimento de uma partícula arbitrária do elemento de treliça 2D, inicialmente, os vetores de posição e de deslocamentos serão expressos em relação à base $\mathbf{e}_i^*$ definida na configuração *indeformada*. Seja uma partícula P de coordenadas (X_P^*, Y_P^*) em $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$, conforme mostra-se na Figura 4, que se move ao ponto P^{cr} de coordenadas (X_P^{cr}, Y_P^{cr}) em $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}$, e, em seguida, desloca-se ao ponto P_d de coordenadas (x^*, y^*) em $\mathcal{C}$. Devido ao movimento de corpo rígido entre as configurações $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ e $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}$, e levando em conta a equação (2), o vetor posição da partícula P em $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}$ pode ser expresso em função da base $\mathbf{e}_i^*$ como $\mathbf{X}_P^{cr^*} = \mathbf{Q}^{*T}\mathbf{X}_P^*$. Por outro lado, a posição da partícula P em $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}$, em relação ao sistema de referência local definido em $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$, é dado por

$$\mathbf{x}_r^* = \mathbf{u}_0^* + \mathbf{X}_P^{cr^*} = \mathbf{u}_0^* + \mathbf{Q}^{*T}\mathbf{X}_P^* \quad (4)$$

onde $\mathbf{u}_0^*$ é o deslocamento de corpo rígido do centróide do elemento entre as configurações *indeformada* e *co-rotacionada*. De acordo com a Figura 4, a posição da partícula P na configuração *deformada* é dada por

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{X}_P^* + \mathbf{u}^* \quad (5)$$

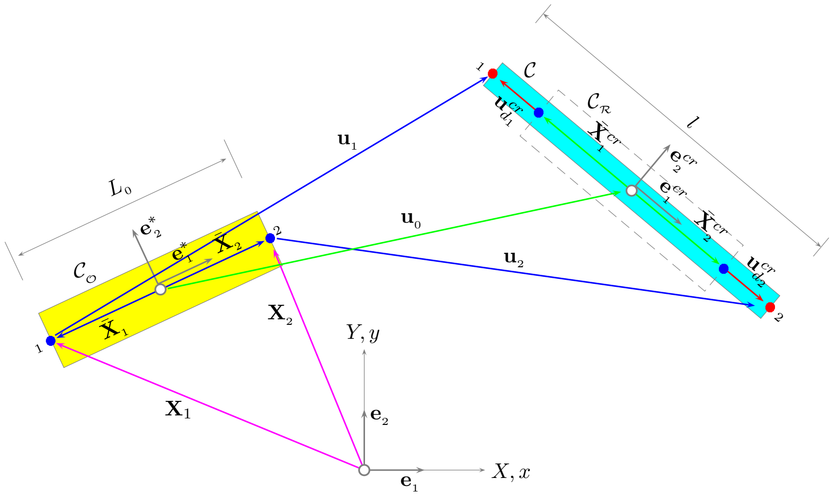

Figura 5. Movimento deformacional do elemento de treliça 2D

onde $\mathbf{u}^*$ é o deslocamento da partícula entre as configurações $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ e $\mathcal{C}$. Este deslocamento pode ser decomposto em uma parte deformacional $\mathbf{u}^*_d$ e em uma parte correspondente ao movimento de corpo rígido $\mathbf{u}^*_r$, tal que, $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^*_d + \mathbf{u}^*_r$. Novamente, como pode ser visto na Figura 4, a parte deformacional deste deslocamento é dada pela seguinte expressão

$$\mathbf{u}^*_d = \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^*_r \tag{6}$$

Substituindo as equações (4) e (5) em (6), obtém-se o movimento deformacional da partícula P entre as configurações *co-rotacionada* e *deformada*, que se expressa como

$$\mathbf{u}^*_d = (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{*T})\mathbf{X}^*_P + (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^*_0) \tag{7}$$

Por outro lado, o movimento deformacional pode ser expresso no sistema de coordenadas local da configuração *deformada*, isto é, em relação à base $\mathbf{e}^{cr}_i$. Levando em consideração a equação (2), tem-se que $\mathbf{u}^{cr}_d = \mathbf{Q}^*\mathbf{u}^*_d$. Portanto, a equação (7) pode ser reescrita como

$$\mathbf{u}^{cr}_d = (\mathbf{Q}^* - \mathbf{I})\mathbf{X}^*_P + \mathbf{Q}^*(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^*_0) \tag{8}$$

Finalmente, pode-se escrever o movimento deformacional da partícula P na configuração *deformada*, usando a posição que esta partícula ocupava em $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$, o deslocamento do centróide do elemento e o deslocamento de P expressos em coordenadas globais. Desta maneira, levando em conta a equação (1), obtém-se as seguintes relações: $\mathbf{X}^*_P = \mathbf{Q}\mathbf{X}_p$, $\mathbf{u}^*_0 = \mathbf{Q}\mathbf{u}_0$ e $\mathbf{u}^* = \mathbf{Q}\mathbf{u}$. Usando estas relações na equação (8), chega-se a

$$\mathbf{u}^{cr}_d = (\mathbf{Q}^*\mathbf{Q} - \mathbf{Q})\mathbf{X}_P + \mathbf{Q}^*\mathbf{Q}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \tag{9}$$

Por último, tendo em conta a equação (3) e a relação $\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}^*\mathbf{Q}$, obtém-se que

$$\mathbf{u}^{cr}_d = (\hat{\mathbf{Q}} - \mathbf{Q})\mathbf{X}_P + \hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \tag{10}$$

Movimento deformacional do elemento treliça 2D

Para obter o movimento deformacional do elemento de treliça plana serão monitorados os deslocamentos do centróide e dos nós do elemento. De acordo com a Figura 5, considera-se que entre as configurações $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ e $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}$, o centróide sofre somente deslocamentos de corpo rígido. Por outro lado, os deslocamentos dos nós 1 e 2 é composto por movimentos deformacionais e de corpo rígido entre as configurações $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ e $\mathcal{C}$. A posição dos nós do elemento na configuração *indeformada*, descrita em coordenadas globais, é dada por

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{X}}_1 \\ \bar{\mathbf{X}}_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} -(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1) \\ (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} -\mathbf{X}_{21} \\ \mathbf{X}_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{(X_2 - X_1)}{2} \\ -\frac{(Y_2 - Y_1)}{2} \\ \frac{(X_2 - X_1)}{2} \\ \frac{(Y_2 - Y_1)}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{X_{21}}{2} \\ -\frac{Y_{21}}{2} \\ \frac{X_{21}}{2} \\ \frac{Y_{21}}{2} \end{Bmatrix} \tag{11}$$

Por inspeção geométrica da Figura 5, pode-se escrever o deslocamento do centróide do elemento como $\mathbf{u}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} u_1 + u_2 \\ v_1 + v_2 \end{Bmatrix}$. A relação entre os deslocamentos nodais e o deslocamento do centróide do elemento são expressos, em forma vetorial, como

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} u_1 + u_2 \\ v_1 + v_2 \\ u_1 + u_2 \\ v_1 + v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{(u_2 - u_1)}{2} \\ -\frac{(v_2 - v_1)}{2} \\ \frac{(u_2 - u_1)}{2} \\ \frac{(v_2 - v_1)}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{u_{21}}{2} \\ -\frac{v_{21}}{2} \\ \frac{u_{21}}{2} \\ \frac{v_{21}}{2} \end{Bmatrix} \tag{12}$$

Considere que a partícula P possa ocupar a posição do nó 1, e em seguida, a posição do nó 2. Desta maneira, levando em conta as equações (10), (11) e (12), o movimento deformacional do elemento se expressa como

$$\begin{Bmatrix} u^{cr}_{d_1} \\ v^{cr}_{d_1} \\ u^{cr}_{d_2} \\ v^{cr}_{d_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Q}} - \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{Q}} - \mathbf{Q} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{X_{21}}{2} \\ -\frac{Y_{21}}{2} \\ \frac{X_{21}}{2} \\ \frac{Y_{21}}{2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Q}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{u_{21}}{2} \\ -\frac{v_{21}}{2} \\ \frac{u_{21}}{2} \\ \frac{v_{21}}{2} \end{Bmatrix} \tag{13}$$

onde $\mathbf{0}$ é a matriz nula de dimensão 2×2. $\mathbf{Q}$ é a matriz de rotação definida em (1). Esta matriz rotaciona os vetores de posição e de deslocamentos do sistema global de referência para o sistema local de referência definido na configuração *indeformada*. A matriz $\hat{\mathbf{Q}}$, dada pela equação (3), rotaciona esses vetores do sistema global para o sistema local de referência definido na configuração *co-rotacionada*. Como este elemento possui 2 graus de liberdade por nó, utilizou-se as submatrizes $\hat{\mathbf{Q}}_{2\times 2}$ e $\mathbf{Q}_{2\times 2}$, cujas terceira linha e terceira coluna foram suprimidas. Por inspeção geométrica da Figura 5, deduz-se que o deslocamento deformacional do nó 1 é dado por $u^{cr}_{d_1} = -\frac{(l - L_0)}{2}$ e $v^{cr}_{d_1} = 0$, enquanto que, para o nó 2 tem-se que $u^{\text{o}pqcr}_{d_2} = \frac{(l - L_0)}{2}$ e $v^{cr}_{d_2} = 0$. A seguir, após um breve desenvolvimento algébrico utilizando a equação (13), demonstra-se estas identidades para o nó 1 do elemento. Portanto, reescrevendo a equação (13) para o nó 1, tem-se que

$$\begin{Bmatrix} u^{cr}_{d_1} \\ v^{cr}_{d_1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_{21}}{l} - \frac{X_{21}}{L_0} & \frac{y_{21}}{l} - \frac{Y_{21}}{L_0} \\ -\frac{y_{21}}{l} + \frac{Y_{21}}{L_0} & \frac{x_{21}}{l} - \frac{X_{21}}{L_0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{X_{21}}{2} \\ -\frac{Y_{21}}{2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{x_{21}}{l} & \frac{y_{21}}{l} \\ -\frac{y_{21}}{l} & \frac{x_{21}}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{u_{21}}{2} \\ -\frac{v_{21}}{2} \end{Bmatrix} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
u_{d_1}^{cr} &= -\frac{X_{21}}{2}\left(\frac{x_{21}}{l}-\frac{X_{21}}{L_0}\right)-\frac{Y_{21}}{2}\left(\frac{y_{21}}{l}-\frac{Y_{21}}{L_0}\right)-\frac{x_{21}}{l}\frac{u_{21}}{2}-\frac{y_{21}}{l}\frac{v_{21}}{2}\\
&= -\frac{X_{21}x_{21}}{2l}+\frac{X_{21}^2}{2L_0}-\frac{Y_{21}y_{21}}{2l}+\frac{Y_{21}^2}{2L_0}-\frac{x_{21}u_{21}}{2l}-\frac{y_{21}v_{21}}{2l}\\
&= \frac{(X_{21}^2+Y_{21}^2)}{2L_0}-\frac{x_{21}}{2l}\underbrace{(X_{21}+u_{21})}_{x_{21}}-\frac{y_{21}}{2l}\underbrace{(Y_{21}+v_{21})}_{y_{21}}\\
&= \frac{(X_{21}^2+Y_{21}^2)}{2L_0}-\frac{(x_{21}^2+y_{21}^2)}{2l}=\frac{L_0^2}{2L_0}-\frac{l^2}{2l}=\frac{L_0}{2}-\frac{l}{2}=-\frac{(l-L_0)}{2}
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
v_{d_1}^{cr} &= -\frac{X_{21}}{2}\left(-\frac{y_{21}}{l}+\frac{Y_{21}}{L_0}\right)-\frac{Y_{21}}{2}\left(\frac{x_{21}}{l}-\frac{X_{21}}{L_0}\right)+\frac{y_{21}}{l}\frac{u_{21}}{2}-\frac{x_{21}}{l}\frac{v_{21}}{2}\\
&= \frac{X_{21}y_{21}}{2l}-\frac{X_{21}Y_{21}}{2L_0}-\frac{Y_{21}x_{21}}{2l}+\frac{X_{21}Y_{21}}{2L_0}+\frac{y_{21}u_{21}}{2l}-\frac{x_{21}v_{21}}{2l}\\
&= \frac{y_{21}}{2l}\underbrace{(X_{21}+u_{21})}_{x_{21}}-\frac{x_{21}}{2l}\underbrace{(Y_{21}+v_{21})}_{y_{21}}=\frac{x_{21}y_{21}}{2l}-\frac{x_{21}y_{21}}{2l}=0
\end{aligned} \tag{16}$$

Nas próximas seções obtém-se o vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente através das derivadas primeira e segunda da energia de deformação em relação aos deslocamentos locais, respectivamente. Desta maneira, calculam-se as derivadas primeira e segunda de $l=\sqrt{(L_0+u_{21}^*)^2+{v_{21}^*}^2}$ em relação aos deslocamentos locais $(u_1^*, v_1^*, u_2^*, v_2^*)$. De acordo com a Figura 3, pode-se definir que $\cos\phi = c_\phi = \frac{L_0+u_{21}^*}{l}$ e $\text{sen}\phi = s_\phi = \frac{v_{21}^*}{l}$, sendo ϕ o ângulo entre os versores $\mathbf{e}_1^*$ e $\mathbf{e}_1^{cr}$. Estas derivadas se expressam como

$$\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}^*} = \begin{bmatrix}-c_\phi & -s_\phi & c_\phi & s_\phi\end{bmatrix}^T \tag{17}$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \mathbf{u}^*\partial \mathbf{u}^*} = \frac{1}{l}\begin{bmatrix} s_\phi^2 & -s_\phi c_\phi & -s_\phi^2 & s_\phi c_\phi\\ -s_\phi c_\phi & c_\phi^2 & s_\phi c_\phi & -c_\phi^2\\ -s_\phi^2 & s_\phi c_\phi & s_\phi^2 & -s_\phi c_\phi\\ s_\phi c_\phi & -c_\phi^2 & -s_\phi c_\phi & c_\phi^2\end{bmatrix} \tag{18}$$

Vetor de forças internas do elemento de treliça 2D

Admite-se que a energia de deformação armazenada no elmento entre as configurações *co-rotacionada* e *deformada* seja dada por $U_0 = \frac{1}{2}\int_0^{L_0} EA_0\varepsilon_0^2 dX$. Note-se que se está utilizando a configuração *co-rotacionada* para o cálculo da energia de deformação. Assume-se que $\varepsilon_0 = \frac{l-L_0}{L_0}$ seja a medida de deformação, sendo que, $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{u}^*} = \frac{1}{L_0}\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}^*}$. Portanto, calculando a derivada primeira de U_0 e utilizando a equação (17), obtém-se o vetor de forças internas, cuja expressão é dada por

$$\mathbf{f}^* = \frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{u}^*} = \int_0^{L_0} EA_0\varepsilon_0\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{u}^*}dX = EA_0\varepsilon_0\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}^*} = N_0\begin{Bmatrix}-c_\phi\\ -s_\phi\\ c_\phi\\ s_\phi\end{Bmatrix} \tag{19}$$

onde $N_0 = EA_0\varepsilon_0$ é o esforço axial. Para expressar o vetor de forças internas em coordenadas globais utiliza-se a matriz de rotação dada em (1), tal que, $\mathbf{f} = \mathbf{Q}^T\mathbf{f}^*$.

Matriz de rigidez tangente do elemento de treliça 2D

Obtém-se a matriz de rigidez tangente do elemento a partir da derivada segunda da energia de deformação, ou através da derivada primeira do vetor de forças internas, em relação aos deslocamentos nodais. Lembrando que $\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial\mathbf{u}^*} = \frac{1}{L_0}\frac{\partial l}{\partial\mathbf{u}^*}$ e $\frac{\partial^2\epsilon_0}{\partial\mathbf{u}^*\partial\mathbf{u}^*} = \frac{1}{L_0}\frac{\partial^2 l}{\partial\mathbf{u}^*\partial\mathbf{u}^*}$ e usando a equação (18), tem-se que

$$\mathbf{K}^* = \frac{\partial^2 U_0}{\partial\mathbf{u}^*\partial\mathbf{u}^*} = \frac{\partial\mathbf{f}^*}{\partial\mathbf{u}^*} = \int_0^{L_0}\left[EA_0\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial\mathbf{u}^*}\otimes\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial\mathbf{u}^*} + EA_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\varepsilon_0}{\partial\mathbf{u}^*\partial\mathbf{u}^*}\right]dX$$

$$\mathbf{K}^* = \frac{EA_0}{L_0}\frac{\partial l}{\partial\mathbf{u}^*}\otimes\frac{\partial l}{\partial\mathbf{u}^*} + N_0\frac{\partial^2 l}{\partial\mathbf{u}^*\partial\mathbf{u}^*} \tag{20}$$

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K}^*_{\mathrm{M}} + \mathbf{K}^*_{\mathrm{G}}$$

com

$$\mathbf{K}^*_{\mathrm{M}} = \frac{EA_0}{L_0}\begin{bmatrix} c_\phi^2 & s_\phi c_\phi & -c_\phi^2 & -s_\phi c_\phi \\ s_\phi c_\phi & s_\phi^2 & -s_\phi c_\phi & -s_\phi^2 \\ -c_\phi^2 & -s_\phi c_\phi & c_\phi^2 & s_\phi c_\phi \\ -s_\phi c_\phi & -s_\phi^2 & s_\phi c_\phi & s_\phi^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^*_{\mathrm{G}} = \frac{N_0}{l}\begin{bmatrix} s_\phi^2 & -s_\phi c_\phi & -s_\phi^2 & s_\phi c_\phi \\ -s_\phi c_\phi & c_\phi^2 & s_\phi c_\phi & -c_\phi^2 \\ -s_\phi^2 & s_\phi c_\phi & s_\phi^2 & -s_\phi c_\phi \\ s_\phi c_\phi & -c_\phi^2 & -s_\phi c_\phi & c_\phi^2 \end{bmatrix} \tag{21}$$

onde $\otimes$ é o produto aberto ou diádico. $\mathbf{K}^*_{\mathrm{M}}$ é a matriz de rigidez material. $\mathbf{K}^*_{\mathrm{G}}$ é a matriz de rigidez geométrica. Para obter a matriz de rigidez tangente em coordenadas globais utiliza-se a matriz de rotação definida em (1), tal que, $\mathbf{K} = \mathbf{Q}^T\mathbf{K}^*\mathbf{Q}$.

ELEMENTO DE TRELIÇA 3D

Considere, agora, um corpo deformável discretizado por um elemento de treliça espacial com dois nós, situados em suas extremidades, cujas coordenadas na configuração *indeformada* são dadas por $\mathbf{X}_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$ e $\mathbf{X}_2 = (X_2, Y_2, Z_2)$, conforme mostra-se na Figura 6. O comprimento da barra em $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ é $L_0 = \sqrt{X_{21}^2 + Y_{21}^2 + Z_{21}^2}$, com $X_{21} = X_2 - X_1$, $Y_{21} = Y_2 - Y_1$ e $Z_{21} = Z_2 - Z_1$. Nesta configuração é fixado, no centróide do elemento, um sistema de coordenadas locais cuja base ortonormal é dada por $(\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*)$. Após o corpo sofrer translações e rotações de corpo rígido e deformacionais, este ocupa uma posição dada pelas coordenadas espaciais de seus nós, que se expressam como $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, respectivamente. A configuração *deformada* é definida por estas coordenadas como pode

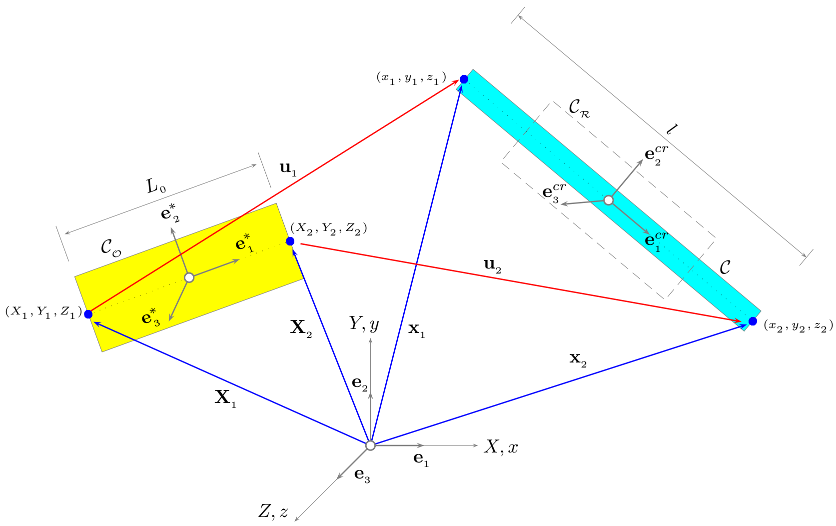

Figura 6. Cinemática co-rotacional do elemento de treliça 3D

ser observado na Figura 6. Por outro lado, as coordenadas espaciais nodais podem ser escritas em função dos deslocamentos nodais como $\mathbf{x}_1 = \mathbf{X}_1 + \mathbf{u}_1$ e $\mathbf{x}_2 = \mathbf{X}_2 + \mathbf{u}_2$, respectivamente. O comprimento da barra na configuração *deformada* é dado por $l = \sqrt{x_{21}^2 + y_{21}^2 + z_{21}^2}$, com $x_{21} = x_2 - x_1 = (X_2 + u_2) - (X_1 + u_1) = X_{21} + u_{21}$, $y_{21} = y_2 - y_1 = (Y_2 + v_2) - (Y_1 + v_1) = Y_{21} + v_{21}$ e $z_{21} = z_2 - z_1 = (Z_2 + w_2) - (Z_1 + w_1) = Z_{21} + w_{21}$, sendo $u_{21} = u_2 - u_1$, $v_{21} = v_2 - v_1$ e $w_{21} = w_2 - w_1$, as componentes dos deslocamentos nodais em relação à base $\mathbf{e}_i$. Portanto, pode-se escrever que $l = \sqrt{(X_{21} + u_{21})^2 + (Y_{21} + v_{21})^2 + (Z_{21} + w_{21})^2}$. Alternativamente, esse comprimento pode ser expresso como $l = \sqrt{(L_0 + u_{21}^*)^2 + {v_{21}^*}^2 + {w_{21}^*}^2}$, sendo $u_{21}^* = u_2^* - u_1^*$, $v_{21}^* = v_2^* - v_1^*$ e $w_{21}^* = w_2^* - w_1^*$, as componentes dos deslocamentos nodais em relação à base $\mathbf{e}_i^*$.

Para a extração dos deslocamentos deformacionais é necessário identificar as translações e rotações de corpo rígido. Então, para este fim, define-se uma configuração *co-rotacionada* que acompanha a configuração *deformada* do corpo. É fixada no centróide da configuração *co-rotacionada* um sistema de coordenadas locais cuja base ortonormal é dada por $(\mathbf{e}_1^{cr}, \mathbf{e}_2^{cr}, \mathbf{e}_3^{cr})$, conforme mostra-se na Figura 6. Procedendo-se como na seção anterior, determina-se agora, as matrizes ortogonais entre as bases $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_i^*$ e $\mathbf{e}_i^{cr}$, para o elemento de treliça espacial. A transformação ortogonal $\mathbf{Q}$ entre as bases $\mathbf{e}_i^*$ e $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_i^* = \mathbf{Q}\mathbf{e}_i$, é dada por

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{e}_1^* = (\frac{X_{21}}{L_0}, \frac{Y_{21}}{L_0}, \frac{Z_{21}}{L_0}) \\ \mathbf{e}_3^* = \frac{\mathbf{e}_1^* \times \mathbf{e}_2}{|\mathbf{e}_1^* \times \mathbf{e}_2|} \Longrightarrow \mathbf{e}_1^* \not\parallel \mathbf{e}_2 \Longrightarrow L_{XZ} > 0 \\ \mathbf{e}_2^* = \mathbf{e}_3^* \times \mathbf{e}_1^* \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1^* \\ \mathbf{e}_2^* \\ \mathbf{e}_3^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_{21}}{L_0} & \frac{Y_{21}}{L_0} & \frac{Z_{21}}{L_0} \\ -\frac{X_{21}Y_{21}}{L_0 L_{XZ}} & \frac{L_{XZ}}{L_0} & -\frac{Y_{21}Z_{21}}{L_0 L_{XZ}} \\ -\frac{Z_{21}}{L_{XZ}} & 0 & \frac{X_{21}}{L_{XZ}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{Bmatrix} \tag{22}$$

onde $L_{XZ} = \sqrt{X_{21}^2 + Z_{21}^2}$ é a projeção da barra em $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ no plano XZ da base $\mathbf{e}_i$. Por outro lado, a transformação ortogonal $\mathbf{Q}^*$ entre as bases $\mathbf{e}_i^{cr}$ e $\mathbf{e}_i^*$, $\mathbf{e}_i^{cr} = \mathbf{Q}^*\mathbf{e}_i^*$, é definida pelas seguintes relações

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1^{cr} = (\frac{L_0+u_{21}^*}{l}, \frac{v_{21}^*}{l}, \frac{w_{21}^*}{l}) \\ \mathbf{e}_3^{cr} = \frac{\mathbf{e}_1^{cr}\times\mathbf{e}_2^*}{|\mathbf{e}_1^{cr}\times\mathbf{e}_2^*|} \Longrightarrow \mathbf{e}_1^{cr} \not\parallel \mathbf{e}_2^* \Longrightarrow l_{xz} > 0 \\ \mathbf{e}_2^{cr} = \mathbf{e}_3^{cr} \times \mathbf{e}_1^{cr} \end{cases} \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1^{cr} \\ \mathbf{e}_2^{cr} \\ \mathbf{e}_3^{cr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_0+u_{21}^*}{l} & \frac{v_{21}^*}{l} & \frac{w_{21}^*}{l} \\ -\frac{(L_0+u_{21}^*)v_{21}^*}{l l_{xz}} & \frac{l_{xz}}{l} & -\frac{v_{21}^* w_{21}^*}{l l_{xz}} \\ -\frac{w_{21}^*}{l_{xz}} & 0 & \frac{L_0+u_{21}^*}{l_{xz}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1^* \\ \mathbf{e}_2^* \\ \mathbf{e}_3^* \end{Bmatrix} \tag{23}$$

onde $l_{xz} = \sqrt{(L_0 + u_{21}^*)^2 + w_{21}^{*\,2}}$ é a projeção da barra em $\mathcal{C}$ no plano xz da base $\mathbf{e}_i^*$. Finalmente, a transformação ortogonal $\hat{\mathbf{Q}}$ entre as bases $\mathbf{e}_i^{cr}$ e $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_i^{cr} = \hat{\mathbf{Q}}\mathbf{e}_i$, é dada por

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1^{cr} = (\frac{x_{21}}{l}, \frac{y_{21}}{l}, \frac{z_{21}}{l}) \\ \mathbf{e}_3^{cr} = \frac{\mathbf{e}_1^{cr}\times\mathbf{e}_2}{|\mathbf{e}_1^{cr}\times\mathbf{e}_2|} \Longrightarrow \mathbf{e}_1^{cr} \not\parallel \mathbf{e}_2 \Longrightarrow l_{xz} > 0 \\ \mathbf{e}_2^{cr} = \mathbf{e}_3^{cr} \times \mathbf{e}_1^{cr} \end{cases} \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1^{cr} \\ \mathbf{e}_2^{cr} \\ \mathbf{e}_3^{cr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_{21}}{l} & \frac{y_{21}}{l} & \frac{z_{21}}{l} \\ -\frac{x_{21}y_{21}}{l l_{xz}} & \frac{l_{xz}}{l} & -\frac{y_{21}z_{21}}{l l_{xz}} \\ -\frac{z_{21}}{l_{xz}} & 0 & \frac{x_{21}}{l_{xz}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{Bmatrix} \tag{24}$$

onde $l_{xz} = \sqrt{x_{21}^2 + z_{21}^2} = \sqrt{(X_{21} + u_{21})^2 + (Z_{21} + w_{21})^2}$ é a projeção da barra em $\mathcal{C}$ no plano XZ da base $\mathbf{e}_i$. Note que as componentes de $\mathbf{e}_1^*$, em (22), representam os co-senos diretores da barra na configuração *indeformada* em relação ao sistema de referência global $\mathbf{e}_i$. As componentes de $\mathbf{e}_1^{cr}$, em (23), denotam os co-senos diretores da barra na configuração *co-rotacionada* com relação à base $\mathbf{e}_i^*$, enquanto que, as componentes de $\mathbf{e}_1^{cr}$, em (24), denotam os co-senos diretores da barra na configuração *co-rotacionada* com relação à base $\mathbf{e}_i$. Substituindo a equação (22) em (23), chega-se a $\mathbf{e}_i^{cr} = \mathbf{Q}^*\mathbf{Q}\mathbf{e}_i$. Comparando-se este resultado com a equação (24), demonstra-se que $\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}^*\mathbf{Q}$.

Movimento deformacional de uma partícula

Para descrever o movimento de uma partícula arbitrária do elemento de treliça 3D, inicialmente, os vetores de posição e de deslocamentos serão expressos em relação à base $\mathbf{e}_i^*$ definida na configuração *indeformada*. Seja uma partícula P de coordenadas (X_P^*, Y_P^*, Z_P^*) em $\mathcal{C}_O$, conforme mostra-se na Figura 7, que se move ao ponto P^{cr} de coordenadas

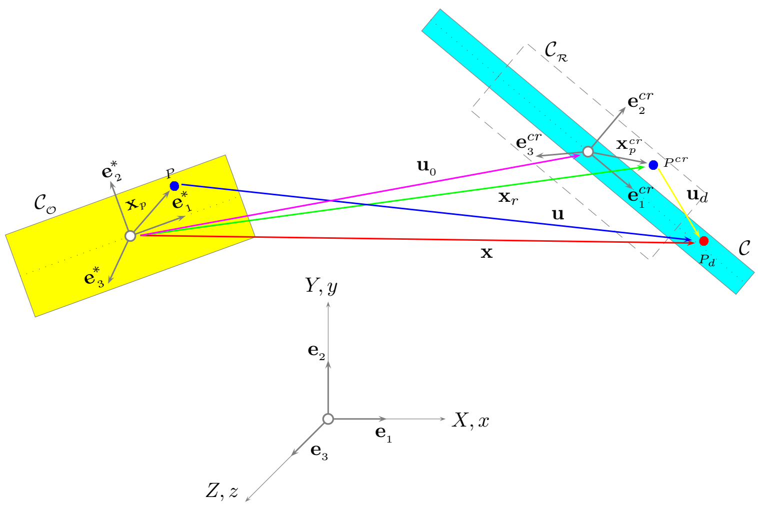

Figura 7. Movimento deformacional de uma partícula do elemento de treliça 3D

$(X_P^{cr}, Y_P^{cr}, Z_P^{cr})$ em $\mathcal{C}_\mathcal{R}$, e, em seguida, desloca-se ao ponto P_d de coordenadas (x^*, y^*, z^*) em $\mathcal{C}$. Devido ao movimento de corpo rígido entre as configurações $\mathcal{C}_\mathcal{O}$ e $\mathcal{C}_\mathcal{R}$, e levando em conta a matriz de rotação dada em (23), o vetor posição da partícula P em $\mathcal{C}_\mathcal{R}$ pode ser expresso em função da base $\mathbf{e}_i^*$ como $\mathbf{X}_P^{cr^*} = \mathbf{Q}^{*T}\mathbf{X}_P^*$. Por outro lado, a posição da partícula P em $\mathcal{C}_\mathcal{R}$, em relação ao sistema de referência local definido em $\mathcal{C}_\mathcal{O}$, é dado por

$$\mathbf{x}_r^* = \mathbf{u}_0^* + \mathbf{X}_P^{cr^*} = \mathbf{u}_0^* + \mathbf{Q}^{*T}\mathbf{X}_P^* \tag{25}$$

onde $\mathbf{u}_0^*$ é o deslocamento de corpo rígido do centróide do elemento entre as configurações *indeformada* e *co-rotacionada*. De acordo com a Figura 7, a posição da partícula P na configuração *deformada* é dada por

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{X}_P^* + \mathbf{u}^* \tag{26}$$

onde $\mathbf{u}^*$ é o deslocamento da partícula entre as configurações $\mathcal{C}_\mathcal{O}$ e $\mathcal{C}$. Este deslocamento pode ser decomposto em uma parte deformacional $\mathbf{u}_d^*$ e em uma parte correspondente ao movimento de corpo rígido $\mathbf{u}_r^*$, tal que, $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_d^* + \mathbf{u}_r^*$. Novamente, como pode ser visto na Figura 7, a parte deformacional deste deslocamento é dada pela seguinte expressão

$$\mathbf{u}_d^* = \mathbf{x}^* - \mathbf{x}_r^* \tag{27}$$

Substituindo as equações (25) e (26) em (27), obtém-se o movimento deformacional da partícula P entre as configurações *co-rotacionada* e *deformada*, que se expressa como

$$\mathbf{u}_d^* = (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{*T})\mathbf{X}_P^* + (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_0^*) \tag{28}$$

Por outro lado, o movimento deformacional pode ser expresso no sistema de coordenadas local da configuração *deformada*, isto é, em relação à base $\mathbf{e}_i^{cr}$. Levando em conta a matriz de rotação definida em (23), tem-se que $\mathbf{u}_d^{cr} = \mathbf{Q}^*\mathbf{u}_d^*$. Portanto, a equação (28) pode ser reescrita como

$$\mathbf{u}_d^{cr} = (\mathbf{Q}^* - \mathbf{I})\mathbf{X}_P^* + \mathbf{Q}^*(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_0^*) \tag{29}$$

Finalmente, pode-se escrever o movimento deformacional da partícula P na configuração *deformada*, usando a posição que esta partícula ocupava em $\mathcal{C}_\mathcal{O}$, o deslocamento do centróide do elemento e o deslocamento de P expressos em coordenadas globais. Desta maneira, levando em conta a matriz de rotação dada em (22), obtém-se as seguintes relações: $\mathbf{X}_P^* = \mathbf{Q}\mathbf{X}_p$, $\mathbf{u}_0^* = \mathbf{Q}\mathbf{u}_0$ e $\mathbf{u}^* = \mathbf{Q}\mathbf{u}$. Usando estas relações na equação (29), chega-se a

$$\mathbf{u}_d^{cr} = (\mathbf{Q}^*\mathbf{Q} - \mathbf{Q})\mathbf{X}_P + \mathbf{Q}^*\mathbf{Q}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \tag{30}$$

Por último, tendo em conta a relação $\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}^*\mathbf{Q}$, obtém-se que

$$\mathbf{u}_d^{cr} = (\hat{\mathbf{Q}} - \mathbf{Q})\mathbf{X}_P + \hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \tag{31}$$

Nota-se que é a mesma expressão dada em (10). Portanto, para sólidos discretizados com elementos finitos que possuam somente graus de liberdade translacionais, a extração do movimento deformacional independe do tipo de elemento finito adotado, e é dado por relações algébricas simples.

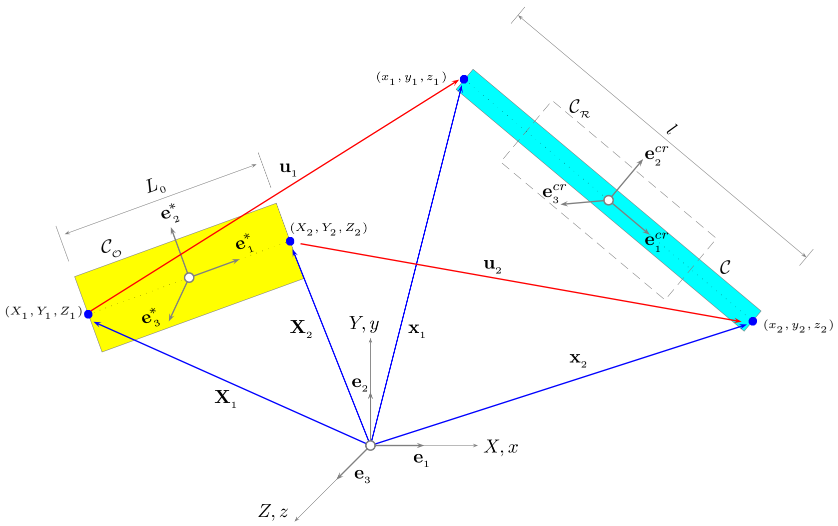

Figura 8. Movimento deformacional do elemento de treliça 3D

Movimento deformacional do elemento de treliça 3D

Para obter o movimento deformacional do elemento de treliça espacial serão monitorados os deslocamentos do centróide e dos nós do elemento. De acordo com a Figura 8, considera-se que entre as configurações $\mathcal{C}_\mathcal{O}$ e $\mathcal{C}_\mathcal{R}$, o centróide sofre somente deslocamentos de corpo rígido. Por outro lado, os deslocamentos dos nós 1 e 2 é composto por movimentos deformacionais e de corpo rígido entre as configurações $\mathcal{C}_\mathcal{O}$ e $\mathcal{C}$. A posição dos nós do elemento na configuração *indeformada*, descrita em coordenadas globais, é dada por

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{X}}_1 \\ \bar{\mathbf{X}}_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} -(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1) \\ (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} -\mathbf{X}_{21} \\ \mathbf{X}_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{(X_2 - X_1)}{2} \\ -\frac{(Y_2 - Y_1)}{2} \\ -\frac{(Z_2 - Z_1)}{2} \\ \frac{(X_2 - X_1)}{2} \\ \frac{(Y_2 - Y_1)}{2} \\ \frac{(Z_2 - Z_1)}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{X_{21}}{2} \\ -\frac{Y_{21}}{2} \\ -\frac{Z_{21}}{2} \\ \frac{X_{21}}{2} \\ \frac{Y_{21}}{2} \\ \frac{Z_{21}}{2} \end{Bmatrix} \tag{32}$$

Por inspeção geométrica da Figura 8, pode-se escrever o deslocamento do centróide do elemento como $\mathbf{u}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} u_1 + u_2 \\ v_1 + v_2 \\ w_1 + w_2 \end{Bmatrix}$. A relação entre os deslocamentos nodais e o deslocamento do centróide do elemento são expressos, em forma vetorial, como

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_1 + u_2 \\ v_1 + v_2 \\ w_1 + w_2 \\ u_1 + u_2 \\ v_1 + v_2 \\ w_1 + w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{(u_2 - u_1)}{2} \\ -\frac{(v_2 - v_1)}{2} \\ -\frac{(w_2 - w_1)}{2} \\ \frac{(u_2 - u_1)}{2} \\ \frac{(v_2 - v_1)}{2} \\ \frac{(w_2 - w_1)}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{u_{21}}{2} \\ -\frac{v_{21}}{2} \\ -\frac{w_{21}}{2} \\ \frac{u_{21}}{2} \\ \frac{v_{21}}{2} \\ \frac{w_{21}}{2} \end{Bmatrix} \tag{33}$$

Considere que a partícula P possa ocupar a posição do nó 1, e em seguida, a posição do nó 2. Desta maneira, levando em conta as equações (31), (32) e (33), o movimento deformacional do elemento se expressa como

$$\begin{Bmatrix} u^{cr}_{d_1} \\ v^{cr}_{d_1} \\ w^{cr}_{d_1} \\ u^{cr}_{d_2} \\ v^{cr}_{d_2} \\ w^{cr}_{d_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Q}} - \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{Q}} - \mathbf{Q} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{X_{21}}{2} \\ -\frac{Y_{21}}{2} \\ -\frac{Z_{21}}{2} \\ \frac{X_{21}}{2} \\ \frac{Y_{21}}{2} \\ \frac{Z_{21}}{2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Q}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{u_{21}}{2} \\ -\frac{v_{21}}{2} \\ -\frac{w_{21}}{2} \\ \frac{u_{21}}{2} \\ \frac{v_{21}}{2} \\ \frac{w_{21}}{2} \end{Bmatrix} \tag{34}$$

onde $\mathbf{0}$ é a matriz nula de dimensão 3×3. $\mathbf{Q}$ é a matriz de rotação definida em (22). Esta matriz rotaciona vetores do sistema de referência global para o sistema de referência local definido na configuração *indeformada*. A matriz $\hat{\mathbf{Q}}$, dada pela equação (24), rotaciona vetores do sistema de referência global para o sistema de referência local definido na configuração *co-rotacionada*. A composição dessas matrizes definidas em (34) podem ser escritas como

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Q}} - \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{Q}} - \mathbf{Q} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{x_{21}}{l} - \frac{X_{21}}{L_0} & \frac{y_{21}}{l} - \frac{Y_{21}}{L_0} & \frac{z_{21}}{l} - \frac{Z_{21}}{L_0} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{x_{21}\,y_{21}}{l\,l_{xz}} + \frac{X_{21}\,Y_{21}}{L_0\,L_{XZ}} & \frac{l_{xz}}{l} - \frac{L_{XZ}}{L_0} & -\frac{y_{21}\,z_{21}}{l\,l_{xz}} + \frac{Y_{21}\,Z_{21}}{L_0\,L_{XZ}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{z_{21}}{l_{xz}} + \frac{Z_{21}}{L_{XZ}} & 0 & \frac{x_{21}}{l_{xz}} - \frac{X_{21}}{L_{XZ}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{x_{21}}{l} - \frac{X_{21}}{L_0} & \frac{y_{21}}{l} - \frac{Y_{21}}{L_0} & \frac{z_{21}}{l} - \frac{Z_{21}}{L_0} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{x_{21}\,y_{21}}{l\,l_{xz}} + \frac{X_{21}\,Y_{21}}{L_0\,L_{XZ}} & \frac{l_{xz}}{l} - \frac{L_{XZ}}{L_0} & -\frac{y_{21}\,z_{21}}{l\,l_{xz}} + \frac{Y_{21}\,Z_{21}}{L_0\,L_{XZ}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{z_{21}}{l_{xz}} + \frac{Z_{21}}{L_{XZ}} & 0 & \frac{x_{21}}{l_{xz}} - \frac{X_{21}}{L_{XZ}} \end{bmatrix} \tag{35}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Q}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_{21}}{l} & \frac{y_{21}}{l} & \frac{z_{21}}{l} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{x_{21}y_{21}}{l\,l_{xz}} & \frac{l_{xz}}{l} & -\frac{y_{21}z_{21}}{l\,l_{xz}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{z_{21}}{l_{xz}} & 0 & \frac{x_{21}}{l_{xz}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{x_{21}}{l} & \frac{y_{21}}{l} & \frac{z_{21}}{l} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{x_{21}y_{21}}{l\,l_{xz}} & \frac{l_{xz}}{l} & -\frac{y_{21}z_{21}}{l\,l_{xz}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{z_{21}}{l_{xz}} & 0 & \frac{x_{21}}{l_{xz}} \end{bmatrix} \tag{36}$$

Por aspectos geométricos da Figura 8, deduz-se que o deslocamento deformacional do nó 1 é dado por $u^{cr}_{d_1} = -\frac{(l-L_0)}{2}$, $v^{cr}_{d_1} = 0$ e $w^{cr}_{d_1} = 0$, enquanto que, para o nó 2, tem-se que $u^{cr}_{d_2} = \frac{(l-L_0)}{2}$, $v^{cr}_{d_2} = 0$ e $w^{cr}_{d_2} = 0$. A seguir, após um breve desenvolvimento algébrico, utilizando as equações (34), (35) e (36), demonstra-se essas identidades para o nó 1 do elemento.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u^{cr}_{d_1} \\ v^{cr}_{d_1} \\ w^{cr}_{d_1} \end{Bmatrix} = {} & \begin{bmatrix} \frac{x_{21}}{l} - \frac{X_{21}}{L_0} & \frac{y_{21}}{l} - \frac{Y_{21}}{L_0} & \frac{z_{21}}{l} - \frac{Z_{21}}{L_0} \\ -\frac{x_{21}y_{21}}{l\,l_{xz}} + \frac{X_{21}Y_{21}}{L_0\,L_{XZ}} & \frac{l_{xz}}{l} - \frac{L_{XZ}}{L_0} & -\frac{y_{21}z_{21}}{l\,l_{xz}} + \frac{Y_{21}Z_{21}}{L_0\,L_{XZ}} \\ -\frac{z_{21}}{l_{xz}} + \frac{Z_{21}}{L_{XZ}} & 0 & \frac{x_{21}}{l_{xz}} - \frac{X_{21}}{L_{XZ}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{X_{21}}{2} \\ -\frac{Y_{21}}{2} \\ -\frac{Z_{21}}{2} \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} \frac{x_{21}}{l} & \frac{y_{21}}{l} & \frac{z_{21}}{l} \\ -\frac{x_{21}y_{21}}{l\,l_{xz}} & \frac{l_{xz}}{l} & -\frac{y_{21}z_{21}}{l\,l_{xz}} \\ -\frac{z_{21}}{l_{xz}} & 0 & \frac{x_{21}}{l_{xz}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{u_{21}}{2} \\ -\frac{v_{21}}{2} \\ -\frac{w_{21}}{2} \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} u^{cr}_{d_1} &= -\left(\frac{x_{21}}{l} - \frac{X_{21}}{L_0}\right)\frac{X_{21}}{2} - \left(\frac{y_{21}}{l} - \frac{Y_{21}}{L_0}\right)\frac{Y_{21}}{2} - \left(\frac{z_{21}}{l} - \frac{Z_{21}}{L_0}\right)\frac{Z_{21}}{2} - \\ &\qquad - \frac{x_{21}}{l}\frac{u_{21}}{2} - \frac{y_{21}}{l}\frac{v_{21}}{2} - \frac{z_{21}}{l}\frac{w_{21}}{2} \\ &= -\frac{x_{21}}{2l}(X_{21} + u_{21}) - \frac{y_{21}}{2l}(Y_{21} + v_{21}) - \frac{z_{21}}{2l}(Z_{21} + w_{21}) + \frac{X_{21}^2}{2L_0} + \frac{Y_{21}^2}{2L_0} + \frac{Z_{21}^2}{2L_0} \\ &= -\frac{x_{21}^2 + y_{21}^2 + z_{21}^2}{2l} + \frac{X_{21}^2 + Y_{21}^2 + Z_{21}^2}{2L_0} = -\frac{l^2}{2l} + \frac{L_0^2}{2L_0} = -\frac{l}{2} + \frac{L_0}{2} = -\frac{(l-L_0)}{2} \end{aligned} \tag{38}$$

$$
\begin{aligned}
v_{d_1}^{cr} = \; & -(-\tfrac{x_{21}y_{21}}{l\,l_{xz}} + \tfrac{X_{21}Y_{21}}{L_0 L_{XZ}})\tfrac{X_{21}}{2} - (\tfrac{l_{xz}}{l} - \tfrac{L_{XZ}}{L_0})\tfrac{Y_{21}}{2} - (-\tfrac{y_{21}z_{21}}{l\,l_{xz}} + \tfrac{Y_{21}Z_{21}}{L_0 L_{XZ}})\tfrac{Z_{21}}{2} + \\
& + \tfrac{x_{21}y_{21}}{l\,l_{xz}}\tfrac{u_{21}}{2} - \tfrac{l_{xz}}{l}\tfrac{v_{21}}{2} + \tfrac{y_{21}z_{21}}{l\,l_{xz}}\tfrac{w_{21}}{2} \\
= \; & \tfrac{x_{21}y_{21}}{2l\,l_{xz}}(X_{21} + u_{21}) - \tfrac{l_{xz}}{2l}(Y_{21} + v_{21}) + \tfrac{y_{21}z_{21}}{2l\,l_{xz}}(Z_{21} + w_{21}) - \tfrac{X_{21}^2 Y_{21}}{2L_0 L_{XZ}} + \\
& + \tfrac{Y_{21}L_{XZ}}{2L_0} - \tfrac{Y_{21}Z_{21}^2}{2L_0 L_{XZ}} \\
= \; & \tfrac{x_{21}^2 y_{21}}{2l\,l_{xz}} - \tfrac{l_{xz}y_{21}}{2l} + \tfrac{y_{21}z_{21}^2}{2l\,l_{xz}} - \tfrac{X_{21}^2 Y_{21}}{2L_0 L_{XZ}} + \tfrac{Y_{21}L_{XZ}}{2L_0} - \tfrac{Y_{21}Z_{21}^2}{2L_0 L_{XZ}} \\
= \; & \tfrac{y_{21}}{2l\,l_{xz}}(x_{21}^2 + z_{21}^2) - \tfrac{l_{xz}y_{21}}{2l} - \tfrac{Y_{21}}{2L_0 L_{XZ}}(X_{21}^2 + Z_{21}^2) + \tfrac{Y_{21}L_{XZ}}{2L_0} \\
= \; & \tfrac{y_{21}l_{xz}^2}{2l\,l_{xz}} - \tfrac{y_{21}l_{xz}}{2l} - \tfrac{Y_{21}L_{XZ}^2}{2L_0 L_{XZ}} + \tfrac{Y_{21}L_{XZ}}{2L_0} = \tfrac{y_{21}l_{xz}}{2l} - \tfrac{y_{21}l_{xz}}{2l} - \tfrac{Y_{21}L_{XZ}}{2L_0} + \tfrac{Y_{21}L_{XZ}}{2L_0} = 0
\end{aligned}
\tag{39}
$$

$$
\begin{aligned}
w_{d_1}^{cr} = \; & -(-\tfrac{z_{21}}{l_{xz}} + \tfrac{Z_{21}}{L_{XZ}})\tfrac{X_{21}}{2} - (\tfrac{x_{21}}{l_{xz}} - \tfrac{X_{21}}{L_{XZ}})\tfrac{Z_{21}}{2} + \tfrac{z_{21}}{l_{xz}}\tfrac{u_{21}}{2} - \tfrac{x_{21}}{l_{xz}}\tfrac{w_{21}}{2} \\
= \; & \tfrac{z_{21}}{2l_{xz}}(X_{21} + u_{21}) - \tfrac{x_{21}}{2l_{xz}}(Z_{21} + w_{21}) - \tfrac{X_{21}Z_{21}}{2L_{XZ}} + \tfrac{X_{21}Z_{21}}{2L_{XZ}} \\
= \; & \tfrac{z_{21}x_{21}}{2l_{xz}} - \tfrac{x_{21}z_{21}}{2l_{xz}} - \tfrac{X_{21}Z_{21}}{2L_{XZ}} + \tfrac{X_{21}Z_{21}}{2L_{XZ}} = 0
\end{aligned}
\tag{40}
$$

Nas próximas seções obtém-se o vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente através das derivadas primeira e segunda da energia de deformação em relação aos deslocamentos, expressos em relação à base $\mathbf{e}_i^*$, respectivamente. Desta maneira, calculam-se as derivadas primeira e segunda de $l = \sqrt{(L_0 + u_{21}^*)^2 + {v_{21}^*}^2 + {w_{21}^*}^2}$ em relação aos deslocamentos locais $(u_1^*, v_1^*, w_1^*, u_2^*, v_2^*, w_2^*)$. Os co-senos diretores do elemento na configuração *co-rotacionada* em relação a configuração *indeformada* são dados por: $c_x^* = \frac{L_0 + u_{21}^*}{l}$, $c_y^* = \frac{v_{21}^*}{l}$ e $c_z^* = \frac{w_{21}^*}{l}$. Levando em conta as definições de l, c_x^*, c_y^* e c_z^*, e que, ${c_x^*}^2 + {c_y^*}^2 + {c_z^*}^2 = 1$, estas derivadas se expressam como

$$
\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}^*} = \begin{bmatrix} -c_x^* & -c_y^* & -c_z^* & c_x^* & c_y^* & c_z^* \end{bmatrix}^T \tag{41}
$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \mathbf{u}^* \partial \mathbf{u}^*} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} (c_y^{*\,2} + c_z^{*\,2}) & -c_x^* c_y^* & -c_x^* c_z^* & -(c_y^{*\,2} + c_z^{*\,2}) & c_x^* c_y^* & c_x^* c_z^* \\ -c_x^* c_y^* & (c_x^{*\,2} + c_z^{*\,2}) & -c_y^* c_z^* & c_x^* c_y^* & -(c_x^{*\,2} + c_z^{*\,2}) & c_y^* c_z^* \\ -c_x^* c_z^* & -c_y^* c_z^* & (c_x^{*\,2} + c_y^{*\,2}) & c_x^* c_z^* & c_y^* c_z^* & -(c_x^{*\,2} + c_y^{*\,2}) \\ -(c_y^{*\,2} + c_z^{*\,2}) & c_x^* c_y^* & c_x^* c_z^* & (c_y^{*\,2} + c_z^{*\,2}) & -c_x^* c_y^* & -c_x^* c_z^* \\ c_x^* c_y^* & -(c_x^2 + c_z^2) & c_y^* c_z^* & -c_x^* c_y^* & (c_x^2 + c_z^2) & -c_y^* c_z^* \\ c_x^* c_z^* & c_y^* c_z^* & -(c_x^{*\,2} + c_y^{*\,2}) & -c_x^* c_z^* & -c_y^* c_z^* & (c_x^{*\,2} + c_y^{*\,2}) \end{bmatrix} \tag{42}$$

Vetor de forças internas do elemento de treliça 3D

Admite-se que a energia de deformação armazenada no elmento entre as configurações *co-rotacionada* e *deformada* seja dada por $U_0 = \frac{1}{2} \int\limits_0^{L_0} EA_0 \varepsilon_0^2 dX$. Note-se que se está utilizando a configuração *co-rotacionada* para o cálculo da energia de deformação. Assume-se que $\varepsilon_0 = \frac{l - L_0}{L_0}$ seja a medida de deformação, sendo que, $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{u}^*} = \frac{1}{L_0} \frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}^*}$. Portanto, calculando a derivada primeira de U_0 e utilizando a equação (41), obtém-se o vetor de forças internas, cuja expressão é dada por

$$\mathbf{f}^* = \frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{u}^*} = \int\limits_0^{L_0} EA_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{u}^*} dX = EA_0 \varepsilon_0 \frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}^*} = N_0 \begin{Bmatrix} -\mathrm{c}_x^* \\ -\mathrm{c}_y^* \\ -\mathrm{c}_z^* \\ \mathrm{c}_x^* \\ \mathrm{c}_y^* \\ \mathrm{c}_z^* \end{Bmatrix} \tag{43}$$

onde $N_0 = EA_0 \varepsilon_0$ é o esforço axial. Para expressar o vetor de forças internas em coordenadas globais utiliza-se a matriz de rotação dada em (22), tal que, $\mathbf{f} = \mathbf{Q}^T \mathbf{f}^*$.

Matriz de rigidez tangente do elemento de treliça 3D

Obtém-se a matriz de rigidez tangente do elemento a partir da derivada segunda da energia de deformação, ou através da derivada primeira do vetor de forças internas, em relação aos deslocamentos nodais. Lembrando que $\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{u}^*} = \frac{1}{L_0} \frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}^*}$ e $\frac{\partial^2 \epsilon_0}{\partial \mathbf{u}^* \partial \mathbf{u}^*} = \frac{1}{L_0} \frac{\partial^2 l}{\partial \mathbf{u}^* \partial \mathbf{u}^*}$ e usando a equação (42), tem-se que

$$\begin{gathered} \mathbf{K}^* = \frac{\partial^2 U_0}{\partial \mathbf{u}^* \partial \mathbf{u}^*} = \frac{\partial \mathbf{f}^*}{\partial \mathbf{u}^*} = \int\limits_0^{L_0} \left[EA_0 \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{u}^*} \otimes \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{u}^*} + EA_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \varepsilon_0}{\partial \mathbf{u}^* \partial \mathbf{u}^*} \right] dX \\ \mathbf{K}^* = \frac{EA_0}{L_0} \frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}^*} \otimes \frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}^*} + N_0 \frac{\partial^2 l}{\partial \mathbf{u}^* \partial \mathbf{u}^*} \\ \mathbf{K}^* = \mathbf{K}_{\mathrm{M}}^* + \mathbf{K}_{\mathrm{G}}^* \end{gathered} \tag{44}$$

com

$$\mathbf{K}^*_{\mathrm{M}} = \frac{EA_0}{L_0}\begin{bmatrix} c_x^{*2} & c_x^*c_y^* & c_x^*c_z^* & -c_x^{*2} & -c_x^*c_y^* & -c_x^*c_z^* \\ c_x^*c_y^* & c_y^{*2} & c_y^*c_z^* & -c_x^*c_y^* & -c_y^{*2} & -c_y^*c_z^* \\ c_x^*c_z^* & c_y^*c_z^* & c_z^{*2} & -c_x^*c_z^* & -c_y^*c_z^* & -c_z^{*2} \\ -c_x^{*2} & -c_x^*c_y^* & -c_x^*c_z^* & c_x^{*2} & c_x^*c_y^* & c_x^*c_z^* \\ -c_x^*c_y^* & -c_y^{*2} & -c_y^*c_z^* & c_x^*c_y^* & c_y^{*2} & c_y^*c_z^* \\ -c_x^*c_z^* & -c_y^*c_z^* & -c_z^{*2} & c_x^*c_z^* & c_y^*c_z^* & c_z^{*2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^*_{\mathrm{G}} = \frac{N_0}{l}\begin{bmatrix} (c_y^{*2}+c_z^{*2}) & -c_x^*c_y^* & -c_x^*c_z^* & -(c_y^{*2}+c_z^{*2}) & c_x^*c_y^* & c_x^*c_z^* \\ -c_x^*c_y^* & (c_x^{*2}+c_z^{*2}) & -c_y^*c_z^* & c_x^*c_y^* & -(c_x^{*2}+c_z^{*2}) & c_y^*c_z^* \\ -c_x^*c_z^* & -c_y^*c_z^* & (c_x^{*2}+c_y^{*2}) & c_x^*c_z^* & c_y^*c_z^* & -(c_x^{*2}+c_y^{*2}) \\ -(c_y^{*2}+c_z^{*2}) & c_x^*c_y^* & c_x^*c_z^* & (c_y^{*2}+c_z^{*2}) & -c_x^*c_y^* & -c_x^*c_z^* \\ c_x^*c_y^* & -(c_x^2+c_z^2) & c_y^*c_z^* & -c_x^*c_y^* & (c_x^2+c_z^2) & -c_y^*c_z^* \\ c_x^*c_z^* & c_y^*c_z^* & -(c_x^{*2}+c_y^{*2}) & -c_x^*c_z^* & -c_y^*c_z^* & (c_x^{*2}+c_y^{*2}) \end{bmatrix} \tag{45}$$

onde $\otimes$ é o produto aberto ou diádico. $\mathbf{K}^*_{\mathrm{M}}$ é a matriz de rigidez material. $\mathbf{K}^*_{\mathrm{G}}$ é a matriz de rigidez geométrica. Para obter a matriz de rigidez tangente em coordenadas globais utiliza-se a matriz de rotação definida em (22), tal que, $\mathbf{K} = \mathbf{Q}^T\mathbf{K}^*\mathbf{Q}$.

ELEMENTO DE VIGA 2D

Para descrever a cinemática co-rotacional do elemento de viga 2D, adota-se um sistema de coordenadas globais cuja base ortonormal é dada por $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Para expressar as variáveis cinemáticas na configuração *indeformada* utilizam-se as coordenadas materiais (X, Y, Z), enquanto que, na configuração *deformada* usam-se as coordenadas espaciais (x, y, z). Considere, agora, um corpo deformável discretizado por um elemento de viga 2D com dois nós, situados em suas extremidades, cujas coordenadas na configuração *indeformada* são dadas por $\mathbf{X}_1 = (X_1, Y_1)$ e $\mathbf{X}_2 = (X_2, Y_2)$, conforme mostra-se na Figura 9. O comprimento da barra em $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ é $L_0 = \sqrt{X_{21}^2 + Y_{21}^2}$, com $X_{21} = X_2 - X_1$ e $Y_{21} = Y_2 - Y_1$. Nesta configuração é fixado, no centróide do elemento, um sistema de coordenadas locais cuja base ortonormal é dada por $(\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*)$. Observe que α é o ângulo de inclinação do elemento em $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ com relação ao eixo (X, x), e que, $\cos\alpha = \frac{X_{21}}{L_0}$ e sen$\alpha = \frac{Y_{21}}{L_0}$. Após o corpo sofrer translações e rotações de corpo rígido e deformacionais, este ocupa uma posição dada pelas coordenadas espaciais de seus nós, que se expressam como $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2)$, respectivamente. A configuração *deformada* é definida por estas coordenadas como pode ser observado na Figura 9. Por outro lado, as coordenadas espaciais nodais podem ser escritas em função dos deslocamentos nodais como $\mathbf{x}_1 = \mathbf{X}_1 + \mathbf{u}_1$ e $\mathbf{x}_2 = \mathbf{X}_2 + \mathbf{u}_2$, respectivamente.

Considera-se que o comprimento da barra na configuração *deformada* é dado pela secante que une os nós do elemento. Portanto, pode-se escrever que $l = \sqrt{x_{21}^2 + y_{21}^2}$, com $x_{21} = x_2 - x_1 = (X_2 + u_2) - (X_1 + u_1) = X_{21} + u_{21}$ e $y_{21} = y_2 - y_1 = (Y_2 + v_2) - (Y_1 + v_1) = Y_{21} + v_{21}$, sendo $u_{21} = u_2 - u_1$ e $v_{21} = v_2 - v_1$, as componentes dos deslocamentos nodais em relação à base $\mathbf{e}_i$. Por fim, pode-se escrever que $l = \sqrt{(X_{21} + u_{21})^2 + (Y_{21} + v_{21})^2}$. Na configuração *deformada* a inclinação da reta secante, que une os nós do elemento, em relação ao eixo

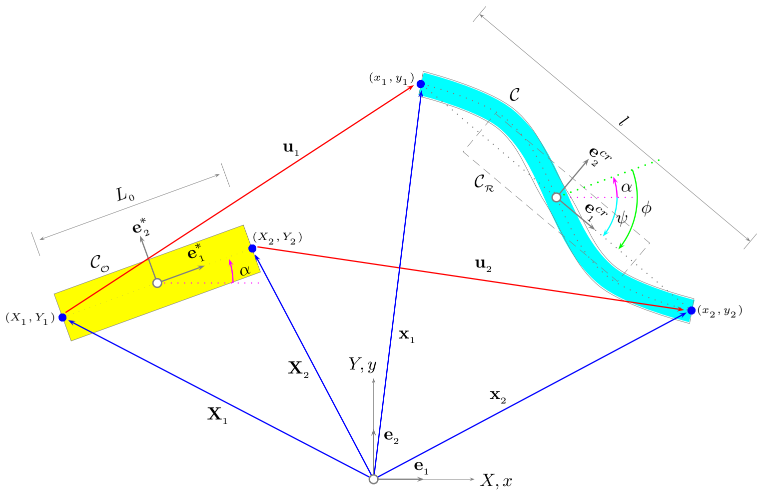

Figura 9. Cinemática co-rotacional do elemento de viga 2D

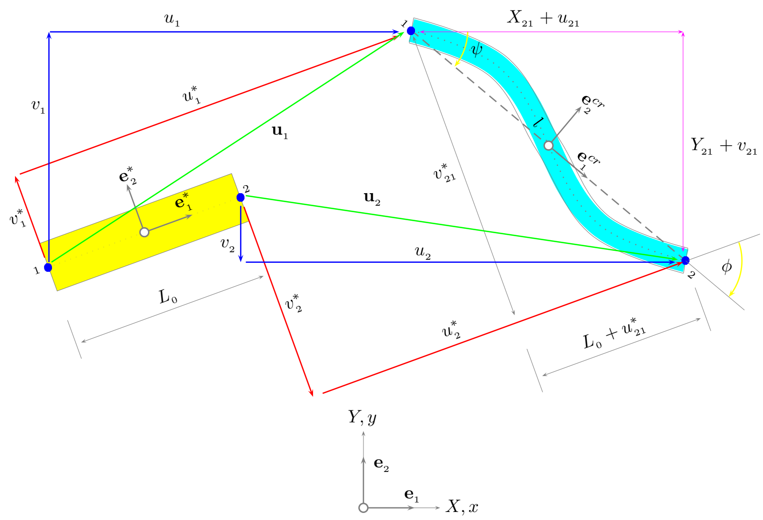

Figura 10. Componentes dos deslocamentos nodais em relação às bases $\mathbf{e}_i$ e $\mathbf{e}_i^*$

(X, x), é dada pelo ângulo ψ. O co-seno e o seno deste ângulo são dados por $\cos\psi = \frac{x_{21}}{l}$ e $\text{sen}\psi = \frac{y_{21}}{l}$. Alternativamente, conforme mostra-se na Figura 10, esse comprimento pode ser expresso como $l = \sqrt{(L_0 + u_{21}^*)^2 + v_{21}^{*\,2}}$, sendo $u_{21}^* = u_2^* - u_1^*$ e $v_{21}^* = v_2^* - v_1^*$, as componentes dos deslocamentos nodais em relação à base $\mathbf{e}_i^*$. Para identificar as translações e rotações de corpo rígido define-se uma configuração *co-rotacionada* que acompanha a configuração *deformada* do corpo. O centróide desta configuração coincide com o ponto médio da reta secante que une os nós do elemento, conforme mostra-se na Figura 9. É fixada no centróide da configuração *co-rotacionada* um sistema de coordenadas locais cuja base ortonormal é dada por $(\mathbf{e}_1^{cr}, \mathbf{e}_2^{cr}, \mathbf{e}_3^{cr})$. Observe que ϕ é o ângulo entre o versor $\mathbf{e}_1^{cr}$, em $\mathcal{C}_\mathcal{R}$, e o versor $\mathbf{e}_1^*$, em $\mathcal{C}_\mathcal{O}$. Este ângulo representa a rotação de corpo rígido entre as configurações $\mathcal{C}_\mathcal{R}$ e $\mathcal{C}_\mathcal{O}$. De acordo com a Figura 10, o co-seno e o seno deste ângulo são dados por $\cos\phi = \frac{L_0 + u_{21}^*}{l}$ e $\text{sen}\phi = \frac{v_{21}^*}{l}$, respectivamente. Por outro lado, conforme mostra-se na Figura 9, a relação entre os ângulos α, ψ e ϕ é dada por $\psi = \alpha + \phi$.

As relações entre as bases ortonormais $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_i^*$ e $\mathbf{e}_i^{cr}$, são dadas pelas matrizes de rotação definidas pelas equações (1), (2) e (3). Descrevem-se aquelas matrizes, agora, em função dos ângulos α, ϕ e ψ do seguinte modo

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1^* \\ \mathbf{e}_2^* \\ \mathbf{e}_3^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \mathrm{sen}\alpha & 0 \\ -\mathrm{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{Bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{e}_i^* = \mathbf{Q}\mathbf{e}_i \tag{46}$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1^{cr} \\ \mathbf{e}_2^{cr} \\ \mathbf{e}_3^{cr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \mathrm{sen}\phi & 0 \\ -\mathrm{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1^* \\ \mathbf{e}_2^* \\ \mathbf{e}_3^* \end{Bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{e}_i^{cr} = \mathbf{Q}^*\mathbf{e}_i^* \tag{47}$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1^{cr} \\ \mathbf{e}_2^{cr} \\ \mathbf{e}_3^{cr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \mathrm{sen}\psi & 0 \\ -\mathrm{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{Bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{e}_i^{cr} = \hat{\mathbf{Q}}\mathbf{e}_i \tag{48}$$

Substituindo a equação (46) na equação (47) chega-se a $\mathbf{e}_i^{cr} = \mathbf{Q}^*\mathbf{Q}\mathbf{e}_i$. Comparando-se este resultado com a equação (48), conclui-se que $\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}^*\mathbf{Q}$. Por outro lado, esta relação pode ser obtida levando em consideração as seguintes relações trigonométricas: $\cos\psi = \cos(\alpha+\phi) = \cos\alpha\cos\phi - \mathrm{sen}\alpha\,\mathrm{sen}\phi$ e $\mathrm{sen}\psi = \mathrm{sen}(\alpha+\phi) = \mathrm{sen}\alpha\cos\phi + \mathrm{sen}\phi\cos\alpha$.

Movimento deformacional de uma partícula

Para descrever o movimento de uma partícula arbitrária do elemento de viga 2D, inicialmente, os vetores de deslocamentos e de posição serão expressos em relação à base $\mathbf{e}_i^*$ definida na configuração *indeformada*. Será considerado como componente destes vetores o grau de liberdade rotacional cuja direção é perpendicular ao plano que contêm o elemento de viga 2D, portanto, podendo ser expresso, indistintamente, em relação aos versores $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_3^*$ e $\mathbf{e}_3^{cr}$, respectivamente. Seja uma partícula P de coordenadas $(X_P^*, Y_P^*, \beta_P^*)$ em $\mathcal{C}_\mathcal{O}$, onde β_P^* é o ângulo entre o vetor $\mathbf{X}_P^*$ e o versor $\mathbf{e}_1^*$, conforme mostra-se na Figura 11. Em seguida, esta partícula move-se ao ponto P^{cr} de coordenadas $(X_P^{cr}, Y_P^{cr}, \beta_P^{cr})$ em $\mathcal{C}_\mathcal{R}$, onde β_P^{cr} é o ângulo entre o vetor $\mathbf{X}_P^{cr}$ e o versor $\mathbf{e}_1^{cr}$. Como entre as configurações $\mathcal{C}_\mathcal{O}$ e $\mathcal{C}_\mathcal{R}$ há somente deslocamento de corpo rígido segue que $|\mathbf{X}_P^*| = |\mathbf{X}_P^{cr}|$ e $\beta_P^* = \beta_P^{cr}$. Posteriormente, esta mesma partícula, desloca-se ao ponto P_d de coordenadas (x^*, y^*, θ_P^*) em $\mathcal{C}$, onde θ_P^* é a rotação total, obtida pelo somatório da rotação de corpo rígido ϕ com a rotação deformacional $\theta_{P_d}^*$, isto é, $\theta_P^* = \phi + \theta_{P_d}^*$. A interpretação geométrica deste somatório pode ser

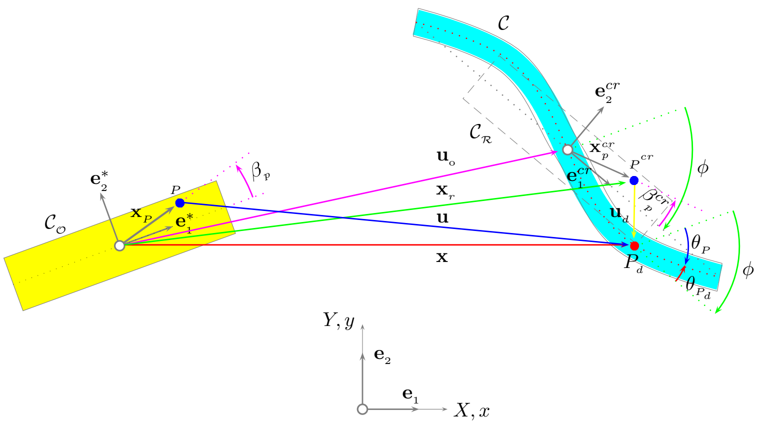

Figura 11. Movimento deformacional de uma partícula do elemento de viga 2D

visualizada na Figura 11. Devido ao movimento de corpo rígido entre as configurações $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ e $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}$, e levando em conta a equação (47), o vetor posição da partícula P em $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}$ pode ser expresso em função da base $\mathbf{e}_i^*$ como $\mathbf{X}_P^{cr\,*} = \mathbf{Q}^{*T}\mathbf{X}_P^*$. Por outro lado, a posição da partícula P em $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}$, em relação ao sistema de referência local definido em $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$, é dado por

$$\mathbf{x}_r^* = \mathbf{u}_0^* + \mathbf{X}_P^{cr\,*} = \mathbf{u}_0^* + \mathbf{Q}^{*T}\mathbf{X}_P^*$$
$$\begin{Bmatrix} x_r^* \\ y_r^* \\ \beta_P^{cr} + \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0^* \\ v_0^* \\ \phi \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\phi & -\mathrm{sen}\phi & 0 \\ \mathrm{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_P^* \\ Y_P^* \\ \beta_P^* \end{Bmatrix} \tag{49}$$

onde $\mathbf{u}_0^*$ é o deslocamento de corpo rígido do centróide do elemento entre as configurações *indeformada* e *co-rotacionada*. De acordo com a Figura 11, a posição da partícula P na configuração *deformada* é dada por

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{X}_P^* + \mathbf{u}^*$$
$$\begin{Bmatrix} x^* \\ y^* \\ \theta_P^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_P^* \\ Y_P^* \\ \beta_P^* \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u^* \\ v^* \\ \theta_P^* - \beta_P^* \end{Bmatrix} \tag{50}$$

onde $\mathbf{u}^*$ é o deslocamento da partícula entre as configurações $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ e $\mathcal{C}$. Este deslocamento pode ser decomposto em uma parte deformacional $\mathbf{u}_d^*$ e em uma parte correspondente ao movimento de corpo rígido $\mathbf{u}_r^*$, tal que, $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_d^* + \mathbf{u}_r^*$. Novamente, como pode ser visto na Figura 11, a parte deformacional deste deslocamento é dada pela seguinte expressão

$$\mathbf{u}_d^* = \mathbf{x}^* - \mathbf{x}_r^*$$
$$\begin{Bmatrix} u_d^* \\ v_d^* \\ \theta_{P_d}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x^* \\ y^* \\ \theta_P^* \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x_r^* \\ y_r^* \\ \phi \end{Bmatrix} \tag{51}$$

Substituindo as equações (49) e (50) em (51), obtém-se o movimento deformacional da partícula P entre as configurações *co-rotacionada* e *deformada*, que se expressa como

$$\mathbf{u}_d^* = (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{*T})\mathbf{X}_P^* + (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_0^*) \tag{52}$$

Por outro lado, o movimento deformacional pode ser expresso no sistema de coordenadas local da configuração *deformada*, isto é, em relação à base $\mathbf{e}_i^{cr}$. Levando em consideração a equação (47), tem-se que $\mathbf{u}_d^{cr} = \mathbf{Q}^*\mathbf{u}_d^*$. Portanto, a equação (52) pode ser reescrita como

$$\mathbf{u}_d^{cr} = (\mathbf{Q}^* - \mathbf{I})\mathbf{X}_P^* + \mathbf{Q}^*(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_0^*) \tag{53}$$

Finalmente, pode-se escrever o movimento deformacional da partícula P na configuração *deformada*, usando a posição que esta partícula ocupava em $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$, o deslocamento do centróide do elemento e o deslocamento de P expressos em coordenadas globais. Desta maneira, levando em conta a equação (46), obtém-se as seguintes relações: $\mathbf{X}_P^* = \mathbf{Q}\mathbf{X}_p$, $\mathbf{u}_0^* = \mathbf{Q}\mathbf{u}_0$ e $\mathbf{u}^* = \mathbf{Q}\mathbf{u}$. Usando estas relações na equação (53), chega-se a

$$\mathbf{u}_d^{cr} = (\mathbf{Q}^*\mathbf{Q} - \mathbf{Q})\mathbf{X}_P + \mathbf{Q}^*\mathbf{Q}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \tag{54}$$

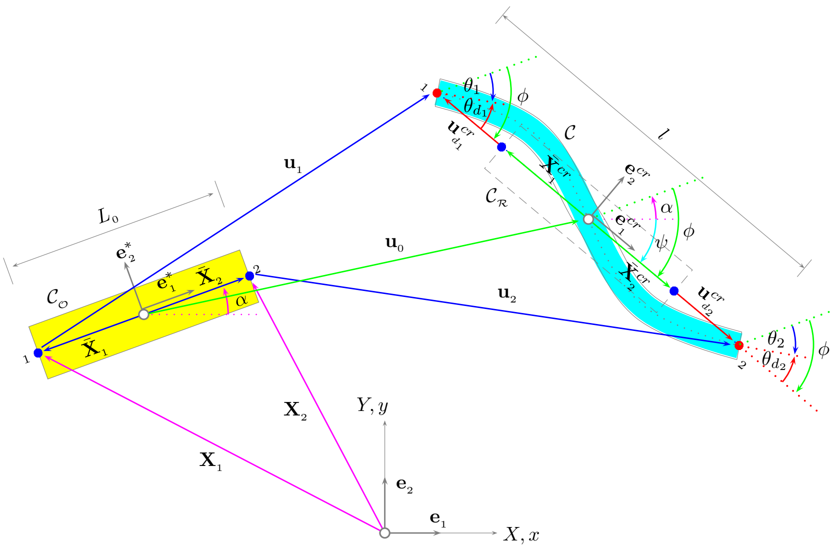

Figura 12. Movimento deformacional do elemento de viga 2D

Por último, tendo em conta a equação (48) e a relação $\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}^*\mathbf{Q}$, obtém-se que

$$\mathbf{u}_d^{cr} = (\hat{\mathbf{Q}} - \mathbf{Q})\mathbf{X}_P + \hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \tag{55}$$

Note que a equação (55) é idêntica às equações (10) e (31) porque para sólidos discretizados com elementos finitos que possuam graus de liberdade translacionais e apenas um grau de liberdade rotacional, perpendicular ao plano que contem o sólido, a extração do movimento deformacional é obtida por relações algébricas simples.

Movimento deformacional do elemento de viga 2D

Para obter o movimento deformacional do elemento de viga 2D serão tomados os deslocamentos do centróide e dos nós do elemento. De acordo com a Figura 12, considera-se que entre as configurações $\mathcal{C}_\mathcal{O}$ e $\mathcal{C}_\mathcal{R}$, o centróide do elemento sofre somente deslocamentos de corpo rígido. Por outro lado, os deslocamentos dos nós 1 e 2 é composto por movimentos deformacionais e de corpo rígido entre as configurações $\mathcal{C}_\mathcal{O}$ e $\mathcal{C}$. Note que os nós estão situados sobre o eixo local $\mathbf{e}_1^*$ em $\mathcal{C}_\mathcal{O}$, e sobre o eixo local $\mathbf{e}_1^{cr}$ em $\mathcal{C}_\mathcal{R}$, portanto, os ângulos β_P e β_P^{cr} serão nulos, respectivamente. A posição dos nós do elemento na configuração *indeformada*, descrita em coordenadas globais, é dada por

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{X}}_1 \\ \bar{\mathbf{X}}_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} -(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1) \\ (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} -\mathbf{X}_{21} \\ \mathbf{X}_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{(X_2 - X_1)}{2} \\ -\frac{(Y_2 - Y_1)}{2} \\ 0 \\ \frac{(X_2 - X_1)}{2} \\ \frac{(Y_2 - Y_1)}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{X_{21}}{2} \\ -\frac{Y_{21}}{2} \\ 0 \\ \frac{X_{21}}{2} \\ \frac{Y_{21}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{56}$$

Por aspectos geométricos dados na Figura 12, pode-se observar que a parte translacional do movimento do centróide do elemento é dado pela média de suas translações nodais, isto é, $\mathbf{u}_{t_0} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{t_1} + \mathbf{u}_{t_2})$. Incluindo, agora, as rotações como a terceira componente desses vetores. Os deslocamentos nodais e do centróide do elemento, expressos em coordenadas globais, podem ser definidos como

$$\mathbf{u}_1 = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u_2} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u_0} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \\ \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \\ \phi \end{Bmatrix} \tag{57}$$

com $\theta_1 = \phi + \theta_{d_1}$ e $\theta_2 = \phi + \theta_{d_2}$, conforme mostra-se na Figura 12. Onde θ_1 é a rotação total do nó 1, θ_{d_1} é a rotação deformacional do nó 1, θ_2 é a rotação total do nó 2, θ_{d_2} é a rotação deformacional do nó 2 e ϕ é a rotação de corpo rígido do elemento. Desta maneira, as rotações deformacionais dos nós do elemento são dadas por: $\theta_{d_1} = \theta_1 - \phi$ e $\theta_{d_2} = \theta_2 - \phi$. Portanto, a relação entre os deslocamentos nodais e o deslocamento do centróide do elemento são expressos, em forma vetorial, como

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \\ \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \\ \phi \\ \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \\ \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{(u_2 - u_1)}{2} \\ -\frac{(v_2 - v_1)}{2} \\ \theta_1 - \phi \\ \frac{(u_2 - u_1)}{2} \\ \frac{(v_2 - v_1)}{2} \\ \theta_2 - \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{u_{21}}{2} \\ -\frac{v_{21}}{2} \\ \theta_{d_1} \\ \frac{u_{21}}{2} \\ \frac{v_{21}}{2} \\ \theta_{d_2} \end{Bmatrix} \tag{58}$$

Considere que a partícula P possa ocupar a posição do nó 1, e em seguida, a posição do nó 2. Desta maneira, levando em conta as equações (55), (56) e (58), o movimento deformacional do elemento se expressa como

$$\begin{Bmatrix} u^{cr}_{d_1} \\ v^{cr}_{d_1} \\ \theta^{cr}_{d_1} \\ u^{cr}_{d_2} \\ v^{cr}_{d_2} \\ \theta^{cr}_{d_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Q}} - \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{Q}} - \mathbf{Q} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{X_{21}}{2} \\ -\frac{Y_{21}}{2} \\ 0 \\ \frac{X_{21}}{2} \\ \frac{Y_{21}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Q}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{u_{21}}{2} \\ -\frac{v_{21}}{2} \\ \theta_{d_1} \\ \frac{u_{21}}{2} \\ \frac{v_{21}}{2} \\ \theta_{d_2} \end{Bmatrix} \tag{59}$$

onde $\mathbf{Q}$ é a matriz de rotação definida em (46). Esta matriz rotaciona os vetores de posição e de deslocamentos do sistema global de referência para o sistema local de referência definido na configuração *indeformada*. A matriz $\hat{\mathbf{Q}}$, dada pela equação (48), rotaciona esses vetores do sistema global para o sistema local de referência definido na configuração *co-rotacionada*. Por inspeção geométrica da Figura 12, deduz-se que o deslocamento deformacional do nó 1 é dado por $u^{cr}_{d_1} = -\frac{(l-L_0)}{2}$, $v^{cr}_{d_1} = 0$ e $\theta^{cr}_{d_1} = \theta_{d_1}$, enquanto que, para o nó 2 tem-se que $u^{cr}_{d_2} = \frac{(l-L_0)}{2}$, $v^{cr}_{d_2} = 0$ e $\theta^{cr}_{d_2} = \theta_{d_2}$. Nas seções anteriores, para os deslocamentos translacionais, demonstrou-se as relações descritas acima. A seguir, utilizando as equações (46), (48) e (59), chega-se às seguintes expressões

$$
\begin{aligned}
u_{d_1}^{cr} &= -\tfrac{u_{21}}{2}\cos\psi - \tfrac{v_{21}}{2}\mathrm{sen}\psi - \tfrac{X_{21}}{2}(\cos\psi - \cos\alpha) - \tfrac{Y_{21}}{2}(\mathrm{sen}\psi - \mathrm{sen}\alpha) \\
u_{d_2}^{cr} &= \tfrac{u_{21}}{2}\cos\psi + \tfrac{v_{21}}{2}\mathrm{sen}\psi + \tfrac{X_{21}}{2}(\cos\psi - \cos\alpha) + \tfrac{Y_{21}}{2}(\mathrm{sen}\psi - \mathrm{sen}\alpha) \\
u_{d_2}^{cr} + u_{d_1}^{cr} &= 0 \\
u_{d_2}^{cr} - u_{d_1}^{cr} &= u_{21}\cos\psi + v_{21}\mathrm{sen}\psi + X_{21}(\cos\psi - \cos\alpha) + Y_{21}(\mathrm{sen}\psi - \mathrm{sen}\alpha)
\end{aligned}
\tag{60}
$$

Ainda utilizando a Figura 12, pode-se definir o movimento deformacional do elemento devido as translações como $d = u_{d_2}^{cr} - u_{d_1}^{cr}$. A seguir demonstra-se que esta relação, também, pode ser expressa como $d = l - L_0$, lembrando que as definições dos senos e co-senos dos ângulos α e ψ foram dadas no início desta seção.

$$
\begin{aligned}
d = u_{d_2}^{cr} - u_{d_1}^{cr} &= u_{21}\cos\psi + v_{21}\mathrm{sen}\psi + X_{21}(\cos\psi - \cos\alpha) + Y_{21}(\mathrm{sen}\psi - \mathrm{sen}\alpha) \\
&= u_{21}(\tfrac{X_{21}+u_{21}}{l}) + v_{21}(\tfrac{Y_{21}+v_{21}}{l}) + X_{21}(\tfrac{X_{21}+u_{21}}{l} - \tfrac{X_{21}}{L_0}) + Y_{21}(\tfrac{Y_{21}+v_{21}}{l} - \tfrac{Y_{21}}{L_0}) \\
&= \tfrac{X_{21}u_{21}+u_{21}^2}{l} + \tfrac{Y_{21}v_{21}+v_{21}^2}{l} + \tfrac{X_{21}^2+X_{21}u_{21}}{l} - \tfrac{X_{21}^2}{L_0} + \tfrac{Y_{21}^2+Y_{21}v_{21}}{l} - \tfrac{Y_{21}^2}{L_0} \\
&= \tfrac{X_{21}^2+2X_{21}u_{21}+u_{21}^2}{l} + \tfrac{Y_{21}^2+2Y_{21}v_{21}+v_{21}^2}{l} - \tfrac{X_{21}^2+Y_{21}^2}{L_0} \\
&= \tfrac{(X_{21}+u_{21})^2}{l} + \tfrac{(Y_{21}+v_{21})^2}{l} - \tfrac{L_0^2}{L_0} = \tfrac{l^2}{l} - \tfrac{L_0^2}{L_0} = l - L_0
\end{aligned}
\tag{61}
$$

A relação ângular $\psi = \alpha + \phi$, ou $\phi = \psi - \alpha$, foi definida no início desta seção, e cuja interpretação geométrica está dada nas Figuras 9 e 12, pode ser utilizada para obter as rotações deformacionais dos nós do elemento em função dos deslocamentos globais. Desta maneira, lembrando que $\theta_{d_1}^{cr} = \theta_1 - \phi$ e $\theta_{d_2}^{cr} = \theta_2 - \phi$. Substituindo ϕ nessas expressões, pela relação dada acima, as rotações deformacionais podem ser escritas como $\theta_{d_1}^{cr} = \theta_1 - \psi + \alpha$ e $\theta_{d_2}^{cr} = \theta_2 - \psi + \alpha$. Por outro lado, estas expressões podem ser escritas em função das translações como

$$
\begin{aligned}
\theta_{d_1}^{cr} &= \theta_1 - \tan^{-1}(\tfrac{Y_{21}+v_{21}}{X_{21}+u_{21}}) + \tan^{-1}(\tfrac{Y_{21}}{X_{21}}) \\
\theta_{d_2}^{cr} &= \theta_2 - \tan^{-1}(\tfrac{Y_{21}+v_{21}}{X_{21}+u_{21}}) + \tan^{-1}(\tfrac{Y_{21}}{X_{21}}) \\
&\text{com} \quad X_{21} + u_{21} \neq 0 \quad \text{e} \quad X_{21} \neq 0
\end{aligned}
\tag{62}
$$

Portanto, o movimento deformacional do elemento de viga 2D será definido pela deformação translacional $d(u_1, v_1, u_2, v_2)$ e pelas rotações deformacionais $\theta_{d_1}^{cr}(u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2)$ e $\theta_{d_2}^{cr}(u_1, v_1, u_2, v_2, \theta_2)$. Nas próximas seções, serão obtidos o vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente através das derivadas primeira e segunda do funcional da energia de deformação, que é escrito em função das variáveis d, $\theta_{d_1}^{cr}$ e $\theta_{d_2}^{cr}$. Portanto, a derivada primeira de d, $\theta_{d_1}^{cr}$ e $\theta_{d_2}^{cr}$ em relação aos deslocamentos globais, $(u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2)$, é dada por

$$
\begin{Bmatrix} \delta d \\ \delta\theta^{cr}_{d_1} \\ \delta\theta^{cr}_{d_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_\psi & -s_\psi & 0 & c_\psi & s_\psi & 0 \\ -s_\psi/l & c_\psi/l & 1 & s_\psi/l & -c_\psi/l & 0 \\ -s_\psi/l & c_\psi/l & 0 & s_\psi/l & -c_\psi/l & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u_1 \\ \delta v_1 \\ \delta\theta_1 \\ \delta u_2 \\ \delta v_2 \\ \delta\theta_2 \end{Bmatrix} \tag{63}
$$

onde $c_\psi = \cos\psi$ e $s_\psi = \text{sen}\psi$. Por outro lado, levando em conta as equações (61), (62) e (63), as derivadas segundas dos deslocamentos deformacionais podem ser definidas por

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 d}{\partial \mathbf{u}\partial \mathbf{u}} &= \frac{1}{l}\begin{bmatrix} s^2_\psi & -s_\psi c_\psi & 0 & -s^2_\psi & s_\psi c_\psi & 0 \\ -s_\psi c_\psi & c^2_\psi & 0 & s_\psi c_\psi & -c^2_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s^2_\psi & s_\psi c_\psi & 0 & s^2_\psi & -s_\psi c_\psi & 0 \\ s_\psi c_\psi & -c^2_\psi & 0 & -s_\psi c_\psi & c^2_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\frac{\partial^2 \theta^{cr}_{d_1}}{\partial \mathbf{u}\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial^2 \theta^{cr}_{d_2}}{\partial \mathbf{u}\partial \mathbf{u}} &= \frac{1}{l^2}\begin{bmatrix} -2s_\psi c_\psi & c^2_\psi - s^2_\psi & 0 & 2s_\psi c_\psi & s^2_\psi - c^2_\psi & 0 \\ c^2_\psi - s^2_\psi & 2s_\psi c_\psi & 0 & s^2_\psi - c^2_\psi & -2s_\psi c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2s_\psi c_\psi & s^2_\psi - c^2_\psi & 0 & -2s_\psi c_\psi & c^2_\psi - s^2_\psi & 0 \\ s^2_\psi - c^2_\psi & -2s_\psi c_\psi & 0 & c^2_\psi - s^2_\psi & 2s_\psi c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{64}
$$

Esforços resultantes do elemento de viga 2D

Os eforços resultantes do elemento de viga 2D na configuração *deformada* são N, V, M_1 e M_2, sendo N o esforço normal, V o esforço cortante e M_1 e M_2 os momentos fletores nos nós 1 e 2 do elemento, respectivamente. Os esforços normal e cortante são considerados constantes enquanto que o momento varia linearmente ao longo do elemento. Estes esforços resultantes, com as respectivas convenções de sinais, são mostrados na Figura 13

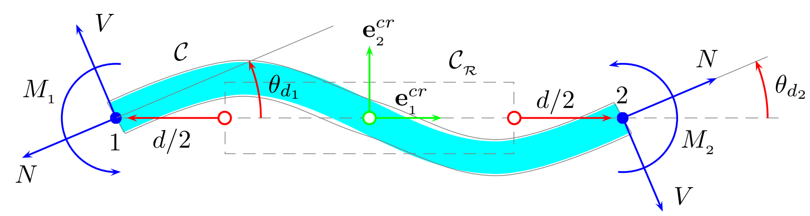

Figura 13. Deformações e esforços seccionais do elemento de viga 2D

apresentada a seguir, sendo obtidos a partir das respectivas deformações[13], de acordo com as seguintes equações

$$\begin{aligned} N &= EA_0\varepsilon = \frac{EA_0}{L_0}d; & V &= \frac{M_1+M_2}{l} = \frac{6EI}{lL_0}(\theta_{d_1}^{cr} + \theta_{d_2}^{cr}) \\ M_1 &= \frac{2EI}{L_0}(2\theta_{d_1}^{cr} + \theta_{d_2}^{cr}); & M_2 &= \frac{2EI}{L_0}(\theta_{d_1}^{cr} + 2\theta_{d_2}^{cr}) \end{aligned} \tag{65}$$

sendo E o módulo de elasticidade longitudinal do material, A_0 a área da seção transversal e I o momento de inércia da seção transversal.

Energia de deformação do elemento de viga 2D

A energia de deformação da viga, considerando-se apenas deformações infinitesimais e, portanto, sem levar em conta o ocoplamento dos efeitos dos esforços axiais e de flexão, pode ser expressa como a soma da energia de deformação axial U_A mais a energia de flexão U_F, ou seja, $U = U_A + U_F$. Desta maneira, adotam-se as seguintes expressões definidas em[14]

$$\begin{aligned} U_A &= \frac{1}{2}EA_0L_0\varepsilon^2 = \frac{1}{2}\frac{EA_0}{L_0}d^2 \\ U_F &= \frac{2EI}{L_0}\left({\theta_{d_1}^{cr}}^2 + \theta_{d_1}^{cr}\theta_{d_2}^{cr} + {\theta_{d_2}^{cr}}^2\right) \end{aligned} \tag{66}$$

Vetor de forças internas do elemento de viga 2D

O vetor de forças internas $\mathbf{f}$ é obtido pela derivada primeira do funcional da energia de deformação U em relação aos deslocamentos globais $\mathbf{u}$, isto é, $\mathbf{f} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}}$. Portanto, utilizando as equações (63), (65) e (66), chega-se às seguintes expressões

$$\begin{gathered} \mathbf{f}_A = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}\left(\frac{1}{2}\frac{EA_0}{L_0}d^2\right) = \frac{EA_0}{L_0}d\frac{\partial d}{\partial \mathbf{u}} = N\frac{\partial d}{\partial \mathbf{u}} = N\begin{bmatrix}-c_\psi & -s_\psi & 0 & c_\psi & s_\psi & 0\end{bmatrix}^T \\ \mathbf{f}_F = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}\left(\frac{2EI}{L_0}\left({\theta_{d_1}^{cr}}^2 + \theta_{d_1}^{cr}\theta_{d_2}^{cr} + {\theta_{d_2}^{cr}}^2\right)\right) = \frac{2EI}{L_0}\left(2\theta_{d_1}^{cr}\frac{\partial\theta_{d_1}^{cr}}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial\theta_{d_1}^{cr}}{\partial \mathbf{u}}\theta_{d_2}^{cr} + \theta_{d_1}^{cr}\frac{\partial\theta_{d_2}^{cr}}{\partial \mathbf{u}} + 2\theta_{d_2}^{cr}\frac{\partial\theta_{d_2}^{cr}}{\partial \mathbf{u}}\right) \\ \mathbf{f}_F = \begin{bmatrix}-Vs_\psi & Vc_\psi & M_1 & Vs_\psi & -Vc_\psi & M_2\end{bmatrix}^T \end{gathered} \tag{67}$$

Por fim, o vetor de forças internas é obtido pela soma das contribuições dos esforços axial e de flexão, isto é, $\mathbf{f} = \mathbf{f}_A + \mathbf{f}_F$.

Matriz de rigidez tangente do elemento de viga 2D

A matriz de rigidez tangente é obtida pela derivada segunda do funcional da energia de deformação U em relação ao vetor de deslocamentos globais $\mathbf{u}$, ou de forma similar através da derivada primeira do vetor de forças internas $\mathbf{f}$, ou seja, $\mathbf{K} = \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_G$. Portanto, derivando as expressões de $\mathbf{f}_A$ e $\mathbf{f}_F$, dadas na equação (67), obtém-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}_A}{\partial \mathbf{u}} &= \frac{EA_0}{L_0}\left(\frac{\partial d}{\partial \mathbf{u}} \otimes \frac{\partial d}{\partial \mathbf{u}} + d\frac{\partial^2 d}{\partial \mathbf{u}\partial \mathbf{u}}\right) \\ \frac{\partial \mathbf{f}_F}{\partial \mathbf{u}} &= \frac{2EI}{L_0}\left((2\theta_{d_1}^{cr} + \theta_{d_2}^{cr})\frac{\partial^2\theta_{d_1}^{cr}}{\partial \mathbf{u}\partial \mathbf{u}} + 2\frac{\partial\theta_{d_1}^{cr}}{\partial \mathbf{u}} \otimes \frac{\partial\theta_{d_1}^{cr}}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial\theta_{d_1}^{cr}}{\partial \mathbf{u}} \otimes \frac{\partial\theta_{d_2}^{cr}}{\partial \mathbf{u}} + \right. \\ &\left. + (\theta_{d_1}^{cr} + 2\theta_{d_2}^{cr})\frac{\partial^2\theta_{d_2}^{cr}}{\partial \mathbf{u}\partial \mathbf{u}} + 2\frac{\partial\theta_{d_2}^{cr}}{\partial \mathbf{u}} \otimes \frac{\partial\theta_{d_2}^{cr}}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial\theta_{d_2}^{cr}}{\partial \mathbf{u}} \otimes \frac{\partial\theta_{d_1}^{cr}}{\partial \mathbf{u}}\right) \end{aligned} \tag{68}$$

Usando as derivadas primeiras e segundas das deformações d, $\theta_{d_1}^{cr}$ e $\theta_{d_2}^{cr}$, dadas pelas equações (63) e (64), na equação (68), chega-se às seguintes expressões

$$\mathbf{K}_M=\begin{bmatrix} \left(\frac{EA_0}{L_0}c_\psi^2+\frac{12EI}{L_0l^2}s_\psi^2\right) & \left(\frac{EA_0}{L_0}-\frac{12EI}{L_0l^2}\right)s_\psi c_\psi & -\frac{6EI}{L_0l}s_\psi & \left(-\frac{EA_0}{L_0}c_\psi^2-\frac{12EI}{L_0l^2}s_\psi^2\right) & \left(-\frac{EA_0}{L_0}+\frac{12EI}{L_0l^2}\right)s_\psi c_\psi & -\frac{6EI}{L_0l}s_\psi \\ \left(\frac{EA_0}{L_0}-\frac{12EI}{L_0l^2}\right)s_\psi c_\psi & \left(\frac{EA_0}{L_0}s_\psi^2+\frac{12EI}{L_0l^2}c_\psi^2\right) & \frac{6EI}{L_0l}c_\psi & \left(-\frac{EA_0}{L_0}+\frac{12EI}{L_0l^2}\right)s_\psi c_\psi & \left(-\frac{EA_0}{L_0}s_\psi^2-\frac{12EI}{L_0l^2}c_\psi^2\right) & \frac{6EI}{L_0l}c_\psi \\ -\frac{6EI}{L_0l}s_\psi & \frac{6EI}{L_0l}c_\psi & \frac{4EI}{L_0} & \frac{6EI}{L_0l}s_\psi & -\frac{6EI}{L_0l}c_\psi & \frac{2EI}{L_0} \\ \left(-\frac{EA_0}{L_0}c_\psi^2-\frac{12EI}{L_0l^2}s_\psi^2\right) & \left(-\frac{EA_0}{L_0}+\frac{12EI}{L_0l^2}\right)s_\psi c_\psi & \frac{6EI}{L_0l}s_\psi & \left(\frac{EA_0}{L_0}c_\psi^2+\frac{12EI}{L_0l^2}s_\psi^2\right) & \left(\frac{EA_0}{L_0}-\frac{12EI}{L_0l^2}\right)s_\psi c_\psi & \frac{6EI}{L_0l}s_\psi \\ \left(-\frac{EA_0}{L_0}+\frac{12EI}{L_0l^2}\right)s_\psi c_\psi & \left(-\frac{EA_0}{L_0}s_\psi^2-\frac{12EI}{L_0l^2}c_\psi^2\right) & -\frac{6EI}{L_0l}c_\psi & \left(\frac{EA_0}{L_0}-\frac{12EI}{L_0l^2}\right)s_\psi c_\psi & \left(\frac{EA_0}{L_0}s_\psi^2+\frac{12EI}{L_0l^2}c_\psi^2\right) & -\frac{6EI}{L_0l}c_\psi \\ -\frac{6EI}{L_0l}s_\psi & \frac{6EI}{L_0l}c_\psi & \frac{2EI}{L_0} & \frac{6EI}{L_0l}s_\psi & -\frac{6EI}{L_0l}c_\psi & \frac{4EI}{L_0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_G=\begin{bmatrix} \left(\frac{N}{l}s_\psi^2-\frac{2V}{l}s_\psi c_\psi\right) & \left(-\frac{N}{l}s_\psi c_\psi+\frac{V}{l}(c_\psi^2-s_\psi^2)\right) & 0 & \left(-\frac{N}{l}s_\psi^2+\frac{2V}{l}s_\psi c_\psi\right) & \left(\frac{N}{l}s_\psi c_\psi-\frac{V}{l}(c_\psi^2-s_\psi^2)\right) & 0 \\ \left(-\frac{N}{l}s_\psi c_\psi+\frac{V}{l}(c_\psi^2-s_\psi^2)\right) & \left(\frac{N}{l}c_\psi^2+\frac{2V}{l}s_\psi c_\psi\right) & 0 & \left(\frac{N}{l}s_\psi c_\psi-\frac{V}{l}(c_\psi^2-s_\psi^2)\right) & \left(-\frac{N}{l}c_\psi^2-\frac{2V}{l}s_\psi c_\psi\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(-\frac{N}{l}s_\psi^2+\frac{2V}{l}s_\psi c_\psi\right) & \left(\frac{N}{l}s_\psi c_\psi-\frac{V}{l}(c_\psi^2-s_\psi^2)\right) & 0 & \left(\frac{N}{l}s_\psi^2-\frac{2V}{l}s_\psi c_\psi\right) & \left(-\frac{N}{l}s_\psi c_\psi+\frac{V}{l}(c_\psi^2-s_\psi^2)\right) & 0 \\ \left(\frac{N}{l}s_\psi c_\psi-\frac{V}{l}(c_\psi^2-s_\psi^2)\right) & \left(-\frac{N}{l}c_\psi^2-\frac{2V}{l}s_\psi c_\psi\right) & 0 & \left(-\frac{N}{l}s_\psi c_\psi+\frac{V}{l}(c_\psi^2-s_\psi^2)\right) & \left(\frac{N}{l}c_\psi^2+\frac{2V}{l}s_\psi c_\psi\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{69}$$

Note que a rotação de corpo rígido do elemento e suas rotações deformacionais, definidas na equação (62), além do vetor de forças internas, dado pela equação (67), e da matriz de rigidez tangente, dada pela equação (69), são calculados em função dos deslocamentos nodais expressos em coordenadas globais.

CONCLUSÕES

Ao definir-se as transformações ortogonais entre os distintos sistemas de coordenadas utilizados para descrever a cinématica co-rotacional foi possível unificar o procedimento algébrico para a separação entre o movimento de corpo rígido e o movimento deformacional. Demonstrou-se neste trabalho que a descrição do movimento deformacional de um sólido utilizando a formulação co-rotacional é obtida analiticamente quando este sólido é discretizado por elementos finitos com graus de liberdades translacionais, e com, no máximo, um grau de liberdade rotacional por nó. Cabe destacar como principal vantagem da formulação corotacional, o desacoplamento entre os efeitos locais e globais. Pode-se incluir como efeitos locais, em regime de deformações infinitesimais, por exemplo, os modelos constitutivos da plasticidade, os modelos da mecânica da fratura e modelos de dano. Por outro lado, os efeitos globais decorreriam do movimento de corpo rígido do sólido, possibilitando, por exemplo, a análise da estabilidade do equilíbrio, a detecção de singularidades na matriz de rigidez tangente do elemento, a formulação de algorítmos de busca de trajetórias secundárias de equilíbrio. Entretanto, para que esta formulação se difunda na comunidade de métodos numéricos aplicados a engenharia, é necessário que a mesma possa superar alguns obstáculos, tais como, a aplicação de métodos implícitos para integração no tempo do tensor de rotações finitas na análise dinâmica não-linear.

REFERÊNCIAS

1 B.M. Fraeijs de Veubeke, "The dynamics of flexible bodies", *Int. J. Engineering Science*, Vol. **14**, pp. 895–913, (1976).

2 C.C. Rankin y F.A. Brogan, "An element independent corotational procedure for the treatment of large rotation", *ASME J. Pressure Vessel Technology*, Vol. **108**, pp. 165–174, (1986).

3 C.A. Felippa y B. Haugen, "A unified formulation of small-strain corotational finite elements: I. Theory", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. **81**, pp. 131–150, (2005).

4 J. Argyris, "An excursion into large rotations", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. **32**, pp. 85–155, (1982).

5 C.C. Rankin y B. Nour-Omid, "The use of projectors to improve finite element performance", *Computers and Structures*, Vol. **30**, pp. 257–267, (1988).

6 M.A. Crisfield, "A consistent corotational formulation for nonlinear three-dimensional beam elements", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. **81**, pp. 131–150, (1990).

7 J.M. Pajot y K. Maute, "Analytical sensitivity analysis of geometrically nonlinear structures based on the co-rotational finite element method", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. **42**, pp. 900-913, (2006).

8 B. Nour-Omid y C.C. Rankin, "Finite rotation analysis and consistent linearizations using projectors", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. **93**, pp. 353–384, (1991).

9 B. Skallerud y B. Haugen, "Collapse of thin shell structures-stress resultant plasticity modelling within a co-rotated ANDES finite element formulation", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. **46**, pp. 1961–1986, (1999).

10 N. Stander y E. Stein, "An energy-conserving planar finite beam element for dynamics of flexible mechanisms", *Engineering Computations*, Vol. **13**, N∘ 6, pp. 60–85, (1996).

11 H.G. Zhong y M.A. Crisfield, "An energy-conserving co-rotational procedure for the dynamics of shell structures", *Engineering Computations*, Vol. **15**, N∘ 5, pp. 552–576, (1998).

12 J. Salomon, A.A. Weiss y B.I. Wohlmuth, "Energy conserving algorithms for a co-rotational formulation", *SIAM J. Num. Anal.*, Vol. **46**, pp. 1842–1866, (2008).

13 H.B. Harrison, "*Computer methods in structural analysis*", Prentice Hall, (1973).

14 C.A. Felippa, "Nonlinear finite element methods", Lecture notes for the course nonlinear finite element methods, Center for Aerospace Structures, University of Colorado, Boulder/USA, (2001).