

Sensibilidad analítica de respuestas dinámicas de estructuras en teoría lineal y de segundo orden

Alejandro Mosquera

Área de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras
ETS de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos (ETSICCP)
Universidade da Coruña
Campus de Elviña s/n, 15071 La Coruña, España
Tel.: 34-981-16 70 00 (1410); Fax: 34-981-16 71 70
e-mail: mosquera@iccp.udc.es
web <http://caminos.udc.es/grupos/mmcte>

Santiago Hernández

Área de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras
ETS de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos (ETSICCP)
Universidade da Coruña
Campus de Elviña s/n, 15071 La Coruña, España
Tel.: 34-981-16 70 00 (1405); Fax: 34-981-16 71 70
e-mail: hernandez@iccp.udc.es
web <http://caminos.udc.es/grupos/mmcte>

Resumen

En este artículo se describe en primer lugar el cálculo de las frecuencias y modos propios de vibración de una estructura de barras en tres dimensiones, tanto en teoría lineal como teniendo en cuenta efectos de segundo orden. En la actualidad, los métodos más populares de cálculo de sensibilidades en problemas de valores propios utilizan en algún momento del proceso los cálculos por diferencias finitas. Esta es la razón por la cual se presenta una formulación completamente analítica para la obtención de dichas sensibilidades en teoría lineal y de segundo orden. Finalmente se incluyen algunos ejemplos, con el objeto de comparar los resultados analíticos con los que arrojan los cálculos por diferencias finitas.

Palabras clave: *análisis estructural lineal y de segundo orden, análisis modal, análisis de sensibilidad analíticos.*

ANALYTICAL SENSITIVITY ANALYSIS OF STRUCTURAL DYNAMIC RESPONSES IN LINEAR AND SECOND ORDER THEORY

Summary

In this paper the calculation of the natural vibration frequencies and modes in a three dimensional constant cross-sectional beam structure is first presented in linear theory, and taking into account second order effects. Nowadays most common methods to calculate sensitivity analysis of eigenvalue problems use somewhere the finite difference calculations. That is why a full analytical formulation to obtain these sensitivities with beam's size as design variables is described in linear and second order theory. Finally some examples are included to compare the analytical results with those given by the finite difference calculations.

Keywords: *linear and second order structural analysis, modal analysis, analytical sensitivity analysis.*

FRECUENCIAS NATURALES Y MODOS PROPIOS DE VIBRACIÓN DE UNA ESTRUCTURA TRIDIMENSIONAL DE BARRAS DE SECCIÓN CONSTANTE

La obtención de las frecuencias naturales y modos propios de vibración en ingeniería, es necesaria para la resolución de múltiples y variados problemas tales como la obtención de cargas de pandeo, cálculo dinámico, análisis aeroelástico, etc.

El desarrollo del análisis matricial de estructuras de barras por el método del equilibrio o de los movimientos^{1,2,3,4} conduce a la expresión

$$\mathbf{p} = \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (1)$$

donde $\mathbf{p}$ es el vector de cargas, $\mathbf{u}$ el vector de movimientos nodales y $\mathbf{K}$ la matriz de rigidez. En teoría lineal la matriz de rigidez de la estructura resulta

$$\mathbf{K}_{\text{lin}} = \mathbf{IE}(\mathbf{K}_E^b) \quad (2)$$

en la que $\mathbf{IE}$ representa la operación de ensamblaje de la matriz de rigidez para toda la estructura, siendo $\mathbf{K}_E^b$ las matrices de rigidez elementales para cada barra b en ejes globales y $\mathbf{K}_{\text{lin}}$ la matriz de rigidez global. Si se tienen en cuenta los efectos de segundo orden (rigidización/flexibilización por esfuerzo axial), se tiene^{2,5}

$$\mathbf{K}_{\text{nolin}} = \mathbf{K}_{\text{lin}} + \mathbf{K}_G \quad (3)$$

donde $\mathbf{K}_G$ es la matriz de rigidez geométrica para la estructura completa, de modo que

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{IE}(N_b \mathbf{K}_G^b) \quad (4)$$

siendo N_b el esfuerzo axial de tracción para el elemento b y $\mathbf{K}_G^b$ la matriz de rigidez geométrica elemental de la barra en ejes globales.

El problema dinámico de la vibración libre se formula

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (5)$$

donde $\mathbf{M}$ es la matriz de masas de la estructura, obtenida concentrando las masas de los elementos barra a los nudos y $\mathbf{K}$ la matriz de rigidez de la estructura en teoría lineal o no lineal.

Mediante análisis modal el problema dinámico se formula^{6,7}

$$[\mathbf{K}_{\text{lin}} - \omega_n^2 \mathbf{M}] \boldsymbol{\phi}_n = \mathbf{0} \quad (6a)$$

$$[\mathbf{K}_{\text{nolin}} - \omega_n^2 \mathbf{M}] \boldsymbol{\phi}_n = \mathbf{0} \quad (6b)$$

en la que ω_n es la n -ésima frecuencia natural de vibración y $\boldsymbol{\phi}_n$ el modo n -ésimo de vibración, siendo $n = 1, \dots, N$ el número de grados de libertad de la estructura con masa asociada.

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE LAS FRECUENCIAS Y MODOS PROPIOS DE VIBRACIÓN EN TEORÍA LINEAL Y DE SEGUNDO ORDEN

El cálculo de la sensibilidad estructural estudia el cambio que se infiere, en busca de una solución mejor, a las variables de diseño durante el proceso de optimización. Con frecuencia, el análisis de sensibilidad resulta el proceso con mayor coste computacional en la optimización, siendo necesario disponer de algoritmos eficientes para evaluar las derivadas. Una parte importante de problemas en ingeniería está asociada a la obtención de valores propios, por ello tiene gran importancia el estudio de los procedimientos para llevar a cabo en ellos análisis de sensibilidad.

Considérese una estructura tridimensional de barras de sección constante, en la que se toma una variable de diseño genérica x . Definido el problema de la vibración libre por la expresión (5) y su solución por (6a) o (6b) según se trate de teoría lineal o de segundo orden, los modos de vibración se suelen normalizar con una matriz definida positiva, que suele ser la matriz de masas $\mathbf{M}$ de forma que

$$\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n = 1 \quad (7)$$

diciéndose que los modos se encuentran normalizados a la masa y verificándose dicha condición para todos y cada uno de ellos. Derivando analíticamente este problema de valores propios, se obtiene^{8,9}

$$\frac{\partial(\omega_n^2)}{\partial x} = \frac{\boldsymbol{\phi}_n^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x} - \omega_n^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right) \boldsymbol{\phi}_n}{\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n} \quad (8)$$

La evaluación de estas sensibilidades sobre las frecuencias naturales de vibración requiere el cálculo de la derivada de la matriz de rigidez con respecto a una variable de diseño genérica x . Por su parte, las derivadas de los modos propios de vibración se obtienen tras derivar el problema de valores propios según la expresión siguiente

$$(\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}) \frac{\partial \boldsymbol{\phi}_n}{\partial x} = \frac{\partial(\omega_n^2)}{\partial x} \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n - \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x} - \omega_n^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right) \boldsymbol{\phi}_n \quad (9)$$

que es un sistema de ecuaciones para cada frecuencia y modo propio, que posee como incógnitas las sensibilidades de dichos modos propios de vibración.

Ha de tenerse especial cuidado en la resolución de este último sistema de ecuaciones debido a su singularidad. Una de las técnicas de solución más usadas, y que es la que se ha implementado en este trabajo, es debida a Nelson¹⁰. Este método reemplaza las condiciones de normalización de la ecuación (7) por la condición de que la componente más grande del vector propio sea igual a uno. Denominando al vector propio normalizado de esta forma $\bar{\boldsymbol{\phi}}$ y suponiendo que su componente mayor es la m -ésima y que vale uno, se puede reemplazar la ecuación (7) por

$$\bar{\phi}^m = 1 \quad (10)$$

y, por tanto, se puede suponer que

$$\frac{\partial \bar{\phi}^m}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

la ecuación (9) es válida si se reemplaza $\boldsymbol{\phi}$ por $\bar{\boldsymbol{\phi}}$, pero la ecuación (11) se utiliza para reducirla en un orden eliminando la fila y la columna m . De este modo el sistema así reducido ya no es singular y se puede resolver por técnicas estándar para cada una de las N parejas $\omega^2, \bar{\boldsymbol{\phi}}$.

Para calcular la derivada del vector propio con la normalización original de la ecuación (7), se procede de la siguiente manera: se deriva dicha ecuación y reordenando los términos resulta

$$\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial x} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\phi}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \boldsymbol{\phi} \quad (12)$$

Recordando la expresión $\boldsymbol{\phi} = \phi^m \bar{\boldsymbol{\phi}}$ y derivando, se obtiene

$$\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial x} = \frac{\partial \phi^m}{\partial x} \bar{\boldsymbol{\phi}} + \phi^m \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\phi}}}{\partial x} \quad (13)$$

y $\partial \phi^m / \partial x$ puede obtenerse sustituyendo la ecuación (13) en la ecuación (12), obteniéndose

$$\frac{\partial \phi^m}{\partial x} = -(\phi^m)^2 \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\phi}}}{\partial x} - \frac{\phi^m}{2} \boldsymbol{\phi}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \boldsymbol{\phi} \quad (14)$$

quedando completamente definida la ecuación (13) que obtenía la derivada de cada modo propio de vibración con la normalización a la masa.

Existen otras alternativas al método de Nelson aquí descrito, por medio de adjuntos o técnicas modales^{11,12} o generalizaciones del método^{13,14}. De nuevo la evaluación de estas sensibilidades sobre los modos propios de vibración requiere el cálculo de la derivada de la matriz de rigidez con respecto a una variable de diseño genérica x .

Análisis de sensibilidad en teoría lineal

Considérese una estructura tridimensional de barras de sección constante, en la que se toma como vector $\mathbf{x}$ de variables de diseño de las barras $\mathbf{x} = (I_x, I_y, I_z)$ siendo $I_x = J, I_y, I_z$, los momentos de inercia con respecto a los tres ejes locales de las mismas, es decir, los dos momentos de inercia a flexión y el momento de inercia a torsión. Derivando la ecuación (2) con respecto a la variable de diseño x_i , se obtiene la derivada de la matriz de rigidez de la estructura en teoría lineal del siguiente modo

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{\text{lin}}}{\partial x_i} = \mathbf{IE} \left(\frac{\partial \mathbf{K}_E^b}{\partial x_i} \right) \quad (15)$$

En consecuencia, para cada una de las matrices elementales de barra $\mathbf{K}_E^b$ puede suceder que contengan o no en alguno de sus términos la variable de diseño respecto a la que se pretende derivar. Si dicha variable es inexistente, la derivada será nula. En caso contrario, para cada término k_{ij}^b de la matriz podrá suceder:

- que k_{ij}^b sea nulo, entonces $\frac{\partial k_{ij}^b}{\partial x_i} = 0$
- que k_{ij}^b no dependa de x_i , verificándose igualmente que $\frac{\partial k_{ij}^b}{\partial x_i} = 0$
- k_{ij}^b dependa linealmente de x_i , por lo que $\frac{\partial k_{ij}^b}{\partial x_i} = \frac{k_{ij}^b}{x_i}$

Tras realizar el conjunto de derivadas, el ensamblaje se realiza de la forma indicada en (15). Seguidamente ya puede procederse a obtener el análisis de sensibilidad de las frecuencias naturales y modos propios de vibración en teoría lineal de acuerdo con las ecuaciones (8) y (9).

Análisis de sensibilidad en teoría de segundo orden

En teoría de segundo orden, esto es, teniendo en cuenta la no linealidad geométrica de la estructura, considérese nuevamente una estructura tridimensional de barras de sección constante, en la que se toma el mismo vector $\mathbf{x}$ de variables de diseño $\mathbf{x} = (I_x, I_y, I_z)$. Derivando la ecuación (3) con respecto a la variable de diseño x_i , se obtiene la derivada de la matriz de rigidez de la estructura en teoría no lineal del siguiente modo

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{\text{nolin}}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{K}_{\text{lin}}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{K}_G}{\partial x_i} \quad (16)$$

donde la derivada de la matriz de rigidez lineal de la estructura $\mathbf{K}_{\text{lin}}$ ya se ha obtenido en el punto anterior y la derivada de la matriz de rigidez geométrica de la estructura $\mathbf{K}_G$ se obtiene haciendo uso de la ecuación (4) del siguiente modo

$$\frac{\partial \mathbf{K}_G}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{IE}(N_b \mathbf{K}_G^b)) = \mathbf{IE} \left(\mathbf{K}_G^b \frac{\partial N_b}{\partial x_i} \right) \quad (17)$$

nótese que en esta ecuación (17) las derivadas de las matrices geométricas elementales de barra $\mathbf{K}_G^b$ son nulas, pues únicamente contienen parámetros geométricos y no parámetros mecánicos de las barras.

Por otro lado, el esfuerzo axial en cada uno de los elementos está relacionado con los movimientos de los nudos inicial y final en coordenadas globales por

$$N_b = \mathbf{w}^T \mathbf{u}^b \quad (18)$$

en la que $\mathbf{u}^b$ es el vector que contiene los doce grados de libertad del elemento barra en coordenadas globales (tres traslaciones y tres rotaciones en cada nudo) y $\mathbf{w}$ es el vector que los relaciona con el esfuerzo axial. De este modo, la ecuación anterior (17) puede ser desarrollada del siguiente modo

$$\frac{\partial \mathbf{K}_G}{\partial x_i} = \mathbf{IE} \left(\mathbf{K}_G^b \mathbf{w}^T \frac{\partial \mathbf{u}^b}{\partial x_i} \right) + \mathbf{IE} \left(\mathbf{K}_G^b \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial x_i} \mathbf{u}^b \right) \quad (19)$$

donde la derivada del vector $\mathbf{u}^b$, esto es, la derivada del vector de movimientos nodales en el problema no lineal, con respecto a la variable de diseño, todavía no es conocida. Para su obtención se plantea el problema estático en teoría de segundo orden

$$\mathbf{p} = (\mathbf{K}_{\text{lin}} + \mathbf{K}_G) \mathbf{u} \quad (20)$$

donde $\mathbf{p}$ representaba el vector de cargas en nudos y $\mathbf{u}$ el vector de movimientos nodales. El vector de cargas $\mathbf{p}$ estará formado por las cargas correspondientes al estado de carga considerado en la estructura para el cálculo de las frecuencias y modos propios, que en general será el peso propio, por lo que se obtendrá concentrando los pesos de las barras en los nudos. Derivando esta expresión respecto a la variable de diseño x_i , se obtiene

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{K}_{\text{lin}} \mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{K}_G \mathbf{u}) \quad (21)$$

Por medio de la ecuación (4) se tiene que el último sumando del segundo miembro de esta ecuación resulta

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{K}_G \mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial x_i} [\mathbf{IE}(N_b \mathbf{K}_G^b) \mathbf{u}] \quad (22)$$

expresión que puede ser convenientemente modificada del siguiente modo

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{K}_G \mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial x}[\mathbf{IE}(\mathbf{K}_G^b \mathbf{u}^b N_b)] \quad (23)$$

Realizando las derivadas, se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{K}_G \mathbf{u}) = \mathbf{IE} \left(\frac{\partial \mathbf{K}_G^b}{\partial x} \mathbf{u}^b N_b + \mathbf{K}_G^b \frac{\partial \mathbf{u}^b}{\partial x} N_b + \mathbf{K}_G^b \mathbf{u}^b \frac{\partial N_b}{\partial x} \right) \quad (24)$$

y sustituyendo N_b de la ecuación (18), resulta

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{K}_G \mathbf{u}) = \mathbf{K}_G \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{IE}(\mathbf{K}_G^b \mathbf{u}^b \mathbf{w}^T) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{IE} \left(\mathbf{K}_G^b \mathbf{u}^b \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial x} \mathbf{u}^b \right) \quad (25)$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación (21), se llega a la expresión

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{K}_{\text{lin}}}{\partial x} \mathbf{u} + \mathbf{K}_{\text{lin}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{K}_G \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{IE}(\mathbf{K}_G^b \mathbf{u}^b \mathbf{w}^T) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{IE} \left(\mathbf{K}_G^b \mathbf{u}^b \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial x} \mathbf{u}^b \right) \quad (26)$$

que reordenando y agrupando términos convenientemente puede ser formulada como

$$[\mathbf{K}_{\text{lin}} + \mathbf{K}_G + \mathbf{IE}(\mathbf{K}_G^b \mathbf{u}^b \mathbf{w}^T)] \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{K}_{\text{lin}}}{\partial x} \mathbf{u} - \mathbf{IE} \left(\mathbf{K}_G^b \mathbf{u}^b \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial x} \mathbf{u}^b \right) \quad (27)$$

que resulta ser un sistema lineal de ecuaciones en el que las incógnitas son las derivadas de los movimientos $\mathbf{u}$ en los nudos, que eran necesarias en la ecuación (19). Nótese que con las variables de diseño planteadas, el término $\partial \mathbf{w}^T / \partial x$ es nulo, pues no depende de dichas variables según, y el término $\partial \mathbf{p} / \partial x$ es igualmente nulo.

Por último, introduciendo estos resultados en la ecuación (16), la derivada de la matriz de rigidez considerando la no linealidad geométrica, esto es, en teoría de segundo orden, resulta

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{\text{nolin}}}{\partial x} = \mathbf{IE} \left(\frac{\partial \mathbf{K}_E^b}{\partial x} \right) + \mathbf{IE} \left(\mathbf{K}_G^b \mathbf{w}^T \frac{\partial \mathbf{u}^b}{\partial x} \right) + \mathbf{IE} \left(\mathbf{K}_G^b \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial x} \mathbf{u}^b \right) \quad (28)$$

de este modo las derivadas de las frecuencias naturales y de los modos propios de vibración dados por las ecuaciones (8) y (9) pueden ser obtenidas analíticamente considerando este tipo de efectos.

EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Se ha realizado un completo programa de ordenador en código Fortran90, denominado ADISNOL3D¹⁵ que realiza el cálculo estático y dinámico de estructuras de barras tridimensionales con el objeto de poder implementar la formulación analítica, anteriormente descrita, del cálculo de las sensibilidades de las frecuencias naturales y modos propios de vibración.

Sea una estructura tridimensional de barras que ha de ser estudiada en teoría no lineal, esto es, teniendo en cuenta efectos de segundo orden, como puede ser un puente colgante. Este tipo de estructuras tan flexibles requieren de este tipo de análisis para incluir los efectos de rigidización por esfuerzo axial que se dan en los cables.

**Figura 1.** Puente del Great Belt

Longitud del vano central (m)	1624
Longitud de los vanos laterales (m)	535
Flecha de los cables principales (m)	180
Distancia entre los cables principales (m)	27
Anchura total del tablero (m)	31
Canto del tablero (m)	4,4
Sección de cada cable principal (m ²)	0,44
Masa de cada cable principal (t/m)	3,74
Momento de inercia a flexión vertical del tablero I_y (m ⁴)	4,0
Momento de inercia a flexión lateral del tablero I_z (m ⁴)	100,0
Momento de inercia a torsión del tablero J (m ⁴)	7,6
Masa del tablero (t/m)	15,26
Momento polar de inercia del tablero (tm ² /m)	1106,8

Tabla I. Propiedades geométricas y mecánicas del Great Belt

El modelo sobre el que se ha trabajado corresponde al puente del Great Belt en Dinamarca (Figura 1), un puente colgante con tablero en cajón aerodinámico y 1624 metros de luz en el vano central. En la Tabla I se adjuntan las principales características geométricas y mecánicas del puente^{16,17,18} y en la Figura 2 se muestra el modelo de barras utilizado. Nótese que los nudos del tablero en el vano principal están numerados del 1 al 21. Esto se menciona puesto que es la deformación del vano central la que se representa en los posteriores gráficos de modos de vibración y sus derivadas.

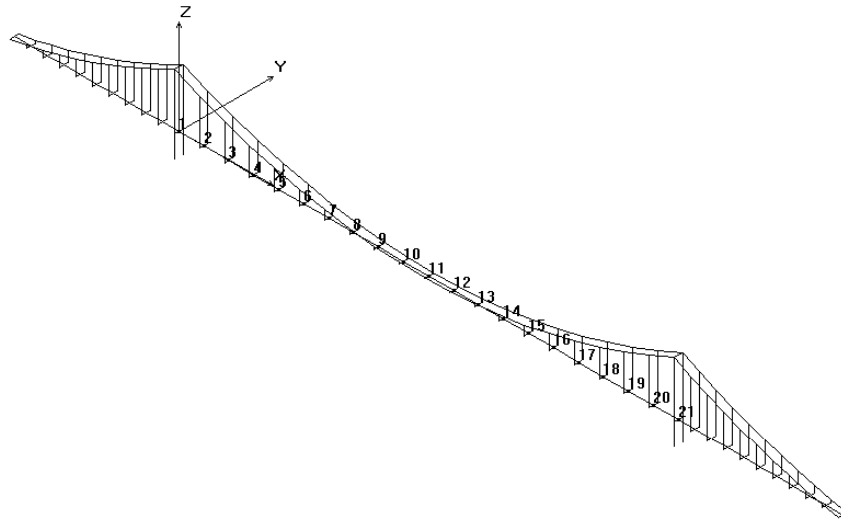


Figura 2. Modelo estructural del Puente del Gran Belt

Tipo de modo	Mosquera y Hernández (ADISNOL3D)	Jurado ¹⁹ (COSMOS/M)	Larsen ¹⁷	Cobo del Arco ¹⁸ (NOLIN3D)
(1) LS	0,326	0,331	0,326	0,328
(2) VS	0,606	0,613	0,628	0,622
(3) VA	0,693	0,704	0,723	0,712
(4) LA	0,781	0,789	0,773	0,765
(5) VS	0,813	0,835	0,848	0,832
(6) VA	1,104	1,134	—	1,123
(11) VA	1,284	1,239	—	1,189
(12) VS	1,360	1,388	—	1,351
(13) LS	1,382	1,391	1,175	1,251
(18) VS	1,559	1,575	—	1,527
(19) VA	1,747	1,777	—	—
(21) VA	1,821	1,850	—	—
(22) TS	1,855	1,859	1,747	1,730
(27) VS	2,115	2,164	—	—
(28) LTA	2,207	2,223	—	—
(29) LS	2,434	2,438	—	—
(30) TA	2,461	2,470	2,406	2,216
(37) TS	2,816	2,830	3,154	—

Tabla II. Comparación de las frecuencias naturales (rad/s) del Great Belt

En la Tabla II se adjuntan los resultados de las frecuencias naturales de vibración, hasta el segundo modo simétrico de torsión en el tablero, obtenidas en teoría de segundo orden según la ecuación (6b), en rad/s, así como los publicados por otros investigadores como Larsen¹⁶, Cobo del Arco¹⁷ y Jurado¹⁸ y en su caso los códigos utilizados. Se muestran únicamente las frecuencias asociadas a modos que presentan movimientos en el tablero. La terminología seguida para indicar el tipo de modo de vibración al que están asociadas es la siguiente:

- V:** modo de vibración vertical
- L:** modo de vibración lateral
- T:** modo de vibración torsional
- S:** modo de vibración simétrico
- A:** modo de vibración antisimétrico

Las Figuras 3, 4 y 5 muestran los primeros modos de vibración de cada tipo, en las que también se adjuntan las componentes correspondientes a los nudos del tablero en el vano principal. Todos los modos se encuentran normalizados a la masa.

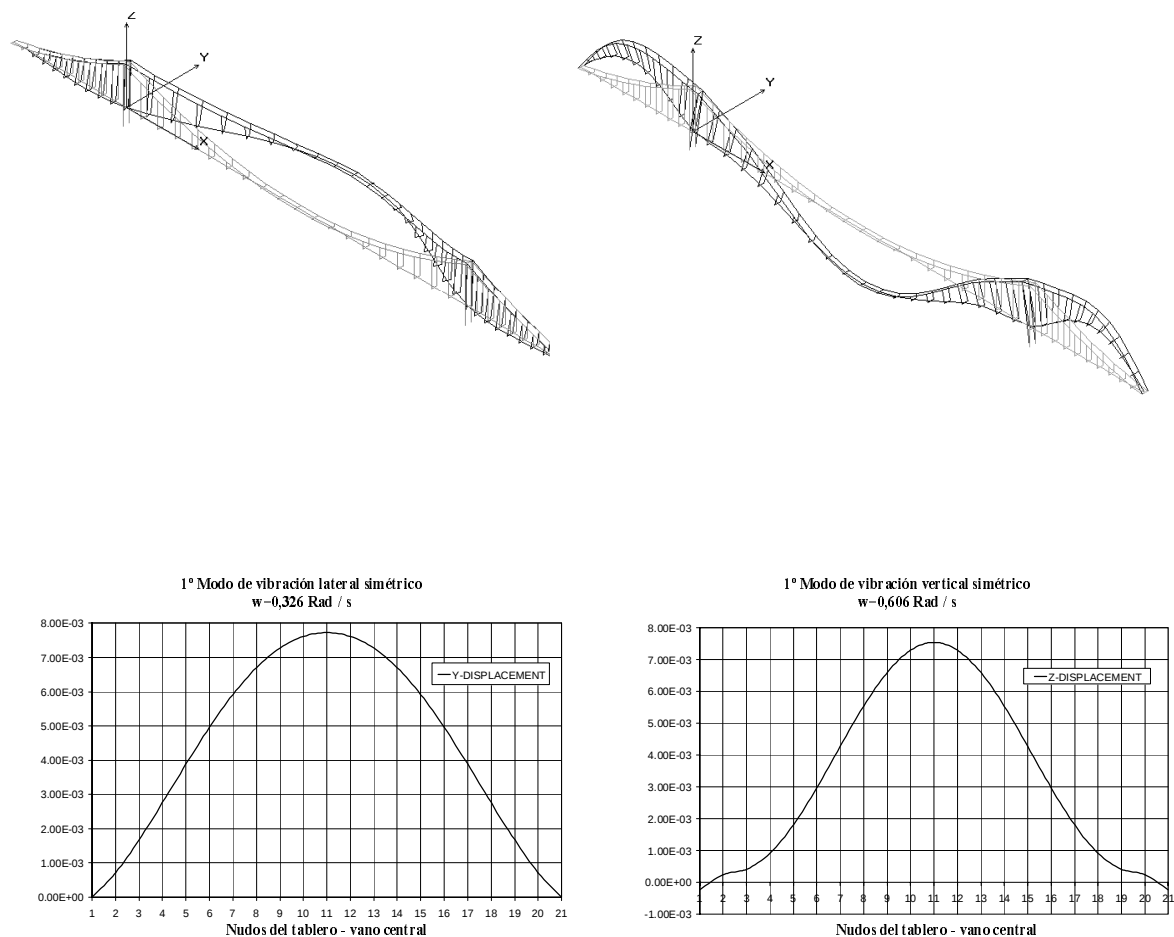


Figura 3. Primeros modos simétricos de vibración lateral y vertical

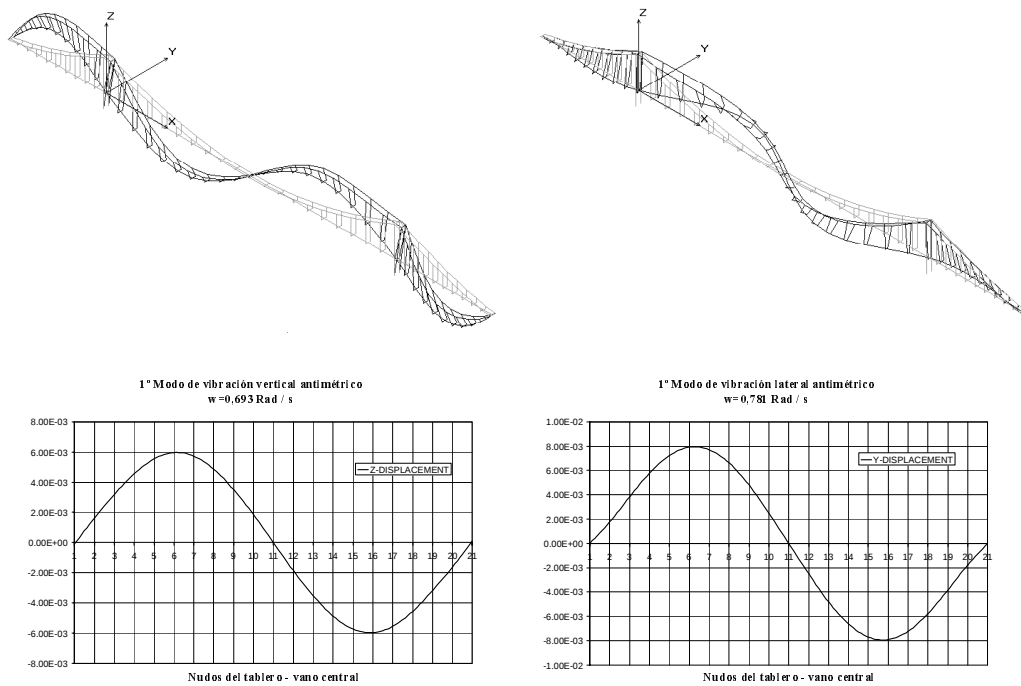


Figura 4. Primeros modos antisimétricos de vibración lateral y vertical

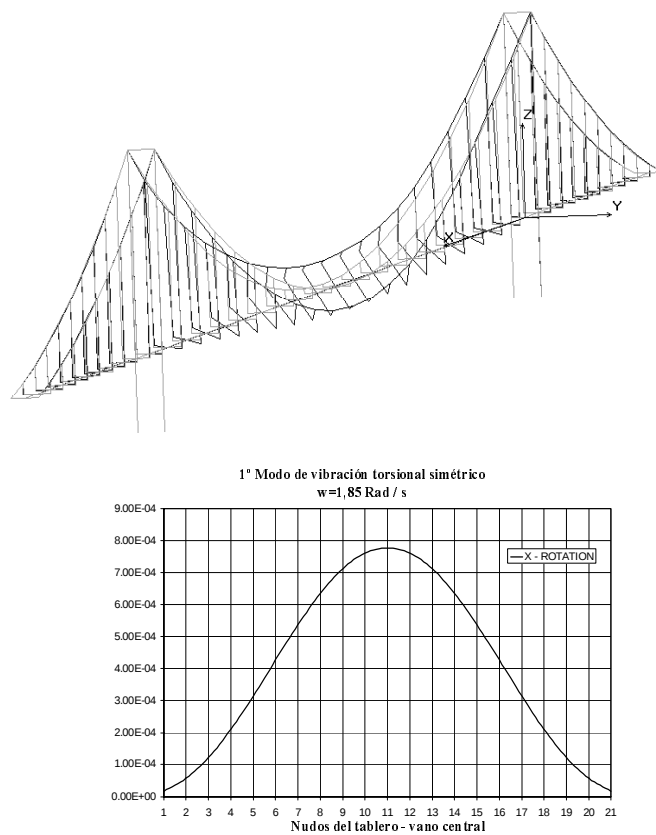


Figura 5. Primer modo de vibración torsional simétrico

Las Tablas III, IV y V muestran los resultados obtenidos del análisis de sensibilidad sobre las frecuencias naturales, tanto las obtenidas analíticamente con la formulación descrita e implementada en el código ADISNOL3D, como las con diversas aproximaciones por diferencias finitas. La Tabla III muestra dichas sensibilidades con respecto a la inercia a flexión vertical del tablero (I_y). La evaluación de dichas derivadas por diferencias finitas se ha llevado a cabo con diferencias centradas del 1 %, 2 % y 5 %.

Del análisis de la Tabla III se pueden obtener varias conclusiones. Se observa cómo las sensibilidades obtenidas analíticamente y las obtenidas por diferencias finitas concuerdan muy bien, de hecho en algunos casos los resultados son idénticos. También se observa que el hecho de disminuir el tamaño de paso en los cálculos por diferencias finitas no siempre mejora la solución, hecho éste que ya se sabía a priori de un modo cualitativo. Las diferencias mayores entre los valores se producen en aquellas frecuencias cuyo modo no presenta movimiento vertical, que a su vez son uno o dos órdenes de magnitud inferiores a los que sí presentan movimiento vertical, y por tanto, se ven más afectados por la variación de dicha inercia a flexión vertical del tablero.

		Sensibilidades de las frecuencias con respecto a I_y			
Modo de vibración	Frecuencia ω_n (rad/s)	Dif. fin. 5%	Dif. fin. 2%	Dif. fin. 1%	ADISNOL3D (analíticas)
(1) LS	0,326	-6,000E-05	-6,100E-05	-6,647E-05	-6,071e-5
(2) VS	0,606	4,780E-03	4,810E-03	4,802E-03	4,810e-3
(3) VA	0,693	3,810E-03	3,818E-03	3,824E-03	3,819e-3
(4) LA	0,781	-8,500E-05	-8,453E-05	-8,299E-05	-8,325e-5
(5) VS	0,813	6,790E-03	6,797E-03	6,794E-03	6,797e-3
(6) VA	1,104	1,645E-02	1,650E-02	1,648E-02	1,650e-2
(11) VA	1,284	8,600E-03	8,650E-03	8,576E-03	8,650e-3
(12) VS	1,360	2,070E-02	2,092E-02	2,075E-02	2,091e-2
(13) LS	1,382	-2,000E-04	-1,919E-04	-2,009E-04	-1,879e-4
(18) VS	1,559	1,635E-02	1,629E-02	1,620E-02	1,629e-2
(19) VA	1,747	4,670E-02	4,683E-02	4,671E-02	4,683e-2
(21) VA	1,821	5,495E-02	5,533E-02	5,520E-02	5,533e-2
(22) TS	1,855	-1,000E-04	-7,201E-05	-1,439E-04	-7,014e-5
(27) VS	2,115	7,515E-02	7,561E-02	7,541E-02	7,561e-2
(28) LTA	2,207	-3,000E-04	-3,169E-04	-2,654E-04	-2,931e-4
(29) LS	2,434	-1,500E-04	-1,262E-04	-2,044E-04	-1,235e-4
(30) TA	2,461	-2,500E-04	-2,173E-04	-2,916E-04	-2,052e-4
(37) TS	2,816	-3,500E-04	-3,466E-04	-2,815E-04	-3,485e-4

Tabla III. Comparación de los resultados de los análisis de sensibilidad, con respecto a la inercia a flexión vertical del tablero I_y , de las frecuencias naturales de vibración del Great Belt

En la Tabla IV se presentan los resultados obtenidos para las sensibilidades de las frecuencias naturales con respecto a la inercia a flexión lateral del tablero (I_z). La evaluación de dichas derivadas por diferencias finitas se ha llevado a cabo de nuevo con diferencias centradas del 1 %, 2 % y 5 %.

Tras la evaluación de la Tabla IV se pueden obtener conclusiones semejantes a las anteriores. Quizá merece la pena hacer notar que para los modos en los que la inercia a flexión lateral no tiene influencia, por ejemplo, los verticales, en los resultados por diferencias finitas a medida que se reduce el tamaño de paso, los valores se alejan de los que pueden ser considerados como correctos.

		Sensibilidades de las frecuencias con respecto a I_z			
Modo de vibración	Frecuencia ω_n (rad/s)	Dif. fin. 5%	Dif. fin. 2%	Dif. fin. 1%	ADISNOL3D (analíticas)
(1) LS	0,326	6,492E-04	6,532E-04	6,521E-04	6,351e-4
(2) VS	0,606	0,000E+00	-4,874E-12	-8,102E-08	0,0
(3) VA	0,693	0,000E+00	1,255E-10	2,886E-07	0,0
(4) LA	0,781	2,376E-03	2,412E-03	2,404E-03	2,411e-3
(5) VS	0,813	0,000E+00	-2,565E-11	-3,985E-08	0,0
(6) VA	1,104	0,000E+00	8,566E-11	-3,210E-07	0,0
(11) V	A 1,284	0,000E+00	1,109E-09	-2,639E-06	0,0
(12) VS	1,360	0,000E+00	7,100E-13	-4,899E-06	0,0
(13) LS	1,382	2,946E-03	4,131E-03	3,922E-03	4,142e-3
(18) VS	1,559	0,000E+00	-9,350E-12	-4,471E-06	0,0
(19) VA	1,747	0,000E+00	1,914E-10	-3,707E-06	0,0
(21) VA	1,821	0,000E+00	8,866E-11	-2,203E-06	0,0
(22) TS	1,855	3,800E-05	3,675E-05	3,411E-05	3,674e-5
(27) VS	2,115	0,000E+00	-4,800E-12	-4,569E-06	0,0
(28) LTA	2,207	6,200E-03	6,212E-03	6,219E-03	6,213e-3
(29) LS	2,434	8,536E-03	1,083E-02	1,078E-02	1,084e-2
(30) TA	2,461	4,120E-03	2,841E-03	2,833E-03	2,839e-3
(37) TS	2,816	1,200E-05	1,172E-05	1,406E-05	1,171e-5

Tabla IV. Comparación de los resultados de los análisis de sensibilidad, con respecto a la inercia a flexión lateral del tablero I_z , de las frecuencias naturales de vibración del Great Belt

En la Tabla V se presentan los resultados obtenidos para las sensibilidades de las frecuencias naturales con respecto a la inercia a torsión del tablero (J). La evaluación de dichas derivadas por diferencias finitas se ha llevado a cabo igualmente con diferencias centradas del 1 %, 2 % y 5 %.

De nuevo en este caso se aprecian efectos semejantes a los anteriormente comentados. Cabe destacar en este caso que los mejores resultados obtenidos por diferencias finitas se producen para un tamaño de paso del 2 % de la inercia a torsión del tablero, aunque para las derivadas con valores relevantes, esto es, las de aquellos modos de torsión, los resultados para las tres aproximaciones son buenas, hecho éste que obviamente se podía intuir, pero que no era conocido a priori.

		Sensibilidades de las frecuencias con respecto a J			
Modo de vibración	Frecuencia ω_n (rad/s)	Dif. fin. 5%	Dif. fin. 2%	Dif. fin. 1%	ADISNOL3D (analíticas)
(1) LS	0,326	2,632E-06	3,445E-06	3,987E-07	3,444e-6
(2) VS	0,606	0,000E+00	-9,543E-11	-1,066E-06	0,0
(3) VA	0,693	0,000E+00	4,018E-10	3,796E-06	0,0
(4) LA	0,781	9,158E-04	9,441E-04	9,389E-04	9,440e-4
(5) VS	0,813	0,000E+00	-9,428E-11	-5,240E-07	0,0
(6) VA	1,104	0,000E+00	2,998E-10	-4,225E-06	0,0
(11) VA	1,284	0,000E+00	3,369E-09	-3,474E-05	0,0
(12) VS	1,360	0,000E+00	-1,474E-11	-6,446E-05	0,0
(13) LS	1,382	2,632E-05	2,665E-05	2,166E-05	2,665e-5
(18) VS	1,559	0,000E+00	-3,270E-11	-5,883E-05	0,0
(19) VA	1,747	0,000E+00	6,223E-10	-4,877E-05	0,0
(21) VA	1,821	0,000E+00	3,033E-10	-2,899E-05	0,0
(22) TS	1,855	3,663E-02	3,737E-02	3,718E-02	3,737e-2
(27) VS	2,115	0,000E+00	-1,803E-11	-6,012E-05	0,0
(28) LTA	2,207	9,132E-03	9,998E-03	9,834E-03	9,994e-3
(29) LS	2,434	1,053E-04	1,211E-04	7,860E-05	1,210e-4
(30) TA	2,461	5,321E-02	5,363E-02	5,352E-02	5,363e-2
(37) TS	2,816	9,153E-02	9,380E-02	9,338E-02	9,380e-2

Tabla V. Comparación de los resultados de los análisis de sensibilidad, con respecto a la inercia a torsión del tablero J , de las frecuencias naturales de vibración del Great Belt

A continuación, de manera gráfica en las Figuras 6 a 10 se muestra el análisis de sensibilidad realizado sobre los modos propios de vibración para el Great Belt. Al igual que con las sensibilidades de las frecuencias naturales, se muestran los resultados analíticos obtenidos con ADISNOL3D y los arrojados por cálculos por diferencias finitas con diferentes tamaños de paso. Se muestran únicamente las derivadas de los primeros modos de cada tipo.

Las Figuras 6 y 7 muestran las derivadas de los dos primeros modos de vibración verticales con respecto al momento de inercia I_y del tablero. Los cálculos por diferencias finitas se han realizado con perturbaciones del 2 % y 5 %. Directamente se observa la buena concordancia entre ambos resultados.

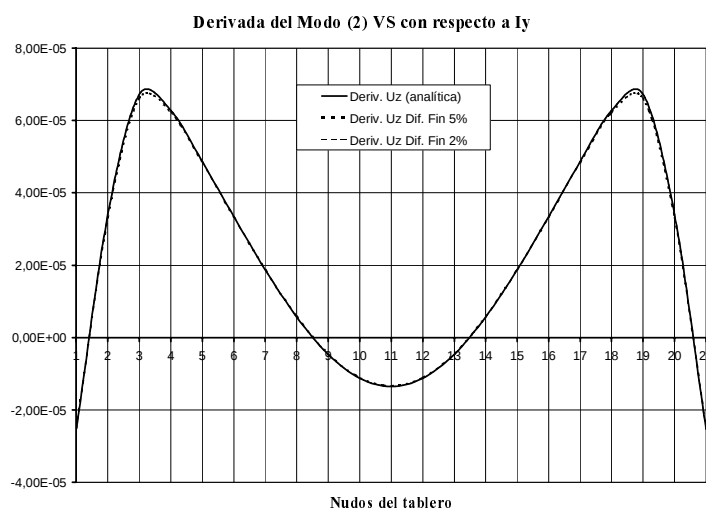


Figura 6. Derivada del primer modo vertical simétrico con respecto al momento de inercia I_y del tablero

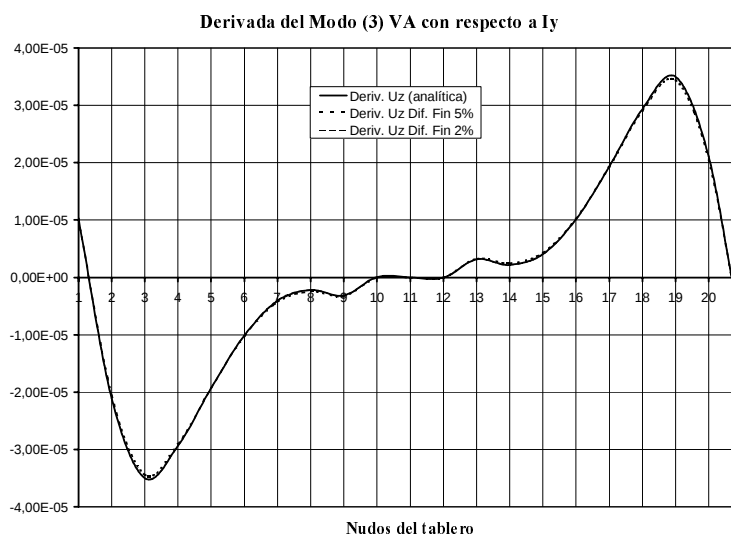


Figura 7. Derivada del primer modo vertical antisimétrico con respecto al momento de inercia I_y del tablero

Las Figuras 8 y 9 muestran las derivadas de los dos primeros modos de vibración laterales con respecto al momento de inercia I_z del tablero. Los cálculos por diferencias finitas se han realizado del mismo modo que en el caso de las derivadas de las frecuencias. De nuevo se observa la buena concordancia entre ambos resultados.

La Figura 10 muestra la derivada del primer modo de vibración torsional simétrico con respecto al momento de inercia a torsión del tablero J . Los cálculos por diferencias finitas se han realizado para perturbaciones de la variable del 1 % y 2 %.

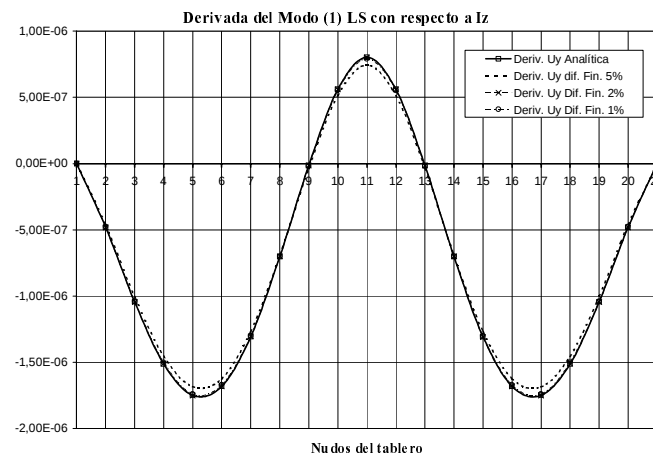


Figura 8. Derivada del primer modo lateral simétrico con respecto al momento de inercia I_z del tablero

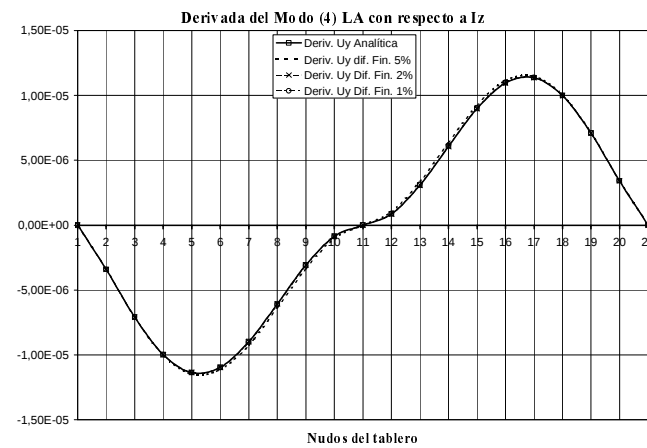


Figura 9. Derivada del primer modo lateral antisimétrico con respecto al momento de inercia I_z del tablero

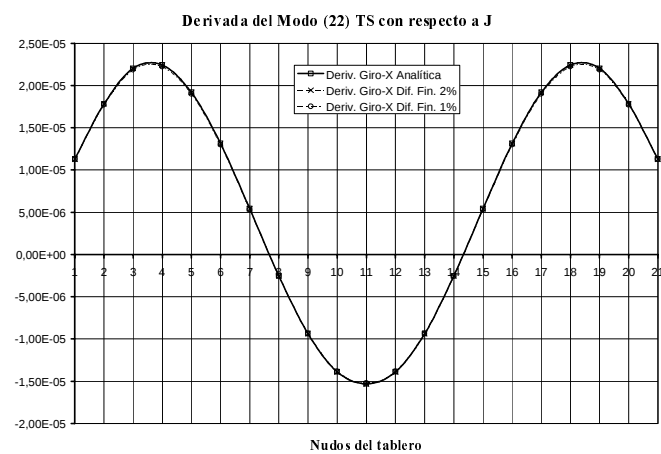


Figura 10. Derivada del primer modo torsional simétrico con respecto al momento de inercia J del tablero

CONCLUSIONES

Se pueden extraer las siguientes conclusiones del presente artículo:

- La aproximación por diferencias finitas al cálculo de sensibilidades en problemas de valores propios es muy cara en términos computacionales y está muy expuesta a errores numéricos. Por lo tanto, se hacen necesarias otras alternativas.
- En el presente artículo se ha mostrado una nueva alternativa totalmente analítica para el cálculo de sensibilidades, tanto de frecuencias naturales como de modos propios de vibración, en teoría lineal y de segundo orden.
- El método anteriormente mencionado se ha aplicado con éxito a un ejemplo estructural constituido por un puente de gran vano existente en la actualidad, mostrándose una buena concordancia entre los resultados obtenidos con la nueva formulación y los cálculos por diferencias finitas.
- La formulación analítica planteada, así como su incorporación en un código de ordenador como es ADISNOL3D, hacen posible su inclusión en un paquete de diseño óptimo que haga uso de los análisis de sensibilidad con problemas de valores propios como el planteado. De este modo los algoritmos de optimización que incluyen los análisis de sensibilidad tienen un coste computacional mucho menor, puesto que el análisis estructural sólo se realiza una vez.
- La formulación analítica planteada soluciona el problema operacional en la obtención de las sensibilidades por diferencias finitas, en el que el orden de los modos propios puede variar cuando las frecuencias para los mismos son muy parecidas, lo que requiere una búsqueda selectiva modo por modo tras la conveniente modificación de la variable de diseño.

REFERENCIAS

- 1 A. Samartín y J. R. González de Cangas, "Cálculo matricial de estructuras", *Colección Escuelas*, Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Madrid, España, (2001).
- 2 S. Hernández, "Análisis lineal y no lineal de estructuras de barras", Universidade da Coruña, A Coruña, España, (1997).
- 3 R.K. Livesley, "Métodos matriciales para cálculo de estructuras", Editorial Blume, (1970).
- 4 J. Sáez Benito, "Cálculo matricial de estructuras formadas por piezas prismáticas", Fondo Editorial de Ingeniería Naval, (1975).
- 5 J.S. Przemieniecki, "Theory of matrix structural analysis", Dover Publications, Inc., (1968).
- 6 M.A. Hacar y E. Alarcón, "Elementos de dinámica aplicada a las estructuras", Servicio de publicaciones ETSII, Madrid, (1971).
- 7 A.K. Chopra, "Dynamics of structures", Prentice Hall International, Inc., (1995).
- 8 H.M. Adelman y R.T. Haftka, "Sensitivity analysis of discrete systems structural optimization status and promise", *Progress in Aeronautics and Astronautics*, AIAA, Vol. 150, Boulder, Colorado, pp. 291-315, (1992).
- 9 R.T. Haftka y Z. Gürdal, "Elements of structural optimization", Kluwer Academic Publishers, (1992).

- 10 R.B. Nelson, "Simplified calculation of eigenvector derivatives", *AIAA Journal*, Vol. **14**, pp. 1201–1205, (1976).
- 11 L.C. Rogers, "Derivatives of eigenvalues and eigenvectors", *AIAA Journal*, Vol. **8**, N° 5, pp. 943–944, (1970).
- 12 B.P. Wang, "Improve approximate methods for computing eigenvector derivatives in structural dynamics". *AIAA Journal*, Vol. **29**, N° 6, pp. 1018–1120, (1991).
- 13 I.U. Ojalvo, "Efficient Computation of Mode-Shape Derivatives for Large Dynamic Systems", *AIAA Journal*, Vol. **25**, N° 10, pp. 1386–1390, (1987).
- 14 A.L. Dailey, "Eigenvector derivatives with repeated eigenvalues", *AIAA Journal*, Vol. **27**, N° 4, pp. 486–491, (1989).
- 15 A. Mosquera, "Sensibilidad analítica de la vibración libre y del flameo en puentes colgantes de gran vano en servicio y en fase constructiva", Tesis doctoral, Universidade da Coruña, A Coruña, España, (2003).
- 16 A. Larsen, "Aerodynamic aspects of the final design of the 1624 m suspension bridge across the Great Belt", *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, N° 48, pp. 261–285, (1993).
- 17 D. Cobo del Arco, "An analysis of wind stability. Improvements to the response of suspension bridges", Tesis doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España, (1998).
- 18 J.A. Jurado, "Análisis aeroelástico y de sensibilidad del fenómeno de flameo en puentes soportados por cables", Tesis doctoral, Universidade da Coruña, A Coruña, España, (2001).