

# ANÁLISIS DE PROCESOS DE ESTEREOLITOGRAFÍA POR EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

GUILLERMO LOMBERA\*†  
GABRIEL BUGEDA\*\*  
MIGUEL CERVERA\*\*  
y  
EUGENIO OÑATE\*\*

*\*Instituto Nacional de Tecnología de Materiales,  
Universidad Nacional de Mar del Plata - CONICET  
J.B. Justo 4302, (7600) Mar del Plata - Argentina*

*\*\*Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE),  
Universidad Politécnica de Cataluña  
Edificio C-1 Campus norte UPC (08034) Barcelona España*

## RESUMEN

La estereolitografía es uno de las técnicas utilizadas en los procesos de fabricación rápida de prototipos, que tiene un gran interés industrial debido a su ahorro en tiempo respecto a los procesos tradicionales. Una de las principales causas de error en las dimensiones finales de las piezas obtenidas es el fenómeno conocido como "distorsión por flexión". Se presenta en este artículo la influencia en la distorsión por flexión de distintos parámetros constructivos, del material y del modelo numérico. Dicho análisis se realizó con el programa "SLAP" desarrollado para modelar procesos de estereolitografía utilizando el método de los elementos finitos y que también se describe en esta publicación.

## SUMMARY

Stereolithography is one of the techniques used in rapid prototyping processes. It has a great industrial interest because it provides time saving respect to traditional manufacturing processes. One of the main sources of error in the final dimensions of the prototype is the curl distortion effect. In this article, the influence of different constructive and numerical parameters in the curl distortion is presented. This analysis was made using the computer program SLAP, developed to model stereolithography processes using the finite element method. This program is also briefly presented in the paper.

† Actualmente investigador en el CIMNE

## INTRODUCCIÓN

El reducir el “tiempo de creación” de un nuevo producto es cada vez un factor mas estratégico para cualquier empresa. El mercado es cada vez mas dinámico y exige mayor rapidez y seguridad para la generación de nuevos modelos.

Continuamente aparecen en el mercado nuevas tecnologías para mejorar el proceso de creación. Es corriente hoy en día utilizar herramientas de CAD o digitalizar superficies; dentro de pocos años será normal obtener “piezas físicas” a partir de un modelo gráfico en 3D. Estas técnicas ya existen actualmente, y es posible disponer de ellas; los procesos que las utilizan son denominados de “fabricación rápida de prototipos” (en ingles: “Rapid Prototyping”).

Estos procesos se basan en la fabricación de un objeto a partir de su representación tridimensional en un ordenador [1]. Los datos geométricos de la pieza se utilizan para controlar un rayo láser que incide sobre una resina líquida fotosensible, produciendo el curado de la misma. De acuerdo con el proceso utilizado puede variar el material y la potencia del laser entre otros parámetros.

Las ventajas de estos procesos se fundamentan en que no requieren demasiado utillaje, los tiempos de fabricación son inferiores a los de los métodos tradicionales, y poseen una gran versatilidad en cuanto a formas.

El sistema 3D-SYSTEM, desarrollado en California, fue el primero disponible en el mercado. Actualmente ha distribuido unas 300 máquinas alrededor del mundo.

El proceso que este sistema utiliza se denomina estereolitografía y la máquina está esquematizada en la Figura 1. La resina líquida se coloca en un recipiente dentro del cual se encuentra un soporte movil sobre el que se va construyendo la pieza. El extremo del soporte se debe mantener a una determinada distancia por debajo de la superficie libre de la resina. Mediante un sistema de galvanómetros con espejos se hace incidir el rayo láser sobre la resina produciendo el curado de la misma (solidificación). La trayectoria del rayo láser está controlada por el ordenador al cual se le introduce mediante un determinado formato CAD la geometría a construir. Existen varios formatos, dentro de los cuales el mas utilizado es el STL, que representa superficies exteriores mediante mallas triangulares. El volumen total se secciona según diversos planos horizontales que determinan las capas que debe seguir el láser en la formación de la pieza final. Una vez producida una capa (superficie plana) el soporte desciende y dicha capa es cubierta de resina líquida. El proceso continua hasta lograr la pieza final [2].

Actualmente existen diversos sistemas de fabricación rápida de prototipos. Además de los que utilizan el proceso de estereolitografía como el 3D - SYSTEM que hemos citado anteriormente, podemos mencionar los siguientes:

- STEREOS - EOS - (Alemania).
- SOUP - Solid Object UV-Laser Ploter - (Japón).
- SCS - Solid Creation System - (Japón).
- Laser Modelling - QUADRAX - (Rhode Island).
- Selective Laser Sintering - DTM Corp. - (Texas).
- Solider - Cubital - (Israel).

- Laminated Object Manufacturing - (California).
- Fused Deposition Modelling - STRATASYS - (Mineapolis).

Las diferencias entre ellos son el material utilizado, que no necesariamente es un polímero. En base a la misma metodología anterior se pueden utilizar materiales cerámicos, materiales compuestos e incluso materiales metálicos, debiendo variar la fuente de energía necesaria, ya sea aumentando la potencia del láser o utilizando otras fuentes de energía, y el esquema de funcionamiento [3].

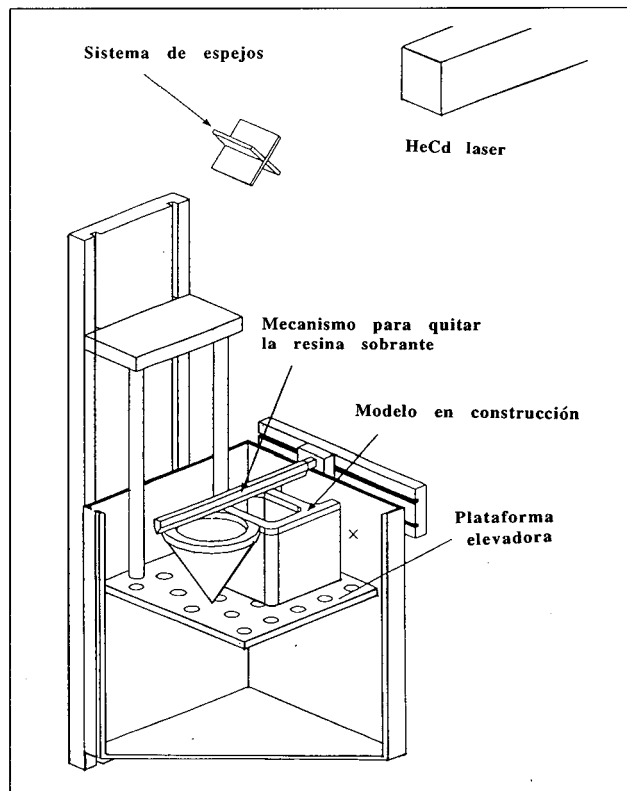


Figura 1 Esquema de funcionamiento de una máquina de estereolitografía.

La selección del proceso se realiza teniendo en cuenta alguna de las siguientes características tecnológicas:

- Volumen del depósito de resina, en función del tamaño de la pieza a fabricar.
- Sistema de control del enfoque del láser. Cuando el punto a ser curado se desplaza del centro del recipiente, se cambia la distancia entre el espejo y la resina, produciendo un desenfoque. Esto causa un cambio de forma de circular a elíptica en la incidencia del rayo produciendo una pérdida de energía en el punto a ser curado.
- Velocidad de desplazamiento del láser. Esto controla la energía entregada a la resina.

- Estrategias constructivas. Cuando la resina solidifica se produce una deformación volumétrica de contracción. La causa física que origina este comportamiento será descrita en detalle más adelante, pero los diversos procesos tienen en cuenta éste fenómeno.

Una de las principales causas de discrepancia entre el modelo gráfico por ordenador y el modelo físico obtenido, es el fenómeno conocido como "curl distortion" (distorsión por flexión). Este es un tipo de distorsión que ocurre en todos los procesos de fabricación rápida de prototipos se debe a la contracción que experimenta una capa al solidificarse. Dicha contracción produce un efecto de flexión en las capas producidas anteriormente, tal como puede verse en la Figura 2.

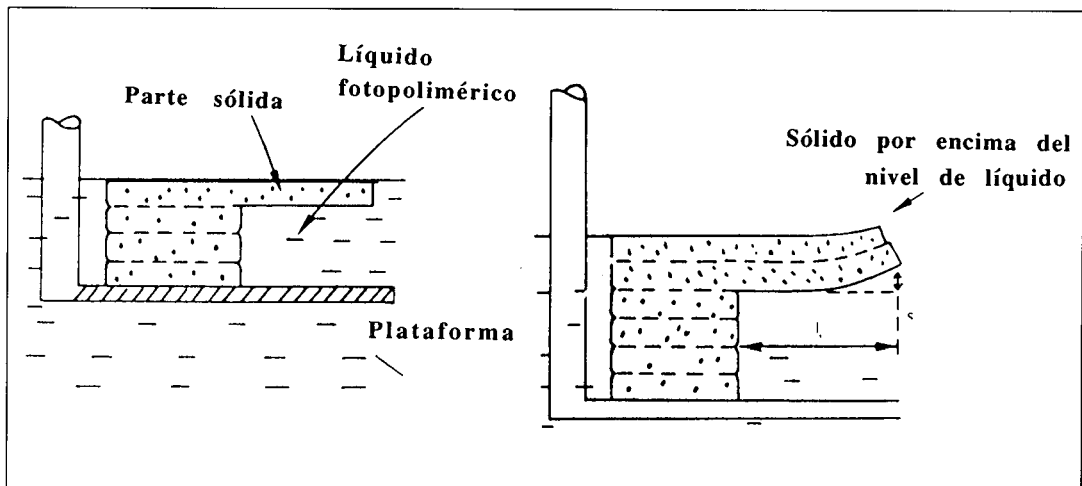


Figura 2 Esquema del mecanismo de distorsión por flexión.

## IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

El Programa "SLAP" (Stereolithography Analysis Program) [4] fue implementado para simular el proceso de estereolitografía utilizando el método de los elementos finitos. En el mismo se modela el proceso constructivo por capas, el poscurado y las deformaciones finales producidas al extraer la fijación del piso luego del poscurado.

El programa permite resolver problemas bi y tridimensionales utilizando elementos cuadrangulares de cuatro y ocho nodos en 2-D y de ocho y veinte nodos en problemas tridimensionales.

A partir del archivo CAD de la pieza y teniendo en cuenta el espesor de capa, es posible generar la malla de elementos finitos. El proceso de modelado se realiza capa a capa, teniendo en cuenta el coeficiente de contracción volumétrica.

Como se mencionó en la introducción, la distorsión por flexión se debe a la contracción volumétrica que experimenta cada capa de resina al solidificarse. Esta contracción produce deformaciones en el material que solidificó anteriormente. Para

modelar este efecto, se implementaron deformaciones iniciales en los elementos de la última capa como fuerzas debidas a deformaciones iniciales a través del cálculo de las fuerzas nodales equivalentes [5], calculadas (para comportamiento elastico-lineal) de la forma:

$$\mathbf{f}_\epsilon^{(e)} = \int \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \epsilon^0 dA$$

donde  $\epsilon^0$  es la deformación volumétrica de la resina,  $\mathbf{B}$  es la matriz de deformación del elemento y  $\mathbf{D}$  es la matriz constitutiva.

El vector de fuerzas debidas a deformaciones iniciales del nodo  $i$  en sólidos tridimensionales es:

$$\mathbf{f}_{\epsilon_i}^{(e)} = \int \int \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \epsilon^0 dV$$

siendo:

$$\epsilon^0 = [\epsilon_x^0, \epsilon_y^0, 0]^T \quad (\text{en problemas 2D})$$

$$\epsilon^0 = [\epsilon_x^0, \epsilon_y^0, \epsilon_z^0, 0, 0, 0]^T \quad (\text{en problemas 3D})$$

Al programa se le introduce como dato inicial la geometría total del objeto a modelar discretizado por capas y el problema se resuelve capa a capa, de manera que se reproduzca el proceso real de fabricación, actualizando en cada resolución la geometría del conjunto. Esto se implementó guardando en un archivo temporal los valores de los desplazamientos nodales de cada resolución, de manera que al resolver la capa "i+1", las coordenadas de los nodos que forman las "i" capas anteriores son las actuales más los desplazamientos obtenidos en la resolución de la capa "i". En la Figura 3 puede verse el paso en que se construye la tercera capa con la actualización de la primera y segunda. Es de notar que la superficie superior de la última capa es siempre horizontal, coincidente con el nivel de resina líquida.

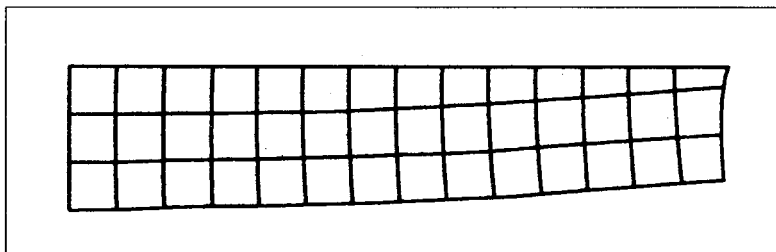


Figura 3 Etapa de construcción de la tercera capa.

De acuerdo al valor de deformación volumétrica de la resina, es probable que las deformaciones sean tales que el objeto sobrepase el nivel de resina líquida, por lo que la última capa a ser curada esté por debajo de los extremos de la pieza deformada, como puede verse en la Figura 4. Esto requiere una actualización de la geometría de

la última capa que se está resolviendo. Este efecto se implementó analizando los dos casos posibles mostrados en la Figura 5, de forma que no reproduzcan áreas negativas al introducir la geometría de la nueva capa. Puede verse en dicha figura que la cantidad de elementos y nodos iniciales se respeta, implementando elementos muy esbeltos en las zonas donde la flexión ha sido mayor.

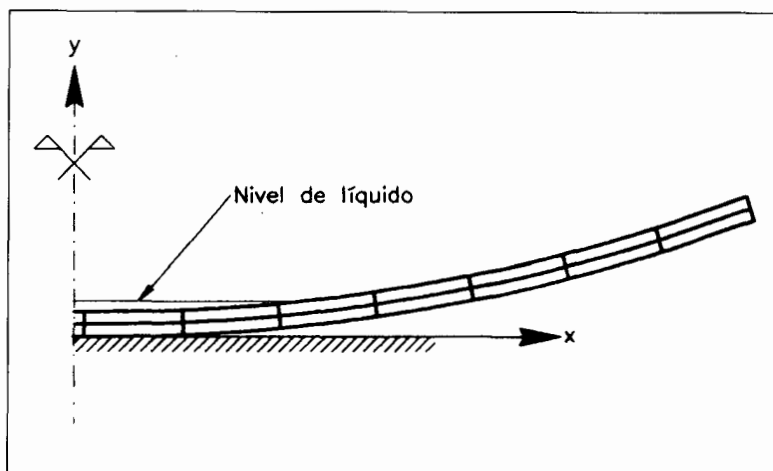


Figura 4 Caso en que la pieza deformada sobrepasa el nivel del líquido.

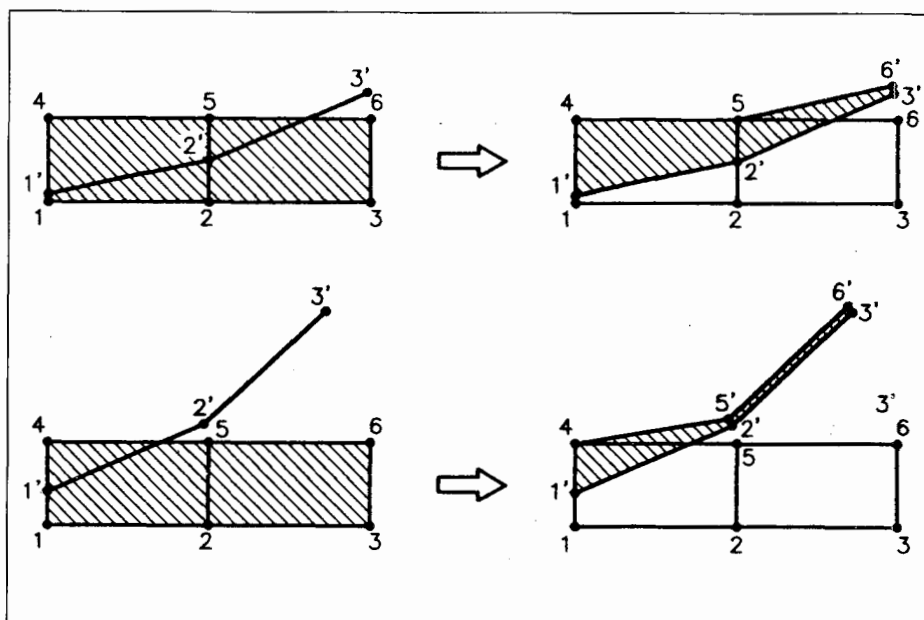


Figura 5 Análisis en que la deformación es tal que la pieza sobrepasa el nivel de líquido.

El programa contempla distintos elementos: cuadriláteros de 4 y 8 nodos para análisis bidimensional y hexahédricos de 8 y 20 nodos para análisis tridimensional. Los elementos de cuatro nodos en 2D y los de 8 nodos en 3D, no proporcionan buenos resultados a flexión, por lo que se ha implementado una técnica de integración selectiva que mejora notablemente los resultados [6]. La técnica utilizada para eliminar el exceso de deformación tangencial intrínseco del elemento es evaluar los términos correspondientes a dichas deformaciones con una cuadratura de Gauss-Legendre reducida [6]. Para ello se divide la matriz de rigidez en la suma de una matriz que contiene los términos volumétricos  $\mathbf{K}_v$  y otra que contiene los términos de deformación tangencial  $\mathbf{K}_t$ . Así, para el caso bidimensional:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{K}_v^{(e)} + \mathbf{K}_t^{(e)}$$

con:

$$\mathbf{K}_{v_{i,j}}^{(e)} = \int \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}_{v_i}^T \mathbf{D}_v \mathbf{B}_{v_j} dA ; \quad \mathbf{K}_{t_{ij}}^{(e)} = \int \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}_{t_i}^T \mathbf{D}_t \mathbf{B}_{t_j} dA$$

siendo

$$\mathbf{B}_{v_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{B}_{t_i} = \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x}, \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} \right]$$

$$\mathbf{D}_v = [d_{11} \quad d_{12}d_{21} \quad d_{22}] ; \quad \mathbf{D}_t = [d_{33}]$$

donde, para tensión plana:

$$d_{11} = d_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2}$$

$$d_{12} = d_{21} = \nu d_{11}$$

$$d_{33} = \frac{E}{2(1 + \nu)} = G$$

siendo  $E$  el módulo de elasticidad y  $\nu$  el coeficiente de Poisson.

La matriz  $\mathbf{K}_v$  se calcula con una cuadratura de 2x2 puntos, mientras que  $\mathbf{K}_t$  se obtiene utilizando una cuadratura reducida de un solo punto, lo que implica simplemente evaluar el integrando en el centroide del elemento. En el caso de sólidos tridimensionales se realiza el mismo esquema de descomposición de la matriz de rigidez, con las matrices  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{D}$  para tres dimensiones.

## RESULTADOS

Se analizó el test extraído de la referencia [2] que se esquematiza en la Figura 6. El mismo consiste en unos voladizos gemelos fabricados con el proceso de estereolitografía mediante 24 capas de 0.25 mm de espesor.

Se mide con este test el factor de distorsión por flexión cuya expresión es:

$$C_{f6} = \frac{(M_6 - M_0)}{6mm} * 100 = \frac{\Delta Z}{6mm} * 100$$

donde  $M_0$  es la elevación en milímetros del origen de la base del voladizo,  $M_6$  es la elevación en milímetros de la parte inferior de la viga medida a 6 milímetros del origen de la base y  $\Delta Z$  es la diferencia entre estos dos valores ( $\Delta Z = M_6 - M_0$ ). La pieza es simétrica, y la base AB está fija al suelo, por lo que se ha modelado unicamente el sector de la viga CDEF. Se supone la condición de simetría en el lado CF

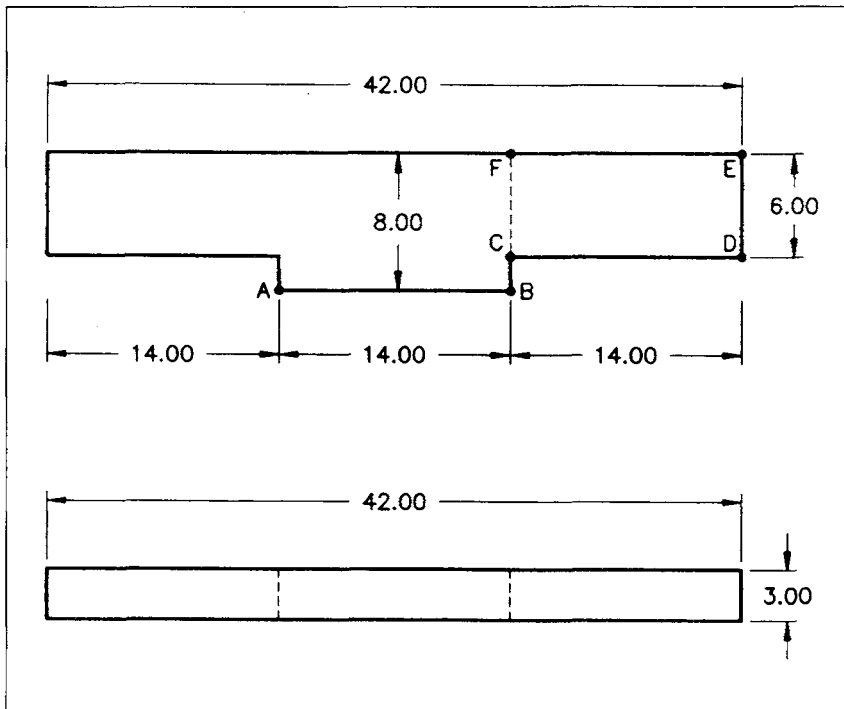


Figura 6 Geometría utilizada para el test.

Los resultados que se muestran corresponden a un análisis realizado con elementos cuadrangulares de cuatro nodos con integración selectiva. En la Figura 7 se muestra la malla utilizada, y en la 8 la pieza final.

En la Figura 9 se compara la curva de variación de los  $\Delta Z$  obtenidos experimentalmente en [2] y con nuestro análisis.



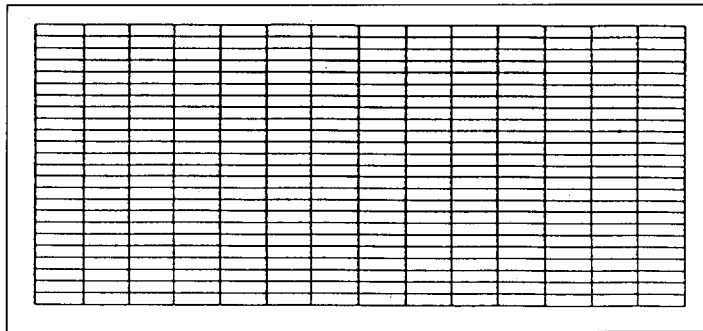


Figura 7 Malla utilizada.

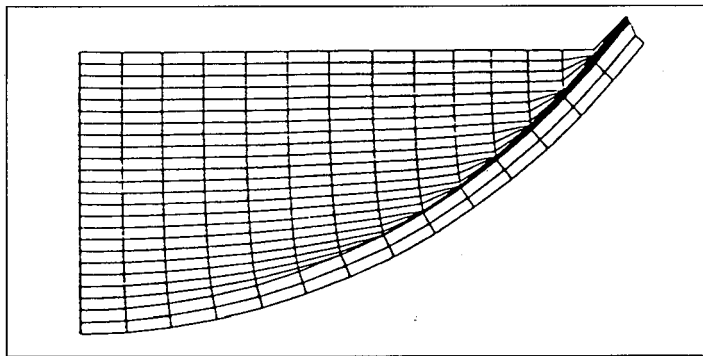


Figura 8 Pieza resultante

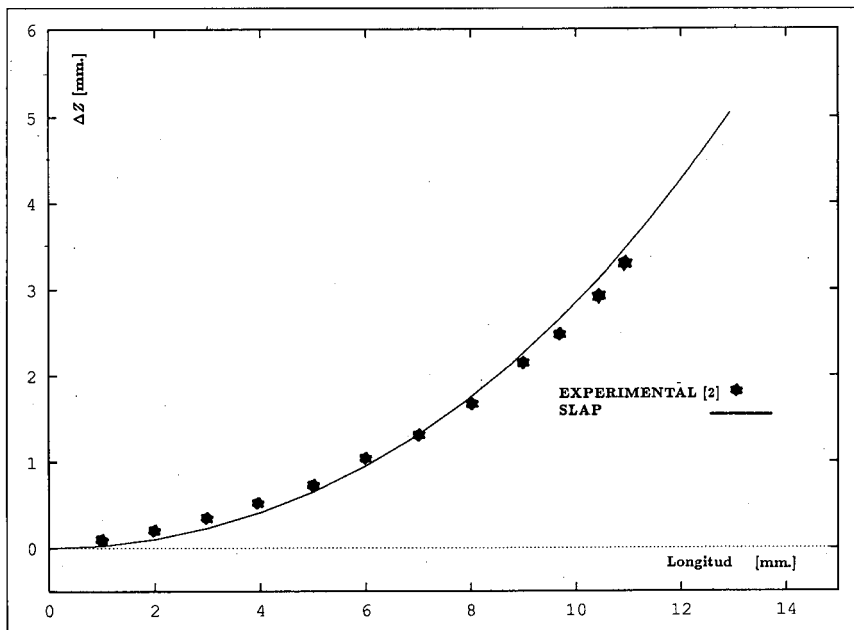


Figura 9 Comparación de resultados

## ANÁLISIS DE RESULTADOS

Se detalla a continuación un estudio de la influencia de distintos parámetros en el factor de distorsión por flexión. Estos son:

- Parámetros del material: deformación volumétrica, módulo de Young y coeficiente de Poisson.
- Parámetros constructivos: espesor de capa.
- Parámetros del modelado numérico: análisis bidimensional con elementos de cuatro y ocho nodos y tridimensional con elementos hexaédricos de 8 y 20 nodos. Comparación de resultados entre elementos bidimensionales sólidos de cuatro nodos con y sin integración selectiva, de ocho nodos y una solución analítica.

### Solución analítica para dos capas

Utilizando la teoría de Resistencia de Materiales, es posible encontrar una solución analítica para dos capas, asumiendo una contracción inicial en la capa superior de valor  $\epsilon_0$ . De esta manera, las deformaciones iniciales de las capas serán:

$$\epsilon_0^1 = \epsilon_0 \quad y \quad \epsilon_0^2 = 0$$

De esta forma se pretende encontrar los valores de deformaciones y tensiones que este estado de sollicitación produce en la pieza. Ver Figura 10.

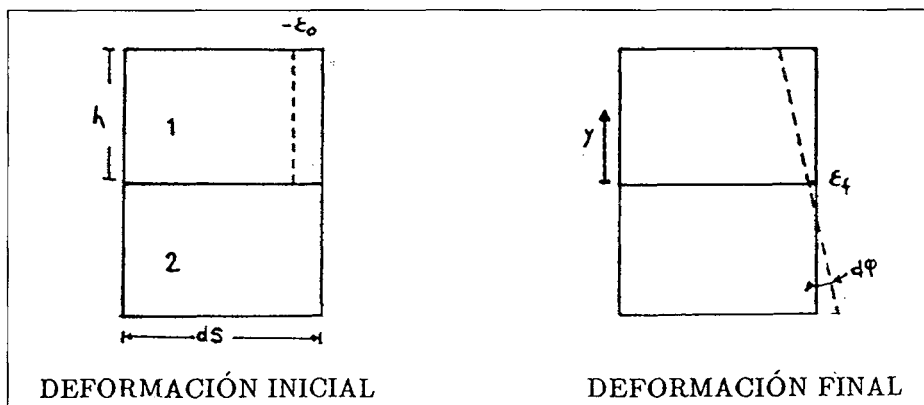


Figura 10 Esquema de la deformación inicial y final de dos capas

Bajo la hipótesis de Bernoulli-Navier de deformación plana de la sección de la pieza, la distribución final de deformaciones está dada por la ley lineal:

$$\epsilon = \epsilon_f - y \frac{1}{\rho}$$

siendo la curvatura

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds}$$

Las distribuciones de las tensiones en cada una de las capas serán también lineales y de valor:

$$\sigma_1 = E(\epsilon - \epsilon_o^1) = E(-\epsilon_f - \frac{y}{\rho} + \epsilon_o) = E(\epsilon_o - \epsilon_f - \frac{y}{\rho})$$

$$\sigma_2 = E(\epsilon - \epsilon_o^2) = E(-\epsilon_f - \frac{y}{\rho}) = E(-\epsilon_f - \frac{y}{\rho})$$

Las ecuaciones de equilibrio interno de las secciones son:

$$N = 0 = \int_A \sigma dA \quad (1) \quad M = 0 = \int_A \sigma y dA \quad (2)$$

De la ecuación (1):

$$\begin{aligned} \int_A \sigma dA &= \int_{y=0}^{y=h} E(\epsilon_o - \epsilon_f - \frac{y}{\rho}) b dy + \int_{y=-h}^{y=0} E(-\epsilon_f - \frac{y}{\rho}) b dy \\ &= Eb(\epsilon_o h - \epsilon_f 2h) = 0 \implies \epsilon_f = \frac{\epsilon_o}{2} \end{aligned}$$

donde  $b$  es el ancho de la pieza.

De la ecuación (2):

$$\begin{aligned} \int_A \sigma y dA &= \int_{y=0}^{y=h} E(\epsilon_o - \epsilon_f - \frac{y}{\rho}) b y dy + \int_{y=-h}^{y=0} E(-\epsilon_f - \frac{y}{\rho}) b y dy \\ &= Eb(\epsilon_o \frac{h^2}{2} - \frac{2}{3} \frac{h^3}{\rho}) = 0 \implies \frac{1}{2} \epsilon_o = \frac{2}{3} \frac{h}{\rho} \implies \frac{1}{\rho} = \frac{3}{4} \frac{\epsilon_o}{h} \end{aligned}$$

Por lo tanto, las deformaciones de las fibras superior e inferior son:

$$\epsilon^s = -\epsilon_f - h \frac{1}{\rho} = -\frac{\epsilon_o}{2} - \frac{3}{4} \epsilon_o = -\frac{5}{4} \epsilon_o \quad (e.1)$$

$$\epsilon^i = -\epsilon_f + h \frac{1}{\rho} = -\frac{\epsilon_o}{2} + \frac{3}{4} \epsilon_o = \frac{1}{4} \epsilon_o \quad (e.2)$$

### Influencia de la deformación volumétrica en la distorsión por flexión

En la Figura 11 se muestra la reproducción del test obtenido de la referencia [2] y que fue descrito anteriormente. Se utilizó para el análisis elementos cuadrangulares de 8 nodos con cuatro puntos de Gauss por elemento. En la gráfica se presentan los estados correspondientes a la construcción de las capas 3, 9, 18 y 24. En la Figura 12 se muestran curvas de  $\Delta Z$  en función de la longitud del voladizo, para distintos valores de la deformación volumétrica. Se puede apreciar como crece el valor de  $\Delta Z$ , y por consiguiente el factor de distorsión por flexión, a medida que aumenta el coeficiente de deformación. La Figura 13 muestra la variación del  $\Delta Z$  en función del coeficiente de deformación impuesta. Puede observarse el comportamiento lineal que experimenta. En el mismo caso, si en el  $\Delta Z$  en lugar de  $M_6$  utilizamos la elevación en mm. a distintas distancias del origen del voladizo, tal como se grafica en la Figura 14, podemos ver como deja de ser lineal esta relación, a medida que la distancia supera los 6 mm. Es de notar, además, que para valores inferiores a 6 mm la relación es lineal, pero las pendientes son demasiado pequeñas como para proporcionar mediciones fiables. Es por eso que se utiliza en el factor de distorsión por flexión las mediciones a 6 mm. del origen del voladizo.

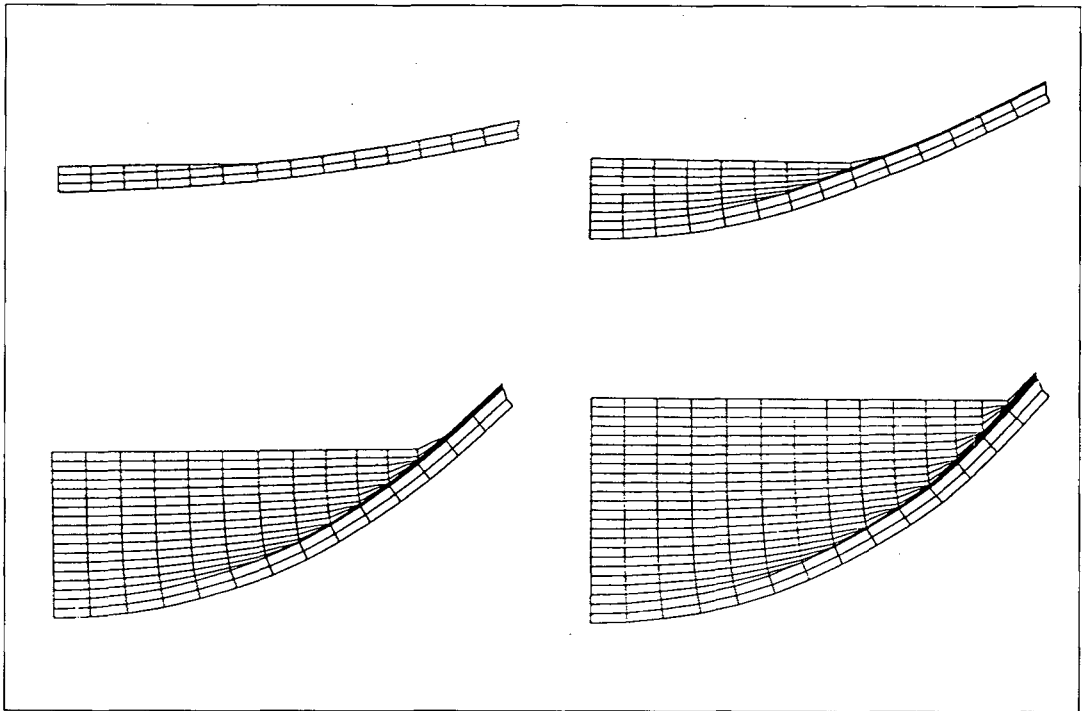


Figura 11 Proceso constructivo de las capas 3, 9, 18 y 24

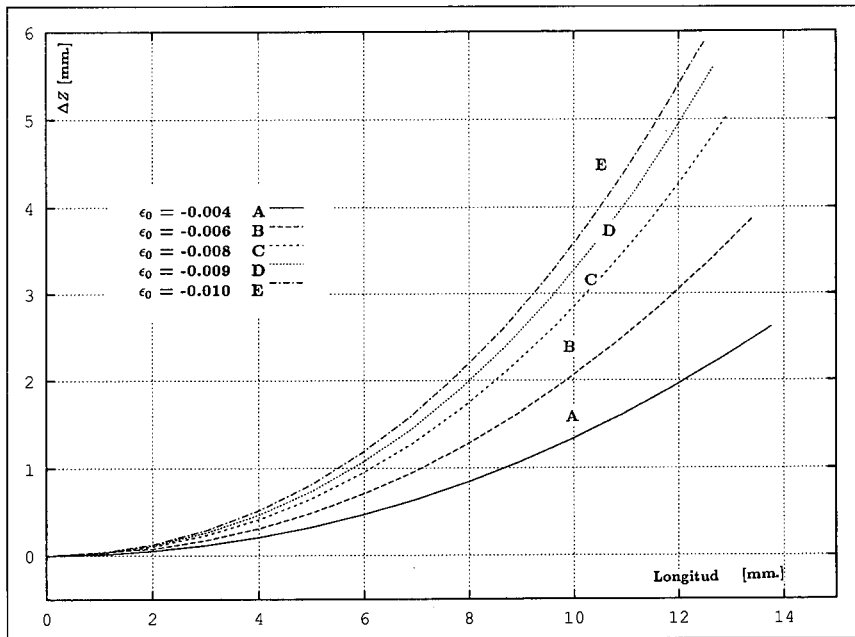


Figura 12 Variación del “Factor de distorsión por flexión” con las deformaciones volumétricas

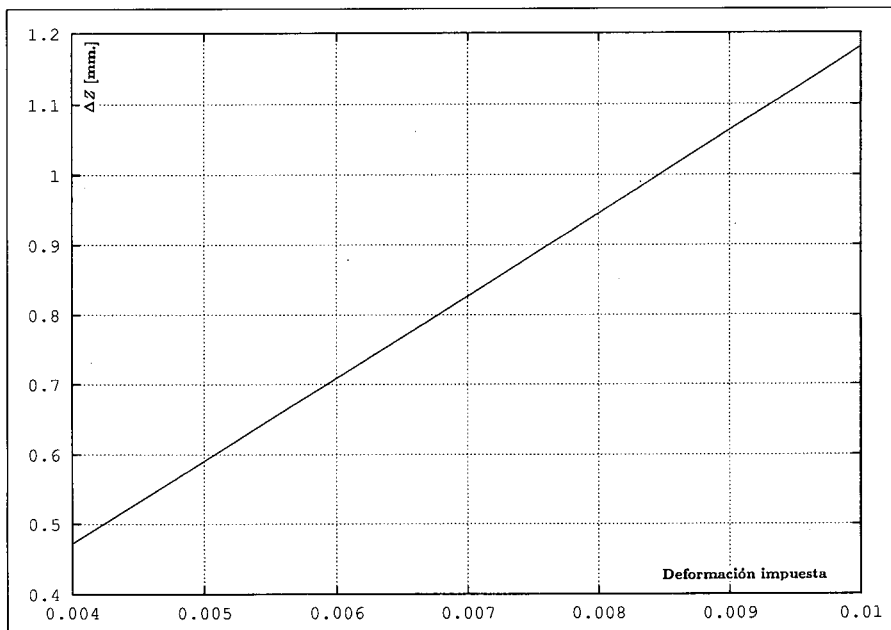


Figura 13 Variación del “Factor de distorsión por flexión” con las deformaciones volumétricas a 6 mm del voladizo.

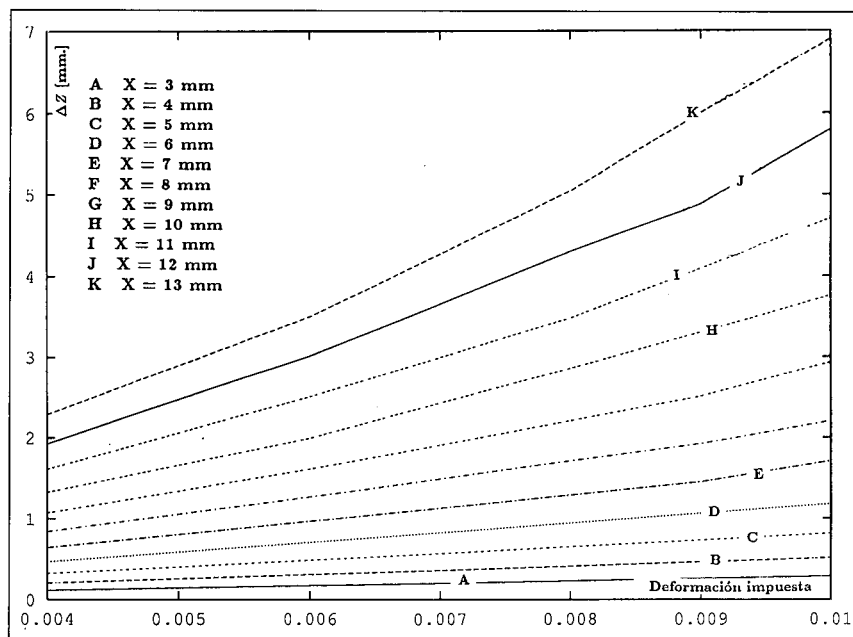


Figura 14 Variación del "Factor de distorsión por flexión" con las deformaciones volumétricas a distintas distancias del voladizo.

### Influencia del módulo de Young y del coeficiente de Poisson en la distorsión por flexión

Se observaron curvas  $\Delta Z$  en función de la longitud del voladizo para una deformación volumétrica impuesta del 0.8%. Las mismas fueron obtenidas para valores del módulo de Young de 120, 140, y 180  $Kg/cm^2$ , sin encontrar ninguna variación entre ellas. Como puede verse en las ecuaciones (e.1) y (e.2) de la solución analítica para dos capas, los valores de las deformaciones obtenidos son independientes del valor del módulo de Young. El mismo análisis se realizó para valores del coeficiente de Poisson de 0.2, 0.3, 0.4 y 0.5, sin encontrar ninguna variación entre ellas, por lo que puede concluirse que los valores de deformaciones obtenidos son también independientes del valor del coeficiente de Poisson.

### Influencia del tamaño de capa en la distorsión por flexión

El voladizo de la Figura 6 ha sido modelado por elementos finitos cuadrangulares de cuatro nodos, suponiendo un proceso constructivo en 6, 12, 15, 20, 24 y 30 capas. En todos los casos se utilizaron las mismas propiedades del material y en la Figura 15 puede verse la geometría obtenida para 12 y 30 capas. La Figura 16 muestra comparativamente los valores de  $\Delta Z$  en función de la longitud del voladizo para 12, 15, 24 y 30 capas.

En todos los casos el valor de  $\epsilon_0$  fue del 0.8%. Como era de esperar, a medida que aumenta el espesor de capa, disminuye la distorsión por flexión. Esto concuerda con los análisis dados en la referencia [2] y se debe al aumento de rigidez de las capas.

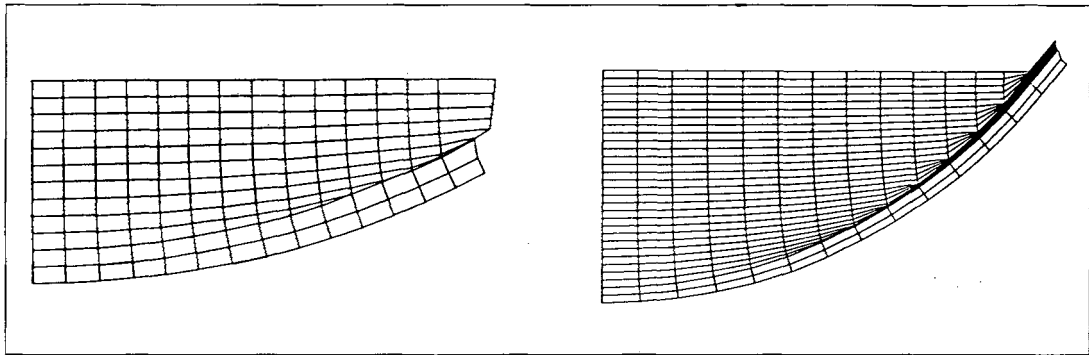


Figura 15 Geometría obtenida para doce y treinta capas

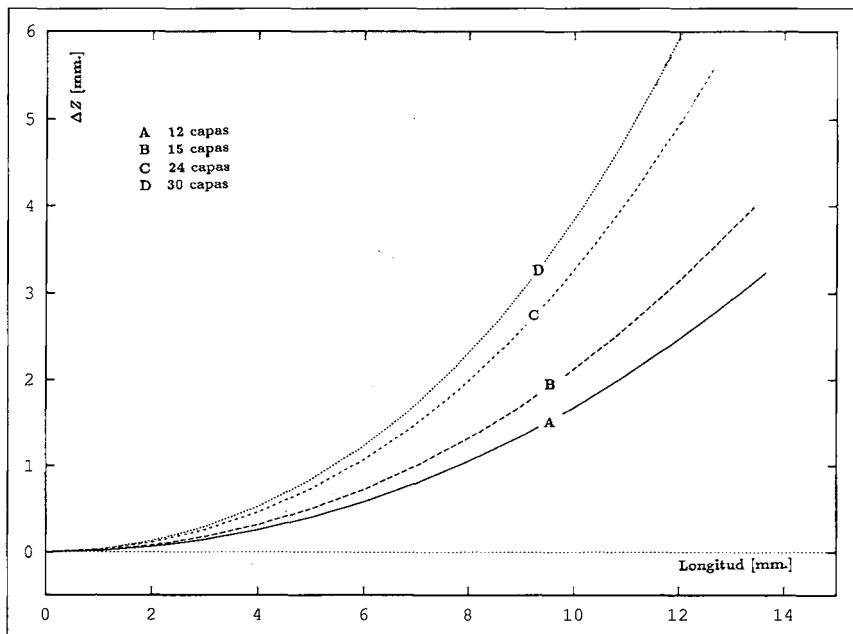


Figura 16 Variación del Delta Z con el tamaño de capa

### Análisis bidimensional con elementos sólidos de cuatro nodos con integración completa

Se presenta un análisis del test extraído de la referencia [2] en el que se ha discretizado el voladizo con elementos sólidos de cuatro nodos con cuatro puntos de integración por elemento. En la dirección longitudinal se han colocado 7, 10, 14, 28, 40 y 56 elementos obteniéndose mejor aproximación a medida que aumenta el número de

elementos. En la Figura 17 se muestran las primeras tres capas de proceso, obtenidas con 7, 14, 28 y 56 elementos en la dirección longitudinal.

En la Tabla I puede verse la mejor aproximación obtenida con respecto a la solución analítica ecs(1) y (2) a medida que se aumenta el número de elementos, No obstante se advierte la excesiva rigidez.

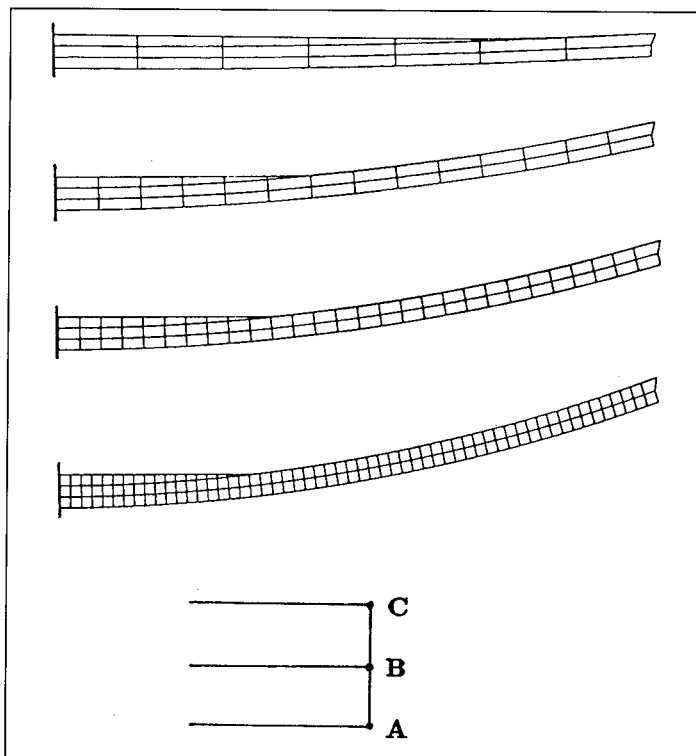


Figura 17 Geometrías deformadas para distintos números de elementos en la dirección longitudinal

	7 ELEM.	28 ELEM.	40 ELEM.	ANALITICA
NODO A	-0.0492	0.00397	0.01381	0.03100
NODO B	-0.0629	-0.0625	-0.0623	-0.0630
NODO C	-0.0772	-0.1300	-0.1400	-0.1575

Tabla I. Desplazamientos verticales en cm en los puntos A, B y C con elementos cuadriláteros de 4 nodos para distintas discretizaciones y la solución analítica



En la Figura 18 se muestran las variaciones del factor por distorsión por flexión para 7, 10, 14 y 28 elementos en la dirección longitudinal del voladizo.

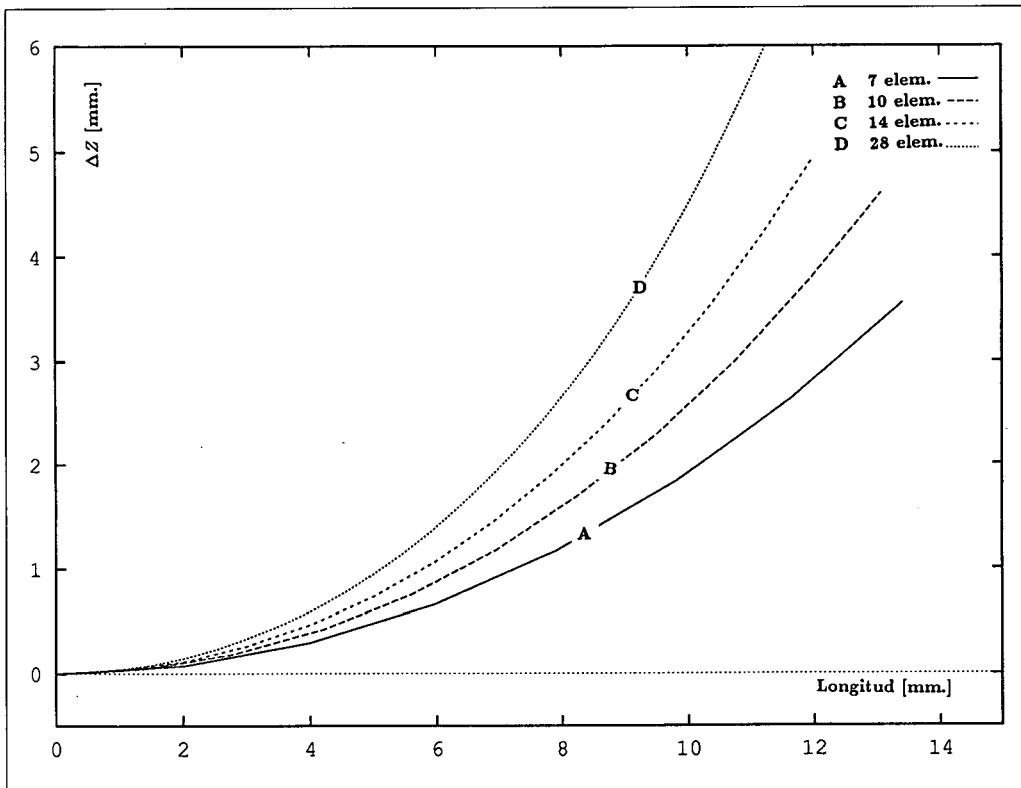


Figura 18 Variación del factor de distorsión por flexión para distinto número de elementos en la dirección longitudinal

### Elementos de cuatro nodos y de ocho nodos con integración selectiva

Como se esperaba, los elementos de cuatro nodos con integración completa tienen un mal comportamiento a la flexión, lo que los hace poco fiables en el modelado de procesos como el que nos atañe. Esto no ocurre con los elementos cuadráticos de ocho nodos, que reproducen los valores analíticos con una baja densidad de elementos. Dado que el costo computacional de los elementos de cuatro nodos es inferior al de los de ocho, y considerar este efecto es importante en el caso del modelado de procesos de fabricación rápida de prototipos, donde las piezas reales pueden tener del orden de 1000 capas, se implementaron los elementos de cuatro nodos con integración reducida de los términos de rigidez debidos a las deformaciones tangenciales, tal como se ha explicado anteriormente. En la Tabla II se muestran comparativamente los valores de

desplazamientos de los nodos extremos del voladizo para elementos de ocho nodos, de cuatro nodos con integración selectiva y la solución analítica descrita anteriormente.

Se utilizaron siete elementos en la dirección longitudinal. Es importante comparar los resultados de los elementos de cuatro nodos con integración selectiva, con los datos sin integración selectiva en la Tabla I.

	4 NODOS I.S.	8 NODOS	ANALITICA
NODO A	0.02650	0.03060	0.03100
NODO B	-0.0622	-0.0622	-0.0630
NODO C	-0.1530	-0.1560	-0.1575

Tabla II. Desplazamientos en cm en los puntos A, B y C obtenidos con elementos cuadriláteros de 4 nodos con integración selectiva, con elementos de 8 nodos, y analíticamente ecs.(1) y (2).

### Análisis tridimensional

Para el modelado tridimensional del proceso se pueden utilizar elementos hexaédricos de 8 y 20 nodos. Si bien los elementos de 20 nodos proporcionan mejores resultados a la flexión, poseen un costo computacional muy grande por lo que se ha implementado la integración selectiva en los elementos de ocho nodos bajo la misma metodología que para los elementos de cuatro nodos en dos dimensiones. El ejemplo en cuestión, fue modelado con elementos sólidos de ocho nodos, con integración selectiva, y también con elementos de 20 nodos con integración completa. Los resultados obtenidos con ambos tipos de elementos guardan una muy buena correlación, por lo que se puede inferir que en este ejemplo en que la flexión es muy importante, los elementos sólidos de ocho nodos con integración selectiva se comportan muy bien. No ocurre lo mismo al utilizar integración completa en estos elementos, de la misma forma que ocurría en el caso bidimensional con los elementos de cuatro nodos. La Figura 19 muestra las geometrías deformadas para 6, 12, 18 y 24 capas con elementos de ocho nodos e integración selectiva.

### CONCLUSIONES

Del análisis de los resultados del test estudiado en el presente trabajo, se desprenden las siguientes conclusiones:

- A medida que aumenta el coeficiente de deformación volumétrica, crece la distorsión por flexión.

- Para piezas de longitud mayor que seis milímetros, la variación del factor de distorsión por flexión con las deformaciones volumétricas deja de tener un comportamiento lineal.
- El factor de distorsión por flexión es independiente del módulo de Young y del coeficiente de Poisson.
- A medida que se aumenta el espesor de las capas, disminuye la distorsión por flexión.
- Los elementos cuadriláteros de cuatro nodos y los hexaédricos de ocho nodos con integración selectiva proporcionan resultados muy precisos y económicos para análisis de problemas de fabricación rápida de prototipos.

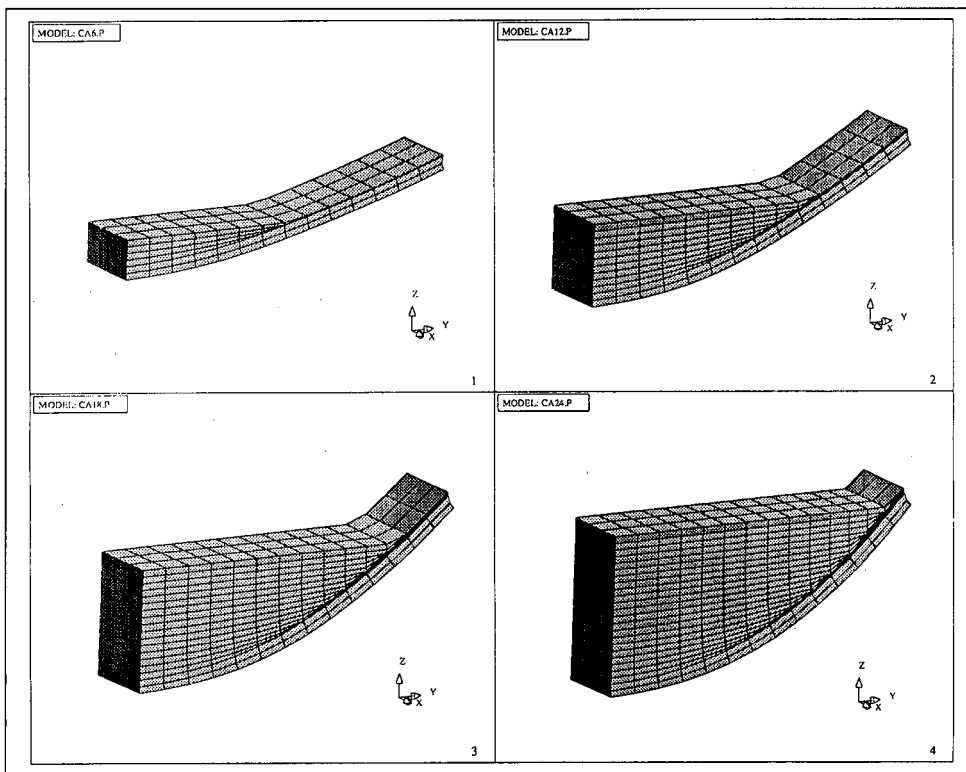


Figura 19 Geometrías deformadas para 6,12,18 y 24 capas - Elementos de ocho nodos con integración selectiva

### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado en el marco del Proyecto BRITE/EURAM "Development of rapid prototyping technologies based on laser sintering", Contract Nr.BRE2-CT92-0228 Project Nr. BR-5478.

El primer autor agradece al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la República Argentina (CONICET), que posibilitó su estancia en el CIMNE mediante una beca externa de dicho Consejo.

## REFERENCIAS

1. M.C. Shellabear, H. J. Langer y M. Cabrera, "The EOS Rapid Prototyping System", *Proceedings of the 1st European Conference on Rapid Prototyping*, pp. 19-26, Nottingham (1992).
2. P. Jacobs, "Rapid Prototyping and Manufacturing Fundamentals off Stereolithography", *Society of Manufacturing Engineers*, First Edition, (1992).
3. G. Lart, "Comparison of Rapid Prototyping System", *Proceedings of the 1st European Conference on Rapid Prototyping*, pp. 243-254, Nottingham (1992).
4. G. Lombera, G. Bugada, M. Cervera, E. Oñate, "SLAP: Programa para modelado numérico de procesos de estereolitografía utilizando el método de los elementos finitos", *Publicación CIMNE Nro. 47*, Universidad Politécnica de Catalunya (1994).
5. O.C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, "*The finite element method*", McGraw Hill, Vol. I, 1989 and Vol. II, 1991.
6. E. Oñate, "Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos - análisis estático", *Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería*, Primera edición, Enero de 1992.