Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»

Т. Горшкова
М. Турунцева

«АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ВЕСОВЫХ МАТРИЦ НА ОЦЕНКИ РЕГИОНАЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ»

(препринт)

Москва 2021

Работа сделана в рамках научно-исследовательской работы, выполненной в соответствии с Государственным заданием РАНХиГС при Президенте Российской Федерации на 2021 год

Авторы:
ГОРШКОВА Таисия Геннадьевна
Должность: научный сотрудник
Организация: Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации. Институт прикладных экономических исследований
Адрес: Российская Федерация, 119571, г. Москва, проспект Вернадского, 84/3, 21-02
Адрес электронной почты: gorshkova-tg@ranepa.ru
Контактный телефон: 8(917) 5305688

ТУРУНЦЕВА Марина Юрьевна
Ученая степень: кандидат экономических наук
Должность: Зав. Лабораторией макроэкономического прогнозирования
Организация: Институт экономической политики им. Е.Т. Гайдара
Адрес: Российская Федерация, 125993, Россия, Москва, Газетный пер., д. 3/5, стр.1
Адрес электронной почты: turuntseva@ranepa.ru
Контактный телефон: (499) 956 9562

Аннотация. Статья посвящена моделированию пространственной зависимости между макроэкономическими показателями российских регионов с помощью пространственно-весовых матриц. Проведен сравнительный анализ пяти матриц, учитывающих только значения самих показателей в соседних регионах, без влияния других макроэкономических рядов.

В статье проведен анализ работ, в которых описаны способы построения весовых матриц, как основанных только на географических данных, так и на основе экономических показателей, пять матриц применены к трем моделям, построенным на российских региональных данных. Исследование проводилось на данных по региональной инфляции и ВРП. Помимо моделирования на данных обо всех регионах, пространственные модели были также построены отдельно для западных и восточных частей России.

По результатам проведенного исследования можно сделать вывод, что для ряда ВРП выбор пространственной матрицы существенно влияет на оценки коэффициентов и ошибки внутривыборочных прогнозов. При этом способ, которым данные матрицы учитываются в модели, имеет второстепенное значение. Для региональной инфляции, наоборот, важнее оказывается тип модели, а большинство матриц дают практически идентичные результаты в каждой модели.

Abstract. The article is devoted to modeling the spatial dependence between macroeconomic indicators of Russian regions, using spatial weight matrices. The authors perform a comparative analysis of five matrices taking into account only the values of the indicators themselves in neighboring regions, without the influence of other macroeconomic series of data.

The article analyzes papers that describe ways to build weighting matrices, both based only on geographic data and on economic indicators; the five matrices are applied to three models built on Russian regional data. The study is based on regional inflation and GRP data. In addition to modeling on data about all regions, spatial models were also built separately for the Western and Eastern parts of Russia.

Based on the results of the study, we can conclude that for a number of GRP figures, the choice of spatial matrix significantly affects the ratio estimates and errors of in-sample forecasts. The way in which these matrices are considered in the model is of secondary importance. For regional inflation, on the contrary, the model type is more important, and most matrices give nearly identical results in each model.

1 ВВЕДЕНИЕ

Учет пространственной зависимости между регионами / странами позволяет повысить точность моделей и прогнозов. Однако полученные результаты зависят от того, каким именно образом пространственные данные включаются в модель. Наиболее простым и эффективным способом учета пространственной зависимости является использование пространственно- весовой матрицы, в которой изначально задана некая зависимость между регионами. Данная зависимость определяется на основе географического расположения регионов, социальных или экономических показателей.

Выбор весовой матрицы, которая наилучшим образом будет отражать особенности исследуемых регионов, до сих пор остается одним из ключевых этапов построения пространственной модели. Одна из важных особенностей этого выбора заключается в том, что исследователь делает априорные предположения о форме весовой матрицы. В связи с этим, определить наилучшую матрицу на реальных данных можно только путем перебора различных вариантов, что существенно усложняет процесс моделирования.

В данной работе исследование весовых матриц проводится на данных по ВРП и региональной инфляции российских регионов. Во втором разделе описаны теоретические и эмпирические подходы к построению весовых матриц. В третьем разделе пять весовых матриц, показавших наиболее точные результаты в эмпирических работах, рассмотренных во втором разделе, были применены к данным российского ВРП и региональной инфляции за 2000-2019 гг. Помимо моделирования региональных показателей сразу для всех регионов, были также проанализированы модели с различными весовыми матрицами отдельно для регионов восточной и западной частей (раздел 4). Для каждой весовой матрицы строилось три модели, разным образом учитывающие пространственные взаимосвязи между регионами: модель пространственного лага, пространственных ошибок и лагов, и ошибок.

2 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ВЕСОВЫХ МАТРИЦ

Выделяются различные виды матриц, которые могут быть использованы при оценивании пространственных данных. Первый тип матриц основан на расстояниях между регионами и в него входят следующие спецификации матриц:

1. Матрица k ближайших соседей. Здесь рассчитываются расстояния между центром исследуемого региона и центрами остальных регионов, затем расстояния ранжируются по возрастанию, и априори выбирается количество k соседей с наименьшими расстояниями. Далее элементы пространственной матрицы w_{ij} считаются как $w_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если регион } j \text{ входит в } k \text{ ближайших соседей для } i \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$. Данная матрица несимметрична, так регион j может входить в число ближайших соседей региона i, но регион i при этом не будет ближайших соседом для j. Однако матрицу можно сделать симметричной, если добавить условие, что $w_{ij} = 1$, если j является ближайшим соседом для i или i является ближайшим соседом для j.

2. Матрица пороговых расстояний. Выбирается пороговое значение расстояния, d, и если расстояние между центрами регионов меньше данного порога, то $w_{ij} = 1$, иначе 0.

3. Матрица масштабированных (или сжатых) расстояний. Данная матрица учитывает, что с ростом расстояния сила влияния регионов друг на друга ослабляется. Поэтому вводится коэффициент масштабирования $a > 0$, так что $w_{ij} = d_{ij}^{-a}$. Также можно использовать экспоненциальные веса, $w_{ij} = \exp(-ad_{ij})$.

4. Матрица двойного сжатия может использоваться в случаях, когда необходимо ввести более гибкие веса. Предполагается, что d – предварительно выбранное пороговое расстояние, и $w_{ij} = \begin{cases} [1 - \left(\frac{d_{ij}}{d}\right)^k]^k, \text{если } 0 \leq d_{ij} \leq d \\ 0, \text{если } d_{ij} > d \end{cases}$.

Второй тип матриц основан на наличии общих границ между регионами.

1. Матриц общих границ. Если у регионов есть общая сухопутная или морская (на выбор исследователя) граница, $w_{ij} = 1$, иначе 0.

2. Матрица долей общих границ. Длина общей границы может быть очень маленькой, и в таких случаях можно использовать показатель, который показывает, какую часть из всех границ региона i составляет граница с регионом j. $w_{ij} = \frac{l_{ij}}{l_i} = \frac{l_{ij}}{\sum_{k \neq i} l_{ik}}$, где l_i – длина всех границ региона i.

3. Комбинированная матрица границ-расстояний. В работе [1] использовалась комбинированная матрица, которая учитывает и наличие общей границы, и расстояние между центрами регионов. $w_{ij} = \frac{l_{ij} d_{ij}^{-a}}{\sum_{k \neq i} l_{ik} d_{ik}^{-a}}$

Также выделяется два стандартных способа нормализации элементов весовой матрицы. Первый способ – нормализация по строкам, так что $\sum_{j=1}^{n} w_{ij} = 1, i = 1, \ldots n$. Однако такой подход изменяет структуру весовой матрицы, что может оказать влияние на интерпретацию силы пространственной связи. Чтобы избежать данной проблемы можно использовать скалярную нормализацию, путем домножения всей весовой матрицы на определенное число, aW, где a выбирается априори и может быть рассчитано как $a = \frac{1}{\lambda_{max}} > 0$, где λ_{max} – максимальное собственное значение матрицы W.

Помимо спецификации весовой матрицы исследователю также необходимо определить, каким именно образом пространственные эффекты должны быть включены в модель. Выделяется семь основных типов пространственных моделей, которые собраны в таблице 1.

Таблица 1 – типы моделей пространственной корреляции

Модель	Способ включения весовых лагов
SAR, пространственная авторегрессия	*WY*
SEM, модель пространственных ошибок	*Wu*
SLX, модель пространственных лагов объясняющих переменных	*WX*
SAC, пространственная комбинированная авторегрессия	*WY, Wu*
SDM, пространственная модель Дарбина	*WY, WX*
SDEM, пространственная модель Дарбина с ошибками	*WX, Wu*
GNS, общая гнездовая пространственная модель	*WY, WX, wu*

Примечание – *Y* – вектор значений объясняемой переменной, *X* – вектор значений объясняющих переменных, *u* – ошибки модели

Источник: [2]

В работе [3] исследуется возможность выбора наиболее точной пространственной матрицы с помощью метода адаптивного лассо для только пространственных данных (без учета временной корреляции между наблюдениями). При этом анализ проводится не для всех наблюдений, а для отдельных выборок. Так как при таком подходе может возникать проблема эндогенности, связанная с тем, что зависимая переменная одновременно служит независимой переменной, авторы предлагают двухшаговый подход с использованием инструментальных переменных.

Авторы рассматривают стандартную модель пространственной авторегрессии, которая записывается с помощью формулы (1):

$$Y = WY + X\beta + e, \tag{1}$$

где Y – ряд значений исследуемого показателя во всех регионах,

W – пространственно-весовая матрица с элементами w_{ij}, которые определяют силу зависимости между значениями показателя Y в регионах i и j.

X – матрица объясняющих переменных,

$e \sim iid(0, \sigma^2)$.

В сокращенной форме формула (1) принимает вид уравнения (2):

$$Y = (I - W)^{-1}(X\beta + e), \tag{2}$$

где I – единичная матрица.

Тогда $(I - W)^{-1} = I + W + W^2 + W^3 \ldots$ раскладывается в отдельные пространственные эффекты от соседства первого, второго и последующего уровней.

При применении адаптивного лассо авторы предполагают, что для региона i все регионы, с которыми у него есть пространственная зависимость, расположены в некоторой подвыборке данных N_i, которая состоит из m ближайших соседей. При этом истинно зависимых регионов всего $q < m$. Далее выбирается r случайных регионов, для которых существует ровно m ближайших соседей. Таким образом, из выборки исключаются регионы, находящиеся на окраине страны.

Алгоритм адаптивного лассо состоит из двух шагов:

1. С помощью формулы (3) предсказываются значения эндогенной переменной $\tilde{Y}$:

$$\tilde{Y} = \tilde{Z}\theta + \upsilon, \tag{3}$$

где $\tilde{Z}$ – матрица инструментальных переменных для r выбранных регионов размерности $r \times l$,

θ – вектор коэффициентов размерности l.

Предполагается, что инструменты не зависят от остатков регрессии, но коррелируют с эндогенными переменными.

Тогда оценка первого шага метода адаптивного лассо записывается с помощью формулы (4):

$$\hat{\theta} = arg \min_{\theta} || \ \tilde{Y} - \tilde{Z}\theta||_2^2 + \lambda_1 \left||\varphi_1 \circ \theta|\right|_1. \tag{4}$$

Первая часть этой формулы минимизирует сумму квадратов остатков между наблюдаемой переменной и используемыми инструментами. Вторая часть ограничивает абсолютные значения коэффициента θ.

На основе оцененного $\hat{\theta}$ и матрицы инструментов Z рассчитывается значение $\breve{Y}$, которое используется на втором шаге, чтобы избежать эндогенности.

2. Для оценки параметров $(\hat{\beta}, \widehat{w})'$ используется формула (5):

$$(\hat{\beta}, \widehat{w})' = arg \min_{(\beta,w)'} ||\tilde{Y} - \tilde{X}\beta - \breve{Y}w||_2^2 + \lambda_2 \left||\varphi_{2,\beta} \circ \beta\right||_1 + \left||\varphi_{2,w} \circ w\right||_1, \qquad (5)$$

Первая часть формулы минимизирует сумму квадратов остатков между наблюдаемой переменной и экзогенным переменными, которые включают в себя объясняющие переменные $\tilde{X}$ и прогнозы $\breve{Y}$, полученные на первом шаге. Вторая часть ограничивает абсолютные значения коэффициентов (β, w).

В работе [4] предлагается подход, использующий пространственную весовую матрицу с компонентами сходства (SARS – Spatial Autoregressive Variable with Similarity components). В весовую матрицу W добавляются компоненты сходства в соответствии с формулами (6)-(8):

$$w_{ij} = \left(D_{ij}\right)^{-m}, m \geq 0, j \in v_i, \qquad (6)$$

где w_{ij} – компоненты весовой матрицы, которые рассчитываются на основе выбранного типа матрицы,

v_i – набор всех регионов *j*, которые рассматриваются в модели как соседние регионы для *i*,

D_{ij} – расстояние между регионами *i*, *j*,

m – показатель, определяющий количество соседних регионов. В зависимости от значения *m* могут быть построены различные весовые матрицы, что позволит проверить стабильность полученных результатов.

$$S_{kij} = |X_{ki} - X_{kj}|, \qquad (7)$$

где S_{kij} – показатель сходства регионов *i*, *j*,

X_k – набор из *k* экзогенных переменных.

$$W = \sum_{j \in v_i} \frac{\left(D_{ij}^{-m} S_{k_1 ij}^{-qk_1} S_{k_2 ij}^{-qk_2} \dots S_{K_{ij}}^{-qK}\right)^z}{\sum w_{ij}}, \qquad (8)$$

где q – экспоненциальный фактор, который изменяется от 0 до 1 с шагом 0.1 и используется для более точной корректировки весов соседних регионов;

z – экспоненциальный фактор, позволяющий сбалансировать эффекты расстояния и сходства.

Наилучшая весовая матрица (на основе скорректированного метода максимального правдоподобия) определяется с помощью следующего алгоритма:

- рассчитываются стандартные пространственные авторегресионные модели (SAR) с различными комбинациями факторов D_{ij} и m. Выбираются такие значения факторов, для которых значение функции правдоподобия соответствующей SAR максимально;

- объясняющие переменные k, на основе которых рассчитывается показатель сходства, отбираются в модель индивидуально. Для каждой переменной в отдельности рассчитывается показатель S_{kij}, и с ее помощью строится индивидуальная SARS модель. В окончательную модель отбираются показатели, для которых функции правдоподобия соответствующих SARS принимали максимальные значения. Кроме того, для каждой отдельной объясняющей переменной автор [4] строил несколько моделей, отличающихся экспоненциальным фактором q. Для переменных, отобранных в окончательную модель, выбиралось такое значение q, чтобы значение функции правдоподобия было максимально.

В работе [5] отмечается, что исследователь не может априори знать, какая весовая матрица наилучшим образом отображает пространственную структуру. Авторы предлагают подход к идентификации матрицы, при котором изначально предполагается, что пространственные веса неизвестны. В таком случае стандартная весовая матрица в модели с пространственной ошибкой (SEM) идентифицируется частично, и для полной идентификации необходимы накладывать дополнительные ограничения симметричности.

Авторы [5] рассматривают две SEM модели. Первая модель с авторегрессионной ошибкой называется SEM-AR и записывается с помощью уравнения (9):

$$D_t = X_t\beta + u_t, u_t = RWu_t + \varepsilon_t, \tag{9}$$

где D_t – значения объясняемой переменной а момент времени t;

X_t – вектор объясняющих переменных;

W – неизвестная матрица пространственных весов;

$R = diag(\rho_1, \dots \rho_K)$ – диагональная матрица, состоящая из параметров пространственной авторегрессии в каждом регионе K;

ε_t – вектор независимых пространственных ошибок, в которых может присутствовать гетероскедастичность, где $(\varepsilon\varepsilon^T) = \Sigma = diag(\sigma_1^2, \dots \sigma_K^2)$, $\sigma_i^2 > 0$.

Вторая модель (SEM-MA) записывается уравнением (10) и включает в себя ошибку, описываемую процессом скользящего среднего:

$$D_t = X_t\beta + u_t, u_t = RW\varepsilon_t + \varepsilon_t. \quad (10)$$

Авторы [5] ставят себе цель идентифицировать пространственную матрицу W с помощью дисперсий и автоковариаций пространственных ошибок во всех исследуемых домохозяйствах, то есть с помощью $\Gamma = (uu^T)$, где Γ вычисляется методом обобщенных моментов или максимального правдоподобия.

Авторы объясняют частичную идентифицируемость W следующим образом: пусть $\Gamma = E\Lambda E^T$ – декомпозиция $\Gamma = (uu^T)$, где $\Lambda = diag(\lambda_1, \dots \lambda_K)$ – диагональная матрица собственных значений Γ, а столбцы $E = [e_1, \dots e_K]$ – собственные вектора. Авторы вводят и доказывают предположение, что если $\Gamma^{-1/2}$ – симметричный квадратный корень матрицы $\Gamma = (uu^T)$ и $\Gamma^{-1/2} = E\Lambda^{-1/2}E^T$, то $\Gamma^{-1/2} = VT$, где $V = (I - RW)^T diag(\frac{1}{\sigma_1^2}, \dots \frac{1}{\sigma_K^2})$, T – некоторая ортогональная матрица. То есть матрица V изоморфична $\Gamma^{-1/2}$ при некоторой ортогональной трансформации.

Тогда компоненты весовой матрицы RW частично идентифицируются с помощью $\Gamma^{-1/2}$ и зависят от конкретной трансформации. И только в случае, если строки $(I - RW)$ ортогональны друг другу, существует полная идентификация $\Gamma^{-1/2} = V$. Таким образом, авторы приходят к выводу, что для получения полной идентификации в любом случае необходимо накладывать дополнительные ограничения на ортогональную матрицу T.

В качестве такого ограничения авторы предлагают симметричность весовой матрицы и единый параметр пространственной автокорреляции для всех регионов, то есть чтобы матрица $RW = \rho W$ была симметричной. В таком случае существует единственная ортогональная матрица T, такая что выполняется уравнение (11):

$$\Gamma^{-1/2}T = \left[(I - \rho W)^T diag\left(\frac{1}{\sigma_1^2}, \dots \frac{1}{\sigma_K^2}\right)\right] = Q = ((q_{ij})_{i,j=1,\dots K}. \qquad (11)$$

Тогда элементы матрицы W могут быть выражены с помощью уравнения (12):

$$W_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & -\frac{q_{K1.n}}{q_{KK,n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{q_{K1.n}}{q_{11,n}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \sigma_{k,n} = 1/q_{kk} \,. \qquad (12)$$

При построении (12) предполагается, что $\rho \equiv 1$, и при других значениях ρ все элементы W_n меняются пропорционально.

Дальше модель может быть оценена методом моментов. Доверительные интервалы для элементов матрицы W_n определяются бутстрапингом. Однако в моделях пространственной корреляции требуется, чтобы бутстрап хорошо определял пространственные дисперсии и автоковариации. В связи с этим вводится дополнительное ограничение, что матрица пространственных весов и пространственная дисперсия, зависящая от региона, были бы такими, чтобы матрица пространственной автоковариации в приведенной форме была невырожденной, а все собственные значения матрицы были целыми и неповторяющимися.

Для SEM-MA пространственная матрица определяется похожим образом. В предположении о симметричности пространственной весовой матрицы, матрица Q_n оценивается так же, как в случае SEM-AR. Элементы весовой матрицы записываются с помощью уравнения (13):

$$W_n^{MA} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \frac{q_{K1.n}}{q_{KK,n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{q_{K1.n}}{q_{11,n}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \qquad (13)$$

Как и в случае SEM-AR, предполагается, что $\rho \equiv 1$.

В работе [6] предлагается совсем отойти от пространственной весовой матрицы и использовать вместо нее некоторые скрытые переменные, отражающие пространственную зависимость. Авторы утверждают, что при использовании стандартной весовой матрицы возникает проблема мультиколлинеарности, так как наблюдения в соседних областях сильно коррелированы.

Используются структурные уравнения, которые записываются формулами (14)-(16):

$$\eta = B\eta + \Gamma\xi + \zeta, cov(\xi) = \Phi, cov(\zeta) = \Psi, \quad (14)$$

$$y = \Lambda_y\eta + \varepsilon, cov(\varepsilon) = \Theta_\varepsilon, \quad (15)$$

$$x = \Lambda_x\xi + \delta, cov(\delta) = \Theta_\delta, \quad (16)$$

где формула (14) – структурная модель, а формулы (15), (16) – модели измерения эндогенных и экзогенных скрытых переменных соответственно;

η – вектор эндогенных скрытых переменных;

ξ – вектор экзогенных скрытых переменных;

B определяет структурные связи между эндогенными переменными;

Γ определяет эффекты экзогенных переменных на эндогенные;

ζ – структурные ошибки.

Λ – матрицы, содержащие регрессионные коэффициенты наблюдаемых переменных на скрытые;

Θ – матрицы ошибок измерения ковариационных матриц.

Предполагается, что ошибки измерения ε и δ некоррелированы ни друг с другом, ни с ζ и ξ. Структурные ошибки в свою очередь не коррелируют с экзогенными скрытыми переменными ξ.

Модель оценивается методом максимального правдоподобия, которая записывается с помощью уравнения (17):

$$L(\theta|Y) = -\frac{N}{2}\ln|\Sigma| - \frac{N}{2}tr(S\Sigma^{-1}) - \frac{pN}{2}ln2\pi, \quad (17)$$

где θ – набор оцениваемых параметров;

Y_{Nxp} – матрица данных, содержащая все наблюдаемые переменные. Данная матрица представляет собой N независимых строк, состоящих их различных, случайно выбранных, p-мерных векторов наблюдаемых переменных y. То есть из всего набора переменных N раз случайным образом выбирается по p факторов;

Σ_{pxp} – ковариации, которые записываются формулой (18):

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Lambda_y H(\Gamma\Phi\Gamma^T + \Psi)H^T\Lambda_y^T + \Theta_\varepsilon & \Lambda_y H\Gamma\Phi\Lambda_x^T \\ \Lambda_x\Phi\Gamma^T H^T\Lambda_y^T & \Lambda_x\Phi\Lambda_x^T + \Theta_\delta \end{pmatrix}, H = (I - B)^{-1}; \quad (18)$$

где $S_{pxp} = \frac{1}{N}Y^TY$ – выборочная ковариация.

Авторы [7] используют метод лассо для выбора весовой матрицы. Рассматривается пространственная модель с фиксированными эффектами, которая записывается с помощью уравнения (19):

$$y_t = \mu^* + W^*y_t + X_t\beta + \varepsilon_t, \quad (19)$$

где μ^* - вектор фиксированных остатков,

W^* - матрица пространственных весов, которая представима в виде $W^* = A^* + \rho^*W_0$, где W_0 – известная весовая матрица, как в стандартных пространственных моделях,

ε_t – остатки модели с нулевым средним и ковариационной матрицей Σ_ε.

В модели предполагается, что если матрица W_0 – истинная матрица, которая точно отражает связи между регионами, то матрица $A^* = 0$. Также в работе предполагается, что элементы матрицы A^* постоянны во времени и экзогенны.

Далее модель расширяется в предположении, что исследователи могут ввести не одну известную матрицу, а несколько. Тогда W^* описывается уравнением (20):

$$W^* = A^* + \sum_{i=1}^{M} \delta_i^* W_{0i}, -1 \leq \rho^* = \sum_{i=1}^{M} \delta_i^* \leq 1, \quad (20)$$

где M – количество исследуемых весовых матриц.

δ – параметры каждой из M матриц, которые позволяют оценить, какая матрица (или какая их линейная комбинация) наилучшим образом отражает пространственную структуру данных.

Модель (17) оценивается методом инструментальных переменных, так как y_t коррелированы с ε_t. Зависимая переменная и ковариации, скорректированные с учетом инструментов ($\widetilde{y_\iota}$ и $\widetilde{X_\iota}$ соответственно), записываются с помощью уравнений (21):

$$\widetilde{y_\iota} = \sum_{t=1}^{T} \left(b_{t,i} - \overline{b_\iota}\right)^T \gamma y_t \, , \widetilde{X_\iota} = \sum_{t=1}^{T} \left(b_{t,i} - \overline{b_\iota}\right)^T \gamma X_t, \tag{21}$$

где $\left(b_{t,i} - \overline{b_\iota}\right)^T \gamma$ – элементы вектора инструментов $B_t = \{U_t, W_{01}U_t, W_{01}^2 U_t \ \dots\}$, U_t – инструментальные переменные.

В работе [8] авторы анализируют параметрический и непараметрический подходы к выбору весовых матриц. Для начала они предполагают, что имеется N линейно независимых матриц $Y = \{W_1, \dots W_N\}$, которые могут содержать различное количество пространственных лагов и различные ограничения на используемые пространственные данные. Авторы отмечают, что при отсутствии нулевой гипотезы о том, какая матрица будет предпочтительнее, можно использовать информационные критерии Кульбека-Лейблера или Акаике.

Непараметрический подход предполагает, что существует два пространственных процесса $\{x_s\}_{s\in S}$, $\{y_s\}_{s\in S}$, где S – расположение регионов в пространстве. В соответствии с идеей, предложенной в работе Matilla, Ruiz (2008), необходимо трансформировать ряд в набор символов, каждый из которых отвечает за определенные данные. Пусть $\Gamma_n = \{\sigma_1, \dots \sigma_n\}$ – такой набор символов. Тогда процесс $\{x_s\}_{s\in S}$ символизируется таким образом, что $f\colon \{x_s\}_{s\in S} \to \Gamma_l$. При такой записи каждый элемент x_s ассоциируется с единственными символом что $f(x_s) = \sigma_{i_s}, i_s \in \{1, \dots l\}$. Функция f называется картой символизации. Аналогичный процесс проводится для ряда y_s. Символизирующая функция двумерного процесса записывается формулой (22):

$$g\colon \{Z_s\}_{s\in S} \to \Omega_l^2 = \Gamma_l x \, \Gamma_l,$$
$$g\big(Z_s = (x_s, y_s)\big) = \big(f(x_s), f(y_s)\big) = \eta_{ij} = (\sigma_i^x, \sigma_j^y). \tag{22}$$

Далее авторы [8] доказывают, что из всего доступного набора весовых матриц $\mathrm{W}(x,y)$ предпочтительной оказывается такая матрица W_0, что выполняется условие (23):

$$h_{W_0 x|y}(m) = \min_{W \in \mathrm{W}(x,y)} h_{Wx|y}(m), \tag{23}$$

где $h_{Wx|y}$ – условная энтропия процесса x при наблюдаемом процессе y.

m – количество соседних регионов, включенных в весовые матрицы.

Энтропия двух дискретных случайных переменных (x,y) с совместным распределением $p(x,y)$ рассчитывается как $h(x,y) = -\sum_x \sum_y p(x,y) \ln\big(p(x,y)\big)$. Условная энтропия $h_{x|y}$ с распределением $p(x,y)$ рассчитывается как $h(x|y) = -\sum_x \sum_y p(x,y) \ln\big(p(x|y)\big)$. Таким образом, формула (23) может быть преобразована в неравенство (24):

$$h_{W_0 x|y}(m) = -\sum_{\sigma^y} p(\sigma^y) \left[\sum_{\sigma^x \in K^x_{W_0}} p(\sigma^x|\sigma^y) \ln\big(p(\sigma^x|\sigma^y)\big)\right] \leq$$
$$-\sum_{\sigma^y} p(\sigma^y) \left[\sum_{\sigma^x \in K^{*x}_{W}} p(\sigma^x|\sigma^y) \ln\big(p(\sigma^x|\sigma^y)\big)\right] = h_{Wx|y}(m), \tag{24}$$

где $K^x_W = \{\sigma^x \in K | \sigma^x$ допустим для $W_x\}$. Допустимость в данном случае означает, что вероятность возникновения символа σ^x больше 0.

Авторы [9] применяют непараметрический подход к определению весовой матрицы к симуляционным данным, сгенерированным методом Монте-Карло. Также на этих данных они сравнивают другие подходы: J-тест, Байесовский метод и метод усреднения оценок. Все подходы исследуются на трех типах пространственных моделей: SAR, SEM, модель Дарбина. Авторы выбирают из трех весовых матриц: матрица соседей с общей границей, матрицы обратных расстояний без ограничений и матрица обратных расстояний с ограничением на количество разделяющих их регионов (если между регионами расположено более 4 других регионов, то соответствующий элемент весовой матрицы обращается в 0).

По результатам проведенного анализа авторы делают вывод, что критерии AIC и непараметрический метод энтропии наиболее точно выбирают правильную весовую матрицу – обратных расстояний с ограничением. Непараметрический критерий дает более точные результаты при больших абсолютных значениях коэффициента пространственной автокорреляции, ρ, в то время как информационный критерий более точно выбирает правильную матрицу при меньших значениях ρ. Однако разница между обоими критериями не очень высокая. Данный результат сохраняется для четырех различных процессов порождения данных, а также для различного количества наблюдений и временных периодов. Из 144 различных моделей непараметрический критерий правильно выбирает весовую матрицу в 46% случаях, AIC – в 35%, Байесовский подход – в 12% и J-тест – в 7% случаев.

Таким образом, авторы приходят к выводу, что разработанный непараметрический подход достаточно точно позволяет выбрать матрицу, соответствующую процессу порождения данных, из доступного набора матриц.

В работе [10] предлагается процедура бустинга для выбора весовой матрицы. Рассматривается модель вида (25):

$$y = \eta(x) + \varepsilon = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} f_i(x) + \varepsilon. \tag{25}$$

В общем виде алгоритм бустинга представляет собой метод градиентного спуска, который минимизирует функцию $\sum_{i=1}^{n} w_i \rho(y_i, \eta(x_i))$, где w_i – некоторые веса, $\rho(\cdot)$ – функция потерь, например функция правдоподобия или сумма квадратов остатков. Процедура бустинга состоит из следующих шагов:

1. Выбирается начальное значение η_0, и на его основе рассчитывается начальное значение функции $\widehat{f_0}$,

2. Вычисляется отрицательный градиент эмпирической функции потерь для каждой оценки функции f_0, то есть вычисляется значение η_m по формуле $u_i = -\frac{\partial \rho(y,\eta)}{\partial \eta}|_{\eta=\hat{\eta}_{m-1}(x_i)}, i = 1, \dots n$.

3. Выбирается функция $\hat{g}_m(\cdot)$, соответствующая всем рассчитанным значениям u_i.

- $\hat{f}_m = \hat{f}_{m-1} + \nu \hat{g}_m(\cdot)$, где ν – множитель, заранее выбранный исследователем.

Далее алгоритм повторяется итеративно. Количество итераций должно быть выбрано заранее. В результате итеративно рассчитываются значения η.

В работе [10] используется модификация описанного алгоритма бустинга для определения значений всех компонент модели. На шаге 2 вместо стандартного градиентого спуска используется $j^* = \arg\min_{1 \le j \le k} \sum_{i=1}^{n}(u_i - g_j(x_i))$, и тогда на шаге 3 вычисляется функция $\hat{f}_{j^*m} = \hat{f}_{j^*,m-1} + \nu \hat{g}_{j^*m}(\cdot), \hat{f}_{jm} = \hat{f}_{j,m-1}$ при $j \neq j^*$.

Большинство исследователей предполагает, что применение неправильной спецификации весовой матрицы ухудшает результаты моделей. Однако авторы [11] утверждают, что спецификация матрицы не играет существенную роль в оценивании экономических данных, и что большинство результатов, демонстрирующих важность выбора правильной матрицы, связаны с неправильной интерпретацией полученных результатов.

Авторы рассчитывают корреляцию между двумя векторами пространственных лагов, $\mathrm{W_a}u$ и $\mathrm{W}_b u$, где $\mathrm{W_a}$ и W_b – пространственные матрицы, которые отличаются количеством учитываемых соседей, m_a и m_b соответственно. Предполагается, что все элементы каждой матрицы имеет имеют одинаковый вес, то есть соответствующие элементы матриц равны m_a^{-1} и m_b^{-1}. u – нормально распределенные ошибки. Если корреляция между матрицами окажется незначительной, то выбор матрицы влияет на результаты модели.

Рассчитанная в общем виде корреляция записывается уравнением (26):

$$corr(W_a u, W_b u) = \frac{m_b^{-1}}{m_a^{-\frac{1}{2}} m_b^{-\frac{1}{2}}} = \left(\frac{m_a}{m_b}\right)^{1/2}. \tag{26}$$

Дальнейшие результаты зависят от количества соседей в сравниваемых матрицах. При. При $m_\mathrm{a} = 10$, $m_\mathrm{b} = 20$ корреляция равна 0.707. $m_\mathrm{a} = 10$, $m_\mathrm{b} = 12$ корреляция равна 0.913. Полученные результаты в основном относятся к матрицам одного типа: основанные на наличии границ между регионами или на обратных расстояниях. При сравнении матриц разного типа корреляция может быть ниже, однако, авторы утверждают, что и в этом случае выбор матрицы значимо изменяет оценки коэффициентов. Также авторы отмечают, что если сравниваются матрицы, основанные на общих границах, но с разным порядком смежности (например, матрица общих границ и матрица второго порядка), то чем выше порядок смежности, тем менее важна конкретная спецификация матрицы. Это логично, так как при использовании в качестве соседей более дальних регионов обе весовые матрицы начинают учитывать данные почти по всем регионам, так как на дальние регионы влияют и их соседи.

Также авторы [11] оценивают корреляцию между прогнозами моделей, основанных на различных весовых матрицах. Рассматриваются модели SAR для показателей y_a и y_b, отличающиеся только спецификациями матриц. Корреляция между ожидаемыми значениями объясняемых переменных рассчитывается по формуле (27):

$$corr\big(E(y_a), E(y_b)\big) = \frac{E(y_a)'E(y_b)}{[E(y_a)'E(y_a)]^{0.5}[E(y_b)'E(y_b)]^{0.5}}. \tag{27}$$

В формуле (27) важно отметить, что помимо весовой матрицы на объясняемую переменную также влияют объясняющие переменные, которые могут пространственно зависеть от соответствующих значений в соседних регионах. Пусть объясняющие переменные тоже представимы в виде SAR модели $x = a + \varphi W x + u$, тогда ковариация $E(y_a)'E(y_b)$ в уравнении (27) представимо в виде (28):

$$E(y_a)'E(y_b) = tr[(I_n - \varphi W')^{-1}(I_n - \rho_a W_a')^{-1}(I_n - \rho_b W_b')^{-1}(I_n - \varphi W')^{-1}]. \tag{28}$$

Таким образом, ковариация между прогнозируемыми значениями оказывается еще выше, чем в уравнении (27).

В работе [12] исследуются эндогенные весовые матрицы. Авторы отмечают, что при использовании стандартных матриц состоятельность и асимптотическая нормальность оценок достигается в предположении, что веса матриц строго экзогенны, что не всегда является правдой (в частности, если в качестве весовых элементов используются так называемые «экономические» расстояния, например, объемы торговли). Для борьбы с проблемой эндогенности весов в работе [12] строится два уравнения: стандартная SAR модель и модель для пространственной весовой матрицы. Предполагается модель вида (29):

$$y_i = \rho \sum_{j \neq i} w_{ij}\, y_j + \beta x_i' + v_i\,, \tag{29}$$

где w_{ij} – элементы весовой матрицы, которая в свою очередь зависит от наблюдаемых переменных z_i, таких ВВП, потребление, экономический рост и др. При этом $Z = X\Gamma + \varepsilon$.

Если ковариация ошибок зависимой переменной и весовой матрицы, $\sigma_{\upsilon\varepsilon}$, равна 0, то весовая матрицы строго экзогенна, но чаще всего данная ковариация не равна 0. Авторы предполагают, что ошибки моделей имеют совместное нормальное распределение, и тогда уравнение (29) принимает вид (30):

$$Y = \rho WY + X\beta + (Z - X\Gamma)\delta + \xi, \tag{30}$$

где $\delta = \sum_{\varepsilon}^{-1} \sigma_{v\varepsilon}$ – вектор-столбец параметров $\xi \sim N(0, \sigma_{\xi}^2 I_N)$ с дисперсией $\sigma_{\xi}^2 = \sigma_{v}^2 - \sigma_{v\varepsilon}' \sum_{\varepsilon}^{-1} \sigma_{v\varepsilon}$,

ξ – ошибка модели, независимая от ε.

Уравнение (30) оценивается двухшаговым методом инструментальных переменных, где на первом шаге стандартным МНК оценивается часть, контролирующая эндогенность весовой матрицы: $Z = X\Gamma + \varepsilon$. На втором шаге коэффициенты Г заменяются оценкой $\hat{\Gamma}$ и оценивается уравнение (31):

$$Y = \rho WY + X\beta + \left(Z - X\hat{\Gamma}\right)\delta + \hat{\xi}, \tag{31}$$

где $\hat{\xi} = \xi + X\left(\hat{\Gamma} - \Gamma\right)\delta = \xi + P\varepsilon\delta$, где $P = X(X'X)^{-1}X'$.

В уравнении (31) весовая матрица W оказывается предопределенной или экзогенной, в то время как WY – эндогенно. В связи с этим необходимо выбрать инструменты для WY.

Также в работе [12] используется четыре способа оценивания модели: стандартный метод инструментальных переменных, двухшаговый метод инструментальных переменных, метод максимального правдоподобия и метод максимального правдоподобия, скорректированный для учета эндогенности матрицы весов. В стандартных методах предполагается, что весовая матрица экзогенна.

На основе полученных результатов авторы делают вывод, что с точки зрения точности оценок коэффициентов методы правдоподобия дают более точные результаты, чем инструментальные переменные. Чем выше эндогенность пространственной матрицы (чем сильнее корреляция между матрицей и исследуемыми переменными), тем большее смещение оценок дают стандартные методы, особенно в части смещения пространственного коэффициента ρ. Скорректированные методы дают несмещенные оценки. Такой же результат получается, если пространственная связь присутствует, но не очень высокая.

3 АНАЛИЗ ВЕСОВЫХ МАТРИЦ ДЛЯ РОССИЙСКИХ ВРП И РЕГИОНАЛЬНОЙ ИНФЛЯЦИИ

При прогнозировании региональных показателей используются данные по 83 регионам России за период с 2000-2019 гг. В связи с отсутствием данных до 2014 г. для республики Крым и города федерального значения Севастополь, данные регионы исключены из выборки. В данной работе оцениваются авторегрессионные модели ВРП и инфляции, в которых помимо лагов объясняемой переменной учитываются также значения этой переменной в соседних регионах. Используется пять весовых матриц, на основе которых определяются соседние регионы: матрица смежности, матрица второго порядка (регионы считаются соседними, если они оба граничат с неким третьим регионом), матрицы обратных расстояний первого и второго порядка, где элементы весовой матрицы = $\frac{1}{d^n}, n = 1{,}2$ соответственно, и матрица 5 ближайших соседей. Последняя матрица также основана на автомобильных расстояниях между центрами регионов, однако веса принимают значения 0 и 1. Из расстояний между исследуемым регионом и всеми остальными выбирается 5 наименьших, и регионам с этими наименьшими расстояниями присваиваются значения 1, всем остальным, более дальним регионам, присваиваются веса 0.

Помимо различных весовых матриц в работе также исследуются различные спецификации пространственных моделей и две непространственные модели: модель пула и модель с фиксированными эффектами. Оцениваемые пространственные модели описываются формулами (32) – (34).

Формула (32) представляет собой модель пространственного лага – SAR, в которой учитываются значения объясняемой переменной в соседних регионах:

$$y = \rho W y + \alpha + \beta x + \varepsilon_t, \tag{32}$$

где y – ВРП / региональная инфляция,

x – лаг ВРП / региональной инфляции в исследуемом регионе.

Формула (33) представляет собой модель пространственной ошибки – SEM:

$$y = \alpha + \beta x + \varepsilon_t, \, u = \rho' W u + \varepsilon \tag{33}$$

Модель (34) – модель Дарбина, в которой объединены модели пространственной ошибки и пространственного лага:

$$y = \rho W y + \alpha + \beta x + W x \theta + u_t, \, u = \rho' W u + \varepsilon \tag{34}$$

Непространственная модель пула записывается с помощью формулы (35):

$$y_{it} = \alpha + \beta y_{it-1} + \varepsilon_{it} \, , \varepsilon_{it} \sim NID(0, \sigma_i^2), \tag{35}$$

В модели пула (35) константа и коэффициент наклона предполагаются гомогенными. Модель оценивается двухшаговым обобщенным методом моментов на основании методики Ареллано-Бонда. При использовании данного метода лаги зависимой переменной могут использоваться одновременно как в качестве объясняющих переменных, так и в качестве инструментов. При анализе ВРП использовались различные комбинации лаговых значений, критерием качества служил тест Саргана, проверяющий сверхидентифицируемость инструментов. В результате для модели пула ВРП была выбрана регрессия, в которой в качестве объясняющих переменных использовались первые два лага ВРП, в качестве инструментальных переменных – соответствующие лаги в разностях ($\Delta\, y_{it-s}$, s = 1, 2). Гипотеза о совместной незначимости всех коэффициентов отвергается. Гипотеза об идентифицируемости инструментов не отвергается. На основе этой модели были построены внутривыборочные прогнозы ВРП. Средняя ошибка модели пула без учета пространственной корреляции равна 10.5%.

Следующая модель – панельные данные с фиксированными эффектами, в которой константа предполагается регионально специфической переменной:

$$y_{it} = \alpha_i + \beta y_{it-i} + \varepsilon_{it}\,,\ \varepsilon_{it} \sim NID(0, \sigma_i^2). \tag{36}$$

В данной модели в качестве объясняющих переменных также выступают первый и второй лаги ВРП. Регрессия значима. Гипотеза о том, что индивидуальные фиксированные эффекты (обозначенные u_i) равны 0, отвергается. Таким образом, можно сделать вывод, что индивидуальные эффекты в регионах различны, и использование модели, не учитывающей фиксированные эффекты, даст смещенные оценки. Об этом же свидетельствует и очень высокое значение корреляции между фиксированными эффектами и значением ВРП, которая равна 0.82. Ошибка внутривыборочного прогноза, построенного по данной модели, равна 11.3%.

Затем для ВРП были рассмотрены пространственные модели.

Диагональные элементы в матрицах смежности и ближайших соседей равны 1, в результат чего предполагается, что Калининградская область граничит только с собой. Веса матрицы смежности нормированы, так что сумма весов для каждого региона равна 1.

На основе матрицы весов и детрендированного ВРП были рассчитаны значения *I* Морана по формуле (37):

$$I = \frac{N}{\sum_i \sum_j w_{ij}} \frac{\sum_i \sum_j w_{ij}(x_i - \mu)(x_j - \mu)}{\sum_i (x_i - \mu)^2}\,, \tag{37}$$

где w_{ij} – элемент весовой матрицы, показывающий силу связи между регионами i, j,

N – количество наблюдений,

x_i – значение исследуемой переменной (ВРП или региональная инфляция) в регионе i,

μ – среднее значение исследуемой переменной в выборке.

Все значения *I* Морана оказываются значимо положительными, из чего можно сделать вывод о наличии положительной пространственной корреляции между регионами, то есть регионы с высоким значением ВРП соседствуют с регионами с также высоким ВРП, а регионы с низким – с регионами с низким ВРП.

Модели (32) – (34) оценивались методом максимального правдоподобия с помощью кода, реализованного с помощью языка R. В качестве объясняющих переменных использовались взвешенный ВРП соседних регионов и первые два лага ВРП исследуемого региона, однако в финальной модели первый лаг оказался незначимым.

Коэффициент при взвешенных ВРП соседних регионов в модели пространственной зависимости в лагах значимый и положительный, что подтверждает значения статистики Морана и выводы о высокой положительной взаимосвязи между региональными ВРП. Средняя абсолютная ошибка прогноза по данной модели равна 11,3%. Данный результат соответствует ошибкам прогноза моделей, не учитывающих пространственную корреляцию между регионами.

В модели с пространственной ошибкой и с использованием весовой матрицы смежности средняя абсолютная ошибка прогноза равна 11.4%.

Далее оценивается модель Дарбина, учитывающая и пространственные лаги, и пространственную ошибку. В данной модели первый лаг ВРП оказался значимым, второй лаг также значим, но только на 10% уровне значимости. Ошибка внутривыборочного прогноза по данной модели составила 10%, что меньше как других пространственных, так и непространственных моделей.

Таким образом, можно сделать вывод, что при построении пространственной одномерной модели ВРП с весовой матрицей смежности можно использовать модель Дарбина, так как она дает наименьшие ошибки внутривыборочных прогнозов.

Далее все оцененные модели были переоценены с весами, основанными на матрице второго порядка. Как и в расчете с матрицей смежности, все значения I Морана значимо положительные, что свидетельствует о наличии положительной пространственной корреляции между регионами.

В модели пространственной зависимости в лагах коэффициент при взвешенных ВРП соседних регионов оказался положительным и значимым. В целом полученные оценки коэффициентов практически не отличаются от оценок, полученных по матрице смежности. Средняя абсолютная ошибка прогноза по данной модели равна 11.4%, что также практически не отличается от ошибки по модели с матрицей смежности.

В модели с пространственной ошибкой и весовой матрицей второго порядка, как и в модели пространственного лага, оценки коэффициентов при лаге ВРП и константе практически не отличаются от оценок по матрице смежности, однако оценка коэффициента при взвешенной ошибке уменьшилась почти в 2 раза. Средняя абсолютная ошибка прогноза по данной модели по-прежнему равна 11.4%.

В модели Дарбина оба лага ВРП оказались значимыми. Ошибка внутривыборочного прогноза по данной модели составила 10.1%, что меньше как других пространственных, так и непространственных моделей и соответствует результатам моделирования с помощью матрицы смежности. Таким образом, можно сделать вывод, что при построении пространственной одномерной модели ВРП с весовой матрицей второго порядка можно использовать модель Дарбина, так как она дает наименьшие ошибки внутривыборочных прогнозов.

Следующая анализируемая матрица – матрица обратных расстояний первой степени, веса которой рассчитываются по формуле $1/d^1$, где d – расстояние в км между столицами регионов по автомобильным трассам.

Значения *I* Морана, основанные на матрице расстояний, для ряда ВРП оказались значимо положительными. Однако абсолютные значения *I* Морана ниже, чем при использовании двух предыдущих матриц, что может быть объяснено тем, что используются данные по всем, в том числе и очень отдаленным регионам, и эти данные «оттягивают» на себя часть пространственной информации.

В модели пространственной зависимости в лагах первый лаг ВРП значим. Коэффициент при взвешенных ВРП соседних регионов также оказался положительным и значимым. Средняя абсолютная ошибка прогноза по данной модели равна 10.7%, что чуть меньше, чем в двух предыдущих моделях.

В модели с пространственной ошибкой и весовой матрицей обратных расстояний первый лаг ВРП оказывается значимым, при этом оценки коэффициентов очень близки к оценкам в модели пространственных лагов. Однако стандартная ошибка при коэффициенте пространственных ошибок не определена, что не позволяет сделать вывод о значимость данного показателя в модели. В связи с этим модель будет исключена из рассмотрения.

В модели Дарбина оба лага ВРП оказались значимыми, однако коэффициенты при взвешенных ВРП соседей незначимы как в лагах, так и в ошибках. При использовании только второго лага ВРП исследуемого региона коэффициент при пространственных ошибках остается незначимым, а коэффициент при пространственных лагах становится значим на 10% уровне. В связи с тем, что пространственные ошибки незначимы, данная модель не будет использоваться при выборе финальной модели. Таким образом, выводы, полученные на основе матрицы обратных расстояний, отличаются от выводов матриц смежности: при использовании матриц смежности все коэффициенты моделей оказывались значимыми и выбор модели происходил только на основе ошибки внутривыборочного прогноза. При использовании матрицы обратных расстояний коэффициент при пространственных ошибках в модели Дарбина оказывается незначимым, в связи с чем данная модель исключается из рассмотрения. Модели пространственных лагов и пространственных ошибок в отдельности дают практически идентичные оценки коэффициентов и ошибки прогноза.

Следующая весовая матрица – матрица обратных расстояний второго порядка, то есть матрица с элементами $1/d^2$, где d – расстояние в км между столицами регионов по автомобильным трассам.

Значения I Морана значимо положительные. В модели пространственной зависимости в лагах первый лаг ВРП значим. Коэффициент при взвешенных ВРП соседних регионов оказался незначимым при любом количестве используемых лагов. В связи с этим данная модель будет исключена из дальнейшего рассмотрения.

В модели с пространственной ошибкой и матрицей квадратов обратных расстояний, первый лаг ВРП оказывается значимым, при этом оценки коэффициентов очень близки к оценкам в модели пространственных лагов. Средняя абсолютная ошибка прогноза по данной модели равна 9.2%.

В модели Дарбина оба лага ВРП оказались значимыми, однако значимость коэффициентов при взвешенных лагах соседях оказалась не определена, в связи с чем модель исключена из рассмотрения.

При выборе окончательной модели, основанной на матрице квадратов обратных расстояний, необходимо отметить, что в SAR модели коэффициент при пространственных лагах оказался незначим, а в SEM и модели Дарбина значимость коэффициентов при взвешенных переменных не определена. Таким образом, нельзя сделать вывод о характеристиках полученных оценок модели, в связи с чем в данной работе модели с матрицей квадратов обратных расстояний будут исключены из сравнения.

Следующая матрица – матрица 5 ближайших соседей, основанная на матрице обратных расстояний, но с элементами, принимающими значения 0 или 1 – то есть «соседними» считаются 5 регионов, у которых расстояние от их столиц до столицы выбранного региона оказывается минимальным.

Значения *I* Морана значимо положительные. В модели пространственной зависимости в лагах первый лаг ВРП значим, коэффициент при взвешенных ВРП соседних регионов также значим на 10% уровне значимости. Ошибка внтуривыборочного прогноза по данной модели составила 10.6%.

В модели с пространственной ошибкой первый лаг ВРП оказывается значимым, однако стандартная ошибка оценки коэффициента при пространственной ошибке не может быть рассчитана, в результате чего не определяется значимость коэффициента. В связи с этим данная модель будет исключена из рассмотрения.

В модели Дарбина, как и в моделях с пространственными лагами и ошибками, оба лага ВРП оказались значимыми, однако коэффициент при пространственном лаге незначим. Полученный результат не соответствует результатам отдельных моделей: в SAR модели пространственные показатели оказались значимыми, а в SEM модели – значимость неопределена. Результат модели Дарбина может свидетельствовать о коллинеарности данных. Так как при использовании SAR модели, все коэффициенты оказались значимыми, в данной работе предполагается, что при использовании матрицы 5 ближайших соседей, вся необходимая информация о пространственной корреляции ВРП содержится в пространственных лагах. В связи с этим модель Дарбина также исключается из дальнейшего рассмотрения.

Таким образом, можно сделать вывод, что при построении пространственной одномерной модели ВРП с весовой матрицей 5 ближайших соседей значимыми оказываются только коэффициенты при пространственных лагах, в связи с чем можно использовать только модель SAR.

Все модели, описанные выше, были также построены на данных по региональной инфляции, в том числе непространственные модели. В непространственной модели пула в качестве объясняющих переменных в модели использовались первые два лага инфляции, в качестве инструментальных переменных – соответствующие лаги в разностях ($\Delta\, y_{it-s}$, s = 1, 2). Тест Вальда на совместную незначимость всех коэффициентов отвергается. J-тест Саргана не отвергает гипотезу об идентифицируемости инструментов.

На основе данной модели были построены внутривыборочные прогнозы региональной инфляции. Средняя ошибка модели пула без учета пространственной корреляции равна 2.3%.

В непространственной модели с фиксированными эффектами в качестве объясняющих переменных выступает только первый лаг инфляции. Регрессия значима. Гипотеза о том, что индивидуальные фиксированные эффекты (обозначенные u_i) равны 0, не отвергается, то есть гипотеза о том, что индивидуальные эффекты различаются в зависимости от региона не может быть отвергнута ни на любом уровне значимости. Такой же вывод можно сделать из слабой корреляции между фиксированными эффектами и региональной инфляции, которая равна 0.07. Данные результаты позволяют предположить, что модель пула более точно описывает характер связи между региональными данными, и что в среднем инфляция не различается по регионам. Ошибка прогноза, построенного по данной модели, также равна 2.3%.

Далее были построены пространственные модели инфляции. Они оценивались так же, как и модели для ВРП: методом максимального правдоподобия с помощью кода, реализованного с помощью языка R. В качестве объясняющих переменных также использовались первые два лага инфляции в исследуемом регионе, однако в большинстве финальных моделей, согласно информационным критериям, необходимо учитывать только первый лаг.

Значения I Морана для модели с пространственными лагами и матрицей смежности значимо положительные, что свидетельствует о наличии положительной пространственной корреляции между регионами. Коэффициент при взвешенной инфляции соседних регионов оказался положительным и значимым, что свидетельствует о высокой положительной взаимосвязи между инфляцией соседних регионов и соответствует результатам статистики Морана. Средняя абсолютная ошибка прогноза по данной модели равна 2.5%, что соответствует ошибкам прогноза моделей, не учитывающих пространственную корреляцию между регионами.

Ошибка модели с пространственной ошибкой составляет 2.2%, ошибка модели Дарбина – 4.6%, что больше, чем у остальных моделей. Таким образом, можно сделать вывод, что при построении пространственной одномерной модели региональной инфляции с весовой матрицей смежности можно использовать любую из рассмотренных моделей, за исключением модели Дарбина, так как они все дают практически одинаковые внутривыборочные ошибки прогнозов.

Значения *I* Морана для инфляции с весовой матрицей второго порядка оказались значимо положительными.

Коэффициент при взвешенной инфляции соседних регионов в модели пространственной зависимости в лагах оказался положительным и значимым. Средняя абсолютная ошибка прогноза по данной модели равна 2.5%, что также практически не отличается от ошибки по модели с матрицей смежности.

Средняя абсолютная ошибка прогноза по данной модели с пространственной ошибкой равна 2.2%.

Константа в модели Дарбина оказалась незначимой. Ошибка внутривыборочного прогноза по данной модели составила 1.1%, что меньше как других пространственных, так и непространственных моделей и соответствует результатам моделирования с помощью матрицы смежности.

Таким образом, можно сделать вывод, что при построении пространственной одномерной модели инфляции с весовой матрицей второго порядка можно использовать модель Дарбина, так как она дает наименьшие ошибки внутривыборочных прогнозов.

Далее были построены пространственные модели с весовой матрицей обратных расстояний. Значения *I* Морана значимо положительные.

Коэффициент при взвешенной инфляции соседних регионов в модели пространственной зависимости в лагах оказался положительным и значимым. Средняя абсолютная ошибка прогноза по данной модели равна 3.3%, что выше ошибок по предыдущим моделям.

Средняя абсолютная ошибка прогноза по модели с пространственной ошибкой равна 2.4%.

В модели Дарбина, как и в модели с матрицей второго порядка, константа оказалась незначимой. Оценки коэффициентов при пространственных лагах и ошибках идентичны. Ошибка внутривыборочного прогноза по данной модели составила 2.3%, что меньше ошибок в SAR и SEM моделях, и соответствует результатам моделирования на основе других матриц.

Таким образом, можно сделать вывод, что, в отличие от моделирования ВРП, результаты моделирования инфляции с весовой матрицей обратных расстояний практически не отличаются от результатов моделирования с другими матрицами, и наименьшую ошибку внутривыборочного прогноза по-прежнему дает модель Дарбина.

Далее были построены пространственные модели с весовой матрицей квадратов обратных расстояний. Значения *I* Морана значимо положительные.

Как и в модели ВРП, коэффициенты при взвешенной инфляции соседних регионов в модели пространственной зависимости в лагах, при пространственной ошибке в модели с пространственной ошибкой и при взвешенных ошибках в модели Дарбина оказались незначимыми, в связи с чем модели с матрицей квадратов обратных расстояний будут исключены из сравнения.

Далее были построены пространственные модели с весовой матрицей 5 ближайших соседей. Значения *I* Морана значимо положительные.

Средняя абсолютная ошибка прогноза в модели пространственной зависимости в лагах равна 4.2%, в модели с пространственной ошибкой – 3.0%.

В модели Дарбина для инфляции, в отличие от модели ВРП с матрицей 5 ближайших соседей, коэффициенты при всех переменных оказались значимыми. Однако коэффициент при пространственных лагах отрицательный, что противоречит как оценкам *I* Морана, так и результатам всех моделей с другими весовыми матрицами и спецификациями. Ошибка внутривыборочного прогноза по модели составила 4.9%.

При выборе окончательной модели, основанной на матрице 5 ближайших соседей, все три спецификации дают значимые оценки коэффициентов, однако в матрице Дарбина знак коэффициента при пространственных лагах не соответствует ожиданиям.

В таблице 2 собраны ошибки внутривыборочных прогнозов по всем построенным моделям ВРП и региональной инфляции. И для ВРП, и для инфляции в моделях с использованием матрицы квадратов обратных расстояний не получилось определить значимость взвешенных коэффициентов, поэтому данные модели были исключены из рассмотрения.

Таблица 2 – MAPE всех прогнозов

Матрица	Непространственная	Смежности	Смежности 2 порядка	Обратных расстояний	5 ближайших соседей

ВРП					
Пул	10.5%				
FE	11.3%				
SAR		11.3%	11.4%	10.7%	10.6%
SEM		11.4%	11.4%	-	-
Дарбин		10%	10.1%	-	-
Региональная инфляция					
Пул	2.3%				
FE	2.3%				
SAR		2.5%	2.5%	3.3%	4.2%
SEM		2.2%	2.2%	2.4%	3.0%
Дарбин		4.6%	1.1%	2.3%	4.9%

Источник: расчеты авторов

В целом на основе ошибок внтуривыборочных прогнозов можно сделать вывод, что при моделировании как ВРП, так и региональной инфляции, наиболее точные результаты дают матрицы смежности первого и второго порядков. Матрицы, основанные на обратных расстояниях, показывают либо большие ошибки прогнозов, либо не позволяют сделать выводы о значимости полученных коэффициентов. При этом для ВРП наименьше ошибки получаются при использовании модели Дарбина, для региональной инфляции – при использовании SEM модели. В обоих случаях результаты пространственных моделей практически не отличаются от стандартной модели пула, в связи с чем для простоты прогнозирования, можно использовать непространственные данные.

4 АНАЛИЗ ВЕСОВЫХ МАТРИЦ ДЛЯ РЕГИОНАЛЬНЫХ КЛАСТЕРОВ

В предыдущем разделе модели пространственной корреляции рассматривались для всех регионов России в предположении, что все «соседние» регионы оказывают влияние друг на друга. Однако российские регионы существенно отличаются друг от друга как по географическому и социальному положению, так и по отраслевой специализации, и можно предположить, что регионы с похожими характеристиками будут больше влиять друг на друга. В связи с этим в данном разделе все регионы будут разделены на кластеры по географическому положению.

Разделение по географическому признаку было проведено в соответствии с работой [13] – на восточные и западные регионы.

При исследовании региональных кластеров весовые матрицы также меняются, учитывая только те регионы, которые входят в один кластер. Все весовые матрицы, описанные в разделе 3, применены к каждому кластеру.

Первый оцениваемый кластер – западные регионы. Значения *I* Морана для ряда ВРП, посчитанные на основе матрицы смежности, значимо положительные, что свидетельствует о наличии положительной пространственной корреляции между регионами.

В модели пространственной зависимости в лагах коэффициент при взвешенных ВРП соседних регионов оказался положительным и значимым, что свидетельствует о высокой положительной взаимосвязи между ВРП соседних регионов и соответствует результатам статистики Морана. Второй лаг ВРП незначим, в связи с чем оценивается модель только первым лагом в качестве объясняющей переменной. Средняя абсолютная ошибка прогноза по данной модели равна 10.2%.

При оценивании SEM модели для кластера западных регионов с матрицей смежности регрессор коррелирует со взвешенными ошибками, в связи с чем нельзя оценить данную модель.

В модели Дарбина первый лаг ВРП оказался значимым, второй лаг незначим, также как и в модели SAR. Ошибка внутривыборочного прогноза по данной модели составила 10.1%.

Таким образом, можно сделать вывод, что при построении пространственной одномерной модели ВРП для западных регионов с весовой матрицей смежности можно использовать как модель SAR, так и модель Дарбина, так как они дают практически одинаковые ошибки внутривыборочных прогнозов.

Далее для западных регионов были оценены модели на основе матрицы смежности второго порядка. Значения *I* Морана значимо положительные.

В модели пространственной зависимости в лагах коэффициент при взвешенных ВРП соседних регионов оказался положительным и значимым, второй лаг ВРП незначим. Средняя абсолютная ошибка прогноза по данной модели равна 9.3%.

В модели SEM при использовании в качестве объясняющего только первого лага ВРП, данный лаг оказывается значимым только на 10% уровне. Второй лаг, при добавлении, оказывается незначимым, в связи с чем было решено строить модель только с первым лагом. Ошибка прогноза по данной модели составила 10.5%.

В модели Дарбина первый лаг ВРП оказался значимым, второй лаг незначим, также как и в модели SAR. Ошибка внутривыборочного прогноза по данной модели составила 9.7%.

Таким образом, можно сделать вывод, что при построении пространственной одномерной модели ВРП для западных регионов с весовой матрицей смежности второго порядка можно использовать как модель SAR, так и модель Дарбина, так же, как и при использовании матрицы общих границ.

Далее для западных регионов были оценены модели ВРП на основе матрицы обратных расстояний. Значения *I* Морана значимо положительные.

В модели пространственной зависимости в лагах коэффициент при взвешенных ВРП соседних регионов оказался незначимым, как при использовании только одного лага ВРП, так и при двух. В связи с этим данная модель была исключена из дальнейшего рассмотрения.

В модели SEM коэффициент при взвешенных ошибках оказывается значимым только на 10% уровне. Второй лаг, при добавлении, оказывается незначимым, в связи с чем было решено строить модель только с первым лагом. Средняя ошибка прогноза по данной модели составила 10.1%.

В модели Дарбина коэффициенты при взвешенных лагах и ошибках оказались незначимыми, в связи с чем данная модель исключена из рассмотрения.

Таким образом, можно сделать вывод, что при построении пространственной одномерной модели ВРП для западных регионов с весовой матрицей обратных расстояний.

Следующая матрица – матрица квадратов обратных расстояний. Значения *I* Морана значимо положительные, но существенно меньше, чем при использовании предыдущих матриц.

В модели пространственной зависимости в лагах коэффициент при взвешенных ВРП соседних регионов оказался незначимым при использовании только одного лага ВРП. При включении второго лага значимость коэффициента при взвешенных лагах неопределена. В связи с этим данная модель была исключена из дальнейшего рассмотрения.

В модели SEM коэффициент при взвешенных ошибках оказывается незначимым, в связи с чем данная модель исключена из рассмотрения.

В модели Дарбина значимость коэффициентов при взвешенных лагах и ошибках оказалась неопределена, в связи с чем данная модель исключена из рассмотрения.

Таким образом, модели для ВРП западных регионов с весовой матрицей обратных расстояний не позволяют определить значимость коэффициентов при взвешенных показателей «соседей».

Следующая матрица – матрица 5 ближайших соседей. Значения *I* Морана значимо положительны.

В модели пространственной зависимости в лагах коэффициент при взвешенных ВРП соседних регионов оказался незначимым при использовании только одного лага ВРП. При включении второго лага значимость коэффициента при взвешенных лагах неопределена. В связи с этим данная модель была исключена из дальнейшего рассмотрения.

В модели SEM коэффициент при взвешенных ошибках оказывается значимым, средняя ошибка внутривыборочного прогноза по данной модели составила 8.6%, что меньше ошибок предыдущих моделей.

В модели Дарбина коэффициент при взвешенных лагах оказался незначимым, в связи с чем данная модель исключена из рассмотрения.

Таким образом, в моделях для ВРП западных регионов с весовой матрицей 5 ближайших соседей значимыми оказываются только показателей «соседей» в модели SEM. Кроме того, ошибки данной модели оказываются минимальными относительно ошибок всех предыдущих моделей.

Далее все матрицы были оценены для восточных регионов. Значения *I* Морана значимо положительные.

В модели пространственной зависимости в лагах коэффициент при взвешенных ВРП соседних регионов оказался положительным и значимым. Средняя абсолютная ошибка прогноза по данной модели равна 11.7%.

При оценивании SEM модели для кластера восточных регионов, также как и для западных, с матрицей смежности регрессор коррелирует со взвешенными ошибками, в связи с чем нельзя оценить данную модель.

В модели Дарбина константа оказалась незначимой. Ошибка внутривыборочного прогноза по данной модели составила 14.7%.

Таким образом, модели для восточных регионов дают менее точные прогнозы, чем для всех регионов в целом.

Далее для восточных регионов были оценены модели на основе матрицы смежности второго порядка. Значения *I* Морана для ряда ВРП в каждом году значимо положительные.

В модели пространственной зависимости в лагах коэффициент при взвешенных ВРП соседних регионов оказался положительным и значимым. Средняя абсолютная ошибка прогноза по данной модели равна 11.7%.

В модели SEM константа оказалась незначимой при использовании как одного, так и двух лагов ВРП. Ошибка прогноза по данной модели составила 9.5%.

В модели Дарбина коэффициент при взвешенных лагах оказался значимым только на 10% уровне значимости. Константа, как и в предыдущей модели, оказалась незначимой. Ошибка внутривыборочного прогноза по данной модели составила 8.8%.

Таким образом, можно сделать вывод, что при построении пространственной одномерной модели ВРП для восточных регионов с весовой матрицей смежности второго порядка наиболее точные прогнозы дает модель Дарбина.

Далее для восточных регионов были оценены модели на основе матрицы обратных расстояний. Значения *I* Морана значимо положительные.

В модели пространственной зависимости в лагах коэффициент при взвешенных ВРП соседних регионов оказался значимым только на 10% уровне значимости. Средняя ошибка прогноза по модели составила 8%.

В модели SEM коэффициент при взвешенных ошибках оказывается незначимым, в связи с чем модель была исключена из рассмотрения.

В модели Дарбина коэффициенты при взвешенных лагах и ошибках оказались незначимыми, в связи с чем данная модель исключена из рассмотрения.

Таким образом, можно сделать вывод, что при построении пространственной одномерной модели ВРП для восточных регионов с весовой матрицей обратных расстояний значимые коэффициенты получаются только при использовании SAR модели.

Следующая матрица – матрица квадратов обратных расстояний. Значения *I* Морана значимо положительные.

В модели пространственной зависимости в лагах значимость коэффициента при взвешенных лагах неопределена. В связи с этим данная модель была исключена из дальнейшего рассмотрения.

Модель SEM не может быть оценена из-за обратимости Гессиана.

В модели Дарбина ошибка прогноза составила 9.4%.

Таким образом, модели для ВРП восточных регионов с весовой матрицей квадратов обратных расстояний значимые оценки коэффициентов дает только модель Дарбина.

Следующая матрица – матрица 5 ближайших соседей. Значения *I* Морана значимо положительные.

В модели пространственной зависимости в лагах ошибка прогноза составила 9.8%

В модели SEM коэффициент при взвешенных ошибках оказывается значимым, средняя ошибка внутривыборочного прогноза по данной модели составила 9.4%.

Ошибка прогноза модели Дарбина составила 9.3%

Таким образом, в моделях для ВРП восточных регионов с весовой матрицей 5 все три модели дают практически идентичные результаты.

Далее все пространственные модели были оценены для кластеров региональной инфляции.

Первый оцениваемый кластер – западные регионы. Значения *I* Морана для ряда инфляции, посчитанные на основе матрицы смежности, в каждом году значимо положительные, что свидетельствует о наличии положительной пространственной корреляции между регионами, то есть регионы с высокой инфляцией соседствуют с регионами с также высокой инфляцией, а регионы с низкой – с регионами с низкой инфляцией.

В модели пространственной зависимости в лагах коэффициент при взвешенной инфляции соседних регионов оказался положительным и значимым, что свидетельствует о высокой положительной взаимосвязи между инфляцией соседних регионов и соответствует результатам статистики Морана. Средняя абсолютная ошибка прогноза по данной модели равна 2.8%.

Ошибка прогноза по модели с пространственными ошибками составляет 0.9%, что существенно меньше ошибок всех предыдущих моделей.

В модели Дарбина коэффициент при взвешенных лагах не соответствует теоретическим ожиданиям и результатам статистики Морана. Ошибка внутривыборочного прогноза по данной модели составила 4.8%.

Таким образом, можно сделать вывод, что при построении пространственной одномерной модели инфляции для западных регионов с весовой матрицей смежности наименьшие ошибки прогноза получаются на основе SEM модели. Данная модель существенно лучше, как непространственных моделей, так и пространственных моделей всех регионов.

Далее инфляция западных регионов оценивается с помощью матрицы смежности второго порядка. Значения *I* Морана значимо положительные.

В модели пространственной зависимости в лагах коэффициент при взвешенной инфляции соседних регионов оказался положительным и значимым. Средняя абсолютная ошибка прогноза по данной модели равна 2.8%.

В модели с пространственными ошибками ошибка прогноза составляет 1.1%, что соответствует результатам матрицы общих границ.

В модели Дарбина знак коэффициента при взвешенных лагах не соответствует теоретическим ожиданиям и результатам статистики Морана. Ошибка внутривыборочного прогноза составила 1.6%, что существенно ниже ошибки соответствующей модели с матрицей общих границ.

Таким образом, можно сделать вывод, что при построении пространственной одномерной модели инфляции для западных регионов с весовой матрицей смежности наименьшие ошибки прогноза получаются на основе SEM модели. При этом в отличие от моделей с матрицей ближайших соседей, данная матрица позволяет получить маленькие ошибки прогнозов и в модели Дарбина, хотя знак коэффициента при взвешенных лагах в данной модели не соответствует ожидаемому.

Далее инфляция западных регионов оценивается с помощью матрицы обратных расстояний. Значения *I* Морана значимо положительные.

В модели пространственной зависимости в лагах коэффициент при взвешенной инфляции соседних регионов оказался незначимым, в связи с чем данная модель исключена из рассмотрения.

В моделях с пространственными ошибками и Дарбина коэффициент при взвешенных ВРП «соседей» также оказался незначимым, и данные модели также исключены из рассмотрения.

Таким образом, при построении моделей для западных регионов инфляции с использованием матрицы обратных расстояний коэффициенты при взвешенных показателях лагах и ошибках соседних регионов оказались незначимыми, в связи с чем данная матрица исключена из рассмотрения.

Значения *I* Морана для матрицы квадратов обратных расстояний значимо положительные.

При использовании данной матрицы коэффициенты при взвешенных показателях лагах и ошибках соседних регионов оказались незначимыми, в связи с чем матрица исключена из рассмотрения.

Следующая матрица – матрица 5 ближайших соседей. Все значения *I* Морана, кроме 2001 года, значимо положительные. Так как статистика незначима только в одном году, можно предположить, что это выброс.

В модели пространственной зависимости в лагах коэффициент при взвешенной инфляции соседних регионов оказался значимым и положительным. Средняя ошибка прогноза по данной модели составила 3.3%.

В модели с пространственными ошибками ошибка прогноза составляет 0.7%, что меньше ошибок всех предыдущих моделей.

В модели Дарбина коэффициент при взвешенных лагах не соответствует теоретическим ожиданиям и результатам статистики Морана. Ошибка внутривыборочного прогноза по данной модели составила 1%, что существенно ниже ошибок соответствующей модели с другими матрицами.

Таким образом, при построении пространственной одномерной модели инфляции для западных регионов с весовой матрицей 5 ближайших соседей наименьшие ошибки прогноза получаются на основе SEM модели, что соответствует результатам, полученным для ВРП. При этом, также как и матрица смежности второго порядка, данная матрица позволяет получить маленькие ошибки прогнозов и в модели Дарбина.

Для инфляции восточных регионов также были оценены все 5 весовых матриц. Значения *I* Морана значимо положительные, что свидетельствует о наличии положительной пространственной корреляции между регионами.

В модели пространственной зависимости в лагах коэффициент при взвешенной инфляции соседних регионов оказался положительным и значимым. Средняя абсолютная ошибка прогноза по данной модели равна 2.4%.

В модели с пространственными ошибками ошибка прогноза составляет 3.1%.

В модели Дарбина коэффициент при взвешенных ошибках не соответствует теоретическим ожиданиям и результатам статистики Морана, в связи с чем модель будет исключена из рассмотрения.

Таким образом, можно сделать вывод, что при построении пространственной одномерной модели инфляции для восточных регионов с весовой матрицей смежности наименьшие ошибки прогноза получаются на основе SAR модели, что отличается от результатов моделирования инфляции западных регионов, для которых наиболее точной оказалась SEM модель.

Далее инфляция восточных регионов оценивается с помощью матрицы смежности второго порядка. Значения *I* Морана значимо положительные.

В модели пространственной зависимости в лагах коэффициент при взвешенной инфляции соседних регионов оказался положительным и значимым. Средняя абсолютная ошибка прогноза по данной модели равна 2.6%.

В таблице 125 приведены результаты оценивания модели с пространственными ошибками. Ошибка прогноза по данной модели составляет 2.8%.

В модели Дарбина коэффициент при взвешенных лагах оказывается незначимым, в связи с чем модель будет исключена из рассмотрения.

Таким образом, можно сделать вывод, что при построении пространственной одномерной модели инфляции для восточных регионов с весовой матрицей смежности второго порядка модели дают одинаковые ошибки прогноза.

Далее инфляция восточных регионов оценивается с помощью матрицы обратных расстояний. Значения *I* Морана значимо положительные.

В модели пространственной зависимости в лагах коэффициент при взвешенной инфляции соседних регионов оказался незначимым, в связи с чем данная модель исключена из рассмотрения.

В моделях с пространственными ошибками и Дарбина коэффициенты при взвешенных ВРП «соседей» также оказались незначимыми, и обе модели тоже исключены из рассмотрения.

Значения *I* Морана для матрицы квадратов обратных расстояний значимо положительные.

В модели пространственной зависимости в лагах значимость коэффициента при взвешенной инфляции соседних регионов оказалась неопределенной, в связи с чем данная модель исключена из рассмотрения. Аналогично были исключены модели с пространственными ошибками и Дарбина.

Следующая матрица – матрица 5 ближайших соседей. Значения *I* Морана значимо положительные.

В модели пространственной зависимости в лагах коэффициент при взвешенной инфляции соседних регионов оказался значимым и положительным. Средняя ошибка прогноза по данной модели составила 2.4%.

Ошибка прогноза по модели с пространственными ошибками составляет 2.8%.

В модели Дарбина коэффициент при взвешенных ошибках не соответствует теоретическим ожиданиям и результатам статистики Морана. Ошибка внутривыборочного прогноза по данной модели составила 1%, что существенно результатам матрицы 5 ближайших соседей для западных регионов.

Таким образом, при построении пространственной одномерной модели инфляции для восточных регионов с весовой матрицей 5 ближайших соседей наименьшие ошибки прогноза получаются на основе модели Дарбина, что соответствует результатам, полученным для инфляции западных регионов. Однако знак при взвешенных ошибках «соседей» в данной модели не соответствует ожидаемому.

Сводные ошибки прогноза по всем моделям приведены в таблице 3. Как и в моделях для всех регионов России, в большинстве случаев модели с использованием матрицы обратных расстояний и квадратов обратных расстояний дают незначимые коэффициенты при взвешенных показателях «соседей», в результате чего соответствующие модели исключаются из рассмотрения.

Таблица 3 – MAPE прогнозов для региональных кластеров

Матрица	Смежности	Смежности 2 порядка	Обратных расстояний	Квадратов обратных расстояний	5 ближайших соседей
ВРП западных регионов					
SAR	10.2%	9.3%	-	-	-
SEM	-	10.5%	10.1%	-	8.6%

Дарбин	10.1%	9.7%	-	-	-
ВРП восточных регионов					
SAR	11.7%	11.7%	8%	-	9.8%
SEM	-	9.5%	-	-	9.4%
Дарбин	14.7%	8.8%	-	9.4%	9.3%
Инфляция западных регионов					
SAR	2.8%	2.8%	-	-	3.3%
SEM	0.9%	1.1%	-	-	0.7%
Дарбин	4.8%	1.6%	-	-	1%
Инфляция восточных регионов					
SAR	2.4%	2.6%	-	-	2.4%
SEM	3.1%	2.8%	-	-	2.8%
Дарбин	-	-	-	-	1%

Источник: расчеты авторов

Для западных и восточных регионов наиболее подходящие модели различаются: для ВРП западных регионов наименьшие ошибки прогноза получаются на основе SEM модели с матрицей 5 ближайших соседей, для ВРП восточных регионов – на основе SAR модели с матрицей обратных расстояний. Однако необходимо заметить, что вторая точная модель для обоих регионов была получена на основе матрицы смежности второго порядка. Ошибки прогноза и для западных, и для восточных регионов остаются меньше 10%, в связи с чем можно сделать вывод, что данная матрица хорошо отражает зависимость между ВРП российских регионов.

Для инфляции западных регионов почти все матрицы дают достаточно маленькие ошибки прогнозов, при этом минимальные ошибки были получены в SEM моделях. Инфляция восточных регионов наиболее точно моделируется с помощью модели Дарбина и матрицы 5 ближайших соседей. Однако SAR модели также дают достаточно точные результаты при использовании всех матриц.

Таким образом, можно сделать вывод, что при моделировании инфляции основную роль играет выбранная модель (SEM для западных регионов и SAR для восточных), при этом весовая матрица не очень важна. В свою очередь для ВРП важна как матрица, так и модель.

5 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в большинстве эмпирических работ используется одна или несколько следующих весовых матриц: матрица общих границ (в которой учитываются регионы, имеющие общую географическую границу), матрица обратных расстояний разных порядков (чаще всего в нее включаются регионы, расположенные друг от друга не дальше, чем некоторое, заранее выбранное расстояние). В целом большинство исследователей приходит к выводу, что использование различных спецификаций весовых матриц приводит к существенно разным оценкам коэффициентов, поэтому при построении экономических моделей необходимо предварительно выбрать матрицу, которая, по мнению исследователя, наиболее точно отражает существующие региональные связи. Обычно в качестве таких матриц используются матрица общих границ и матрица обратных расстояний первого или второго порядка.

В разделе данной работе пять весовых матриц были применены к данным о ВРП и инфляции российских регионов за 2000-2019 гг. Были построены три типа моделей с разным способом учета пространственной связи: модель с пространственными лагами, пространственными ошибками и лагами и ошибками одновременно. Кроме того, были рассмотрены как регионы в целом, так и западный и восточный кластеры. Результаты для всех регионов и для кластеров различаются.

Для всех регионов при моделировании как ВРП, так и региональной инфляции, наиболее точные результаты дают матрицы смежности первого и второго порядков. Матрицы, основанные на обратных расстояниях, показывают либо большие ошибки прогнозов, либо не позволяют сделать выводы о значимости полученных коэффициентов. При этом для ВРП наименьше ошибки получаются при использовании модели Дарбина, для региональной инфляции – при использовании SEM модели. В обоих случаях результаты пространственных моделей практически не отличаются от стандартной модели пула, в связи с чем для простоты прогнозирования, можно использовать непространственные данные.

Отдельно для западных регионов наименьшие ошибки прогноза ВРП получаются на основе SEM модели с матрицей 5 ближайших соседей, отдельно для восточных регионов – на основе SAR модели с матрицей обратных расстояний. Однако необходимо заметить, что вторая точная модель для обоих регионов была получена на основе матрицы смежности второго порядка. Ошибки прогноза и для западных, и для восточных регионов остаются меньше 10%, а также учитывая, что данная матрица дала достаточно точные результаты и для регионов в целом, можно сделать вывод, что матрица смежности второго порядка хорошо отражает зависимость между ВРП российских регионов. Тем не менее, ошибки прогнозов

ВРП для всех регионов оказались больше 10% при использовании всех матриц и моделей. Таким образом, рекомендуется разделять регионы на географические кластеры и строить отдельные модели для каждого кластера.

Для инфляции западных регионов минимальные ошибки были получены в SEM моделях, что соответствует результатам, полученным для всех регионов. Инфляция восточных регионов наиболее точно моделируется с помощью модели Дарбина и матрицы 5 ближайших соседей. Однако SAR модели также дают достаточно точные результаты при использовании всех матриц. Таким образом, можно сделать вывод, что при моделировании инфляции основную роль играет выбранная модель (SEM для западных регионов и всех регионов и SAR для восточных). Но так же, как и для ВРП, в моделях инфляции для всех регионов ошибки прогнозов оказались выше, чем в моделях региональных кластеров, в связи с чем рекомендуется разделять регионы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Cliff A., Ord. J. The problem of Spatial autocorrelation//In London 15 Papers in Regional Science 1, Studies in Regional Science. – 1969 – P. 25–55.

2. Elhorst J., Halleck Vega S. The SLX model: Extensions and the sensitivity of spatial spillovers to W//Papeles de Economía Española – 2017 – Vol. 152. P. 34-50.

3. Merk M., Otto P. Estimation of the spatial weighting matrix for regular lattice data – An adaptive lasso approach with cross-sectional resampling//Mathematics – 2020.

4. Besner C. A Spatial Autoregressive Specification with a Comparable Sales Weighting Scheme// Journal of Real Estate Research – 2002 – Vol.24. P. 193-212.

5. Bhattacharjee A., Jensen-Butler C. Estimation of the Spatial Weights Matrix under Structural// SIRE Discussion Papers, Scottish Institute for Research in Economics – 2011.

6. Folmer H., Oud J. How to Get Rid of W: A Latent Variables Approach to Modelling Spatially Lagged Variables// Environment and Planning A – 2008 – Vol. 40(10). P. 2526-2538.

7. Lam C., Souza P. Estimation and Selection of Spatial Weight Matrix in a Spatial Lag Model//Journal of Business and Economic Statistics, forthcoming – 2019.

8. Mur J., Gómez J., Marcos and Ruiz Marin M. Selecting the W Matrix: Parametric vs. Non Parametric Approaches//MPRA paper – 2011.

9. Herrera. M., Mur J., Ruiz M. Comparison Study on Criteria to Select the Most Adequate Weighting Matrix//Entropy – 2019- Vol. 2:160.

10. Kostov P. Model Boosting for Spatial Weighting Matrix Selection in Spatial Lag Models// Environment and Planning B Planning and Design – 2010 – Vol. 37(3). P. 533-549.
11. LeSage J., Pace K. The Biggest Myth in Spatial Econometrics//Econometrics - 2014 – Vol. 2(4). P. 217-249.
12. Qu X. Lung-fei L. Estimating a spatial autoregressive model with an endogenous spatial weight matrix// Journal of Econometrics, Elsevier – 2015 - Vol. 184(2). P. 209-232.
13. Demidova O. A. The asymmetric spatial Effects for Eastern and Western regions of Russia//Working Papers – 2014 – Series: Economics WP BRP 50/EC/2014