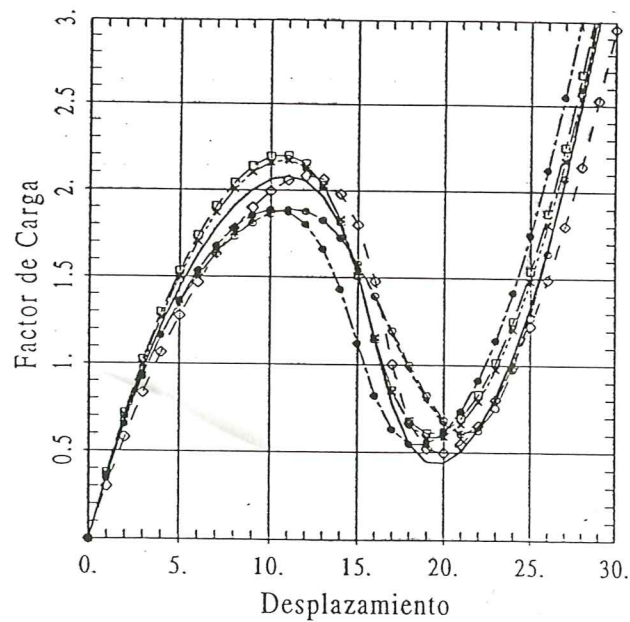
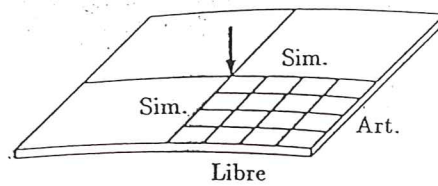


# Evaluación de Diferentes Elementos Finitos Basados en la Teoría de Láminas de Simó

F. Flores  
E. Oñate



# **Evaluación de Diferentes Elementos Finitos Basados en la Teoría de Láminas de Simó**

**F. Flores**

**E. Oñate**

**Publicación CIMNE Nº 38, Octubre 1993**

**Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería**

**Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, España**



# EVALUACIÓN DE DIFERENTES ELEMENTOS FINITOS BASADOS EN LA TEORÍA DE LÁMINAS DE SIMÓ

Fernando Flores \*  
y  
Eugenio Oñate

*Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería\*\*  
Universidad Politécnica de Cataluña  
08034 Barcelona, España*

## RESUMEN

En este trabajo se presenta la evaluación de varios elementos basados en la teoría de láminas desarrollada por Simó y colaboradores.<sup>[1-5]</sup> Se ha implementado una versión simplificada del elemento de cuatro nodos y varios elementos triangulares. Los estudios se refieren principalmente al comportamiento no lineal geométrico dentro de una formulación lagrangeana total. Se presentan también algunos ejemplos con comportamiento no lineal material.

## 1- INTRODUCCIÓN

La aproximación al comportamiento de láminas utilizada se inscribe dentro de las teorías de láminas (en contraste con la denominada aproximación de sólido degenerado<sup>[9]</sup>), en cuanto a que está formulada en términos de deformaciones generalizadas y esfuerzos. En los apartados siguientes se presenta un resumen de los conceptos esenciales de la formulación, para más detalles se recomienda consultar las referencias.<sup>[1-5]</sup>

### 1.1 Descripción cinemática de la lámina

Cualquier configuración de la lámina en  $\mathbb{R}^3$  queda definida en términos de:

- i) Superficie media de la lámina, definida por una transformación  $\varphi : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}^3$
- ii) El campo director, definido por la transformación  $t : \bar{A} \rightarrow S^2$ .

---

\* Inv. Asistente de CONICET y Prof. Adjunto Univ. Nacional de Córdoba (Argentina). En la actualidad investigador invitado en \*\*.

Dicho campo define en cada punto de la superficie media la dirección de la fibra que se mantiene recta independientemente de la deformación (la normal a la superficie media en las teorías de láminas clásicas),

El dominio  $\bar{\mathcal{A}} \subset \mathbb{R}^2$  se supone compacto con contorno suave  $\partial\mathcal{A}$  y puntos caracterizados por  $(\xi^1, \xi^2) \in \bar{\mathcal{A}}$ . Llamaremos  $\partial_\varphi\mathcal{A} \subset \partial\mathcal{A}$  y  $\partial_t\mathcal{A} \subset \partial\mathcal{A}$  las partes de  $\partial\mathcal{A}$  donde están prescritos  $\varphi$  y  $t$  respectivamente.  $S^2$  es la esfera de radio unitario y el hecho de que  $t$  pertenezca a ella implica la inextensibilidad del campo director.

Con esta notación, usando una hipótesis de Kirchhoff generalizada, toda configuración de la lámina se describe por

$$S := \{x \in \mathbb{R}^3 / x = \varphi + \xi t \quad , \quad \xi \in [h^-, h^+]\} \quad (1.1)$$

donde  $[h^-, h^+]$  define el espesor de la lámina. Agregaremos un supraíndice '0' a las variables geométricas asociadas con la configuración de referencia  $S^0$ .

Usando una base estandar  $\{e_1, e_2, e_3\}$  en  $\mathbb{R}^3$  podemos escribir

$$\varphi = \varphi^i e_i \quad \varphi_{i\alpha} = \varphi_{i\alpha}^i e_i \quad t = t^i e_i \quad (1.2)$$

donde hemos introducido la notación  $(\ )_{i\alpha} = \frac{\partial(\ )}{\partial \xi^\alpha}$ .

Las medidas de la superficie media en las configuraciones original y actual son respectivamente

$$d\mu^0 = \bar{j}^0 d\xi^1 d\xi^2 \quad d\mu = \bar{j} d\xi^1 d\xi^2 \quad (1.3)$$

con

$$\bar{j}^0 = (\varphi_{i1}^0 \times \varphi_{i2}^0) \cdot t^0 \quad \bar{j} = (\varphi_{i1} \times \varphi_{i2}) \cdot t \quad (1.4)$$

también definiremos

$$\bar{J} = \bar{j} / \bar{j}^0 \quad (1.5)$$

Tanto en la superficie media deformada como la indeformada, es posible definir un sistema coordenado convectivo de la forma

$$\{\varphi_{i\alpha}, t\} \equiv \{a_\alpha, a_3\} \quad \text{y} \quad \{\varphi_{i\alpha}^0, t^0\} \equiv \{a_\alpha^0, a_3^0\}$$

El gradiente de deformación relativo (para  $\xi = 0$ ) en  $x^0 = \varphi^0(\xi^1, \xi^2)$  es una aplicación lineal

$$\bar{\mathbf{F}} := \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}^{0\alpha} + \mathbf{t} \otimes \mathbf{a}^{03} \equiv \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}^{0i} \quad (1.6)$$

$$\bar{\mathbf{F}} = \nabla \Phi (\nabla \Phi_0)^{-1} \quad (1.7)$$

En la configuración presente podemos definir los tensores que definen la métrica del sistema:

a) 1ra forma fundamental

$$a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta \quad (1.8)$$

b) ángulo entre el campo director y la superficie media

$$\gamma_\alpha = \varphi'_{i\alpha} \cdot \mathbf{t} \quad (1.9)$$

c) pseudo 2da. forma fundamental

$$\kappa_{\alpha\beta} = \varphi'_{i\alpha} \cdot \mathbf{t}_{i\beta} \quad (1.10)$$

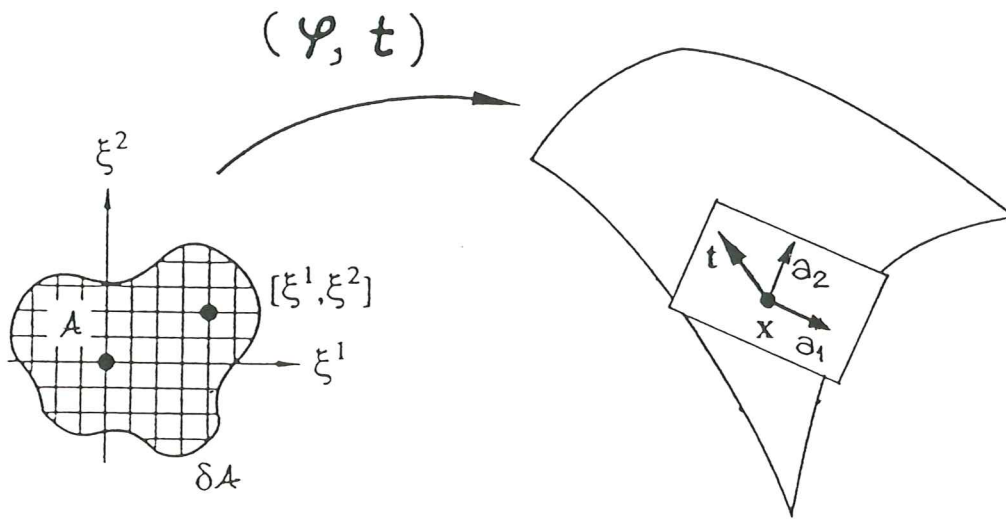


Figura 1 Ilustración de la geometría que define la cinemática del modelo de la lámina

Usando idénticas definiciones para la configuración de referencia  $S^0$  podemos definir medidas de deformación Lagrangianas generalizadas, que en forma matricial son

a) deformaciones de la superficie media

$$\varepsilon(\Phi) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_{11} - a_{11}^0 \\ a_{22} - a_{22}^0 \\ 2(a_{12} - a_{12}^0) \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

b) deformaciones de corte transversal

$$\delta(\Phi) = \begin{bmatrix} \gamma_1 - \gamma_1^0 \\ \gamma_2 - \gamma_2^0 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

c) cambios de curvatura de la superficie media

$$\chi(\Phi) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \kappa_{11} - \kappa_{11}^0 \\ \kappa_{22} - \kappa_{22}^0 \\ 2(\kappa_{12} - \kappa_{12}^0) \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

## 1.2 Variaciones admisibles

Sea

$$\mathcal{C} := \{\Phi := (\varphi, \mathbf{t}) : \mathcal{A} \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2\} \quad (1.14)$$

el espacio de transformaciones y  $\Phi \in \mathcal{C}$  la configuración presente. Supongamos además que  $\varepsilon \rightarrow \Phi_\varepsilon \in \mathcal{C}$  sea la curva de configuraciones con origen en  $\Phi$ , esto es  $\Phi_\varepsilon|_{\varepsilon=0} = \Phi$ . Por definición el campo tangente a una curva de este tipo en  $\varepsilon = 0$  se denomina una variación admisible. Así,

$$T_\Phi \mathcal{C} = \{\delta\Phi := (\delta\varphi, \delta\mathbf{t}) : \bar{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{R}^3 \times T_t S^2 / \delta\varphi|_{\delta_\varphi \mathcal{A}} = 0 \text{ y } \delta\mathbf{t}|_{\delta_t \mathcal{A}} = 0\} \quad (1.15)$$

donde

$$T_t S^2 := \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 / \mathbf{w} \cdot \mathbf{t} = 0\} \quad (1.16)$$

es el espacio tangente a  $S^2$ . Debido a esta última condición  $\delta\mathbf{t}$  puede escribirse como

$$\begin{matrix} \delta\mathbf{t} & = & \bar{\Lambda} & \delta\mathbf{T} \\ (3 \times 1) & & (3 \times 2) & (2 \times 1) \end{matrix} \quad (1.17)$$

Siendo  $\Lambda_{3 \times 3}$  la matriz ortogonal que transforma el vector  $\mathbf{e}_3$  del sistema coordenado global a la posición actual de  $\mathbf{t}$ , y  $\bar{\Lambda}_{3 \times 2}$  es las dos primeras columnas de  $\Lambda$ . Resulta de mucha utilidad definir

$$\delta\mathbf{t} = \delta\theta \times \mathbf{t} \quad (1.18)$$

cumplíendose

$$\delta\theta \cdot \mathbf{t} = 0 \quad (1.19)$$

### 1.3 Definición de esfuerzos

El problema tridimensional se reduce a uno bidimensional en la forma usual de la teoría de láminas, esto se logra integrando las tensiones en el espesor y definiendo esfuerzos resultantes a lo largo de las líneas coordenadas de la superficie media. Estos esfuerzos se pueden escribir en términos de medidas de tensión referidas a la configuración deformada o a la de referencia

$$\mathbf{n}^\alpha = \frac{1}{j} \int_{h^-}^{h^+} \sigma \mathbf{g}^\alpha j d\xi = \frac{1}{j} \int_{h^-}^{h^+} \mathbf{P} \mathbf{g}_0^\alpha j^0 d\xi \quad (1.20)$$

$$\mathbf{m}^\alpha = \mathbf{t} \times \frac{1}{j} \int_{h^-}^{h^+} \xi \sigma \mathbf{g}^\alpha j d\xi = \mathbf{t} \times \frac{1}{j} \int_{h^-}^{h^+} \xi \mathbf{P} \mathbf{g}_0^\alpha j^0 d\xi = \mathbf{t} \times \bar{\mathbf{m}}^\alpha \quad (1.21)$$

$$\mathbf{l} = \frac{1}{j} \int_{h^-}^{h^+} \sigma \mathbf{g}^3 j d\xi = \frac{1}{j} \int_{h^-}^{h^+} \mathbf{P} \mathbf{g}_0^3 j^0 d\xi \quad (1.22)$$

donde  $\sigma$  y  $\mathbf{P}$  son los tensores de tensiones de Cauchy y 1ero. de Piola-Kirchhoff respectivamente y  $\mathbf{g}^i = \nabla \Phi^{-T} \mathbf{e}^i$ . Por otra parte  $\mathbf{n}^\alpha$  y  $\mathbf{m}^\alpha$  se definen como los esfuerzos y momentos resultantes a lo largo de una línea con  $\xi^\alpha$  constante y  $\mathbf{l}$  es el esfuerzo resultante a través del espesor. Finalmente  $\bar{\mathbf{m}}^\alpha$  es una definición conveniente que denominaremos momento director. Expresando

$$\mathbf{t}_{i\alpha} = \lambda_\alpha^\mu \varphi_{i\mu} + \lambda_\alpha^3 \mathbf{t} \quad (1.23)$$

podemos definir los esfuerzos resultantes 'efectivos'

$$\bar{n}^{\beta\alpha} := n^{\beta\alpha} - \lambda_\mu^\beta \bar{m}^{\alpha\mu} \quad (1.24)$$

$$\bar{q}^\alpha := q^\alpha - \lambda_\mu^3 \bar{m}^{\alpha\mu} \quad (1.25)$$

### 1.4 Ecuaciones constitutivas locales

La potencia desarrollada por las tensiones en la teoría tridimensional se expresa en la forma



$$\begin{aligned}
\mathcal{W} &:= \int_{\mathcal{V}} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} d\mathcal{V} \\
&= \int_{\bar{\mathcal{A}}} [\mathbf{n}^\alpha \cdot \dot{\varphi}'_{\alpha} + \bar{\mathbf{m}}^\alpha \cdot \dot{\mathbf{t}}_{\alpha} + \mathbf{l} \cdot \dot{\mathbf{t}}] d\mu \\
&= \int_{\bar{\mathcal{A}}} \left[ \bar{n}^{\beta\alpha} \frac{1}{2} \dot{a}_{\beta\alpha} + \bar{q}^\alpha \dot{\gamma}_\alpha + \bar{m}^{\alpha\beta} \dot{\kappa}_{\beta\alpha} \right] d\mu \\
&= \int_{\bar{\mathcal{A}}} [\bar{\mathbf{n}} : L_u \varepsilon + \bar{\mathbf{q}} : L_u \delta + \bar{\mathbf{m}} : L_u \chi] d\mu
\end{aligned} \tag{1.26}$$

donde hemos introducido consecutivamente, la integración en el espesor de la lámina y con ella los esfuerzos resultantes, la definición de la métrica y los esfuerzos efectivos, y finalmente las derivadas respecto del tiempo de las medidas de deformación.

Definiendo una función de energía interna  $\psi$  y usando la desigualdad de Clausius-Duhem en la forma usual se obtiene

$$\bar{n}^{\beta\alpha} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{\beta\alpha}} \quad \bar{q}^\alpha = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \delta_\alpha} \quad \bar{m}^{\beta\alpha} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \chi_{\beta\alpha}} \tag{1.27}$$

$$\bar{\rho} = \frac{1}{j} \int_{h^-}^{h^+} \rho j d\xi \tag{1.28}$$

a partir de la cual queda claro el porque de la definición de los esfuerzos efectivos que resultan conjugados de las medidas de deformación Lagrangiana.

#### 1.4.1 Respuesta tensional hiperelástica

Por razones de simplicidad supondremos una respuesta hiperelástica lineal del material, de tal forma que las ecuaciones constitutivas resultan

$$\bar{J} \bar{n}^{\alpha\beta} = \frac{E h}{1 - \nu^2} H^{\alpha\beta\gamma\delta} (\varepsilon_{\gamma\delta} - \varepsilon_{\gamma\delta}^p) \tag{1.29.a}$$

$$\bar{J} \bar{q}^\alpha = G h \kappa a^{(0)\alpha\beta} (\delta_\beta - \delta_\beta^p) \tag{1.29.b}$$

$$\bar{J} \bar{m}^{\alpha\beta} = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} H^{\alpha\beta\gamma\delta} (\chi_{\gamma\delta} - \chi_{\gamma\delta}^p) \tag{1.29.c}$$

donde  $h = h^+ - h^-$  es el espesor de la lámina,  $E$  y  $G$  son los módulos elásticos longitudinal y de corte respectivamente,  $\nu$  es la relación de Poisson,  $\kappa = \frac{5}{6}$  y  $H^{\alpha\beta\gamma\delta}$  está dado por

$$H^{\alpha\beta\gamma\delta} = \nu a^{(0)\alpha\beta} a^{(0)\gamma\delta} + \frac{1}{2}(1 - \nu)[a^{(0)\alpha\gamma} a^{(0)\beta\delta} + a^{(0)\beta\gamma} a^{(0)\alpha\delta}] \quad (1.30)$$

En (1.29) hemos supuesto descomposición aditiva del tensor de deformaciones en una parte elástica (que denotaremos con un índice  $e$ ) y una parte plástica (índice  $p$ ).

Para el caso de un sistema cartesiano local el tensor métrico covariante en la geometría inicial  $a_{ij}^{(0)} = \varphi_{i\xi}^0 \cdot \varphi_{\xi j}^0$  es la identidad e igualmente  $a^{(0)\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}$  entonces el tensor de 4<sup>to</sup> orden  $H^{\alpha\beta\gamma\delta}$  resulta muy sencillo y permite escribir la expresión (1.29.a) matricialmente en la forma

$$\bar{J}\bar{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} \bar{n}^{11} \\ \bar{n}^{22} \\ \bar{n}^{12} \end{bmatrix} = \frac{Eh}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^e \\ \varepsilon_{22}^e \\ 2\varepsilon_{12}^e \end{bmatrix} = \mathbf{C}\varepsilon^e \quad (1.31)$$

#### 1.4.2 Condición de fluencia, regla de flujo y ley de endurecimiento

Se utiliza el modelo de plasticidad propuesto en la Ref.[5] que esta expresado en términos de los esfuerzos resultantes  $\mathbf{r}$ . El modelo es equivalente al de von-Mises (basado en la energía de corte), admite endurecimiento isotrópico y cinemático (ambos lineales) y la ley de flujo es asociada. La superficie de fluencia está formada por dos superficies suaves definidas por:

$$\Phi_{\mu}(\mathbf{r} - \mathbf{p}) = f_{\mu}(\mathbf{r} - \mathbf{p}) - \frac{\kappa^2(e^p)}{\kappa_0^2} \leq 0 \quad \mu = 1, 2 \quad (1.32)$$

donde  $f_{\mu}$  es la energía de distorsión (por unidad de superficie de la lámina) normalizada respecto a  $\frac{2}{3}\kappa_0^2 h$  y puede escribirse como

$$f_{\mu} = (\mathbf{r} - \mathbf{p})^T \mathbf{A}_{\mu} (\mathbf{r} - \mathbf{p}) \quad (1.33)$$

siendo  $\kappa$  la tensión de fluencia uniaxial,  $e^p$  la deformación plástica efectiva,  $\mathbf{p}$  la tensión de retorno y

$$\mathbf{r} = \bar{J}[\bar{n}^{11}, \bar{n}^{22}, \bar{n}^{12}, \bar{m}^{11}, \bar{m}^{22}, \bar{m}^{12}, \bar{q}^1, \bar{q}^2]$$

$$\mathbf{A}_{\mu} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_0^2} \mathbf{P} & \frac{\text{sign}(\mu)}{2\sqrt{3}n_0 m_0} \mathbf{P} & 0 \\ \frac{\text{sign}(\mu)}{2\sqrt{3}n_0 m_0} \mathbf{P} & \frac{1}{m_0^2} \mathbf{P} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{q_0^2} \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

donde

$$\text{sign}(\mu) = \begin{cases} 1 & \mu = 1 \\ -1 & \mu = 2 \end{cases} \quad n_0 = \kappa_0 h \quad m_0 = \frac{\kappa_0 h^2}{4} \quad q_0 = \frac{\kappa_0 h}{\sqrt{3}} \quad (1.35)$$

Para la integración de la ecuación constitutiva se utiliza el algoritmo de retorno radial que en el caso más general conduce a un sistema no lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas que debe resolverse en forma iterativa. Los detalles del mismo pueden verse en la Ref.[5]

## 2- FORMULACIÓN UTILIZADA

Describiremos brevemente las formulaciones variacionales utilizadas por los diferentes elementos que se describen en los apartados siguientes. Resulta necesario distinguir las diferentes contribuciones a la energía interna y a las ecuaciones de equilibrio. Como es usual analizaremos separadamente las contribuciones provenientes de los esfuerzos de membrana, de flexión y la debida al corte transversal.

Por otro lado la implementación de las diferentes formulaciones dependen de que se utilice un sistema cartesiano o uno convectivo para la definición de las deformaciones y esfuerzos. El primero es de uso directo en el caso de elementos de geometría inicial plana, en tanto que el segundo resulta de más sencilla aplicación en el caso de elementos con curvatura inicial.

Supondremos una aproximación de elementos finitos estandar de la forma

$$\varphi = \varphi^0 + \mathbf{u} = \sum_{I=1}^{NN} N^I ((\varphi^0)^I + \mathbf{u}^I) \quad (2.1)$$

$$\tilde{\mathbf{t}}^{(0)} = \sum_{I=1}^{NN} N^I \mathbf{t}^{(0)I} \quad \mathbf{t}^{(0)} = \frac{\tilde{\mathbf{t}}^{(0)}}{\|\tilde{\mathbf{t}}^{(0)}\|} \quad (2.2)$$

$$\tilde{\mathbf{t}} = \sum_{I=1}^{NN} N^I \mathbf{t}^I \quad \mathbf{t} = \frac{\tilde{\mathbf{t}}}{\|\tilde{\mathbf{t}}\|} \quad (2.3)$$

y

$$\Delta \mathbf{T} = \sum_{I=1}^{NN} N^I \Delta \mathbf{T}^I \quad (2.4)$$

donde  $N^I$  son las funciones de forma típicas de elementos bidimensionales de clase  $C_0$ .<sup>[10]</sup>

## 2.1 Comportamiento membranar en coordenadas cartesianas

Se han utilizado 2 modelos para representar el comportamiento membranar: un modelo en desplazamientos estandar y un modelo híbrido-mixto (desarrollado en principio para un material lineal elástico)

### 2.1.1 Modelo en desplazamientos

El modelo en desplazamientos es estandar. Las deformaciones membranarales pueden escribirse agrupadas en un vector de la forma

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varphi}'_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}'_1 - \boldsymbol{\varphi}^0_{i_1} \cdot \boldsymbol{\varphi}^0_{i_1}) \\ \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varphi}'_2 \cdot \boldsymbol{\varphi}'_2 - \boldsymbol{\varphi}^0_{i_2} \cdot \boldsymbol{\varphi}^0_{i_2}) \\ (\boldsymbol{\varphi}'_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}'_2 - \boldsymbol{\varphi}^0_{i_1} \cdot \boldsymbol{\varphi}^0_{i_2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varphi}'_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}'_1 - 1) \\ \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varphi}'_2 \cdot \boldsymbol{\varphi}'_2 - 1) \\ \boldsymbol{\varphi}'_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}'_2 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

La contribución al principio de trabajos virtuales asociada a la parte membranar se escribe

$$\int_{\mathcal{A}} \bar{\mathbf{n}}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} dA - \int_{\mathcal{A}} \mathbf{q} \delta \mathbf{u} dA \quad (2.6)$$

Reescribiendo esta expresión en la forma habitual del método de elementos finitos, la contribución de los términos de membrana a las ecuaciones de equilibrio (fuerzas residuales) se expresa

$$\mathbf{F}_m^I = \int_{\mathcal{A}} (\mathbf{B}_m^I)^T \bar{\mathbf{n}} dA - \mathbf{f}^I \quad (2.7)$$

donde

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_m \delta \mathbf{u} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{B}_m^I = \begin{bmatrix} N_{i_1}^I \boldsymbol{\varphi}'_1 \\ N_{i_2}^I \boldsymbol{\varphi}'_2 \\ N_{i_1}^I \boldsymbol{\varphi}'_2 + N_{i_2}^I \boldsymbol{\varphi}'_1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{f}^I = \int_{\mathcal{A}} N^I \mathbf{q} dA \quad (2.10)$$

La matriz de rigidez de membrana resulta, por tanto  
-parte material

$$\mathbf{K}_{m_M}^{IJ} = \int_{\mathcal{A}} (\mathbf{B}_m^I)^T \mathbf{C}_{ep} \mathbf{B}_m^I dA \quad (2.11)$$

donde  $\mathbf{C}_{ep}$  es el módulo tangente consistente con el algoritmo de integración de la relación constitutiva<sup>[5]</sup> (Notar que en el caso elastoplástico se acoplan las contribuciones de todos los esfuerzos en la matriz  $\mathbf{C}_{ep}$  y en la expresión anterior deben agregarse los términos asociados a corte transversal y momentos)

-parte geométrica

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_{m_G} \Delta \mathbf{u} = \int_{\mathcal{A}} \Delta (\mathbf{B}_m^T \delta \mathbf{u}) \bar{\mathbf{n}} dA \quad (2.12)$$

$$\delta \mathbf{u}^I \mathbf{K}_{m_G}^{IJ} \Delta \mathbf{u}^J = \delta \mathbf{u}^I \int_{\mathcal{A}} [N_{i_1}^I, N_{i_2}^I] \cdot \begin{bmatrix} n^{11} & n^{12} \\ n^{12} & n^{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_{i_1}^J \\ N_{i_2}^J \end{bmatrix} dA \mathbf{1}_3 \Delta \mathbf{u}^J \quad (2.13) OD$$

### 2.1.2 Formulación mixta

La energía potencial debida a esfuerzos membranales puede escribirse (Hellinger-Reissner) para un material elástico

$$\Pi_m = \int_{\mathcal{A}} \left[ -\frac{1}{2} \bar{\mathbf{n}}^T \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{n}} + \bar{\mathbf{n}}^T \boldsymbol{\varepsilon} \right] dA - \int_{\mathcal{A}} q_i u_i dA \quad (2.14)$$

con

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{Eh} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\bar{\mathbf{n}} = \mathbf{P} \boldsymbol{\beta} \quad (2.16)$$

donde  $\mathbf{P}$  son expresiones polinómicas, como veremos luego, y  $\boldsymbol{\beta}$  son coeficientes ligados al valor de los esfuerzos

Reemplazando en (2.14) se obtiene la energía de membrana:

$$\Pi_m = \int_{\mathcal{A}} \left[ -\frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{P}^T(x_1, x_2) \mathbf{C}^{-1} \mathbf{P}(x_1, x_2) \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{P}(x_1, x_2) \boldsymbol{\varepsilon} \right] dA - \int_{\mathcal{A}} q_i u_i dA \quad (2.17)$$

tomando la variación respecto de  $\beta$  y de  $u$  (la primera igualada a 0 ya que los  $\beta_i$  son variables definidas localmente y se eliminan a nivel elemental) se obtiene

$$\begin{aligned}\delta\beta\Pi_m &= \delta\beta^T \left[ \int_{\mathcal{A}} -\mathbf{P}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{P} \, dA \, \beta + \int_{\mathcal{A}} \mathbf{P}^T \varepsilon \, dA \right] \\ &= \delta\beta^T \left[ -\mathbf{H}\beta + \int_{\mathcal{A}} \mathbf{P}^T \varepsilon \, dA \right] = 0\end{aligned}\quad (2.18)$$

$$\begin{aligned}\delta u\Pi_m &= \delta u^T \left[ \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B}_m^T \mathbf{P} \, dA \, \beta - \mathbf{f} \right] \\ &= \delta u^T \left[ \mathbf{G}^T \beta - \mathbf{f} \right]\end{aligned}\quad (2.19)$$

con

$$\mathbf{H} = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{P}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{P} \, dA \quad (2.20)$$

$$\mathbf{G} = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{P}^T \mathbf{B}_m \, dA \quad (2.21)$$

Los pasos necesarios para la evaluación de las fuerzas residuales son:

- a)-Evaluamos la deformaciones  $\varepsilon$  ( $\Delta\varepsilon$ ) a partir de  $u$  usando (2.5)
- b)-a partir de (2.18) calculamos

$$\beta = \mathbf{H}^{-1} \int_{\mathcal{A}} \mathbf{P}^T \varepsilon \, dA \quad (\Delta\beta = \mathbf{H}^{-1} \int_{\mathcal{A}} \mathbf{P}^T \Delta\varepsilon \, dA) \quad (2.22)$$

$$(\beta^{k+1} = \beta^k + \Delta\beta)$$

- c)-evaluamos

$$\mathbf{G}^T = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B}_m^T \mathbf{P} \, dA \quad (2.23)$$

- d)-Finalmente el vector de fuerzas nodales equivalentes viene dado por

$$\mathbf{F}_m = \mathbf{G}^T \beta - \mathbf{f} \quad (2.24)$$

En tanto que para la evaluación de las contribuciones a matriz de rigidez tenemos:

-parte material

$$\mathbf{K}_{mM} = \mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-1} \int_{\mathcal{A}} \mathbf{P}^T \mathbf{B}_m dA = \mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \quad (2.25)$$

-la parte geométrica es idéntica al caso anterior, ecuación (2.13).

## 2.2 Comportamiento membranial en coordenadas convectivas

En muchos casos resulta más sencillo trabajar en un sistema de coordenadas naturales no cartesiano  $\xi \eta$  (o  $\xi^1, \xi^2$ ) (identificaremos con ( )' las magnitudes expresadas en el sistema natural de coordenadas). Las deformaciones en el sistema convectivo se expresan como

$$\varepsilon'(u) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\xi\xi} \\ \varepsilon_{\eta\eta} \\ 2\varepsilon_{\xi\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\varphi'_{i\xi} \cdot \varphi'_{i\xi} - \varphi^0_{i\xi} \cdot \varphi^0_{i\xi}) \\ \frac{1}{2}(\varphi'_{i\eta} \cdot \varphi'_{i\eta} - \varphi^0_{i\eta} \cdot \varphi^0_{i\eta}) \\ (\varphi'_{i\xi} \cdot \varphi'_{i\eta} - \varphi^0_{i\xi} \cdot \varphi^0_{i\eta}) \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

que se relaciona con las deformaciones en un sistema cartesiano local (elegido arbitrariamente) mediante

$$\varepsilon = \mathbf{J}^{-1} \varepsilon' \mathbf{J}^{-T} \quad \text{o} \quad \varepsilon' = \mathbf{J} \varepsilon \mathbf{J}^T \quad (2.27)$$

donde  $\mathbf{J}$  es la matriz jacobiana de la transformación en cada punto.

$$J_{\alpha a} = \frac{\partial x_a}{\partial \xi_\alpha} \quad \text{y} \quad J_{a\alpha}^{-1} = \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_a} \quad (2.28)$$

las medidas de tensión se obtienen a partir de la condición de que son conjugadas de las deformaciones en la expresión de la potencia  $\tilde{\mathbf{n}}' : \varepsilon' = \tilde{\mathbf{n}} : \varepsilon$

$$\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{J}^T \tilde{\mathbf{n}}' \mathbf{J} \quad \text{o} \quad \tilde{\mathbf{n}}' = \mathbf{J}^{-T} \tilde{\mathbf{n}} \mathbf{J}^{-1} \quad (2.29)$$

A partir de la expresión (1.29.a) y de (1.30) puede escribirse la relación constitutiva inversa en coordenadas convectivas

$$\mathbf{C}'^{-1} = \frac{1}{Eh} \begin{bmatrix} (a_{11}^{(0)})^2 & -\nu a_{11}^{(0)} a_{22}^{(0)} + (1+\nu) (a_{12}^{(0)})^2 & 2a_{11}^{(0)} a_{12}^{(0)} \\ & (a_{22}^{(0)})^2 & 2a_{22}^{(0)} a_{12}^{(0)} \\ & \text{Simétrica} & 2[(1+\nu)a_{11}^{(0)} a_{22}^{(0)} \\ & & + (1-\nu)(a_{12}^{(0)})^2] \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

En el caso de no linealidad en el comportamiento material (plasticidad) en cada punto de integración es necesario transformar los esfuerzos a una base cartesiana para comprobar las condiciones (1.32) por lo que no resulta ventajoso trabajar en el sistema convectivo y conviene definir en cada punto un sistema cartesiano local desde el inicio del cálculo y medir deformaciones y esfuerzos directamente en él.

### 2.2.1 Formulación exclusivamente en desplazamientos

La energía interna de membrana se escribe

$$\Pi_m = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{A}} \tilde{\mathbf{n}}^T \boldsymbol{\varepsilon} dA = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{A}} \tilde{\mathbf{n}}'^T \boldsymbol{\varepsilon}' dA \quad (2.31)$$

La contribución de los términos de membrana a la ecuación de equilibrio global resulta de tomar la primera variación de (2.31)

$$\delta \Pi_m = \int_{\mathcal{A}} \tilde{\mathbf{n}}'^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}' dA \quad (2.32)$$

$$\delta \Pi_m = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B}'_m{}^T \tilde{\mathbf{n}}' dA \quad (2.33)$$

con

$$\mathbf{B}'_m{}^I = \begin{bmatrix} N_{i\xi}^I \varphi'_{i\xi} \\ N_{i\eta}^I \varphi'_{i\eta} \\ N_{i\xi}^I \varphi'_{i\eta} + N_{i\eta}^I \varphi'_{i\xi} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$\tilde{\mathbf{n}}' = \mathbf{C}' \boldsymbol{\varepsilon}' \quad (2.35)$$

La contribución de la parte membranar a la matriz de rigidez resulta



-parte material

$$\mathbf{K}_{mM}^{IJ} = \int_{\mathcal{A}} (\mathbf{B}'_m)^T \mathbf{C}' \mathbf{B}'_m^J dA \quad (2.36)$$

-parte geométrica

$$\mathbf{K}_{mG}^{IJ} = \int_{\mathcal{A}} [N'_{\xi}, N'_{\eta}] \cdot \begin{bmatrix} n^{\xi\xi} & n^{\xi\eta} \\ n^{\xi\eta} & n^{\eta\eta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N'_{\xi} \\ N'_{\eta} \end{bmatrix} dA \quad (2.37)$$

Es muy conocido que los elementos isoparamétricos de geometría inicial curva bloquean membranalmente cuando se formulan directamente en desplazamientos; para solucionar este problema se han propuesto dos posibilidades: (i) formulación en deformaciones impuestas (ii) formulación en esfuerzos impuestos.

### 2.2.2 Formulación en deformaciones impuestas

Se propone una variación lineal en ambas coordenadas naturales para las 3 componentes del tensor de deformación en el plano ( $\varepsilon_{\xi\xi}$ ,  $\varepsilon_{\eta\eta}$ ,  $2\varepsilon_{\xi\eta}$ )

$$\bar{\varepsilon}'(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\xi\xi} \\ \varepsilon_{\eta\eta} \\ 2\varepsilon_{\xi\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & & & \\ & & & 1 & \xi & \eta \\ & & & & & & 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}(\xi, \eta) \boldsymbol{\alpha} \quad (2.38)$$

donde los coeficientes  $\alpha_i$  se eliminan evaluando componentes del tensor de deformación en puntos elegidos.

$$\hat{\varepsilon} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\alpha} \quad (2.39)$$

de donde

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{Q}^{-1}\hat{\varepsilon} \quad (2.40)$$

y finalmente

$$\bar{\varepsilon}' = \mathbf{A}(\xi, \eta)\mathbf{Q}^{-1}\hat{\varepsilon} = \mathbf{P}(\xi, \eta)\hat{\varepsilon} \quad (2.41)$$

Para un material elástico lineal la ecuación constitutiva, que relaciona estas deformaciones con sus esfuerzos asociados, se escribe

$$\bar{\mathbf{n}}' = \mathbf{C}' \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \quad (2.42)$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} \Pi_m &= \frac{1}{2} \int \bar{\mathbf{n}}'^T \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' dA = \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \int \mathbf{P}^T(\xi, \eta) \mathbf{C} \mathbf{P}(\xi, \eta) dA \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ &= \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{H} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (2.43)$$

La contribución a la ecuación de equilibrio es

$$\delta \Pi_m = \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{H} \delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.44)$$

llamando

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{H} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.45)$$

con

$$\delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sum_{I=1}^{NN} \bar{\mathbf{B}}^I \delta \mathbf{U}^I = \bar{\mathbf{B}} \delta \mathbf{U} \quad (2.46)$$

resulta

$$\delta \Pi_m = \boldsymbol{\beta}^T \bar{\mathbf{B}} \delta \mathbf{u} \quad (2.47)$$

La segunda variación proporciona la matriz de rigidez tangente de membrana

$$\Delta(\delta \Pi_m) = \Delta(\boldsymbol{\beta}^T) \bar{\mathbf{B}} \delta \mathbf{u} + \boldsymbol{\beta}^T \Delta(\bar{\mathbf{B}} \delta \mathbf{u}) \quad (2.48)$$

el primer término (parte material) contribuye con

$$\Delta \boldsymbol{\beta} = \mathbf{H} \Delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{H} \bar{\mathbf{B}} \Delta \mathbf{u} \quad (2.49)$$

$$\mathbf{K}_{mM}^{IJ} = (\bar{\mathbf{B}}^I)^T \mathbf{H} \bar{\mathbf{B}}^J \quad (2.50)$$

el segundo término (rigidez geométrica) se puede escribir

$$\mathbf{K}_{mG}^{IJ} = \sum_{M=1}^3 [N_{i_1}^{IM} N_{i_2}^{IM}] \cdot \begin{bmatrix} \bar{n}^{11M} & n^{12M} \\ n^{12M} & n^{22M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{i_1}^{JM} \\ N_{i_2}^{JM} \end{bmatrix} \mathbf{1}_3 \quad (2.51)$$

donde  $M = 1, 3$  son los puntos de evaluación de las deformaciones.

### 2.2.3 Formulación en esfuerzos impuestos

Es completamente similar al elemento plano, pero ahora los polinomios interpolantes se expresan en coordenadas naturales

Usando un principio variacional de Hellinger-Reissner, la energía membranal puede escribirse

$$\Pi_m = \int \left[ -\frac{1}{2} \bar{\mathbf{n}}'^T \mathbf{C}'^{-1} \bar{\mathbf{n}}' + \bar{\mathbf{n}}'^T \boldsymbol{\varepsilon}' \right] dA \quad (2.52)$$

llamando

$$\mathbf{H} = \int \mathbf{P}^T \mathbf{C}'^{-1} \mathbf{P} dA \quad (2.53)$$

$$\delta \varepsilon = \mathbf{B}'_m \delta \mathbf{u} \quad (2.54)$$

$$\mathbf{B}'_m = \begin{bmatrix} N_{i_\xi}^I \varphi'_{i_\xi} \\ N_{i_\eta}^I \varphi'_{i_\eta} \\ N_{i_\xi}^I \varphi'_{i_\eta} + N_{i_\eta}^I \varphi'_{i_\xi} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

$$\mathbf{G} = \int \mathbf{P}^T \mathbf{B}'_m dA \quad (2.56)$$

resulta

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{H}^{-1} \int \mathbf{P}^T \boldsymbol{\varepsilon}' dA \quad (2.57)$$

y la contribución a la ecuación de equilibrio es

$$\delta \Pi_m = \mathbf{G}^T \boldsymbol{\beta} \quad (2.58)$$

todo esto en forma idéntica al elemento plano; la evaluación de la matriz de rigidez también se realiza en forma similar al elemento plano. Resulta importante hacer notar que para la evaluación de la matriz  $\mathbf{H}$  la matriz  $\mathbf{C}^{-1}$  se evalúa sólo una vez en el centro del elemento  $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ .

### 2.3 Comportamiento flexional

El comportamiento flexional está formulado exclusivamente en desplazamientos en la forma estandar. Para el caso de coordenadas cartesianas la contribución de los momentos a las ecuaciones de equilibrio es

$$\int_A \bar{\mathbf{m}}^T \delta \chi \, dA \quad (2.59)$$

Explicitando la (1.10) y expresándola en forma de vector

$$\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}'_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}'_1 \\ \mathbf{t}'_2 \cdot \boldsymbol{\varphi}'_2 \\ (\mathbf{t}'_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}'_2 + \mathbf{t}'_2 \cdot \boldsymbol{\varphi}'_1) \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

$$\bar{\mathbf{m}} = \mathbf{D} \chi^e \quad \mathbf{D} = \frac{h^2}{12} \mathbf{C} \quad (2.61)$$

La contribución a las ecuaciones de equilibrio se escribe

$$\delta \mathbf{U}^T \int_A \mathbf{B}_b^T \bar{\mathbf{m}} \, dA \quad (2.62)$$

donde

$$\mathbf{B}_b^I \delta \mathbf{U}^I = \begin{bmatrix} \mathbf{t}'_1 N_{i_1}^I \\ \mathbf{t}'_2 N_{i_2}^I \\ \mathbf{t}'_2 N_{i_1}^I + \mathbf{t}'_1 N_{i_2}^I \end{bmatrix} \delta \mathbf{u}^I + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}'_1 N_{i_1}^I \\ \boldsymbol{\varphi}'_2 N_{i_2}^I \\ \boldsymbol{\varphi}'_2 N_{i_2}^I + \boldsymbol{\varphi}'_1 N_{i_1}^I \end{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\Lambda}}^I \delta \mathbf{T}^I \quad (2.63)$$

Las contribuciones de la parte flexional a la matriz de rigidez resultan -parte material

$$\mathbf{K}_{bM} = \int_A \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_{ep} \mathbf{B}_b \, dA \quad (2.64)$$

Siendo  $\mathbf{D}_{ep}$  el módulo tangente elastoplástico que, como se indicara antes, acopla todos los esfuerzos.

-parte geométrica

$$\delta U^T \mathbf{K}_{b_G} \Delta U = \int_{\mathcal{A}} \Delta(\mathbf{B}_b \delta U) \bar{\mathbf{m}} dA \quad (2.65)$$

$$\mathbf{K}_{b_1}^{IJ} = [N_{1_1}^I, N_{1_2}^I] \cdot \begin{bmatrix} m^{11} & m^{12} \\ m^{12} & m^{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_{1_1}^J \\ N_{1_2}^J \end{bmatrix} \quad (2.66.a)$$

$$\mathbf{K}_{b_2}^{IJ} = \bar{\mathbf{m}} \cdot \begin{bmatrix} N_1^I t^J \cdot \varphi_{1_1} \\ N_2^I t^J \cdot \varphi_{1_2} \\ N_1^I t^J \cdot \varphi_{1_2} + N_2^I t^J \cdot \varphi_{1_1} \end{bmatrix} \delta^{IJ} \cdot \mathbf{1}_2 \quad (2.66.b)$$

$$\mathbf{K}_{b_G}^{IJ} = \int_{\mathcal{A}} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{K}_{b_1}^{IJ} \\ \mathbf{K}_{b_1}^{JI} & \mathbf{K}_{b_2}^{IJ} \end{bmatrix} dA \quad (2.67)$$

En el caso de coordenadas convectivas, el tratamiento es completamente similar. Los cambios a introducir son los siguientes:

-las derivadas en vez de realizarse respecto a las coordenadas cartesianas locales  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$  se realizan respecto a las coordenadas naturales  $\xi$  y  $\eta$

-se remplace la matriz de elasticidad  $\mathbf{C}$  por la  $\mathbf{C}'$  definida en (2.30).

## 2.4 Tratamiento del corte transversal

Para el tratamiento del corte transversal se usa un método de deformaciones impuestas, dicho método se basa en la utilización de un funcional del tipo Hu-Washizu. La metodología utilizada sigue los razonamientos del procedimiento general descrito en la Ref.[7].

### 2.4.1 Elementos triangulares (cuadráticos)

Las deformaciones se expresan en coordenadas naturales y se interpolan bilinealmente en coordenadas naturales en el elemento.

$$\boldsymbol{\gamma}' = \begin{bmatrix} \gamma_\xi \\ \gamma_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_6 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha} \quad (2.68)$$

Interesa relacionar los coeficientes de  $\alpha_i$  con deformaciones de corte en los lados del triángulo. Exigiremos que la deformación de corte tangente al lado varíe linealmente a



$$\bar{\gamma}' = \begin{bmatrix} \mathbf{J}^1 & & & & & \\ & \mathbf{J}^2 & & & & \\ & & \mathbf{J}^3 & & & \\ & & & \mathbf{J}^4 & & \\ & & & & \mathbf{J}^5 & \\ & & & & & \mathbf{J}^6 \end{bmatrix} \bar{\gamma} = \mathbf{Z} \bar{\gamma} \quad (2.76)$$

sin embargo esto último no resulta necesario ya que es más sencillo evaluar en los puntos de muestreo directamente las deformaciones en el sistema natural.

La energía por corte transversal puede escribirse

$$\Pi_s = \int_{\mathcal{A}} \frac{1}{2} \gamma^T \mathbf{D}_s \gamma dA \quad (2.77)$$

donde a partir de (1.29.b) suponemos la siguiente relación constitutiva que relaciona las deformaciones de corte en el sistema cartesiano con los esfuerzos de corte transversal  $\bar{q}$

$$\mathbf{D}_s = \kappa G h \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

luego

$$\bar{q} = \mathbf{D}_s \gamma \quad (2.79)$$

Reemplazando (2.75) en (2.77) tenemos

$$\begin{aligned} \Pi_s &= \int_{\mathcal{A}} \frac{1}{2} \bar{\gamma}'^T \mathbf{T}^T \mathbf{P}^{-T} \mathbf{A}^T \mathbf{J}^{-T} \mathbf{D}_s \mathbf{J}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{T} \bar{\gamma}' dA \\ &= \frac{1}{2} \bar{\gamma}'^T \left[ \mathbf{T}^T \mathbf{P}^{-T} \int_{\mathcal{A}} \mathbf{A}^T \mathbf{J}^{-T} \mathbf{D}_s \mathbf{J}^{-1} \mathbf{A} dA \mathbf{P}^{-1} \mathbf{T} \right] \bar{\gamma}' \\ &= \frac{1}{2} \bar{\gamma}'^T \bar{\mathbf{D}}_s \bar{\gamma}' \end{aligned} \quad (2.80)$$

En el caso de elementos planos y si consideramos linealidad material  $\bar{\mathbf{D}}_s$  puede integrarse en forma explícita dado que el jacobiano es constante (para elementos inicialmente curvos es necesario integrar numericamente). Resulta entonces

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \bar{q}^T \bar{\gamma}' \quad (2.81)$$

con

$$\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{D}}_s \bar{\boldsymbol{\gamma}}' \quad (2.82)$$

De (1.9) y (1.12) las deformaciones de corte son

$$\boldsymbol{\gamma}' = \begin{bmatrix} \gamma_\xi \\ \gamma_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\varphi}'_{i\xi} - \mathbf{t}^0 \cdot \boldsymbol{\varphi}^0_{i\xi} \\ \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\varphi}'_{i\eta} - \mathbf{t}^0 \cdot \boldsymbol{\varphi}^0_{i\eta} \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

La contribución a las fuerzas internas ( $\mathbf{F}_s$ ) se obtiene al tomar la primera variación de (2.81)

$$\delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}_s = \delta(\bar{\boldsymbol{\gamma}}')^T \bar{\mathbf{q}} \quad (2.84)$$

$$\delta \bar{\boldsymbol{\gamma}}' = \bar{\mathbf{B}}_s \delta \mathbf{U} \quad (2.85)$$

dada la forma de la matriz  $\mathbf{T}$  la matriz  $\bar{\mathbf{D}}_s$  resulta con 4 filas nulas (y sus correspondientes columnas) por lo que puede reducirse a una matriz de  $8 \times 8$ . Por esta razón interesan sólo 8 de los valores de  $\bar{\boldsymbol{\gamma}}'$  y en consecuencia  $\bar{\mathbf{B}}_s$  también tendrá 8 filas.

$$\bar{\mathbf{B}}_s^T = [\mathbf{B}_{s\xi}^1 \ \mathbf{B}_{s\xi}^2 \ \mathbf{B}_{s\xi}^3 \ \mathbf{B}_{s\eta}^3 \ \mathbf{B}_{s\xi}^4 \ \mathbf{B}_{s\eta}^4 \ \mathbf{B}_{s\eta}^5 \ \mathbf{B}_{s\eta}^6] \quad (2.86)$$

$$\mathbf{B}_{s\xi}^I \delta \mathbf{U}^I = \left[ N_{i\xi}^I \mathbf{t} \ , \ N^I \boldsymbol{\varphi}'_{i\xi} \bar{\boldsymbol{\Lambda}}^I \right] \cdot \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}^I \\ \delta \mathbf{T}^I \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

$$\mathbf{B}_{s\eta}^I \delta \mathbf{U}^I = \left[ N_{i\eta}^I \mathbf{t} \ , \ N^I \boldsymbol{\varphi}'_{i\eta} \bar{\boldsymbol{\Lambda}}^I \right] \cdot \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}^I \\ \delta \mathbf{T}^I \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

Las contribuciones del corte transversal a la matriz de rigidez son:

-Parte material

$$\mathbf{K}_s = \bar{\mathbf{B}}_s^T \bar{\mathbf{D}}_s \bar{\mathbf{B}}_s \quad (2.89)$$

-Parte geométrica



$$\begin{aligned} \Delta(\delta\gamma_\alpha) &= \sum_{I=1}^N \sum_{J=1}^N (\delta u^I N_{\alpha}^I N^J \bar{\Lambda}^J \Delta \mathbf{T}^J + \delta \mathbf{T}^I \bar{\Lambda}^I N^I N_{\alpha}^J \Delta u^J) \\ &- \varphi'_{\alpha} \sum_{I=1}^N \delta \mathbf{T}^I N^I \mathbf{t}^I \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{T}^I \end{aligned} \quad (2.90)$$

$$\delta \mathbf{U}^T \mathbf{K}_G \Delta \mathbf{U} = \Delta(\delta\gamma_\alpha) \bar{q}_\alpha \quad (2.91)$$

Para el caso de elementos triangulares lineales o cuadráticos incompletos, se considera un valor de la deformación tangente al lado constante en cada lado, dicho valor se toma como el promedio de los valores usados para muestreo. Bajo esta condición algunas operaciones pueden realizarse en forma explícita como veremos en detalle al discutir los distintos elementos.

#### 2.4.2 Elementos cuadriláteros (bilineales)

Para evitar el bloqueo por cortante se trabaja con deformaciones de corte impuestas al igual que en los elementos triangulares. La formulación sigue los razonamientos del subapartado anterior (2.4.1) y puede encontrarse en [3,7]. En este caso las deformaciones de corte tangentes al lado, que coinciden con una coordenada local, se suponen constantes en el lado, lo que implica a su vez una variación lineal en la otra coordenada natural. Se utilizan entonces 4 puntos de muestreo que se eligen en la mitad de cada lado. Esto puede resumirse de la forma:

$$\boldsymbol{\gamma}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) & \frac{1}{2}(1-\eta) & \frac{1}{2}(1+\xi) & \frac{1}{2}(1+\eta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{\eta}^A \\ \gamma_{\xi}^B \\ \gamma_{\eta}^C \\ \gamma_{\xi}^D \end{bmatrix} = \mathbf{P} \bar{\boldsymbol{\gamma}}' \quad (2.92)$$

donde  $(\xi, \eta)$  son las coordenadas locales del elemento cuadrilátero

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{J}^{-1} \boldsymbol{\gamma}' = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{P} \bar{\boldsymbol{\gamma}}' \quad (2.93)$$

sustituyendo en (2.77) e integrando resulta

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\gamma}}'^T \int \mathbf{P}^T \mathbf{J}^{-T} \mathbf{D}_s \mathbf{J}^{-1} \mathbf{P} dA \bar{\boldsymbol{\gamma}}' = \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\gamma}}'^T \bar{\mathbf{D}}_s \bar{\boldsymbol{\gamma}}' \quad (2.94)$$

usando (2.81)-(2.85), (2.87)-(2.91) y en lugar de (2.86),

$$\bar{\mathbf{B}}_s^T = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{s\eta}^A & \mathbf{B}_{s\xi}^B & \mathbf{B}_{s\eta}^C & \mathbf{B}_{s\xi}^D \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

podemos evaluar las contribuciones del corte transversal a las ecuaciones de equilibrio y a la matriz de rigidez.

En el caso de procesos elastoplásticos, en vez de plantear el principio de mínima energía potencial total, se parte directamente del principio de trabajos virtuales, en tal circunstancia no resulta de interés el uso de la matriz  $\bar{\mathbf{D}}_s$  para el cálculo de  $\bar{\mathbf{q}}$ . El vector  $\bar{\mathbf{q}}$  se calcula a partir de los valores de los esfuerzos de corte transversal en los puntos de integración (que satisfacen el criterio de fluencia) mediante la expresión

$$\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{T}^T \mathbf{P}^{-T} \int_{\mathcal{A}} \mathbf{A}^T \mathbf{J}^{-T} \mathbf{q} dA \quad (2.96)$$

### 3- PROCESO DE SOLUCIÓN

En el apartado anterior se han obtenido las diferentes contribuciones a las ecuaciones de equilibrio del sistema utilizando ya sea el principio de mínima energía potencial total o el principio de trabajos virtuales, que resulta mas conveniente en el caso de materiales elastoplásticos.

Sumando las diferentes contribuciones (membrana, flexión y corte) sobre toda la malla de elementos finitos se llega a un sistema de ecuaciones no lineales con los desplazamientos (y rotaciones) nodales como incógnitas. Una vez establecidas las condiciones esenciales de contorno (desplazamientos prescriptos) el sistema puede escribirse como

$$\mathbf{g}(\mathbf{U}) - \mathbf{f} = 0 \quad (3.1)$$

siendo  $\mathbf{g}(\mathbf{U})$  el vector de fuerzas internas nodales equivalentes, que genericamente se escribe como

$$\mathbf{g}(\mathbf{U}) = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dA \quad (3.2)$$

Normalmente resulta de interés evaluar el comportamiento del sistema estructural bajo valores crecientes de las sollicitaciones (cargas o bien desplazamientos conocidos). Para ello a partir de un punto de equilibrio conocido (en general la estructura descargada) se procede a la solución del sistema de ecuaciones para diferentes estados de sollicitación que quedan definidos por el vector  $\mathbf{f}$  función generalmente lineal de un factor de carga o parámetro de control  $\lambda$ .

La solución de esta secuencia se realiza utilizando el método de Newton-Raphson, para lo cual resulta necesario derivar las ecuaciones de equilibrio a resolver respecto a las

incógnitas del problema ( $\mathbf{U}$ ). Usualmente se denomina matriz de rigidez tangente a esta derivada, la que puede obtenerse sumando las distintas contribuciones de las matrices elementales de rigidez descriptas en el apartado anterior.

$$\frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{K}(\mathbf{U}) = \mathbf{K}_m + \mathbf{K}_b + \mathbf{K}_s \quad (3.3)$$

Para un valor dado de  ${}^{t+\Delta t}\lambda$  (con  $t$  el último paso calculado y  $\Delta t$  el actual incremento) el método de Newton-Raphson propone que los desplazamientos actualizados sean (iteración de equilibrio  $k + 1$ )

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{k+1} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^k - [\mathbf{K}({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^k)]^{-1} \{g({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^k) - f({}^{t+\Delta t}\lambda)\} \quad (3.4)$$

El proceso iterativo se detiene cuando el residuo de las ecuaciones de equilibrio sea suficientemente pequeño (medido según alguna norma conveniente) o que el incremento de los desplazamientos entre iteraciones sea también pequeño.

Resulta importante destacar que, si bien en las formulaciones utilizadas se han considerado los esfuerzos y deformaciones como incógnitas al usar funcionales de dos campos (Hellinger-Reissner y Hu-Washizu), tales incógnitas han sido eliminadas a nivel elemental y las ecuaciones globales quedan sólo en términos de desplazamientos.

## 4- ELEMENTOS DESARROLLADOS

A continuación se presentan las características de los elementos desarrollados e implementados en el programa de elementos finitos de propósito general OMEGA<sup>6</sup>.

### 4.1 Triángulo subparamétrico de seis nodos

#### 4.1.1 Geometría inicial

La geometría inicial es plana de borde rectos, definida a partir de los nodos vértices, en tanto que los nudos medios están situados a la mitad de los mismos en la geometría indeformada, lo que implica que si se elige un sistema cartesiano sobre el plano de la lámina, el tensor métrico inicial resulta la identidad y la matriz jacobiana es constante en todo el elemento. Esto último, en el caso de material lineal elástico dentro de una formulación lagrangeana total, permite realizar algunas integrales en forma explícita. El campo director inicial está definido en los seis nodos por lo que las curvaturas y distorsiones iniciales no son nulas

$$\varphi^0 = \sum_{I=1}^3 \xi^I \varphi_I^0 \quad \xi^I = (1 - \xi - \eta, \xi, \eta) \quad (4.1)$$

$$\bar{t}^0 = \sum_{I=1}^6 N^I t_I^0 \quad t^0 = \frac{\bar{t}^0}{\|\bar{t}^0\|} \quad (4.2)$$

donde  $\varphi_I^0$  y  $t_I^0$  son las coordenadas y directores en los nudos,  $\xi^I$  son las coordenadas triangulares de área, las  $N^I$  son las funciones de forma cuadráticas y  $\varphi$  es la posición de la superficie media. Los desplazamientos de la superficie media se proponen de variación cuadrática (lo que convierte al elemento en subparamétrico)

$$\mathbf{u} = \sum_{I=1}^6 N^I \mathbf{u}^I \quad (4.3)$$

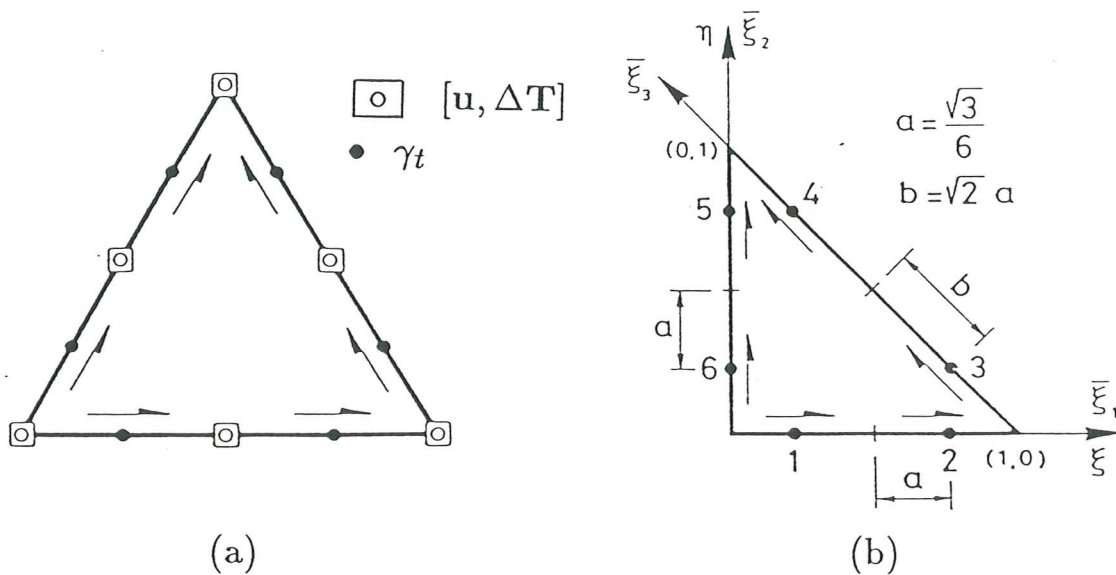


Figura 2. Elemento triangular plano de seis nudos.  
(a) Grados de libertad. (b) Puntos de evaluación del corte

Uno de los problemas a resolver es la determinación de  $\delta t$ , de  $\Delta(\delta t)$  y de sus derivadas respecto a las coordenadas naturales. En cada punto debe satisfacerse que  $t \cdot \Delta t = 0$ . Esta condición puede ser relajada y es suficiente con satisfacerla en los nudos, lo que permite expresar

$$\Delta t = \sum_{I=1}^6 N^I \Delta t^I \quad (4.4)$$

y una expresión idéntica para la variación  $\delta t$  que también puede expresarse como

$$\delta t = \delta \theta \times t \quad (4.5)$$

donde  $\delta \theta$  queda definido unívocamente por (4.5) y por la condición adicional

$$\delta\theta \cdot \mathbf{t} = 0 \quad (4.6)$$

por lo que  $\delta\mathbf{t}$ ,  $\delta\theta$ ,  $\mathbf{t}$  son mutuamente ortogonales. Siendo  $\mathbf{t}$  un campo vectorial de longitud unitaria, en cada punto la variación del director queda restringida al plano normal al mismo, por lo que alcanza con dos variables para definirla, estas variables pueden asociarse con el plano 1-2 mediante la transformación.<sup>[1-5]</sup>

$$\begin{matrix} \delta\mathbf{t} & = & \bar{\Lambda} & \delta\mathbf{T} \\ (3 \times 1) & & (3 \times 2) & (2 \times 1) \end{matrix} \quad (4.7)$$

donde  $\bar{\Lambda}$  son las dos primeras columnas de la matriz de transformación del sistema de coordenadas local al sistema de coordenadas global. Esta matriz de transformación ha de calcularse en cada instante ya que es función de la dirección del director  $\mathbf{t}$  en la posición deformada. La expresión (4.5) permite evaluar correctamente  $\Delta(\delta\mathbf{t})$

$$\begin{aligned} \Delta(\delta\mathbf{t}) &= \delta\theta \times \Delta\mathbf{t} = \delta\theta \times (\Delta\theta \times \mathbf{t}) \\ &= -(\delta\theta \cdot \Delta\theta)\mathbf{t} = -(\delta\mathbf{t} \cdot \Delta\mathbf{t})\mathbf{t} = -(\delta\mathbf{T} \cdot \Delta\mathbf{T})\mathbf{t} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Como aproximación conveniente resulta suficiente utilizar (consistente con la aproximación introducida en (4.4) )

$$\Delta(\delta\mathbf{t}) = - \sum_{i=1}^6 N^I (\delta\mathbf{T}^I \cdot \Delta\mathbf{T}^I) \mathbf{t}^I \quad (4.9)$$

La geometría actualizada en función de esta descripción de los desplazamientos resulta en el instante  $k + 1$

$$\varphi^{k+1} = \varphi^{(0)} + \mathbf{u}^{k+1} \quad (4.10)$$

$$\mathbf{t}^{(k+1)} = \exp_{\mathbf{t}^k}[\Delta\mathbf{t}^k] := \cos\|\Delta\mathbf{t}^k\| \mathbf{t}^k + \frac{\sin\|\Delta\mathbf{t}^k\|}{\|\Delta\mathbf{t}^k\|} \Delta\mathbf{t}^k \quad (4.11)$$

Adviertase que  $\Delta\mathbf{t}^k$  mide la variación desde el incremento  $k$  al  $k + 1$ . La expresión (4.11) se utiliza para la actualización de los directores en los nudos los que luego se interpolan usando una expresión idéntica a (4.2) para la obtención del director en un punto cualquiera.

La posición de un punto cualquiera fuera de la superficie media queda definida por su distancia  $\zeta$  a la misma ( $-\frac{h}{2} \leq \zeta \leq \frac{h}{2}$ ) medida sobre el director (no necesariamente normal a la superficie media, aún en la geometría inicial), siendo  $h$  el espesor de lámina

$$\mathbf{X}\zeta, \xi, \eta) = \varphi(\xi, \eta) + \zeta t(\xi, \eta) \quad (4.12)$$

#### 4.1.2 Sistema local de coordenadas

En principio cualquier sistema de coordenadas locales es válido, sin embargo para una correcta visualización de los resultados es necesario que la dirección de acción de los esfuerzos sea fácilmente identificable e independiente de las conectividades del elemento, y que en lo posible los sistemas de coordenadas elementales y nodales sean lo más parecidos posible, para que haya correspondencia entre los valores gaussianos y los nodales obtenidos mediante suavizado. Por otro lado, siendo el elemento plano, la geometría estará representada por superficies planas, pudiendo presentar quiebres importantes (reales o de discretización).

Se ha optado por el siguiente sistema: definir el eje  $x_1$  local como la intersección del plano del triángulo con el plano  $\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2$  global, y la orientación del mismo se fija obligando al eje  $x_3$  local a tener proyección positiva sobre el eje  $\mathbf{X}_3$  global (Figura 3). En el caso particular de que el plano del triángulo coincida con el eje  $\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2$  global, las direcciones locales y globales se harán coincidir.

$$\mathbf{g}_1 = \varphi_2^0 - \varphi_1^0 \quad \mathbf{g}_2 = \varphi_3^0 - \varphi_1^0 \quad \mathbf{g}_3 = \mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2$$

$$\mathbf{x}_3 = \frac{\mathbf{g}_3}{\|\mathbf{g}_3\|} \quad \|\mathbf{g}_3\| = J^0 = 2 \times \text{área elemental}$$

(4.13)

$$\mathbf{x}_1 = (-(x_3)_2, -(x_3)_1, 0) \quad \textit{normalizado}$$

$$\mathbf{x}_2 = (-(x_3)_1(x_3)_3, -(x_3)_2(x_3)_3, ((x_3)_1^2 + (x_3)_2^2)) \quad \textit{normalizado}$$

la matriz jacobiana  $\mathbf{J}$  resulta

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{x}_1 & \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{x}_1 & \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

#### 4.1.3 Comportamiento membranal

Se han desarrollado tres variantes de este elemento. El primero corresponde al usual de desplazamientos impuestos (apartado 2.1.1) y se lo ha denominado T6SD (Triángulo

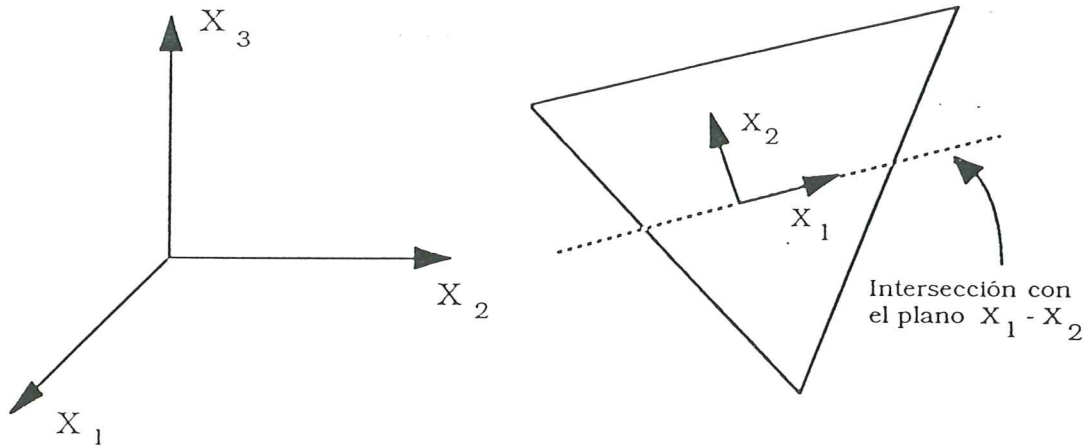


Figura 3 Sistema local de coordenadas cartesianas en triángulos

de 6 nodos Subparamétrico en Desplazamientos). Las otras dos variantes corresponden a la formulación mixta (apartado 2.1.2), donde se interpolaban esfuerzos.

En el caso de la formulación mixta los esfuerzos membranales se expresan en función de nueve parámetros  $\beta_i$  y de las coordenadas  $x_i$  locales

$$\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{P}(x_1, x_2) \cdot \boldsymbol{\beta} \quad (4.15)$$

Se han propuesto dos matrices interpolantes  $\mathbf{P}$

-Modelo Híbrido 1

$$\begin{bmatrix} \tilde{n}^{11} \\ \tilde{n}^{22} \\ \tilde{n}^{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_2^2 & & & & & \\ & & & & 1 & x_1 & x_1^2 & x_2 & & \\ & & -x_2 & & & & & -x_1 & 1 & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_9 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

de tal forma que se satisfaga

$$\begin{aligned} \tilde{n}_{i1}^{11} + \tilde{n}_{i2}^{12} &= 0 \\ \tilde{n}_{i1}^{12} + \tilde{n}_{i2}^{22} &= 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

-Modelo Híbrido 2

$$\begin{bmatrix} \tilde{n}^{11} \\ \tilde{n}^{22} \\ \tilde{n}^{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & & & & & & \\ & & & 1 & x_1 & x_2 & & & \\ & & & & & & 1 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_9 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

En ambos casos las coordenadas  $x_1$  y  $x_2$  se miden según el sistema cartesiano local a partir del baricentro del elemento

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1'\xi} & x_{1'\eta} \\ x_{2'\xi} & x_{2'\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi - \bar{\xi} \\ \eta - \bar{\eta} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^T \begin{bmatrix} \xi - \frac{1}{3} \\ \eta - \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

En el caso de los modelos híbridos la matriz  $\mathbf{H}$  puede evaluarse en forma explícita dado que el jacobiano es constante, lo que puede hacerse al comienzo del proceso no lineal; en el caso de no linealidad del material, la matriz  $\mathbf{H}$  tiene que ser calculada en cada paso.

Para la evaluación por integración numérica, el modelo híbrido 1 necesita 4 puntos de integración en tanto que el Híbrido 2 y el modelo en desplazamientos requieren sólo 3.

#### 4.1.4 Comportamiento flexional y corte transversal

En cuanto al comportamiento flexional y de corte corresponde al de los subapartados (2.3) y (2.4.1) respectivamente. En el caso del corte transversal, siendo el jacobiano constante, la matriz  $\bar{\mathbf{D}}_s$  (ec.(2.80)) puede integrarse en forma explícita.

## 4.2 Triángulo isoparamétrico de seis nodos

La diferencia principal entre este elemento y el anterior es que aquí la geometría inicial de la superficie media queda definida por los seis nudos, y en consecuencia puede ser curva.

$$\varphi^{(0)} = \sum_{I=1}^6 N^I(\xi, \eta) \varphi^{(0)I} \quad (4.20)$$

Por razones de conveniencia las ecuaciones se expresan en coordenadas naturales (convectivas). Para el postproceso (y en caso de no linealidad material) es necesario evaluar los esfuerzos generalizados en un sistema cartesiano ortogonal; para la definición del mismo en cada punto se sigue el criterio definido en el elemento plano. Las transformaciones del sistema natural al cartesiano se realizan mediante las expresiones (2.27)-(2.29) más la siguiente:

$$\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^T \bar{\mathbf{q}}' \quad (4.21)$$



### 4.2.1 Comportamiento membranar

Dentro de las versiones implementadas la primera corresponde al caso estandar de desplazamientos impuestos (sección 2.2.1) y se denomina T6ID. Sin embargo es sabido que los elementos de geometría inicial curva formulados en desplazamientos presentan problemas de bloqueo membranar en mallas gruesas. Con el objeto de aliviar este problema y mejorar el comportamiento del elemento se han intentado otras variantes, las cuales se basan en formulaciones de esfuerzos impuestos (sección 2.2.2) y deformaciones impuestas (sección 2.2.3).

Para el caso de esfuerzos impuestos se han usado las mismas formas polinomiales de los elementos T6SH1 y T6SH2 pero expresados en coordenadas naturales

(i) T6IH1

$$\begin{bmatrix} \bar{n}_{\xi\xi} \\ \bar{n}_{\eta\eta} \\ \bar{n}_{\xi\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi' & \eta' & \eta'^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi' & \xi'^2 & \eta' & 0 \\ 0 & -\eta' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\xi' & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_9 \end{bmatrix} = \mathbf{P}(\xi, \eta) \boldsymbol{\beta} \quad (4.22)$$

(ii) T6IH2

$$\begin{bmatrix} \bar{n}_{\xi\xi} \\ \bar{n}_{\eta\eta} \\ \bar{n}_{\xi\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi' & \eta' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi' & \eta' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi' & \eta' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_9 \end{bmatrix} = \mathbf{P}(\xi, \eta) \boldsymbol{\beta} \quad (4.23)$$

Notar que, debido a la curvatura del elemento y al trabajar en coordenadas naturales, el caso (i) no satisface las ecuaciones homogéneas de equilibrio, por lo que no parece presentar ventajas esta variante. Las coordenadas  $\xi'$   $\eta'$  se miden a partir del baricentro del elemento

$$\xi' = \xi - \bar{\xi} \quad \eta' = \eta - \bar{\eta} \quad (4.24)$$

con

$$\bar{\xi} = \frac{\int \xi dA}{\int dA} \quad \bar{\eta} = \frac{\int \eta dA}{\int dA} \quad (4.25)$$

En lo referente a deformaciones impuestas, es necesario definir qué deformaciones (puntos de muestreo) han de utilizarse para determinar los coeficientes  $\alpha_i$  (ecuación 2.39). Se han intentado dos variantes en la elección de los puntos de muestreo

(i) T6IA1, evaluar las tres componentes en los nudos vértices del triángulo, en tal caso puede escribirse directamente

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}' &= \begin{bmatrix} \epsilon_{\xi\xi} \\ \epsilon_{\eta\eta} \\ 2\epsilon_{\xi\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta & \xi & \eta & & & \\ & \zeta & \xi & \eta & & \\ & & \zeta & \xi & \eta & \\ & & & \zeta & \xi & \eta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_{\xi\xi}^1 \\ \epsilon_{\xi\xi}^2 \\ \epsilon_{\xi\xi}^3 \\ \epsilon_{\eta\eta}^1 \\ \epsilon_{\eta\eta}^2 \\ \epsilon_{\eta\eta}^3 \\ 2\epsilon_{\xi\eta}^1 \\ 2\epsilon_{\xi\eta}^2 \\ 2\epsilon_{\xi\eta}^3 \end{bmatrix} \\ &= P(\xi, \eta) \hat{\epsilon} \end{aligned} \quad (4.26)$$

(ii) T6IA2 evaluar la deformación en la dirección tangente al lado en los mismos puntos que se evalúa la deformación de corte transversal (6 medidas de deformación), más las tres componentes evaluadas en el centro del elemento. Utilizando la expresión (2.38) podemos escribir

$$\hat{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_t^1 \\ \epsilon_t^2 \\ \epsilon_t^3 \\ \epsilon_t^4 \\ \epsilon_t^5 \\ \epsilon_t^6 \\ \epsilon_t^c \\ \epsilon_{\xi\xi}^c \\ \epsilon_{\eta\eta}^c \\ 2\epsilon_{\xi\eta}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & A & & & & & & & & \\ 1 & B & & & & & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{B}{2} & \frac{A}{2} & \frac{1}{2} & \frac{B}{2} & \frac{A}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-B}{2} & \frac{-A}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{A}{2} & \frac{B}{2} & \frac{1}{2} & \frac{A}{2} & \frac{B}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-A}{2} & \frac{-B}{2} \\ & & & 1 & 0 & B & & & \\ & & & 1 & 0 & A & & & \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & & & & \\ & & & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & \\ & & & & & & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_9 \end{bmatrix} = Q \alpha \quad (4.27)$$

con  $A = (1 - 1/\sqrt{3})/2$  y  $B = (1 + 1/\sqrt{3})/2$ . De aquí podemos eliminar los coeficientes  $\alpha_i$  y expresar las deformaciones en términos de las deformaciones en los puntos de muestreo.

$$\bar{\epsilon}' = A Q^{-1} \beta = P(\xi, \eta) \hat{\epsilon} \quad (4.28)$$

siendo por ejemplo para el caso (i)

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} (a_{11}^1 - a_{11}^{1(0)})/2 \\ (a_{11}^2 - a_{11}^{2(0)})/2 \\ (a_{11}^3 - a_{11}^{3(0)})/2 \\ (a_{22}^1 - a_{22}^{1(0)})/2 \\ (a_{22}^2 - a_{22}^{2(0)})/2 \\ (a_{22}^3 - a_{22}^{3(0)})/2 \\ (a_{12}^1 - a_{12}^{1(0)}) \\ (a_{12}^2 - a_{12}^{2(0)}) \\ (a_{12}^3 - a_{12}^{3(0)}) \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

entonces  $\delta(\hat{\varepsilon})$  resulta

$$\delta(\hat{\varepsilon}) = \sum_{I=1}^6 \begin{bmatrix} \varphi_{i_1}^1 N_{i_1}^{I1} \\ \varphi_{i_1}^2 N_{i_1}^{I2} \\ \varphi_{i_1}^3 N_{i_1}^{I3} \\ \varphi_{i_2}^1 N_{i_2}^{I1} \\ \varphi_{i_2}^2 N_{i_2}^{I2} \\ \varphi_{i_2}^3 N_{i_2}^{I3} \\ \varphi_{i_1}^1 N_{i_2}^{I1} + \varphi_{i_2}^1 N_{i_1}^{I1} \\ \varphi_{i_1}^2 N_{i_2}^{I2} + \varphi_{i_2}^2 N_{i_1}^{I2} \\ \varphi_{i_1}^3 N_{i_2}^{I3} + \varphi_{i_2}^3 N_{i_1}^{I3} \end{bmatrix} \delta u^I = \sum_{I=1}^6 \bar{B}^I \delta u^I = \bar{B} \delta u \quad (4.30)$$

### 4.2.2 Comportamiento flexional y corte transversal

El comportamiento flexional está formulado en desplazamientos impuestos al igual que el elemento anterior, la diferencia radica en que, al igual que la parte membranal, está definida en coordenadas naturales.

El tratamiento del corte transversal es tal cual ha sido explicado en el subapartado (2.4.1), formulado en términos de deformaciones en el sistema de coordenadas natural. Lo único que resta decir es que al no ser constante la matriz jacobiana no es posible realizar en forma explícita la integral indicada en (2.80).

## 4.3 Triángulo isoparamétrico de tres nodos

### 4.3.1 Geometría

El elemento es plano, la geometría inicial está definida por

$$\varphi^{(0)} = \sum_{I=1}^3 \xi^I \varphi^I \quad (4.31)$$

$$\tilde{\mathbf{t}}^{(0)} = \sum_{I=1}^3 \xi^I \mathbf{t}^I \quad \mathbf{t} = \frac{\tilde{\mathbf{t}}}{\|\tilde{\mathbf{t}}\|} \quad (4.32)$$

Los desplazamientos de la superficie media se interpolan también linealmente por lo que el elemento es isoparamétrico

$$\mathbf{u} = \sum_{I=1}^3 \xi^I \mathbf{u}^I \quad (4.33)$$

En cuanto al campo director, no es suficiente con una interpolación lineal ya que en tal caso el elemento bloquearía por cortante en el análisis de láminas delgadas<sup>[8]</sup>. Por ello se han agregado grados de libertad jerárquicos ( $\theta^I$ ) en cada lado cuyo objeto es mejorar la interpolación del campo director en la geometría deformada

$$\tilde{\mathbf{t}} = \sum_{I=1}^3 \xi^I \mathbf{t}^I + \sum_{I=4}^6 N^I \theta^I \mathbf{e}^I \quad (4.34)$$

$N^I$  son las mismas funciones de interpolación cuadrática usadas antes y  $\theta^I$  el grado de libertad jerárquicos sobre el lado. En el análisis lineal de placas los vectores  $\mathbf{e}^I$  coinciden con la dirección del lado,<sup>8</sup> lo que permite interpretar los valores  $\theta^I$  como las rotaciones de la normal en la dirección tangente al lado. Para mantener esta idea en el análisis no lineal de láminas aquí se ha propuesto que los vectores  $\mathbf{e}^I$  sean

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^4 &= (\varphi^2 + \mathbf{t}^2) - (\varphi^1 + \mathbf{t}^1) \\ \mathbf{e}^5 &= (\varphi^3 + \mathbf{t}^3) - (\varphi^2 + \mathbf{t}^2) \\ \mathbf{e}^6 &= (\varphi^1 + \mathbf{t}^1) - (\varphi^3 + \mathbf{t}^3) \end{aligned} \quad (4.35)$$

que es necesario actualizar en cada paso de cálculo, lo que asegura la suavidad del campo director a lo largo del lado pero complica un poco la formulación. Como se indica en [8] es necesario orientar cada lado del triángulo para que quede unívocamente definido el sentido de giro de  $\theta^I$  entre elementos adyacentes, lo que se logra orientando  $\mathbf{e}^I$  usando la numeración global de los nudos en cada lado. En la fig.4 se muestran los grados de libertad del elemento.

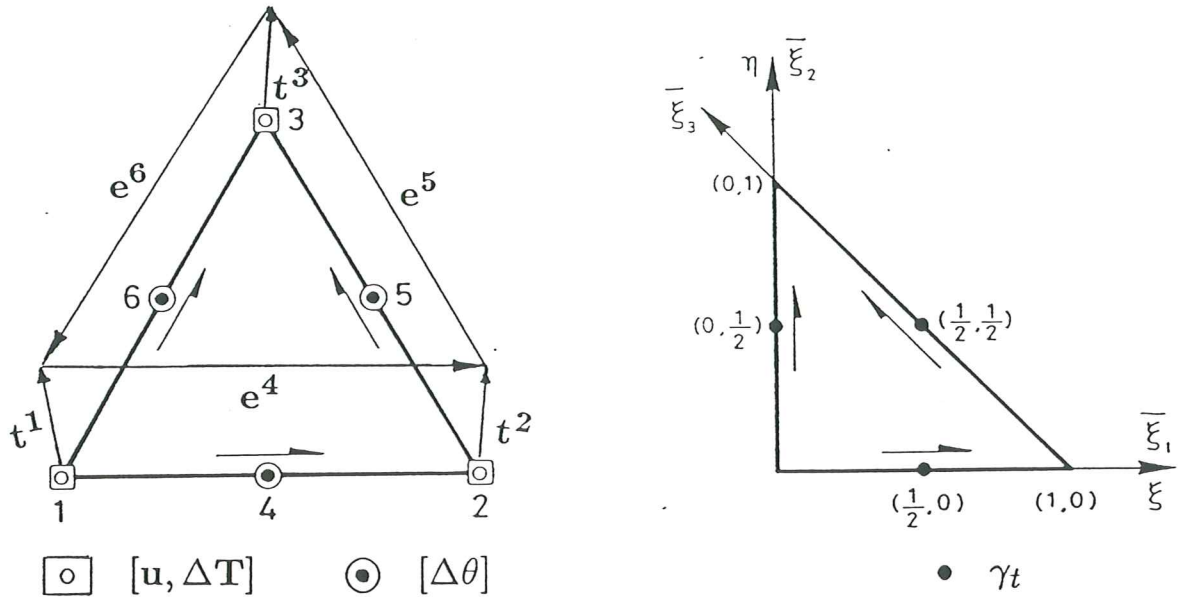


Figura 4 Triángulo de tres nodos y grados de libertad jerárquicos

#### 4.3.2 Comportamiento membranar

El comportamiento membranar se formula en términos de desplazamientos impuestos y corresponde al triángulo de deformación constante, por lo que será necesaria una importante discretización en casos dominados por significativos gradientes en los esfuerzos membranales. Por otro lado debido a la simpleza del elemento la determinación del vector de fuerzas residuales y la matriz de rigidez pueden realizarse en forma explícita o con un único punto de integración (ecuaciones 2.7, 2.11 y 2.13 del subapartado 2.1.1).

#### 4.3.3 Comportamiento flexional y tratamiento del corte

Debido a los grados de libertad jerárquicos se complica un poco la determinación de  $\delta t$ ,  $\Delta(\delta t)$  y sus derivadas respecto a las coordenadas naturales. Tomando directamente variación de (4.34) tenemos

$$\delta t = \sum_{I=1}^3 \xi^I \delta t^I + \sum_{I=4}^6 N^I [\delta \theta^I e^I + \theta^I \delta e^I] \quad (4.36)$$

con

$$\delta e^I = \delta(\varphi^J - \varphi^K + t^J - t^K) \quad (4.37)$$

donde K y J son los nudos anterior y posterior del lado I respectivamente. Esta expresión asegura que  $t^I \cdot \delta t^I = 0$  en los vértices, pero no en el resto de los puntos. Por otro lado recordando (4.5) podemos obtener una expresión similar a (4.9)

$$\begin{aligned} \Delta(\delta t) = & - \sum_{I=1}^3 N^I (\delta \mathbf{T}^I \cdot \Delta \mathbf{T}^I) t^I - \sum_{I=4}^6 N^I [(\Delta \varphi^J - \Delta \varphi^K \\ & + \bar{\Lambda}^J \Delta \mathbf{T}^J - \bar{\Lambda}^K \Delta \mathbf{T}^K) \delta \theta^I + (\delta \varphi^J - \delta \varphi^K + \bar{\Lambda}^J \delta \mathbf{T}^J - \bar{\Lambda}^K \delta \mathbf{T}^K) \Delta \theta^I] \end{aligned} \quad (4.38)$$

En cuanto a las derivadas de  $\delta t$  y  $\Delta(\delta t)$  las obtendremos derivando las expresiones (4.36) y (4.38)

$$\delta t_{i,\alpha} = \sum_{I=1}^3 N_{i,\alpha}^I \bar{\Lambda}^I \delta \mathbf{T}^I + \sum_{I=4}^6 N_{i,\alpha}^I [e^I \delta \theta^I + \delta e^I] \quad (4.39)$$

$$\Delta(\delta t_{i,\alpha}) = - \sum_{I=1}^3 N_{i,\alpha}^I (\delta \mathbf{T}^I \cdot \Delta \mathbf{T}^I) t^I - \sum_{I=4}^6 N_{i,\alpha}^I [e^I \delta \theta^I + \delta e^I] \quad (4.40)$$

La evaluación de la parte flexional sigue los lineamientos descritos en el subapartado 2.3 (ecuaciones (2.59-2.67))reemplazando allí las expresiones (4.36-4.40).

En lo que se refiere a la formulación de la energía de corte en términos de deformaciones impuestas se utilizan las mismas ecuaciones que para el elemento de seis nodos (sección 2.4.1), reemplazando allí (4.36) y (4.38). La otra diferencia resulta del número de grados de libertad en este elemento, que hace necesario disminuir la cantidad de puntos donde se evalúan las deformación de corte, para satisfacer el test de la parcela generalizado.<sup>7</sup> En los elementos anteriores se utilizaba una variación lineal de la deformación a lo largo del lado; en este caso la deformación habrá de ser constante. El valor de esta deformación se obtiene como el promedio en el lado, que se calcula como la integral numérica de la deformación en la dirección tangente a lo largo del lado, que a los fines prácticos resulta el promedio de las deformaciones evaluadas en los mismos puntos de muestreo que los elementos anteriores (ver Fig.4). Es decir

$$\begin{bmatrix} \gamma_t^{II} \\ \gamma_t^{III} \\ \gamma_t^{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & \\ & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ & & & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \bar{\gamma}' \quad (4.41)$$

donde  $\gamma_t^{II}$ ,  $\gamma_t^{III}$ ,  $\gamma_t^{III}$  son las deformaciones tangentes en los lados y  $\bar{\gamma}'$  ha sido definido en (2.74).

## 4.4 Triángulo lineal no conforme

### 4.4.1 Geometría

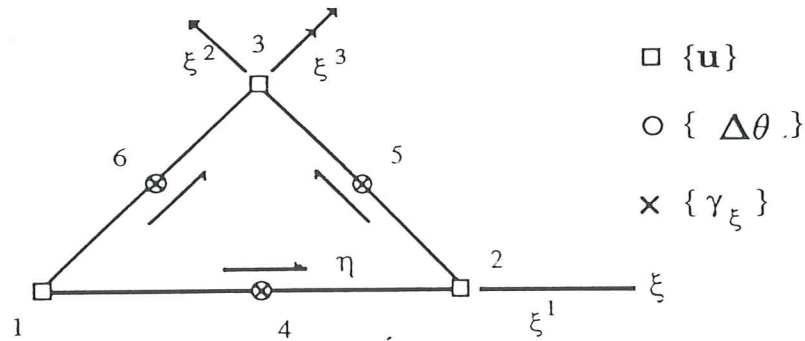


Figura 5 Triángulo de tres nodos lineal no conforme

La posición de la superficie media está definida por las coordenadas espaciales de los tres vértices del triángulo, por lo que el elemento resulta plano y su comportamiento membranal idéntico al elemento anterior, esto es al triángulo de deformación constante.

$$\varphi^{(0)} = \sum_{I=1}^3 \xi^I \varphi^{(0)I} \quad (4.42)$$

$$t_\varphi = \sum_{I=1}^3 \xi^I t_\varphi^I = \sum_{I=1}^3 \xi^I (\varphi^{(0)I} + t_{u^I}) \quad (4.43)$$

El campo director se interpola linealmente a partir de los directores a la mitad de cada lado (ver Fig. 5).

$$t = \sum_{K=4}^6 \bar{N}^K t^I \quad (4.44)$$

siendo las funciones de interpolación

$$\begin{aligned}
\bar{N}^4 &= 1 - 2\xi^3 \\
\bar{N}^5 &= 1 - 2\xi^1 \\
\bar{N}^6 &= 1 - 2\xi^2
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Definido el campo director de esta forma, es fácil ver que no satisface continuidad a lo largo de todo el contorno entre elementos sino sólo en la mitad de cada lado por lo que el elemento es no conforme.

La variación del campo director es simplemente

$$\delta \mathbf{t} = \sum_{K=4}^6 \bar{N}^K \delta \mathbf{t}^K = \sum_{K=4}^6 \bar{N}^K \bar{\Lambda}^K \delta \mathbf{T}^K \tag{4.46}$$

Por otro lado

$$\Delta(\delta \mathbf{t}) = - \sum_{K=4}^6 \bar{N}^K (\delta \mathbf{t}^K \cdot \Delta \mathbf{T}^K) \mathbf{t}^K \tag{4.47}$$

En cuanto a las derivadas de las dos últimas expresiones son sencillamente

$$\delta t_{i,\alpha} = \sum_{K=4}^6 \bar{N}_{i,\alpha}^K \bar{\Lambda}^K \delta \mathbf{T}^K \tag{4.48}$$

$$\Delta(\delta t_{i,\alpha}) = - \sum_{K=4}^6 \bar{N}_{i,\alpha}^K (\delta \mathbf{t}^K \cdot \Delta \mathbf{T}^K) \mathbf{t}^K \tag{4.49}$$

#### 4.4.2 Comportamiento flexional y tratamiento del corte

Dada la linealidad de la interpolación del campo director, el elemento resulta de curvatura constante. Las contribuciones de la parte flexional a las fuerzas residuales y a la matriz de rigidez se obtienen reemplazando las expresiones (4.46-4.49) en las del apartado 2.3. Siendo las curvaturas (y los esfuerzos) constantes es suficiente utilizar un único punto de integración para la correcta evaluación de las fuerzas residuales y la matriz de rigidez, lo mismo que para las contribuciones membranales.

En cuanto al corte transversal, siguiendo los razonamientos del subapartado 2.4.1 pero exigiendo ahora que las deformaciones de corte transversal tangentes al lado sean constantes, es posible expresar las deformaciones de corte transversal en la forma:



$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} 1-\eta & \eta & \eta \\ \xi & -\xi & 1-\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma^4 \\ \gamma^5 \\ \gamma^6 \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{A} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \quad (4.50)$$

donde

$$\bar{\boldsymbol{\gamma}} = \begin{bmatrix} \gamma^4 \\ \gamma^5 \\ \gamma^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi'_{i\xi} \cdot t^4 \\ (\varphi'_{i\xi} - \varphi'_{i\eta}) \cdot t^5 \\ \varphi'_{i\eta} \cdot t^6 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

La contribución a la ecuación de trabajos virtuales resulta

$$\mathbf{F}_s = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B}_s^T \mathbf{q} \, dA = \bar{\mathbf{B}}_s^T \int_{\mathcal{A}} \mathbf{A}^T \mathbf{J}^{-T} \mathbf{q} \, dA = \bar{\mathbf{B}}_s^T \bar{\mathbf{q}} \quad (4.52)$$

donde

$$\bar{\mathbf{B}}_s \delta \mathbf{U} = \begin{bmatrix} N_{i\xi}^I t^4 \delta \mathbf{u}^I & , & \varphi'_{i\xi} \bar{\Lambda}^4 \delta \mathbf{T}^4 \\ (N_{i\xi}^I - N_{i\eta}^I) t^5 \delta \mathbf{u}^I & , & (\varphi'_{i\xi} - \varphi'_{i\eta}) \bar{\Lambda}^5 \delta \mathbf{T}^5 \\ N_{i\eta}^I t^6 \delta \mathbf{u}^I & , & \varphi'_{i\eta} \bar{\Lambda}^6 \delta \mathbf{T}^6 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

$$\bar{\mathbf{q}} = \int_{\mathcal{A}} \bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{J}^{-T} \mathbf{q} \, dA \quad (4.54)$$

En el caso elástico, la última integral puede integrarse en forma explícita si se reemplaza

$$\mathbf{q} = \mathbf{D}_s \mathbf{J}^{-1} \mathbf{A} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \quad (4.55)$$

## 4.5 Elemento isoparamétrico de cuatro nodos

Además de los elementos triangulares se ha implementado una versión simplificada del elemento cuadrilátero de cuatro nodos desarrollado por Simo et al.<sup>3</sup>

### 4.5.1 Geometría

La geometría del elemento está definida por funciones de forma bilineales, tanto para la posición de la superficie media como para la descripción del campo director.

$$\varphi^{(0)} = \sum_{I=1}^4 N^I(\xi, \eta) \varphi_I^{(0)} \quad (4.56)$$

$$\mathbf{t}^{(0)} = \sum_{I=1}^4 N^I(\xi, \eta) \mathbf{t}_I^{(0)} \quad (4.57)$$

donde  $\varphi_I^{(0)}$  y  $\mathbf{t}_I^{(0)}$  son respectivamente la posición de la superficie media y el director en los nodos del cuadrilátero, y las  $N^I(\xi, \eta)$  son las funciones de forma que para cada nudo (de coordenadas  $(\xi^I, \eta^I)$ ) se escriben<sup>10</sup>

$$N^I(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi^I)(1 + \eta\eta^I) \quad (4.58)$$

Observar que no se normaliza el campo director, por lo que sólo en los nodos se satisface la condición de que éste tenga módulo unitario. Ésta es la primera simplificación que se ha realizado respecto del elemento presentado en [3], la que no tendrá influencia significativa en caso de mallas finas pero si en el caso de mallas gruesas con grandes curvaturas, presentando un comportamiento ligeramente mas flexible.

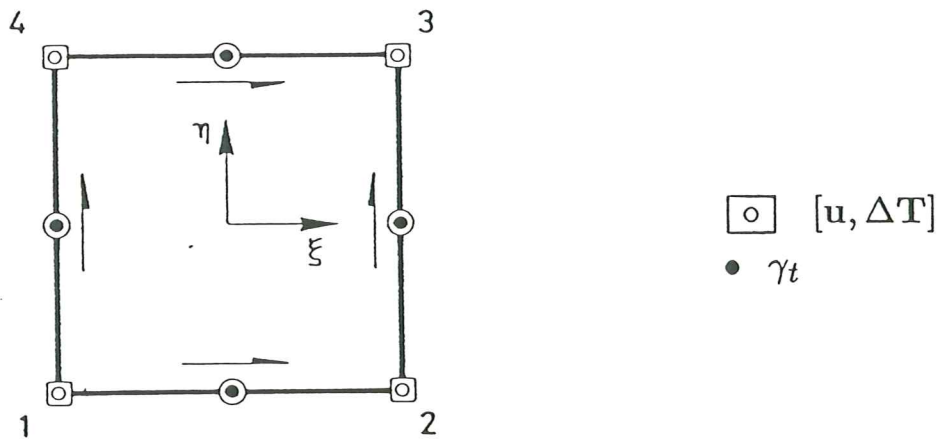


Figura 6 Elemento cuadrilátero de cuatro nudos

Los desplazamientos de la superficie media y los incrementos en el director se interpolan usando las mismas funciones bilineales (en la Fig.6 se muestran los grados de libertad utilizados)

$$\mathbf{u} = \sum_{I=1}^4 N^I(\xi, \eta) \mathbf{u}^I \quad (4.59)$$

$$\Delta t = \sum_{I=1}^4 N^I(\xi, \eta) \Delta t^I \quad (4.60)$$

La geometría actualizada se obtiene usando la expresión (4.10) para la superficie media y la (4.11) para el campo director en los nodos los que luego se interpolan en el interior del elemento usando una expresión similar a (4.57)

$$\varphi^{k+1} = \sum_{I=1}^4 N^I(\xi, \eta) (\varphi_I^{(0)} + \mathbf{u}_I^{k+1}) \quad (4.61)$$

$$\mathbf{t}^{k+1} = \sum_{I=1}^4 N^I(\xi, \eta) \mathbf{t}_I^{k+1} \quad (4.62)$$

Para la elección del sistema de coordenadas locales se ha optado por el siguiente esquema; en cada punto de interés

- (i)  $\mathbf{x}_3$  queda definido por el producto vectorial de los vectores definidos por  $\varphi_{i\xi}^{(0)}$  y  $\varphi_{i\eta}^{(0)}$
- (ii)  $\mathbf{x}_1$  resulta paralelo a  $\varphi_{i\xi}^{(0)}$
- (iii)  $\mathbf{x}_2$  resulta del producto vectorial  $\mathbf{x}_3$  con  $\mathbf{x}_1$

#### 4.4.2 Comportamiento membranar y flexional

El comportamiento flexional y membranar está formulado en forma estándar en base a los campos de desplazamientos impuestos (ver subapartados 2.1.1 y 2.3), en tanto que la formulación del corte transversal ha sido detallada en el subapartado 2.4.2. Las deformaciones y esfuerzos generalizados se evalúan en el sistema de coordenadas local definido en el subapartado anterior. Esta formulación membranar presenta alguna desventaja respecto a la formulación mixta de [3] (especialmente con mallas gruesas) como se verá en los ejemplos presentados en la sección 6.

Debido a la simplificación introducida en (4.57) y (4.62) las derivadas del campo director se expresan directamente por

$$\mathbf{t}_{i\alpha} = \sum_{I=1}^4 N_{i\alpha}^I \mathbf{t}^I \quad (4.63)$$

## 5- SIMULACIONES NUMÉRICAS LINEALES

En este apartado se presentan los resultados numéricos obtenidos mediante los elementos descriptos. Para su identificación los elementos se designan con la siguiente nomenclatura:

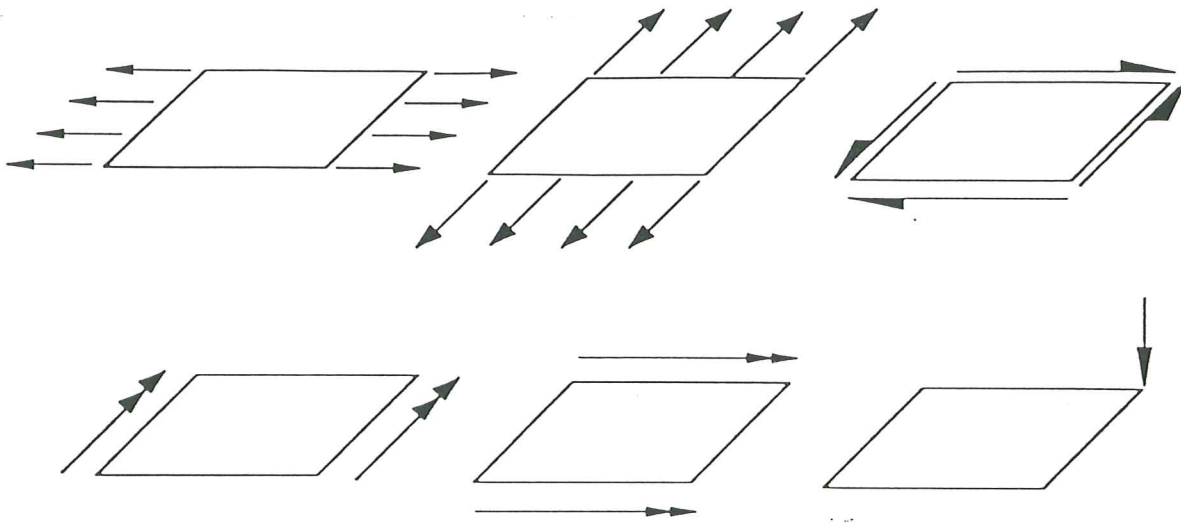
- T6SD Triángulo 6 nodos, Subparamétrico, membrana en Desplazamientos
- T6SH1 Triángulo 6 nodos, Subparamétrico, membrana modelo Híbrido 1
- T6SH2 Triángulo 6 nodos, Subparamétrico, membrana modelo Híbrido 2
- T6ID Triángulo 6 nodos, Isoparamétrico, membrana en Desplazamientos
- T6IH2 Triángulo 6 nodos, Isoparamétrico, membrana modelo Híbrido 2
- T6IA1 Triángulo 6 nodos, Isoparamétrico, membrana modelo deformaciones impuestas 1
- T6IA2 Triángulo 6 nodos, Isoparamétrico, membrana modelo deformaciones impuestas 2
- T3IJ Triángulo 3 nodos, Isoparamétrico, con grados de libertad Jerárquicos
- TLNC Triángulo Lineal No Conforme
- Q4ID Cuadrilátero 4 nodos, Isoparamétrico, membrana en Desplazamientos
- Q4IM Cuadrilátero 4 nodos, Isoparamétrico, membrana en esfuerzos impuestos (Mixto), resultados de Simo et al.<sup>[2,3,5]</sup>

Todas las evaluaciones para los elementos triangulares cuadráticos y para el T3IJ se realizaron usando 3 puntos de integración, salvo las del modelo híbrido 1 (T6SH1) donde se utilizaron 4 puntos al igual que en el caso de cuadriláteros. Para el TLNC se usó un único punto de integración para membrana y flexión, e integración explícita para el corte transversal.

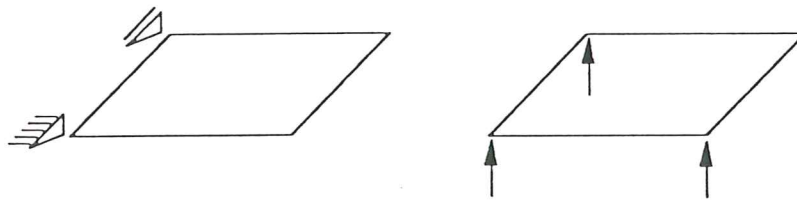
### 5.1 Análisis de autovalores de las matrices de rigidez y test de la parcela

Se ha analizado una placa plana (ver Fig.7) sometida a fuerzas y momentos que producen valores unitarios para los seis esfuerzos generalizados de membrana y flexión ( $n^{11} = n^{12} = n^{22} = m^{11} = m^{12} = m^{22} = 1$ ); en las fig.8 se muestran las mallas utilizadas para elementos triangulares y cuadriláteros. En todos los casos se reproducen los resultados correctos.

Se ha realizado además un cálculo de autovalores de las matrices de rigidez elementales de los elementos que conforman la malla. A excepción del elemento T6SH1, todos los elementos presentan 6 autovalores nulos correspondientes a las tres traslaciones y giros de cuerpo rígido posibles. Los elementos correspondientes al modelo híbrido 1 presentan siempre 1 o 2 autovalores nulos más (modos espureos de cuerpo rígido) lo que hace que dicha versión del elemento no pueda utilizarse en mallas gruesas y que en general su uso demande muchas precauciones.



(a) Estados de carga

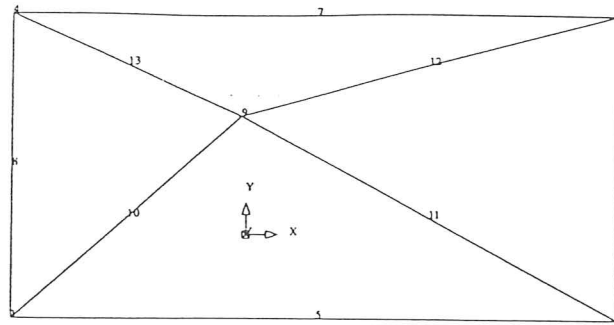


(b) Condiciones de borde

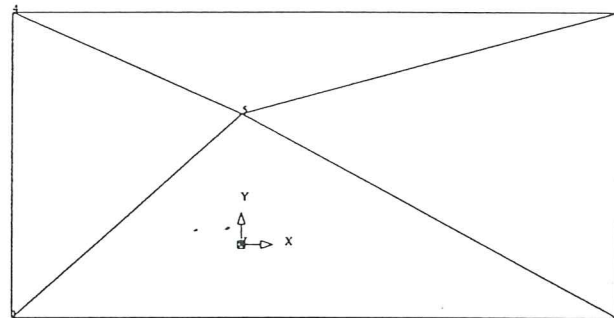
Figura 7 Test de la parcela

## 5.2 Comportamiento puramente membranal

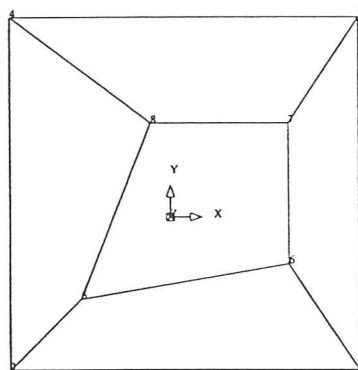
El comportamiento de los elementos isoparamétricos de tensión plana basados en desplazamientos impuestos es bien conocido, sin embargo resulta útil compararla con los modelos mixtos basados en esfuerzos o deformaciones impuestas. El ejemplo analizado se puede ver en la Fig.9 y corresponde a un problema con una importante cantidad de energía de corte, donde se intenta evaluar la habilidad del elemento para distorsionarse. En la Tabla 1 se muestran los resultados (desplazamiento del centro de la línea de aplicación de la carga) usando el elemento Q4ID y los obtenidos por Simo<sup>2</sup> usando una formulación mixta. El mismo ejemplo ha sido analizado con elementos triangulares con mallas obtenidas a partir de las mallas de cuadriláteros. En la Tabla 1 también se presentan estos resultados.



(a) malla para triángulos de 6 nodos



(b) malla para triángulos de 3 nodos



(c) malla para cuadriláteros de 4 nodos

Figura 8. Mallas de elementos para 'patch test'

<i>Nodos por lado</i>	<i>NDOF</i>	<i>Q4IM</i>	<i>Q4ID</i>	<i>T3IJ TLNC</i>	<i>T6SH1</i>	<i>Resto T6xxx</i>
2	4	16.743	5.960	5.956		
3	12	21.124	11.844	11.979	47.889	18.360
5	40	23.018	18.763	18.272	31.686	23.298
9	144	23.685	22.078	22.015	23.632	23.852
17	544	23.878	23.427	23.406	24.087	23.927

Tabla 1 Problema membranar de Cook. Desplazamiento del centro del lado

Observando la tabla puede verse que el elemento cuadrilátero mixto se comporta mucho mejor que el cuadrilátero en desplazamientos (Q4ID), pero en general los

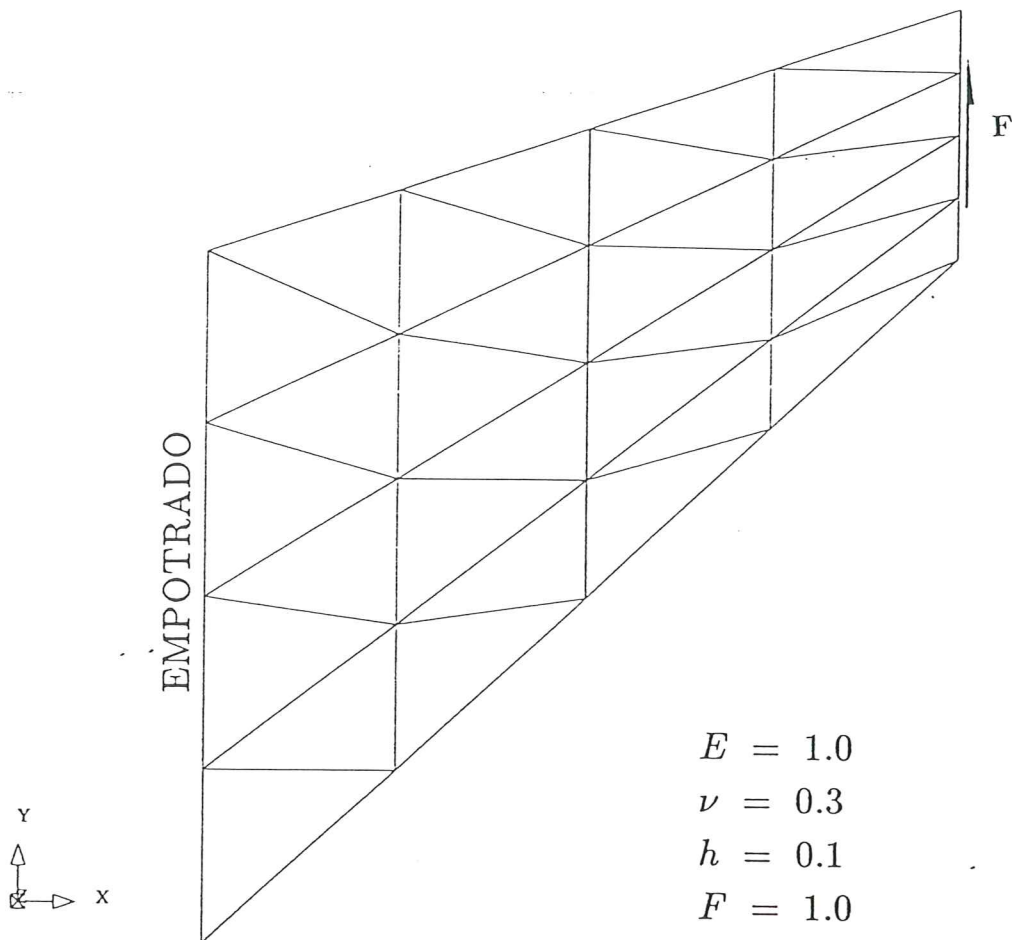


Figura 9. Problema membranal de Cook

elementos triangulares cuadráticos son más eficientes. En tanto que los triángulos lineales (T3IJ y TLNC) tiene un comportamiento similar al Q4ID. Por otro lado el elemento T6SH1, si bien converge a los resultados correctos, presenta desplazamientos excesivos para mallas gruesas.

### 5.3 Problema dominado por la membrana, bloqueo membranal

#### 5.3.1 Cubierta cilíndrica de Scordelis-Lo

Los elementos de geometría inicial curva presentan en general el problema de bloqueo por membrana. Un ejemplo muy conocido utilizado para evaluar el comportamiento de diferentes elementos es el sector cilíndrico bajo acción de la gravedad que se muestra en la figura 10. Se ha analizado este problema utilizando diferentes mallas con el objeto de observar la convergencia de los elementos y la influencia del bloqueo membranal. En la Tabla 2 se presentan los resultados normalizados respecto a la solución correcta. Estos mismos resultados se han graficado en la Fig.11.

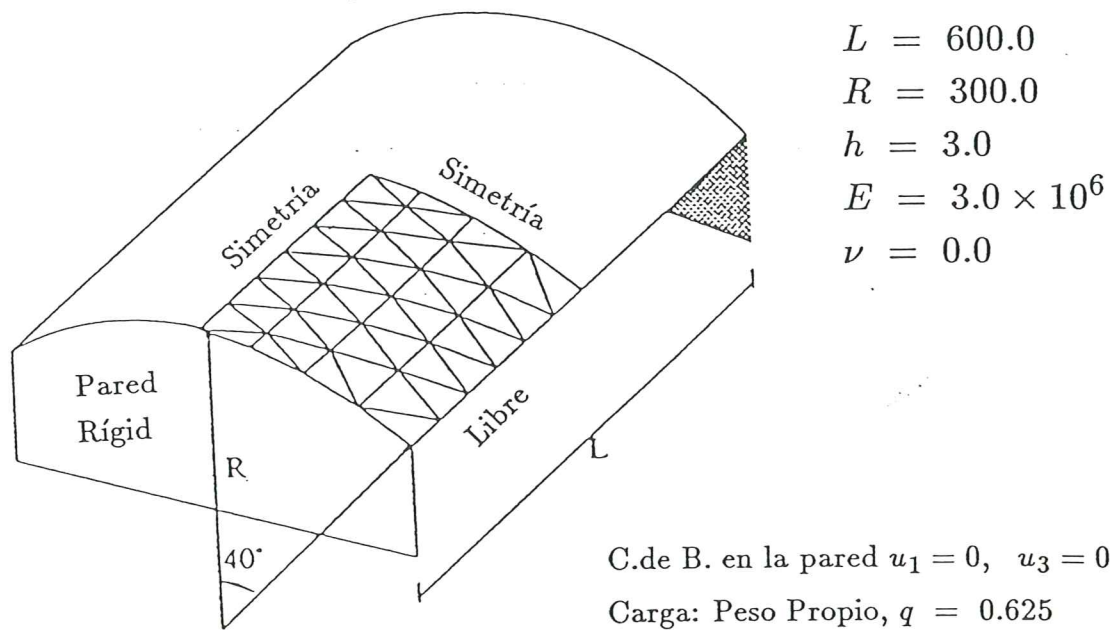


Figura 10. Cubierta cilíndrica de Scordelis-Lo, geometría

<i>NDOF</i>	<i>Q4IM</i>	<i>Q4ID</i>	<i>T6SH1</i>	<i>T6SD</i>	<i>T6IH2</i>	<i>T6ID</i>	<i>T6IA1</i>	<i>T6IA2</i>
26	145.0	119.8	587.5	581.4	348.0	34.7	352.1	47.4
92	108.3	94.6	136.0	134.9	55.6	54.4	112.1	48.4
198			107.1	109.5	74.7	74.7	100.7	69.4
344	101.5	97.3	104.4	104.4	87.6	87.2	98.3	86.0
1344	100.0	99.2						
2060			100.5	100.5	100.0	99.4	100.3	100.0

Tabla 2 Cilindro de Scordelis-Lo

Los resultados de la Tabla 2 pueden dividirse en dos partes, los correspondientes a elementos de geometría inicial plana (que incluye a los cuadriláteros en este caso) y los de geometría inicial curva (últimas cuatro columnas). Entre los primeros puede notarse que a diferencia de los cuadriláteros las formulaciones en desplazamientos y en esfuerzos inpuestos en los triángulos dan resultados muy similares. Entre los elementos de geometría inicial curva, puede verse como el elemento en desplazamiento bloquea para mallas gruesas lo mismo que el T6IA2 y el elemento mixto por lo esta última formulación no parece ofrecer ventajas en elementos triangulares. Por otro lado el elemento T6IA1 no bloquea por membrana por lo que parece ser la mejor alternativa entre los elementos de geometría curva.

Finalmente en la Tabla 3 se muestran los resultados usando los elementos T3IJ y TLNC que es sabido que tienen un comportamiento membranar pobre, por lo que requiere mallas muy finas para obtener resultados dentro de una precisión adecuada.



<i>Nodos por lado</i>	<i>NGDL</i>	<i>T3IJ</i>	<i>NGDL</i>	<i>T3IJ</i>
2 × 2	13	568.8	12	986.8
3 × 3	42	113.5	42	148.1
4 × 4	87	74.5	90	80.1
5 × 5	148	74.2	156	76.3
11 × 11	850	91.6	930	92.0
21 × 21	3300	97.7	3720	94.8

Tabla 3 Cilindro de Scordelis-Lo

En la Fig. 11 se muestran los resultados presentados en las Tablas 2 y 3.

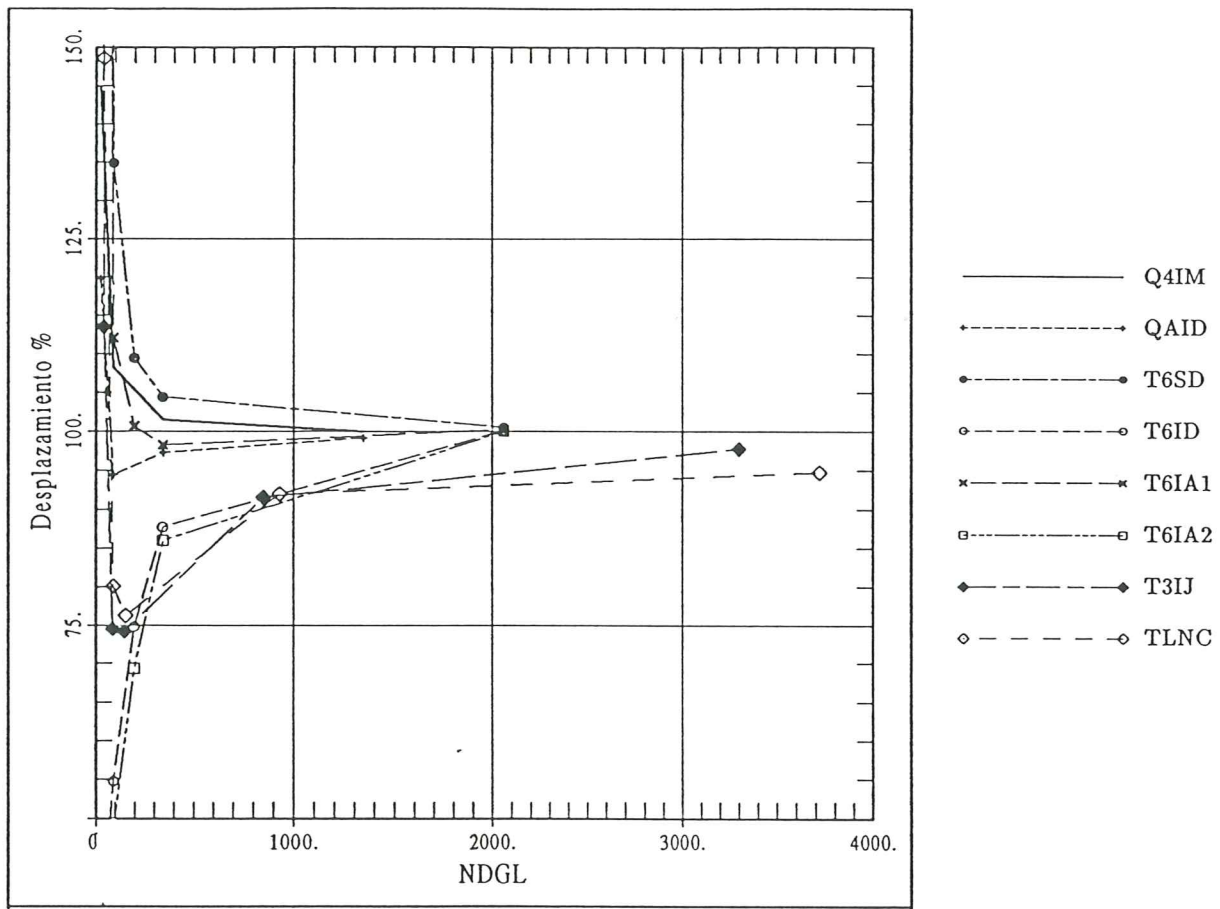


Figura 11. Cubierta cilíndrica de Scordelis-Lo

### 5.3.2 Lámina curva en voladizo

Otro ejemplo muy usado para probar el bloqueo membranal es una lámina cilíndrica en voladizo sujeta a un momento flector en la punta (Fig.12). Esta estructura modelada con sólo dos elementos triangulares curvos debiera resultar en un estado uniforme de flexión y membrana. Se ha analizado la estructura para diferentes extensiones del voladizo (medido en términos del ángulo de apertura  $\phi$ . En la Tabla 4 se presentan

el rango de valores del momento flector evaluado en los puntos de integración a medida que se incrementa  $\phi$ .

$\phi$	T6ID	T6IA(1)	T6IA(2)
5	0.992	1.001	1.000
10	0.878 - 0.920	1.005	0.998
20	0.408 - 0.710	1.020	0.990 - 0.996
30	0.244 - 0.615	1.038 - 1.048	0.978 - 0.991

Tabla 4. Momento flector  $\bar{m}^{xx}$  para diferente valores de  $\phi$

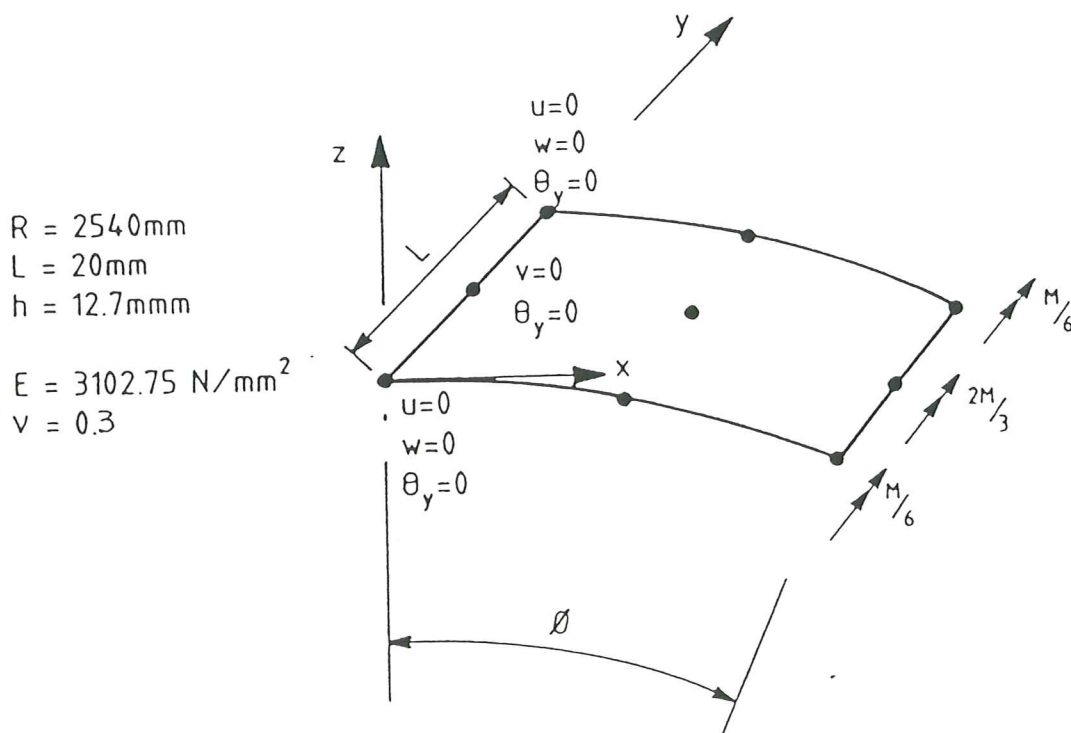


Figura 12. Cantilever curvo bajo un momento constante

El elemento T6ID conduce al resultado correcto sólo para valores muy bajos de  $\phi$  (menores que 5 grados). Los elementos en deformaciones impuestas dan resultados relativamente buenos, el primero (T6IA1) presenta un comportamiento un poco flexible en tanto que el segundo (T6IA2) es un tanto rígido. Los resultados obtenidos con el elemento mixto T6IH2 son similares a los del T6ID.

## 6- SIMULACIONES NUMÉRICAS NO LINEALES

En esta sección se presentan algunos ejemplos de modelado de estructuras con comportamiento no lineal geométrico.

## 6.1 Columna empotrada-libre bajo carga axial

Como primer ejemplo se muestra un modelado de un comportamiento puramente membranar. Una columna, con una imperfección geométrica en la forma del primer modo de pandeo, es cargada axialmente. La discretización con 3 nodos en el ancho de la columna y 21 en la longitud (20 elementos de 6 nodos, 40 de 4 nodos o 80 de 3 nodos). En la Fig.13 se muestra la configuración deformada para un valor de 4 veces la carga teórica de Euler, y un gráfico del desplazamiento lateral del punto del borde libre versus el valor de la carga  $\lambda$  obtenidos con triángulos de seis nodos. El elemento T6IA1 muestra un comportamiento un poco flexible y para  $\lambda = 3.6\lambda_{crit}$  se produce el colapso de los elementos en el empotramiento. El elemento T6IA2 detecta correctamente la carga de pandeo pero posteriormente muestra un comportamiento sensiblemente más rígido que los elementos en desplazamientos. Respecto a los elementos Q4ID, TLNC y T3IJ digamos que muestran un comportamiento excesivamente rígido y no presentan desplazamientos importantes aún para valores de 4 veces la carga de pandeo teórica.

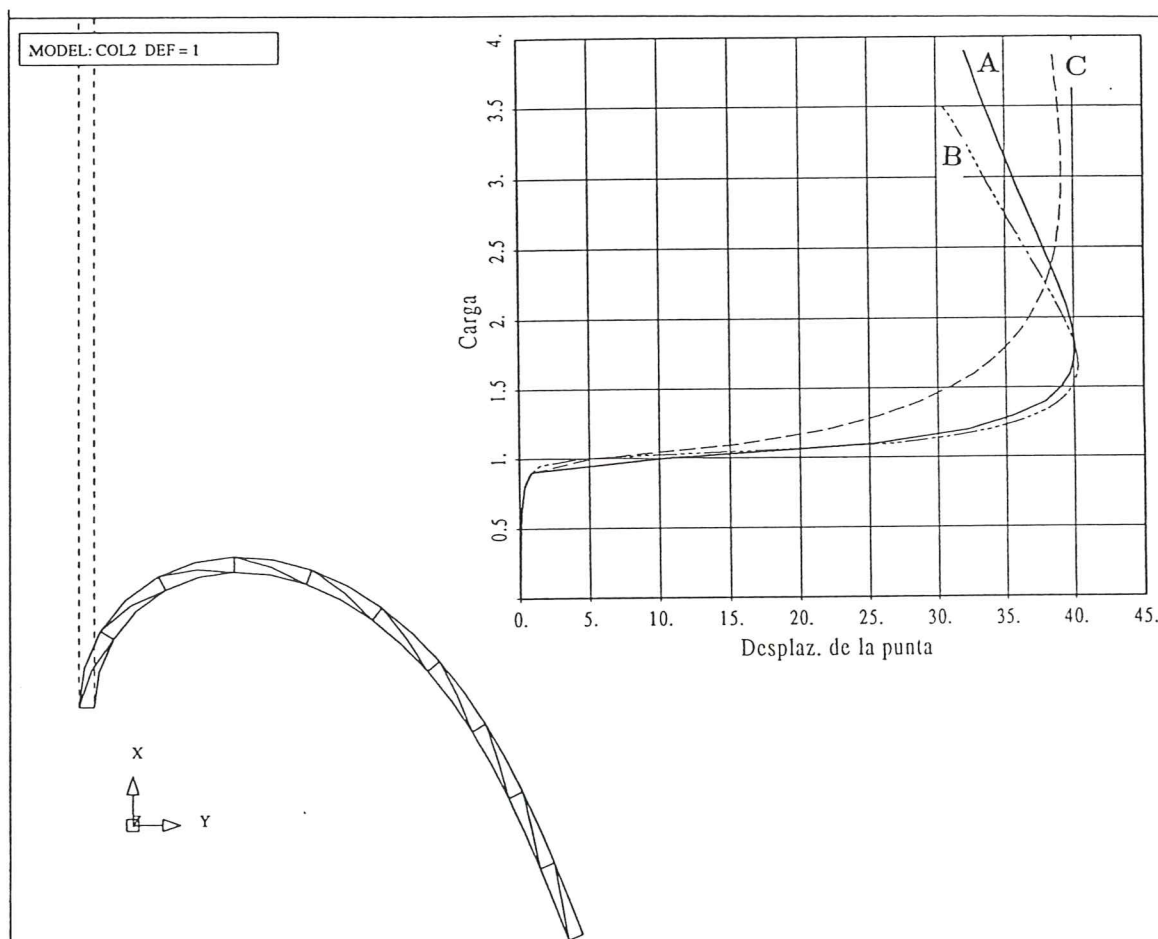


Figura 13. Columna imperfecta bajo compresión axial  
A T6SD, B T6IA1, C T6IA2

## 6.2 Enrollado de una viga placa

Una viga esbelta empotrada-libre es sometida a un momento flector en el extremo libre y se deforma hasta convertirse en una circunferencia. Para las características geométricas y materiales, el momento teórico necesario para llegar a una configuración circular es  $2\Pi$ . Se ha utilizado una estrategia de avance de desplazamientos impuestos (en este caso la rotación del borde libre) y se ha medido el momento necesario para llegar a una rotación de  $2\Pi$ , como se muestra en la Fig.14 para las modelizaciones mediante triángulos y cuadriláteros. Los resultados se presentan en la Tabla 5 normalizados respecto del valor teórico.

<i>Q4ID</i>	<i>TLNC</i>	<i>T3IJ</i>	[ <i>T6SD T6SH T6ID</i> ]	<i>T6IA(1)</i>	<i>T6IA(2)</i>
0.990	1.001	0.989	1.002	0.980	1.016

Tabla 5. Valor del momento para un giro de  $2\Pi$

## 6.3 Torsión de una cinta

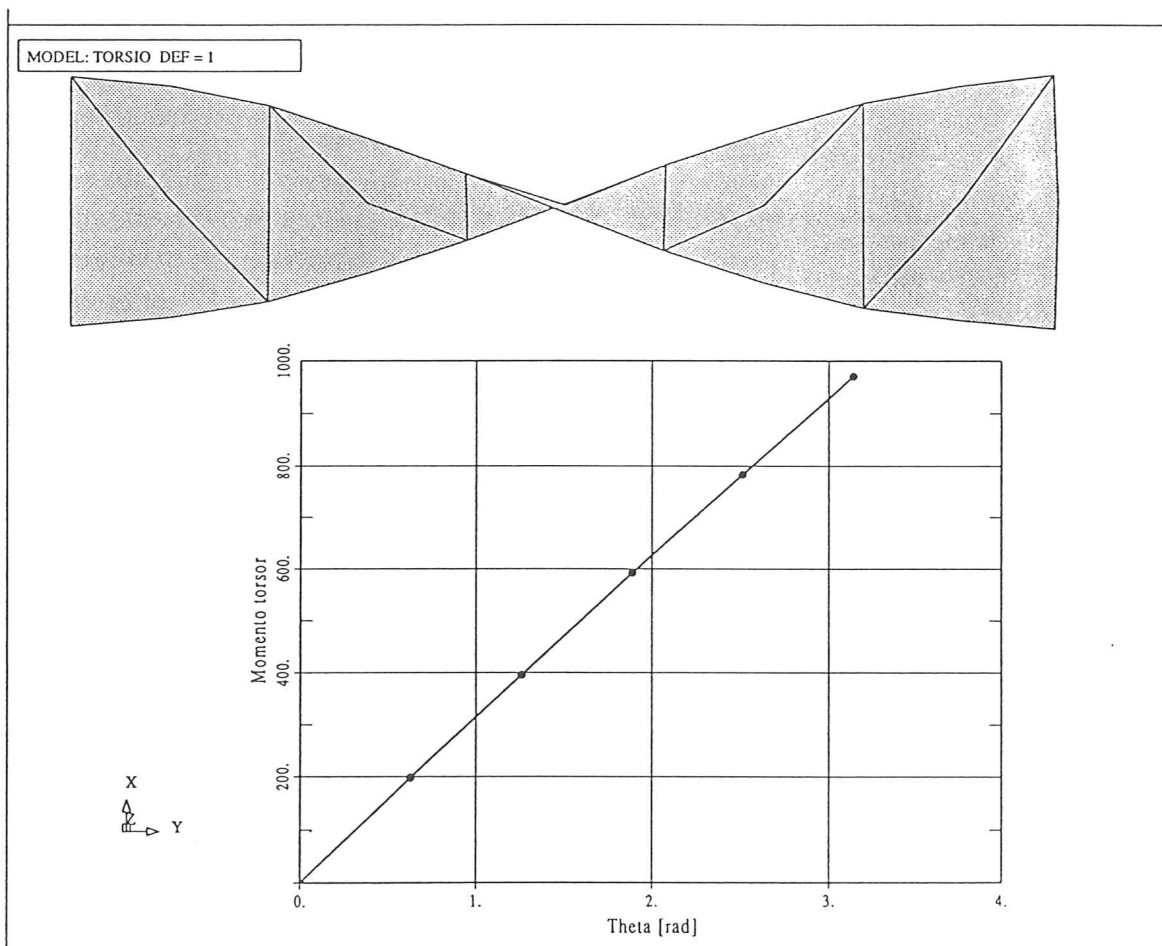
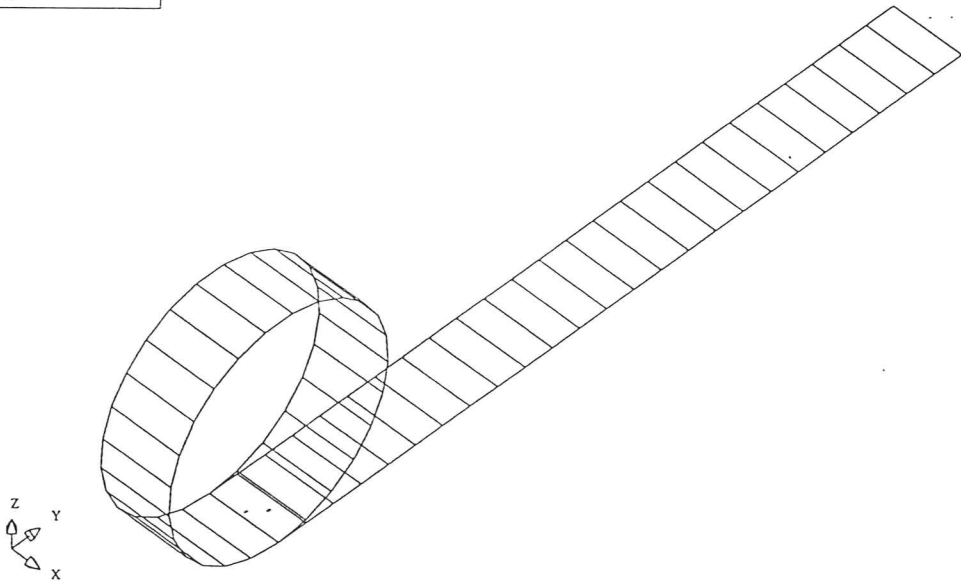


Figura 15. Torsión de una cinta, configuración final

Este ejemplo muestra la capacidad de la formulación para modelar sin problemas grandes desplazamientos y rotaciones. Una cinta empotrada-libre está sometida a

MODEL: ROLL  
L: Roll-up of a clamp  
STEP: 10 TIME: 0  
NODAL DISPLACE ALL  
MAX = 10 MN = 0  
FACTOR = 1



MODEL: ROLL  
L: Roll-up of a clamp  
STEP: 5 TIME: 0  
NODAL DISPLACE ALL  
MAX = 10 MN = 0  
FACTOR = 1

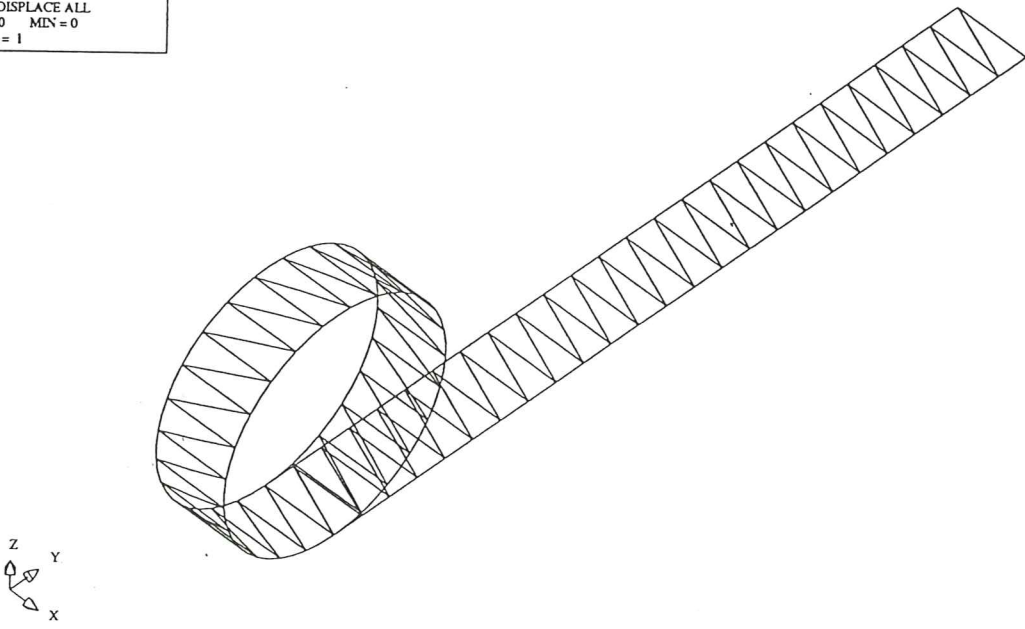
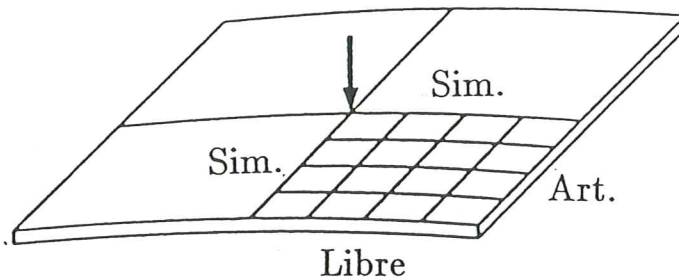


Figura 14. Enrollado de una placa

un momento torsor aplicado en el centro del borde libre y se la lleva mediante 5 incrementos de desplazamientos hasta la posición final, giro de  $180^\circ$ . En la Fig.15 se muestra la configuración final para una malla de 10 elementos triangulares de 6 nodos (T6SD,T6SH2,T6ID,T6IH2,T6IA1,T6IA2).

#### 6.4 Lámina cilíndrica bajo carga puntual



$$E = 3102.7 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0.3$$

$$R = 2540 \text{ mm}$$

$$L = 254 \text{ mm}$$

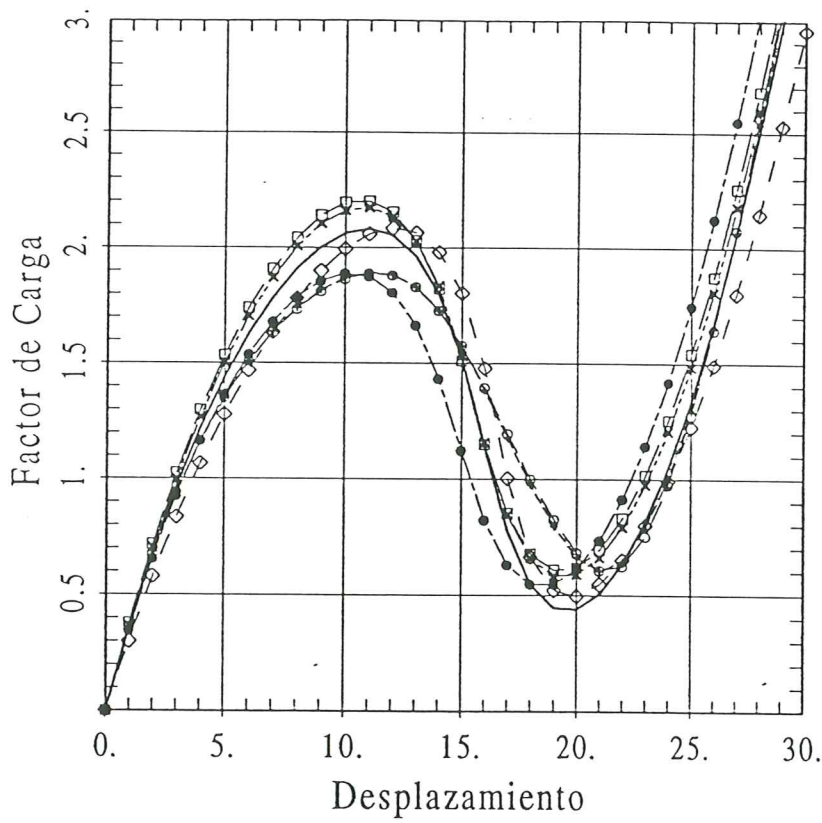
$$h = 12.7/6.35 \text{ mm}$$

$$\theta = 0.1 \text{ rad}$$

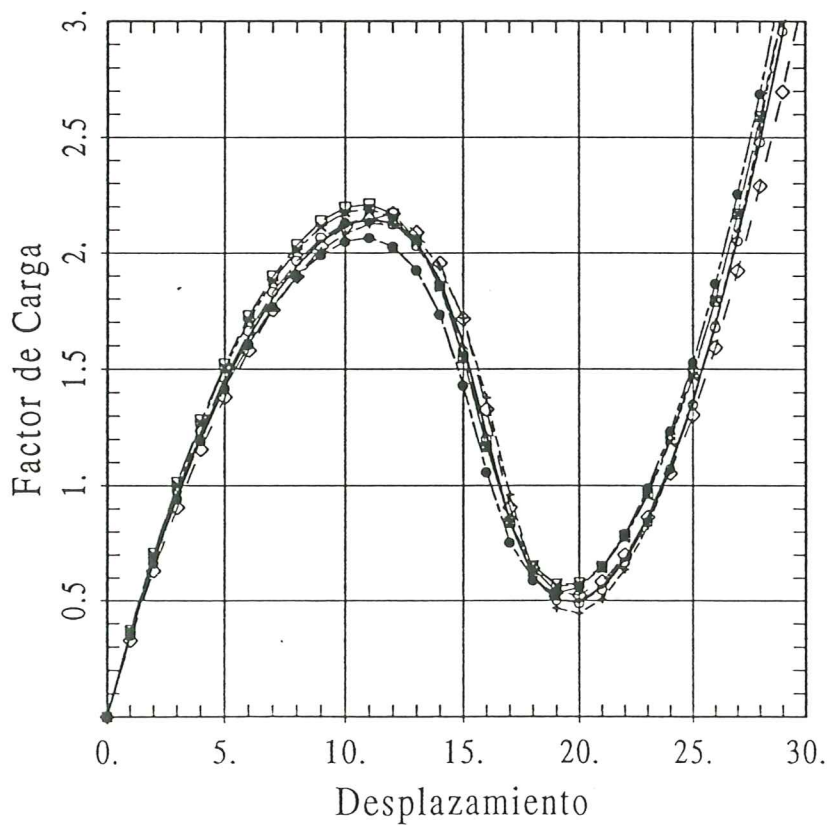
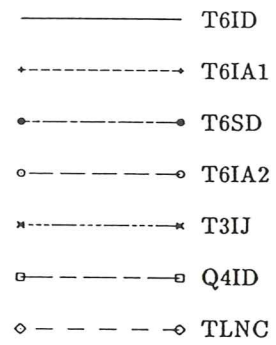
Figura 16. Lámina cilíndrica bajo carga puntual, geometría

En la Fig.16 se muestra la geometría de una lámina cilíndrica articulada en dos bordes y libre en los otros, bajo la acción de una carga puntual en el centro. Se han considerado dos esbelteces (diferentes espesores) las que conducen a diferentes comportamientos de la estructura. La lámina mas gruesa tiene un comportamiento de punto límite con una rigidización posterior. La lámina delgada presenta también un comportamiento de punto límite pero posteriormente presenta además un 'snap back' que corresponde a un punto límite en una componente de desplazamiento.

Para la lámina mas gruesa se han considerado dos mallas,  $5 \times 5$  y  $7 \times 7$  nudos.

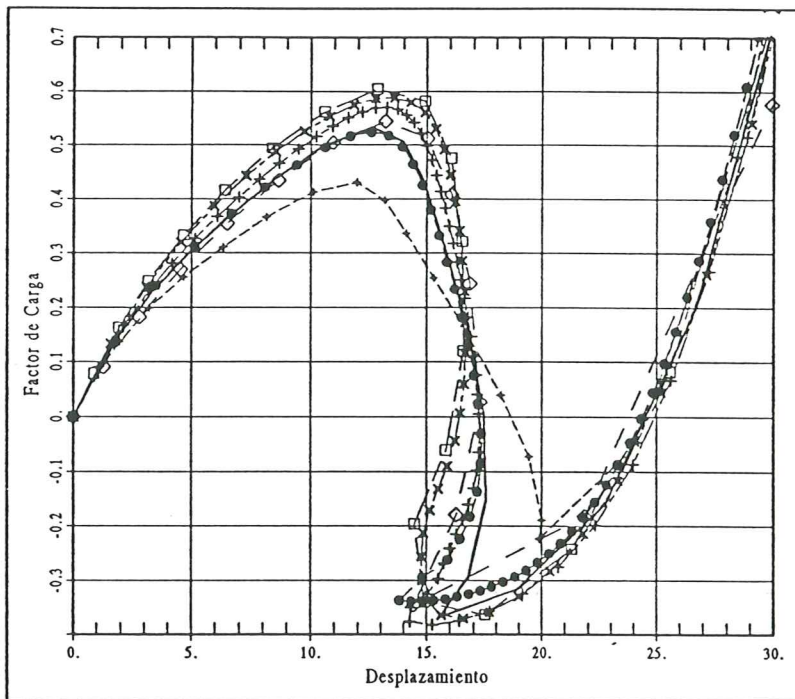


(a)

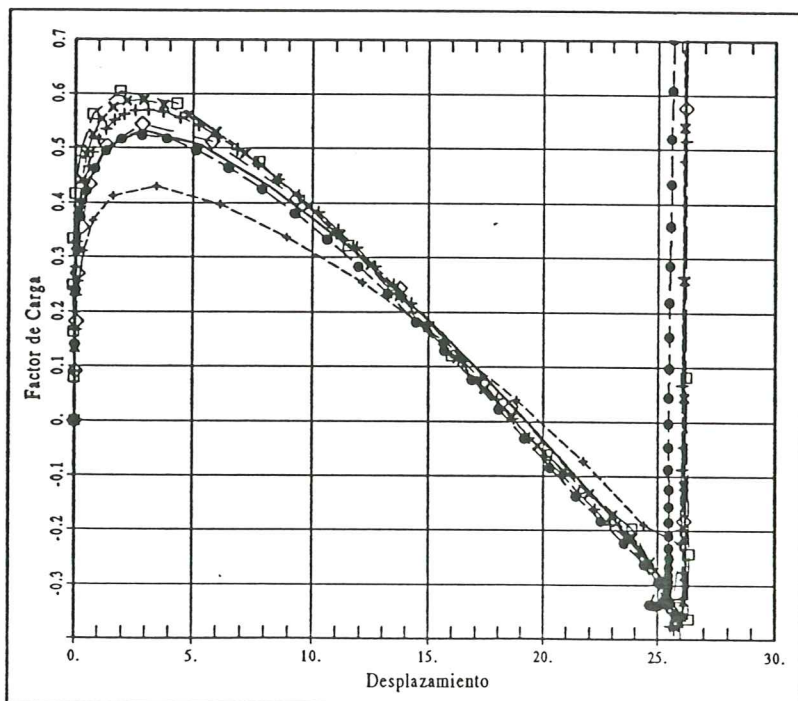
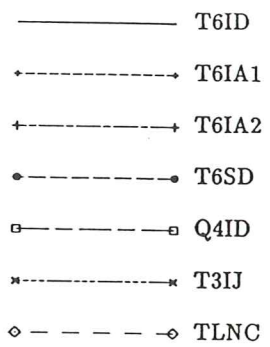


(b)

Figura 17. Lámina cilíndrica bajo carga puntual,  $h=12.7$ . a) malla  $5 \times 5$ . b) malla  $7 \times 7$ .



(a)



(b)

Figura 18. Lámina cilíndrica bajo carga puntual,  $h=6.35$ .  
 a)desplazamiento del centro. b)desplazamiento del borde libre.



Los resultados usando los diferentes elementos implementados sobre estas dos mallas se pueden ver en las figuras 17.a y 13.b; en la primera se aprecian importantes diferencias entre los distintos elementos, sin embargo los resultados de la segunda malla permiten predecir que refinando la malla se convergerá al mismo resultado con los distintos elementos. Puede observarse que los elementos Q4ID y T3IJ dan resultados muy similares; lo mismo ocurre con las dos versiones de membrana en deformaciones impuestas (T6IA1 y T6IA2), en tanto que el TLNC resulta un poco mas flexible que los primeros y similar al T6ID.

Para la lámina mas delgada, en la Fig.18 se presentan los resultados para la malla de  $7 \times 7$  correspondientes a los desplazamientos del centro del cilindro y del centro del borde libre. Puede notarse que los elementos Q4ID y T3IJ dan resultados muy similares y los elementos T6SD y T6ID dan resultados casi coincidentes.

## 7- SIMULACIONES NUMERICAS CON NO LINEALIDAD MATERIAL

En este apartado se presentan algunos ejemplos donde se ha considerado comportamiento no lineal en el material. El objetivo es validar la implementación realizado y no el modelo constitutivo, lo que ya ha sido hecho en el trabajo original (Ref.[5]).

### 7.1 Placa perforada bajo tracción simple

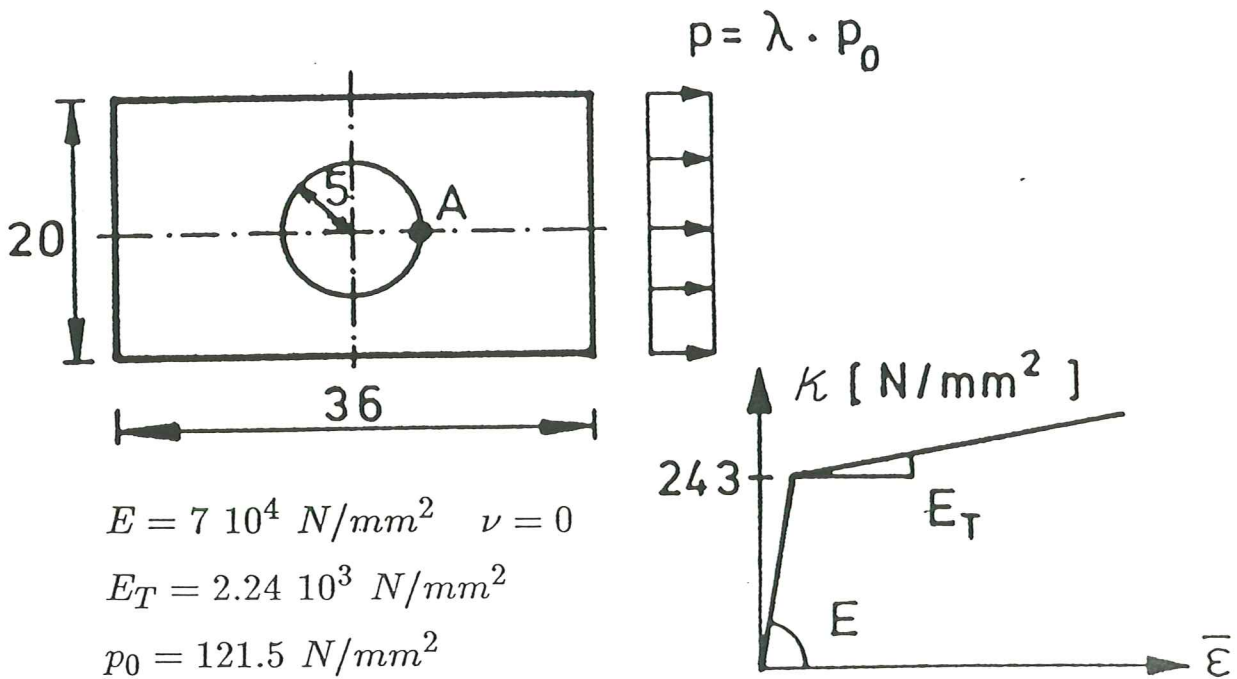


Figura 19. Placa traccionada con agujero. Geometría y material

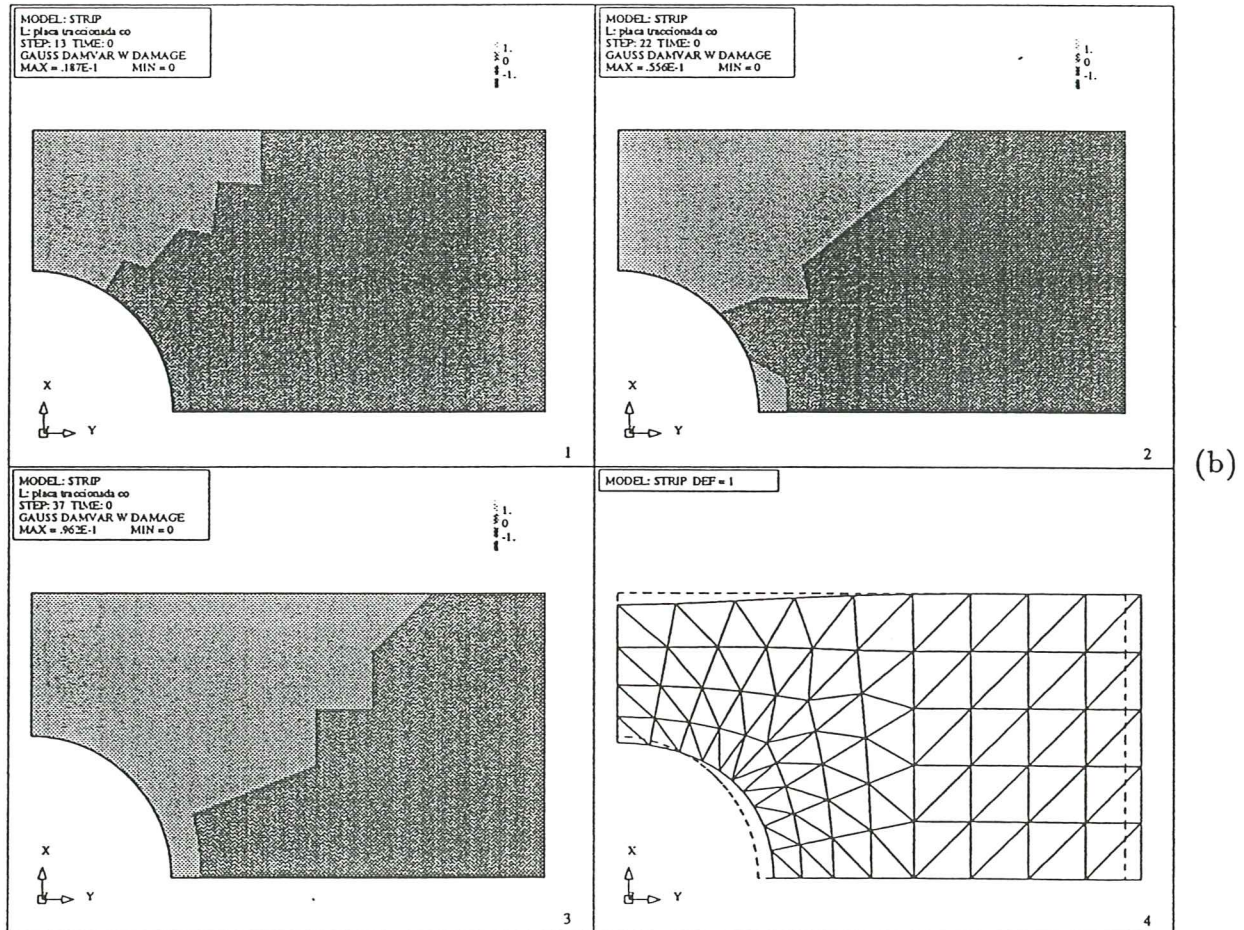
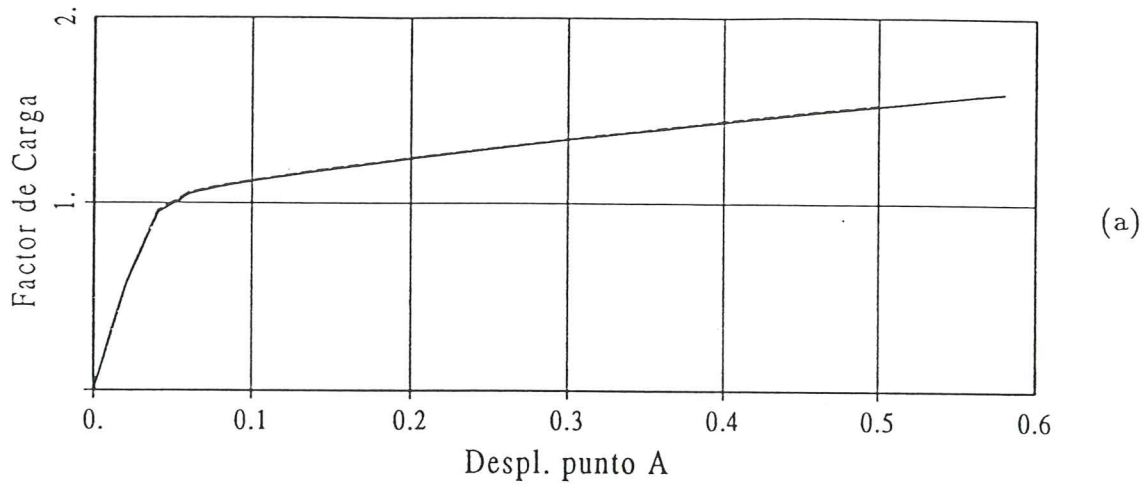


Figura 20. Placa traccionada con agujero.  
 (a) triángulos ——— ; cuadriláteros - - - - - ;  
 (b) Zonas plastificadas para  $\lambda = 1.12$ ,  $\lambda = 1.30$  y  $\lambda = 1.58$

Como primer ejemplo se ha considerado un estado plano de tensión correspondiente a una placa rectangular con un agujero circular bajo tracción compuesto de un material con endurecimiento isótropo (ver Fig.19). Se ha discretizado sólo un cuarto de la estructura debido a la simetría; para ello se han utilizado dos mallas, una de cuadriláteros (125 elementos) y una de triángulos de seis nodos (120 elementos). En la Fig.20.a se muestra el desplazamiento del punto A en función del factor de carga  $\lambda$ . Los resultados con ambas mallas son coincidentes con los presentados en la Ref.[12]. En la Fig.20.b se muestra el avance de la zona plastificada para diferentes estados y la configuración deformada para el último estado de carga

## 7.2 Placa cuadrada bajo carga puntual

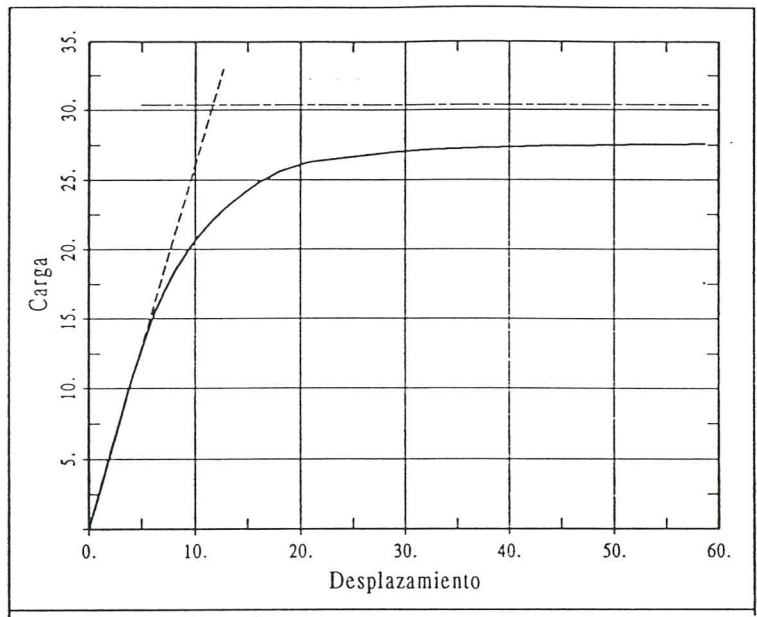
Este ejemplo ha sido tomado de la Ref.[5], y se ha analizado considerando linealidad geométrica y comportamiento elastoplástico perfecto. Los datos geométricos y del material son  $L = 32$ ,  $h = 0.5$ ,  $E = 7 \times 10^6$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $\kappa_0 = 243$ . Debido a la linealidad geométrica el problema resulta puramente flexional. Teniendo en cuenta la simetría se ha discretizado en forma uniforme un cuarto de la placa con 256 elementos de 4 nodos. En la Fig.21.a se ha graficado el desplazamiento vertical del centro de la placa en función del valor de la carga en tanto que en Fig.21.b se muestran las zonas plastificadas para diferentes valores de la carga. Los resultados coinciden muy bien con los de la referencia.

## 7.3 Cubierta cilíndrica bajo presión uniforme

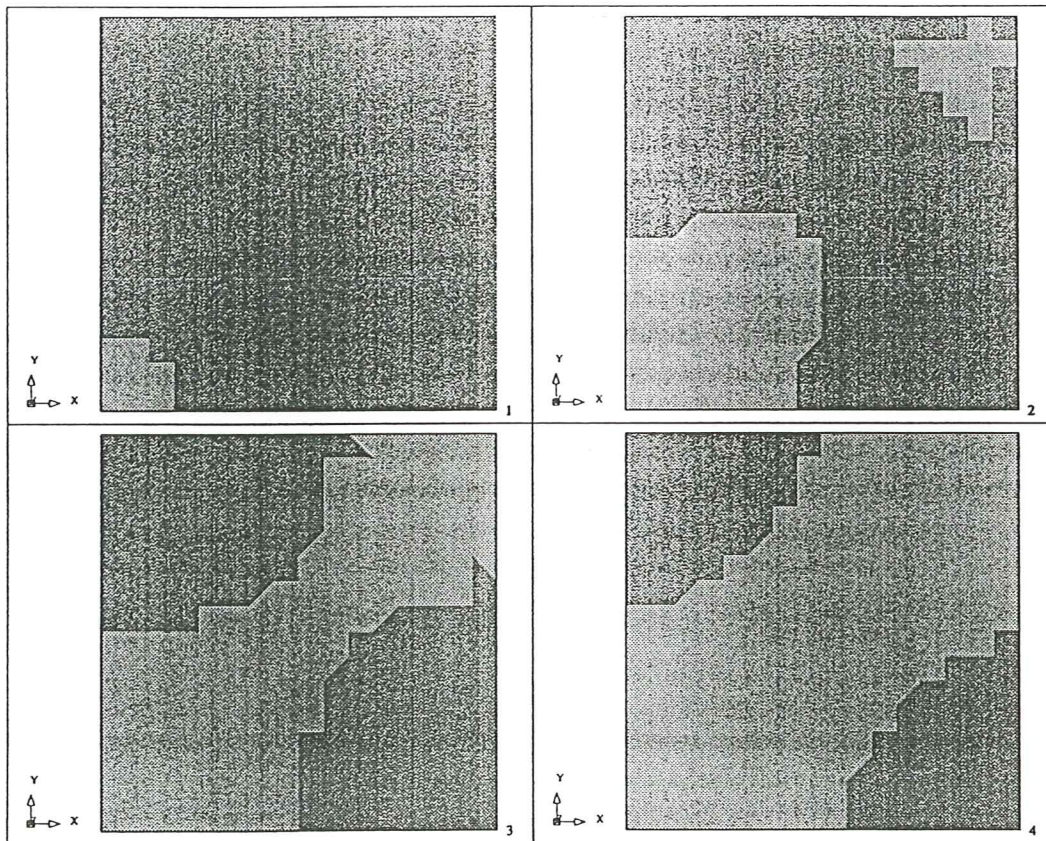
Se presenta aquí la misma estructura del subapartado 5.3.1 pero considerando ahora no linealidad tanto en la cinemática como en el comportamiento material. Las propiedades del material son  $E = 2.1 \cdot 10^4$ ,  $\nu = 0$ ,  $\kappa_0 = 4.2$ , con comportamiento elasto-plástico perfecto y en lugar de peso propio supondremos una presión uniforme sobre toda la superficie. Se ha utilizado una discretización uniforme de 81 nodos que corresponden a 64 cuadriláteros o 32 triángulos de 6 nodos. En la Fig. 22 se muestra el desplazamiento del borde libre (normalizado respecto al espesor de la lámina) para ambos tipos de elementos. En la Tabla 6 se muestran los porcentajes de plastificación en función de el desplazamiento para ambas mallas.

$u_3^B/h$	T6ID		Q4ID	
	%Plast.	$\lambda \times 10^2$	%Plast.	$\lambda \times 10^2$
0.4	0.0	0.1285	0.0	0.1311
0.8	12.5	0.2039	10.2	0.2120
1.2	38.5	0.2314	56.3	0.2411
1.6	58.3	0.2343	67.6	0.2413
2.0	63.5	0.2316	72.3	0.2365

Tabla 6. Valores de plastificación en función del desplazamiento



(a)



(b)

Figura 21. Placa cuadrada bajo carga puntual. (a) Desplazamiento del punto central. Límite superior plástico analítico - · - · - · - ; Elasticidad lineal - - - - -  
 (b) Zonas plastificadas para  $P = 18.5$ ,  $P = 25.6$ ,  $P = 26.3$  y  $P = 27.0$

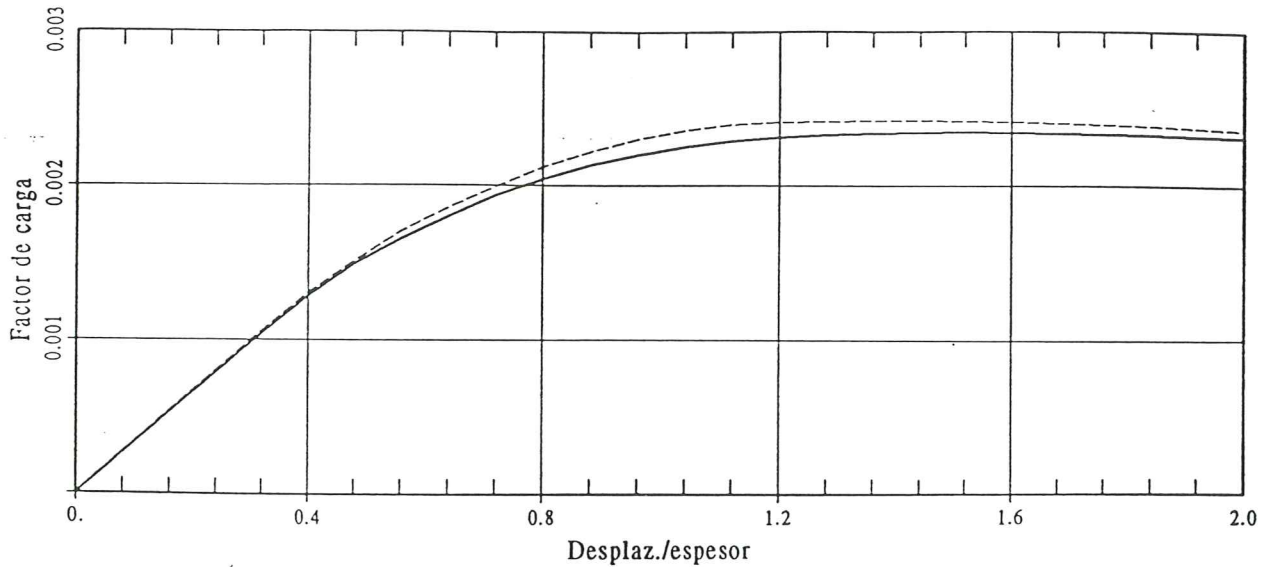


Figura 22. Cubierta cilíndrica elasto-plástica  
T6ID ——— ; Q4ID - - - - ;

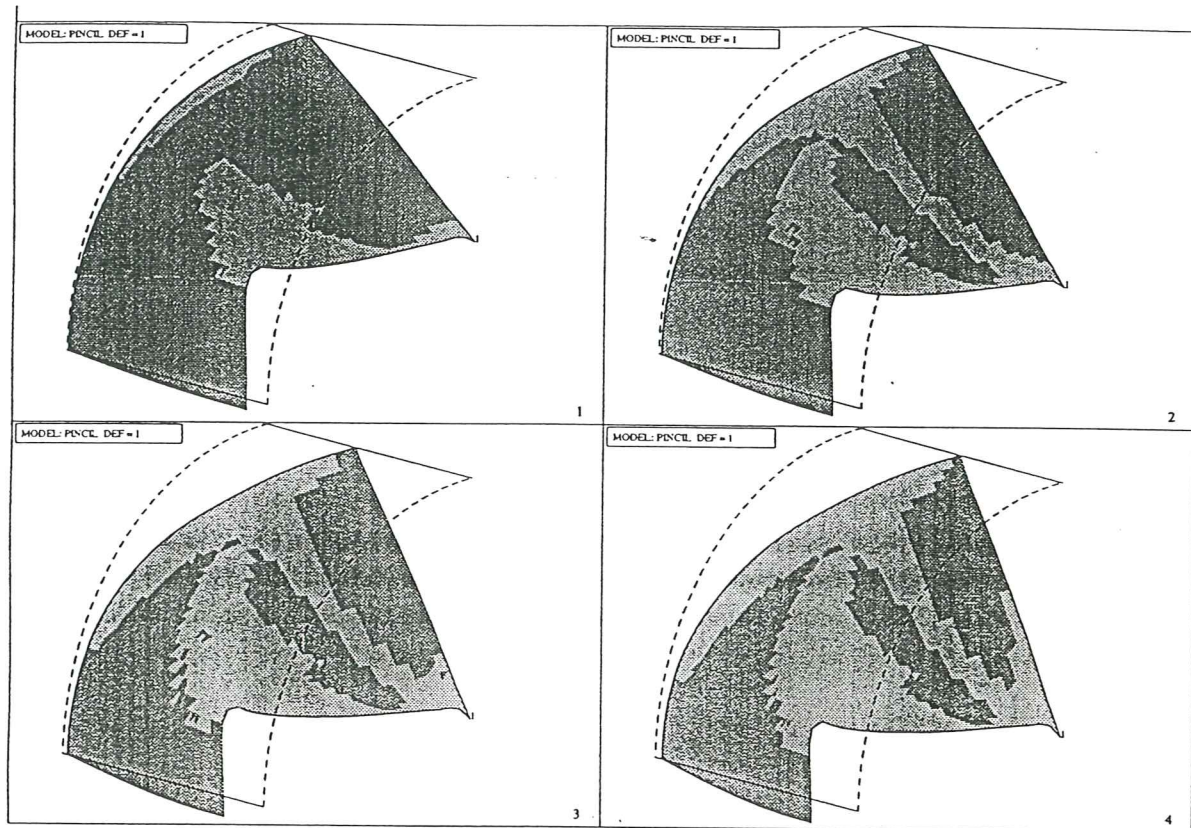
#### 7.4 Cilindro Pinchado

Un cilindro completo apoyado en paredes rígidas en sus extremos es sometido en su sección media a dos cargas puntuales diametralmente opuestas. Las características geométricas del cilindro son: Longitud total  $2L=180$ , diámetro  $D=600$  y espesor  $h=3$ . Las propiedades del material son  $E = 3000$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\kappa_0 = 24.3$ ,  $\kappa' = 50$ . La estructura ha sido tomada de la Ref.5 pero aquí se ha supuesto un endurecimiento isotrópico mas bajo. Para la modelización se ha discretizado sólo un octavo del cilindro donde se han dispuesto 1024 elementos cuadriláteros igualmente espaciados. En la Fig.22.b se ha graficado el valor de la fuerza puntual en función del desplazamiento radial del punto de aplicación de la carga. Notar que el desplazamiento máximo corresponde a un 92% del radio del cilindro. En la Fig.22.a se muestran estados progresivos de deformación así como la evolución de las zonas plásticas. Los resultados son cualitativamente similares a los de la Ref.[5], sin embargo puede verse una zona elástica aislada dentro de la parte plástica que no aparece en la referencia.

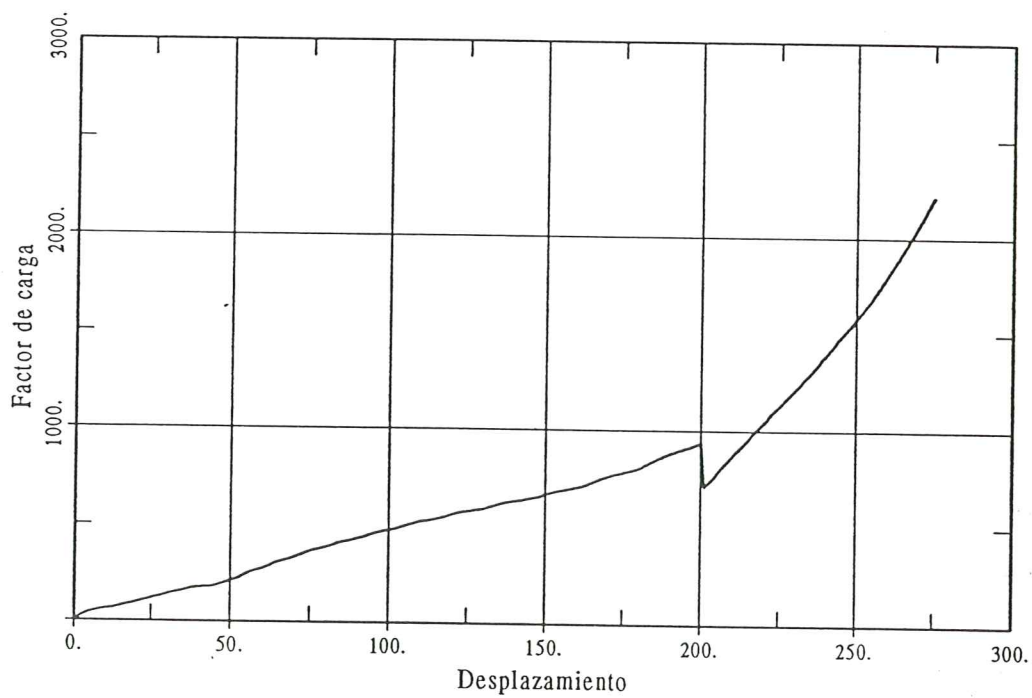
### 8- CONCLUSIONES

La conclusión más importante es que todos los elementos implementados convergen a la solución correcta cuando se refina la malla.

El elemento T3IJ presenta un comportamiento membranal pobre (corresponde al triángulo de deformación constante) pero presenta un buen comportamiento a flexión. Sin embargo debido a la interpolación del campo director, la evaluación de las fuerzas residuales y la matriz de rigidez tangente resulta mas complicada desde el punto de vista analítico. Las propiedades de convergencia no son tan buenas como en el resto de los elementos, debido tal vez a las simplificaciones introducidas en la variación del campo director.



(a)



(b)

Figura 23. Cilindro Pinchado. (a) Estructura Deformada y zonas plásticas para  $u_3 = 180$ ,  $u_3 = 225$ ,  $u_3 = 260$  y  $u_3 = 275$   
 (b) desplazamiento del punto de aplicación de la carga

El elemento TLNC presenta igualmente un comportamiento membranal pobre y un buen comportamiento flexional realizado por la simplicidad de la formulación, sin embargo los resultados no son tan promisorios como los obtenidos para el mismo elemento en el análisis de placas<sup>11</sup>.

Los elementos híbridos triangulares no presentan ventajas respecto a las formulaciones en desplazamientos, además su extensión a materiales elasto-plásticos es más complicada por lo que no parece interesante su utilización.

En general los triángulos de seis nodos son un tanto flexibles para mallas gruesas, comportamiento ya descrito para los correspondiente elementos de placa en régimen lineal en la Ref.[8]

El elemento curvo T6ID presenta problemas de bloqueo membranal (mallas gruesas). Las versiones implementadas en deformaciones impuestas (T6IA1 y T6IA2) no solucionan el problema en todos los casos. El T6IA1 presenta muchas veces un comportamiento muy flexible y el T6IA2 muestra un comportamiento excesivamente rígido en problemas dominados por la energía membranal.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a Javier Castro su valiosa colaboración en algunos aspectos de la implementación computacional. El primero de los autores está financiado por una beca post-doctoral del Ministerio de Educación y Ciencia Español.

## 9- BIBLIOGRAFÍA

- [ 1] J.C.Simo y D.D.Fox "On Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part I: Formulation and Optimal Parametrization", *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.* **72**(1989) 267-304.
- [ 2] J.C.Simo, D.D.Fox y M.S.Rifai, "On Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part II: The Linear Theory; Computational Aspects", *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.* **73**(1989) 53-92.
- [ 3] J.C.Simo, D.D.Fox y M.S.Rifai, "On Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part III: Computational Aspects of The Nonlinear Theory", *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.* **79**(1990) 21-70.
- [ 4] J.C.Simo, M.S.Rifai y D.D.Fox , "On Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part IV: Variable Thickness Shells with Through-the-Thickness Stretching", *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.* **81**(1990) 91-126.
- [ 5] J.C.Simo y J.G.Kennedy, "On Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part V. Nonlinear Plasticity: formulation and integration algorithms", *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.* **96**(1992) 133-171.
- [ 6] M.Cervera, A.Fusco y M.Galindo, OMEGA "Organized Moduli for Engineering General Analysis", CIMNE, 1991.
- [ 7] E.Oñate, O.C.Zienkiewicz, B.Suarez y R.L.Taylor, "A General Methodology for Deriving Shear-Constrained Reissner-Mindlin Plate Elements". *Int. J. Num. Methds. in Engrg.*

(1992).

- [ 8] O.C.Zienkiewicz, R.L.Taylor, P.Papadopoulos y E.Oñate "Plate Bending Elements with Discrete Constrains: New Triangular Elements". *Computers and Structures* 35(1990),505-22.
- [ 9] S.Ahmad, B.M.Irons y O.C.Zienkiewicz, "Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements ". *Int. J. Num. Methds. in Engng.* 2 (1970), 419-451.
- [10] E.Oñate, *Análisis de Estructuras por el Método de Elementos Finitos* , CIMNE, Barcelona, 1992.
- [11] E.Oñate, F.Zarate y F.Flores, "A Simple Triangular Element for Thick and Thin Plate and Shell Analysis", Second U.S. National Congress on Computational Mechanics, 16-18 agosto, 1993, a ser publicado en I.C.N.M.E.
- [12] E.Ramm y A.Matzenmiller, "Computational Aspects of Elasto-Plasticity in Shell Analysis", en *Computational Plasticity*, Ed. Owen, Hinton y Oñate, Pineridge Press, Swansea, 711-734