

CONVECCIÓN TERMOCAPILAR DE UNA BURBUJA EN MICROGRAVEDAD

TERESA SANCHO VINUESA*

y

AUGUST PALANQUES-MESTRE**

**Dept. Matemàtiques, Escola d'Enginyeria La Salle,
Universitat Ramon Llull.*

***Dept. Matemàtica Aplicada i Anàlisi,
Universitat de Barcelona.*

RESUMEN

La convección de Marangoni es el movimiento de un fluido debido a un gradiente de tensión superficial provocado por una variación de la temperatura en la frontera entre dos fluidos o en una superficie libre.

En este artículo presentaremos el efecto Marangoni estacionario sobre una burbuja de gas esférica sumergida en un líquido y sometida a un gradiente de temperatura constante. En la interficie el líquido no está en equilibrio: se mueve en la dirección donde la temperatura es más baja, mientras que la burbuja lo hace en sentido contrario. Se tratarán dos problemas: En el primero se considera la migración de la burbuja a velocidad constante bajo un gradiente de temperatura y en el segundo, la capacidad de dicho gradiente para generar una fuerza que se oponga al arrastre de la burbuja bajo un flujo externo

Se ha utilizado un esquema en diferencias finitas para la discretización del sistema de ecuaciones en derivadas parciales y se ha resuelto el sistema no lineal resultante mediante un método iterativo.

SUMMARY

Marangoni Convection is the fluid motion due to thermally induced surface tension gradient at a liquid-gas or a free surface.

In this paper the stationary Marangoni effect on a gas bubble immersed in a liquid medium with a constant temperature gradient is presented. At the interface the liquid is not in equilibrium: it moves toward the cold side, while the bubble moves in opposite direction. Two problems are considered: first, to compute the constant migration speed of the bubble under the action of a temperature gradient. And second, to find the gradient needed to maintain the bubble fixed against an external flow.

The partial differential equations are discretized by means of a finite difference method. An iterative procedure to solve the resultant nonlinear system is developed.

Recibido: Diciembre 1993

INTRODUCCIÓN

La convección termocapilar o de Marangoni es el movimiento de un fluido debido a un gradiente de tensión superficial provocado por una variación de la temperatura en la frontera entre dos fluidos o en una superficie libre. En condiciones de microgravedad, la convección de Marangoni es dominante. Su efecto puede observarse, por ejemplo, en la migración de burbujas en la dirección del gradiente de temperatura¹, en el proceso de crecimiento de cristales², o en deformaciones de una superficie libre³. Este tipo de fenómenos han cobrado especial relevancia con el procesado de materiales en un entorno orbital (crecimiento de cristales, fabricación de aleaciones y medicamentos o desgasificación de materiales fundidos). Por otro lado, se ha constatado la presencia de burbujas indeseadas en procesos de electroforesis y cierta resistencia a su eliminación por arrastre⁴.

El efecto Marangoni en un fluido incompresible queda gobernado por las ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de la temperatura acopladas, en particular, por la condición de contorno sobre la interficie. Los parámetros relevantes son el Número de Reynolds y el de Marangoni (Péclet)

$$Re = \frac{RV_{\infty}}{\nu} \quad \text{y} \quad Mg = \frac{RV_{\infty}}{\chi} \quad (1)$$

donde R es el radio de la burbuja (longitud característica), V_{∞} es la velocidad de la burbuja (velocidad característica), ν es la viscosidad cinemática del fluido y χ es la difusividad térmica (cociente entre la conductividad térmica y el calor específico, por la densidad).

En este artículo presentaremos el efecto Marangoni estacionario sobre una burbuja de gas esférica, que no variará ni su forma ni su volumen, cuya superficie se supone adiabática, sumergida en un líquido de extensión infinita. Se mantiene un gradiente de temperatura constante lejos de la burbuja que provoca sobre ésta cambios locales de tensión superficial σ (que suponemos función lineal de la temperatura). En consecuencia, aparece una fuerza tangencial que da lugar a movimientos de flujo tanto en el exterior como en el interior de la misma. En la interficie, el líquido no está en equilibrio: se mueve en la dirección donde la temperatura es más baja, mientras que la burbuja lo hace en sentido contrario.

En concreto, trataremos dos problemas. En uno (problema 1), ya abordado en la referencia [5], se considera la migración de la burbuja a velocidad constante bajo un gradiente de temperatura. En el otro (problema 2), la capacidad de dicho gradiente para generar una fuerza que se oponga al arrastre de la burbuja bajo un flujo externo. En ambos problemas se calibra la influencia del efecto Marangoni sobre la migración de la burbuja. En el primero, se supone el líquido en reposo, con un gradiente de temperatura determinado y se establece la velocidad de migración. En el segundo, la burbuja permanece inmóvil en el interior de un flujo y se busca el gradiente de temperatura que mantiene tal situación.

PLANTEAMIENTO ANALÍTICO

Suponiendo fijado el sistema de referencia sobre la burbuja, el objetivo del análisis es determinar la distribución de temperaturas y el flujo del fluido a su alrededor.

Por la simetría respecto del eje z es conveniente usar un sistema de referencia en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) con el origen en el centro de la burbuja. El fluido se moverá en la dirección del eje z negativo. Debido a que consideramos situaciones que presentan simetría axial respecto al eje z , los campos de temperatura, presión y velocidad son independientes de ϕ . De este modo el problema puede ser tratado bidimensionalmente introduciendo una función de corriente Ψ y una velocidad escalar Ω .

Ψ función de corriente tal que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} &= -r^2 \sin \theta \, v_r \\ \frac{\partial \Psi}{\partial r} &= r \sin \theta \, v_\theta\end{aligned}\quad (2)$$

donde v_r y v_θ son, respectivamente, las componentes radial y tangencial de la velocidad.

Ω vorticidad escalar definida por

$$\vec{\omega} = \text{rot} \vec{v} = \frac{\Omega(r, \theta)}{r \sin \theta} \vec{u}_\phi \quad (3)$$

Introduciendo estas funciones en las ecuaciones fundamentales tenemos:

Relación entre Ψ y Ω

$$\Omega(r, \theta) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \cot \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad (4)$$

Ecuación de Navier -Stokes

$$\begin{aligned}\frac{Re}{\sin \theta} \left[\left(2 \frac{\Omega}{r} - \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \theta} - 2 \Omega \cot \theta \right) \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right] = \\ = r^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \theta^2} - \cot \theta \frac{\partial \Omega}{\partial \theta}\end{aligned}\quad (5)$$

Ecuación de la energía

$$Mg \left[k + \frac{\partial T}{\partial r} v_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} v_\theta \right] = \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cot \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \quad (6)$$

Es necesario, en este punto, hacer referencia a la normalización de las ecuaciones. Siendo el radio de la burbuja la longitud característica y eligiendo la temperatura

característica (T_0) de forma que el gradiente de temperatura sea la unidad, la velocidad característica (V_0) se ha fijado igual a V_∞ . De esta forma las condiciones de contorno se mantienen fijas y aparece un nuevo parámetro λ^6 que determina el acoplamiento de la ecuación de Navier-Stokes y de la temperatura, y que es inversamente proporcional a la velocidad con que escapa la burbuja. Con esta normalización, en la ecuación de la energía es $k = 1$ para el problema 1 y $k = 0$ para el problema 2.

Condiciones de contorno:

En el infinito

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\Psi}{r^2} = \frac{1}{2} \sin^2 \theta ; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \Omega = 0 ; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T}{r} = \cos \theta \quad (7)$$

Sobre la burbuja

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = 0 ; \quad \Omega = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \lambda \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} ; \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (8)$$

$$\text{donde } \lambda = \frac{T_0 \beta}{\mu V_\infty} ; \quad \beta = \frac{\partial \sigma}{\partial T}$$

Sobre el eje de simetría

$$\Psi = 0 ; \quad \Omega = 0 ; \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad (9)$$

El objetivo del problema es determinar λ , es decir, la relación entre la velocidad de la burbuja (o del fluido en el infinito) y el gradiente de temperatura aplicado. Ello se hace anulando la suma de fuerzas sobre la burbuja. Considerando la fuerza del fluido sobre la burbuja y teniendo en cuenta que sobre cualquier región de su superficie actúan dos fuerzas, una tangencial, dada por el gradiente de la tensión superficial y una normal, dada por $2\sigma/R$ se deduce, después de imponer las condiciones de contorno, la siguiente expresión para la resultante de fuerzas sobre la burbuja:

$$F(\lambda) = 2\pi R^2 \int_0^\pi \left(Re P_\theta - 2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - 2\lambda T \right) \cos \theta \sin \theta \, d\theta \quad (10)$$

donde P_θ es la presión del fluido sobre la burbuja:

$$Re P_\theta = \frac{Re}{2} - \frac{Re}{2} v_\theta^2 + \int_0^\theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Omega}{\partial r} \, d\theta \quad (11)$$

Consecuentemente el valor del parámetro λ viene dado por la siguiente expresión:

$$\lambda = \frac{-\frac{1}{2} \int_0^\pi \sin \theta \frac{\partial \Omega}{\partial r} \, d\theta + \int_0^\pi \left(-\frac{Re}{2} v_\theta^2 - 2 \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \cos \theta \sin \theta \, d\theta}{2 \int_0^\pi T \cos \theta \sin \theta \, d\theta} \quad (12)$$

RESOLUCIÓN NUMÉRICA

Para la resolución numérica del problema se ha utilizado el método de las diferencias finitas sobre una red de puntos adecuada a la geometría del problema. Tal como se muestra en la Figura 1, se ha elegido la malla de puntos con paso variable en la dirección radial y constante en la angular, puesto que los gradientes de temperatura y velocidad son más grandes cerca de la superficie de la burbuja. De esta manera:

$$\begin{aligned}
 \Delta\theta &= \frac{\pi}{N-1} & N &= \text{no. de radios} \\
 \theta_i &= (i-1)\Delta\theta & i &= 1 \div N \\
 \Delta r_j &= \frac{r_j \Delta\theta}{1 - \Delta\theta} & j &= 1 \div M \\
 r_{j+1} &= \left(1 + \frac{\pi}{N-1-\pi}\right)^j & M &= \text{no. de divisiones del radio}
 \end{aligned} \tag{13}$$

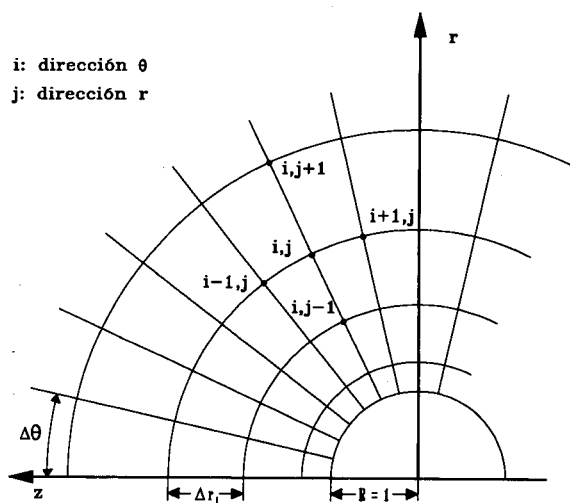


Figura 1. Malla de puntos alrededor de la burbuja.

Para determinar, sea la velocidad de la burbuja en el infinito (problema 1), sea la velocidad del fluido en movimiento (problema 2) debe calcularse numéricamente el valor del parámetro λ . Consecuentemente, primero debe resolverse un sistema de ecuaciones no lineal en el campo de velocidades para utilizar, después, la ecuación (12) y determinar el parámetro en cuestión. Ambos procedimientos se combinan en un método iterativo conjunto sobre las velocidades y el parámetro λ .

Tal como se muestra en el apéndice se trata de resolver un sistema de ecuaciones no lineal con la siguiente estructura:

$$\begin{aligned}
A(v_r, v_\theta, Mg)\vec{T} &= \vec{f} \\
B(v_r, v_\theta, Re)\vec{\Omega} &= \vec{g}(\lambda, T) \\
C\vec{\Psi} &= \vec{\Omega}
\end{aligned}$$

Estas ecuaciones están acopladas por las condiciones de contorno sobre la burbuja de forma que, de hecho, debe resolverse un sistema del tipo:

$$\begin{bmatrix} H_1 & D_1 & 0 & \dots & 0 \\ C_2 & H_2 & D_2 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & & C_{M-2} & H_{M-2} & D_{M-2} \\ 0 & & 0 & C_{M-1} & H_{M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \dots \\ T_{M-2} \\ T_{M-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_{M-2} \\ k_{M-1} \end{bmatrix} \quad T_j = \begin{bmatrix} T_{1j} \\ T_{2j} \\ \dots \\ T_{Nj} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{C}_2 & \tilde{H}_2 & \tilde{D}_2 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & & \tilde{C}_{M-2} & \tilde{H}_{M-2} & \tilde{D}_{M-2} \\ 0 & & 0 & \tilde{C}_{M-1} & \tilde{H}_{M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \dots \\ \Omega_{M-2} \\ \Omega_{M-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1(\Delta T)\lambda + m\Psi_2 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Omega_j = \begin{bmatrix} \Omega_{1j} \\ \Omega_{2j} \\ \dots \\ \Omega_{Nj} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hat{C}_2 & \hat{H}_2 & \hat{D}_2 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & & \hat{C}_{M-2} & \hat{H}_{M-2} & \hat{D}_{M-2} \\ 0 & & 0 & \hat{C}_{M-1} & \hat{H}_{M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \dots \\ \Psi_{M-2} \\ \Psi_{M-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_2 \\ \dots \\ \Omega_{M-2} \\ \Omega_{M-1} \end{bmatrix} \quad \Psi_j = \begin{bmatrix} \Psi_{1j} \\ \Psi_{2j} \\ \dots \\ \Psi_{Nj} \end{bmatrix}$$

El procedimiento seguido para la obtención del parámetro λ es el siguiente:

1. Inicializamos las constantes que determinan las características del fluido (Re, Mg). Fijamos arbitrariamente una primera aproximación de λ y asignamos a las componentes de la velocidad la solución analítica en el caso $Re = 0$. $Mg = 0$.
2. La resolución del sistema (15) —que ahora es lineal— mediante un método de Gauss especialmente diseñado para matrices escasas con estructura banda⁷, permite calcular el campo de temperaturas. El orden del sistema es $(M-1)N$.
3. Se calcula la función de corriente y la vorticidad escalar resolviendo (16) y (17) de forma análoga al caso anterior. En este caso, con el propósito de obtener una matriz con estructura banda, se construye el vector incógnitas con las variables Ψ y Ω intercaladas $\{\Omega_1, \Psi_2, \Omega_2, \dots, \Psi_{M-1}, \Omega_{M-1}\}$. El orden de este sistema es $2(M-1)N - N = (2M-3)N$.
4. Conocidos los valores de Ψ en todos los puntos de la malla, se determina el nuevo valor de v_r y v_θ mediante (2).
5. Finalmente se calcula el valor del parámetro a partir de (12).
6. El procedimiento se repite iterativamente hasta obtener el grado de precisión deseado.

RESULTADOS

El problema se ha resuelto numéricamente sobre un ordenador SUN-4. Se han determinado las dimensiones de la red de puntos mediante un compromiso entre el tiempo de cálculo, capacidad de memoria y una malla de puntos suficientemente densa que garantice la precisión de resultados.

- Divisiones del semicírculo: $N = 47$
- Ángulo de separación entre divisiones: $\Delta\theta = \pi/(N - 1)$
- Radio máximo en el infinito: $R_\infty = 10.32$
- Número de radios: $M = 35$

Si los efectos de transporte por convección y la viscosidad son despreciables ($Mg = 0, Re = 0$) la solución analítica es $\lambda = 2$ (definiendo otras magnitudes características, Young¹ determinó $V_\infty = 1/2$).

Se ha determinado el valor del parámetro λ a partir de una aproximación inicial λ_0 con distintos valores de Re y Mg . El valor del parámetro λ demuestra ser poco dependiente de la viscosidad del fluido (Re), y por ello, en la Figura 2, se presentan los resultados obtenidos fijando $Re = 0$.

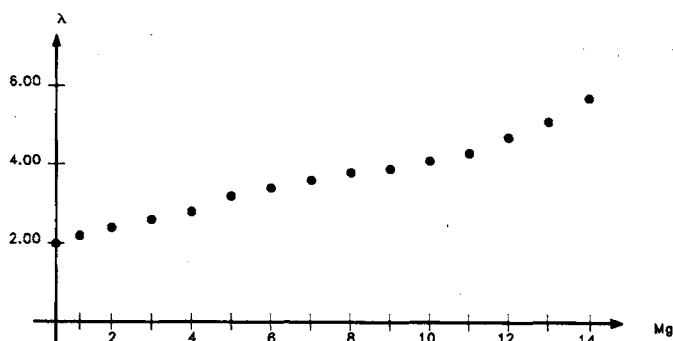


Figura 2. Valor del parámetro λ .

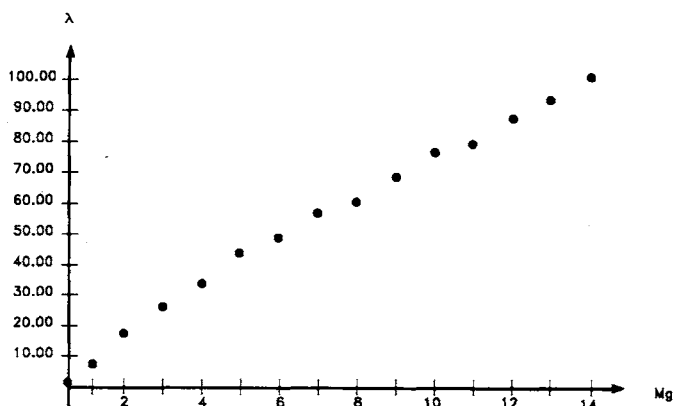


Figura 3. Valor del parámetro G .

La velocidad de convergencia depende directamente de los valores de Re y Mg que marcan claramente la no-linealidad del sistema. Así, a medida que aumenta el valor de Mg disminuye considerablemente la velocidad de convergencia, aunque no de la misma forma en los dos problemas. En el primero, para valores de Mg superiores a 15 no se obtiene convergencia. Sin embargo, en el segundo se obtiene convergencia para valores de Mg muy superiores.

CONCLUSIONES

Se ha calculado numéricamente la velocidad con que se escapa la burbuja bajo el efecto de un gradiente de temperatura (problema 1), y el efecto de tal gradiente oponiéndose al arrastre de un flujo (problema 2).

J. Szymczyk⁵ resolvió el problema 1 con la normalización clásica propuesta por Young y determinó el valor de V_∞ hallando el cero de una función $G(V_\infty) = 0$ combinando el método de la secante y el de Müller. En este artículo se han confirmado los resultados utilizando otra normalización que evita la resolución de una ecuación no lineal tras el proceso iterativo (se tiene una expresión explícita para el parámetro λ). El problema 2 no se ha abordado hasta la fecha.

Observando la tabla de resultados, se aprecia que, conforme crece el Número de Marangoni, lo hace el valor del parámetro λ . En otras palabras, para mantener una velocidad de migración (problema 1), u oponerse a un determinado flujo de arrastre (problema 2), hacen falta gradientes de temperatura cada vez mayores; o viceversa, con un gradiente dado, la velocidad de migración obtenida o el flujo de arrastre sostenidos son cada vez menores. En resumen, la influencia del efecto termocapilar decrece con el aumento del Número de Marangoni.

Por otro lado, es patente que, si bien para $Mg = 0$ los dos problemas son equivalentes, para valores crecientes del Número de Marangoni, la capacidad termocapilar para sostener una burbuja frente al arrastre de un flujo es un orden de magnitud menor que su capacidad de arrastre sobre la burbuja.

Desde un punto de vista numérico, cabe señalar que la utilización de un esquema en diferencias finitas con una malla adecuada al problema, combinada con la linealización de las ecuaciones y la posterior iteración sobre velocidades y, en su caso, sobre el parámetro que gobierna el acoplamiento termocapilar, demuestra ser eficiente para valores moderados de los parámetros que marcan la no-linealidad (Mg y Re). Se ha observado que el crecimiento de dichos parámetros conlleva un aumento del número de iteraciones necesarias para obtener un grado de precisión razonable; más allá de ciertos valores de Mg y Re (que dependen del problema tratado) no se obtiene convergencia. De hecho, en el problema 1 diverge para valores de Mg superiores a 14 y, sin embargo, el problema 2 converge para valores de Mg entre 250 y 300.

APÉNDICE: Discretización de las EDPs

Las expresiones de las derivadas parciales de una función cualquiera $f(r, \theta)$, con un error de truncamiento de segundo orden, son las siguientes:

En la dirección radial:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{i,j} &= \frac{\Delta r_{j-1}}{\Delta r_j(\Delta r_j + \Delta r_{j-1})} f_{i,j+1} + \frac{-\Delta r_j}{\Delta r_{j-1}(\Delta r_j + \Delta r_{j-1})} f_{i,j-1} + \frac{\Delta r_j - \Delta r_{j-1}}{\Delta r_j \Delta r_{j-1}} f_{i,j} \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)_{i,j} &= \frac{2}{\Delta r_j(\Delta r_j + \Delta r_{j-1})} f_{i,j+1} + \frac{2}{\Delta r_{j-1}(\Delta r_j + \Delta r_{j-1})} f_{i,j-1} - \frac{2}{\Delta r_j \Delta r_{j-1}} f_{i,j} \end{aligned} \quad (18)$$

En la dirección tangencial:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{i,j} &= \left(\frac{1}{2\Delta\theta}\right) f_{i+1,j} + \left(\frac{-1}{2\Delta\theta}\right) f_{i-1,j} \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\right)_{i,j} &= \left(\frac{1}{2\Delta\theta^2}\right) f_{i+1,j} + \left(\frac{1}{2\Delta\theta^2}\right) f_{i-1,j} + \left(\frac{-2}{\Delta\theta^2}\right) f_{i,j} \end{aligned} \quad (19)$$

Utilizamos el método de las diferencias finitas, con un error de truncamiento de segundo orden para discretizar el sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

El sistema discretizado es el siguiente:

Ecuación de la función de corriente

$$\begin{aligned} \Psi_{i-1,j} \left[\frac{2 + \Delta\theta \cotg\theta_i}{r_j^2 2\Delta\theta^2} \right] + \Psi_{i+1,j} \left[\frac{2 - \Delta\theta \cotg\theta_i}{r_j^2 2\Delta\theta^2} \right] + \Psi_{i,j-1} \left[\frac{2(1 - \Delta\theta)}{r_j^2 \Delta\theta^2 (2 - \Delta\theta)} \right] + \\ + \Psi_{i,j+1} \left[\frac{2(1 - \Delta\theta)^2}{r_j^2 \Delta\theta^2 (2 - \Delta\theta)} \right] + \Psi_{i,j} \left[\frac{-2(2 - \Delta\theta)}{r_j^2 \Delta\theta^2} \right] = \Omega_{i,j} \end{aligned} \quad (20)$$

Ecuación de la vorticidad escalar

$$\begin{aligned} \Omega_{i-1,j} \left[-Re \frac{r_j}{2\Delta\theta} v_{\theta_{i,j}} - \frac{2 + \Delta\theta \cotg\theta_i}{r_j^2 2\Delta\theta^2} \right] + \Omega_{i+1,j} \left[Re \frac{r_j}{2\Delta\theta} v_{\theta_{i,j}} - \frac{2 - \Delta\theta \cotg\theta_i}{r_j^2 2\Delta\theta^2} \right] + \\ + \Omega_{i,j-1} \left[-Re \frac{r_j}{\Delta\theta(2 - \Delta\theta)} v_{r_{i,j}} - \frac{2(1 - \Delta\theta)}{r_j^2 \Delta\theta^2 (2 - \Delta\theta)} \right] + \\ + \Omega_{i,j+1} \left[Re \frac{r_j(1 - \Delta\theta)^2}{\Delta\theta(2 - \Delta\theta)} v_{r_{i,j}} - \frac{2(1 - \Delta\theta)^2}{r_j^2 \Delta\theta^2 (2 - \Delta\theta)} \right] + \\ + \Omega_{i,j} \left[-Re r_j(2\cotg\theta_i v_{\theta_{i,j}} + v_{r_{i,j}}) + \frac{2(2 - \Delta\theta)}{r_j^2 \Delta\theta^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Ecuación de la energía

$$\begin{aligned}
& T_{i-1,j} \left[\frac{-Mg}{r_j^2 \Delta \theta} v_{\theta_{i,j}} - \frac{2 - \Delta \theta \cot \theta_i}{r_j^2 2 \Delta \theta^2} \right] + T_{i+1,j} \left[\frac{Mg}{r_j^2 \Delta \theta} v_{\theta_{i,j}} - \frac{2 + \Delta \theta \cot \theta_i}{r_j^2 2 \Delta \theta^2} \right] + \\
& + T_{i,j-1} \left[-\frac{Mg}{r_j \Delta \theta (2 - \Delta \theta)} v_{r_{i,j}} - \frac{2(1 - 2\Delta \theta)}{r_j^2 \Delta \theta^2 (2 - \Delta \theta)} \right] + \\
& + T_{i,j+1} \left[Mg \frac{(1 - \Delta \theta)^2}{r_j \Delta \theta (2 - \Delta \theta)} v_{r_{i,j}} - \frac{2(1 - \Delta \theta)^2 (1 - \Delta \theta)}{r_j^2 \Delta \theta^2 (2 - \Delta \theta)} \right] + \\
& + T_{i,j} \left[\frac{Mg}{r_j} v_{r_{i,j}} + \frac{2(2 - \Delta \theta - \Delta \theta^2)}{r_j^2 \Delta \theta^2} \right] + Mg * k = 0
\end{aligned} \tag{22}$$

Condiciones en la frontera discretizadas:

En el infinito

$$\begin{aligned}
\Psi_{i,M} &= \frac{1}{2} r_M^2 \sin^2 \theta_i V_\infty \\
\Omega_{i,M} &= 0 \\
T_{i,M} &= r_M \cos \theta_i
\end{aligned} \tag{23}$$

Sobre la burbuja

$$\begin{aligned}
\Psi_{i,1} &= 0 \\
\Omega_{i,1} &= \frac{(1 - \Delta \theta)}{2 \Delta \theta} [T_{i+1,1} - T_{i-1,1}] \lambda \sin \theta_i + \frac{2(1 - \Delta \theta)^2}{\Delta \theta} \Psi_{i,2} \\
T_{i,0} &= (1 - \Delta \theta)^2 T_{i,2} + (2 - \Delta \theta) \Delta \theta T_{i,1}
\end{aligned} \tag{24}$$

Sobre el eje de simetría

$$\begin{aligned}
\Psi_{1,j} &= \Psi_{N,j} = 0 \\
\Omega_{1,j} &= \Omega_{N,j} = 0 \\
T_{0,j} &= T_{2,j} ; T_{N-1,j} = T_{N+1,j}
\end{aligned} \tag{25}$$

REFERENCIAS

1. N.O. Young, J.S. Goldstein y M.O. Block, "The Motion of Bubbles in a Vertical Temperature Gradient", *J.Fluid Mech.*, Vol. **6**, pp. 350–356, (1959).
2. J.I.D. Alexander et al., "Numerical Analysis of the Sensivity of Cristal Growth Experiments to Spacecraft Residual Acceleration", *Microgravity Fluid Mechanics*, H.J. Rath (eds.), Springer-Verlag, pp. 297–305, (1992).
3. D. Schwabe et al., "Surfaces Waves in a Free Liquid-gas Interfaceby Oscillatory Marangoni Convection", *Microgravity Fluid Mechanics*, H.J. Rath (eds.), Springer-Verlag, pp. 213–216, (1992).
4. P. Cotin, *Rapport de Stage*, Ecole Centrale de Lyon, (1988).
5. J. Szymczyk y J. Siekmann, "Numerical Calculation of the Thermocapillary Motion of a Bubble Under Microgravity", *Chem. Eng. Comm.*, Vol. **69**, pp. 129–147, (1988).
6. A. Crespo y J. Jiménez-Fernández, "Thermocapillary Migration of Bubbles at Moderately Large Reynolds Numbers", *Microgravity Fluid Mechanics*, H.J. Rath (eds.), Springer-Verlag, pp. 405–411, (1992).
7. J.H. Wilkinson y C. Reinsch, "*Handbook for Automatic Computation*", Springer-Verlag, Nueva York, (1971).