

# Estudio de sensibilidad geométrica del comportamiento tensional de una ménsula corta

Elena Blanco

Departamento de Resistencia de Materiales y Estructuras en la Ingeniería  
Universidad Politécnica de Cataluña  
ETSECCPB, Edificio C 1, Campus Nord UPC, Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, España  
Tel.: 34-93-401 64 91 ; Fax: 34-93-401 10 48  
e-mail: elena.blanco@upc.edu

Lluís Gil

Departamento de Resistencia de Materiales y Estructuras en la Ingeniería  
Universidad Politécnica de Cataluña  
ETSECCPB, Edificio C 1, Campus Nord UPC, Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, España  
ETSEIT, Edificio TR5, Colom 11, 08221 Terrassa, España  
Tel.: 34-93-401 64 83 ; Fax: 34-93-401 10 48  
e-mail: lluis.gil@upc.edu

## Resumen

Las ménsulas cortas son elementos estructurales singulares debido a su geometría y a la forma de aplicación de la carga. Ambas circunstancias hacen que no se cumplan las hipótesis fundamentales de la resistencia de materiales y en particular, el principio de Saint-Venant. Las normas de hormigón armado proponen una serie de relaciones geométricas entre las variables que definen el problema, basadas en ensayos experimentales y en modelos de bielas y tirantes. En este trabajo se presentan los resultados de un estudio orientado a determinar los parámetros de sensibilidad de las distribuciones de tensiones con respecto a variaciones geométricas de la ménsula. El estudio se ha basado en simulaciones numéricas con elementos finitos. El conocimiento de la sensibilidad permite definir criterios cualitativos de optimización y de evaluación de la seguridad con respecto al estado último del elemento estructural.

## STUDY OF GEOMETRICAL SENSIBILITY OF STRESS DISTRIBUTIONS IN CORBELS

## Summary

Corbels are singular structural elements because of their geometry and load application. Hence, fundamental hypothesis of strength of materials can not be applied over corbels, in particular Saint-Venant principle is violated. Reinforced concrete norms propose geometrical relationships among variables of the problem; mainly based in experimental tests and models of struts and ties. In this work we present results of a study concerned with the sensibility parameters of stress distributions in corbels with respect their geometrical variations. This study is based in numerical finite element simulations. Knowledge of geometrical sensibility can assist to define qualitative optimization criteria and security evaluation rules respect the ultimate load of the structural element.

## ANTECEDENTES

Las ménsulas cortas son elementos estructurales de reducidas dimensiones pero, sin embargo, juegan un papel muy importante en edificaciones de todo tipo. Muchas ménsulas cortas se utilizan en obras de ampliación, rehabilitación y refuerzo de edificaciones. Su importancia radica en que sirven de apoyo a jácenas y transmiten las cargas horizontales hacia el esqueleto vertical formado por paredes y pilares. Por consiguiente, su incorrecto funcionamiento provoca patologías y su fallo estructural afecta a la seguridad al producir efectos de colapso local.

La mayor parte de los estudios de distribuciones de tensiones en una ménsula corta parten del análisis teórico-experimental de los profesores G. Franz y H. Niedenhoff<sup>1</sup>. Asimismo Kriz y Rath y A. Mattok<sup>2</sup> estudiaron dicha tipología estructural y llegaron a conclusiones similares.

De los resultados obtenidos en los estudios mencionados se deduce que el comportamiento resistente de una ménsula corta puede asimilarse a un modelo reticulado simple de bielas y tirantes, orientado según la dirección de las tensiones principales a que da lugar la sollicitación y determinadas por ensayos fotoelásticos<sup>1</sup>. Este modelo simple de bielas y tirantes, deducido de la red de isostáticas, es el utilizado actualmente para el dimensionamiento de ménsulas cortas siguiendo la normativa de diferentes países: EHE (Instrucción de hormigón Estructural)<sup>3</sup>, el código ACI americano<sup>4</sup> y el Eurocódigo 2<sup>5</sup>.

En los ensayos realizados por Franz y Niedenhoff puede observarse que el ángulo inferior externo de la ménsula corta está exento de tensiones y por lo tanto podría eliminarse optimizando la forma de la ménsula. Asimismo un aumento de la longitud de la ménsula conduce a una distribución de tensiones según Bernoulli-Navier. Por consiguiente, dichos ensayos demuestran que las modificaciones en la geometría de la ménsula alteran de forma substancial la respuesta de la misma.

En este trabajo se presentan los resultados obtenidos al estudiar la sensibilidad geométrica del comportamiento tensional de las ménsulas cortas. Se analizan las modificaciones en tensiones al variar ciertas relaciones geométricas con miras a la optimización y a la seguridad de su forma.

## NORMATIVA

Las recomendaciones que las normativas vigentes establecen para el diseño y el armado de las ménsulas cortas parten en su mayoría del modelo de bielas y tirantes. Entre la normativa consultada se ha seleccionado, para un breve comentario, la Instrucción del hormigón estructural (EHE)<sup>3</sup>, el Manual of concrete practice del ACI<sup>4</sup> y el Eurocódigo 2<sup>5</sup>.

### Instrucción del hormigón estructural (EHE)

La EHE define la ménsula corta como aquella en la que la distancia  $a$  entre la línea de aplicación de la carga y la sección de empotramiento es menor o igual al canto útil  $d$  en dicha sección de empotramiento. La clasifica como estructura de tipo  $D$  dado que presenta discontinuidad generalizada, pues sufre discontinuidad tanto estática como geométrica. En las estructuras encuadradas en la región  $D$  no es válida la teoría general de flexión, y en consecuencia no es aplicable la hipótesis de deformación de Bernoulli-Navier.

Se modeliza su comportamiento a partir del esquema de bielas y tirantes y se supone un comportamiento plástico perfecto (Figura 1). Este esquema estático permite considerar el efecto de los esfuerzos que aparecen en la sección del pilar. El dimensionamiento de la armadura deriva del planteamiento de las condiciones de equilibrio en el modelo para la obtención de los esfuerzos de cálculo.

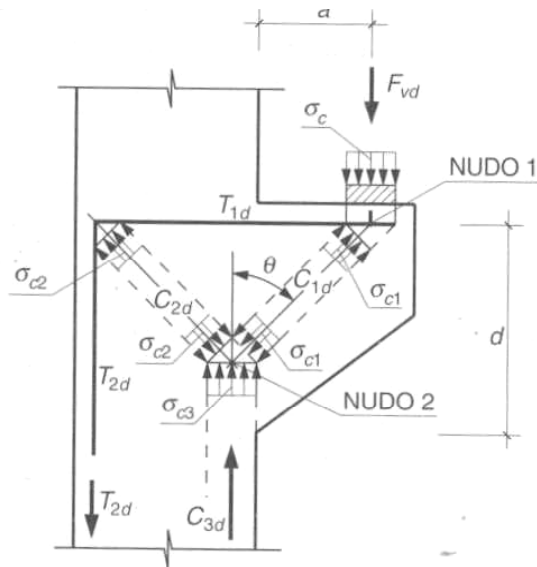
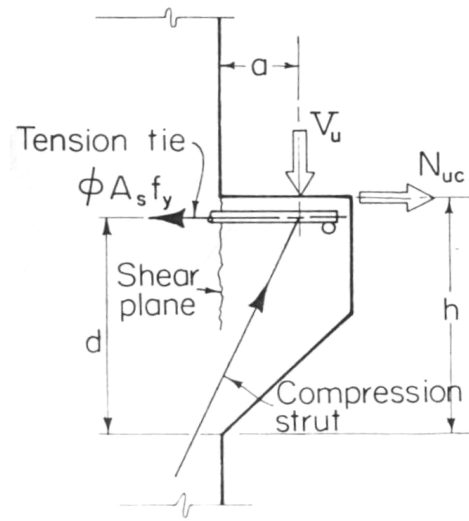


Figura 1. Modelo de bielas y tirantes (EHE)



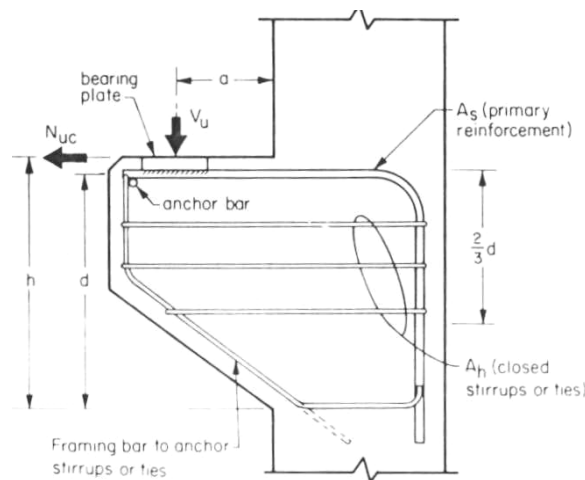
Structural action of a corbel

Figura 2. Modelo utilizado por ACI

El dimensionado de la armadura se obtiene a partir de las condiciones de equilibrio en el modelo reticulado y se disponen cercos horizontales distribuidos de forma uniforme en los dos tercios superiores del canto útil.

**Manual of concrete practice, Parte 3 (ACI)**

Partiendo igualmente del modelo de bielas y tirantes (Figura 2), las recomendaciones del ACI comienzan calculando las armaduras necesarias para resistir el momento flector, la fuerza horizontal aplicada si la hubiera y la necesaria para resistir el esfuerzo cortante (Figura 3). Define luego una armadura principal y otra secundaria, ambas dependientes de las anteriores y, además, para evitar el riesgo de rotura frágil de la cabeza superior por fisuración del hormigón, impone una condición muy severa a la cuantía mecánica de la armadura principal. Esta última condición no figura en la Instrucción EHE.



Notation used in Section

Figura 3. Armado de la ménsula según ACI

## Eurocódigo 2 (AENOR)

El Eurocódigo 2<sup>5</sup>, en lo referente a ménsulas cortas, también sigue el modelo de bielas y tirantes siempre que se cumpla que  $0,4h_c \leq a_c \leq h_c$ . El valor de  $h_c$  se determina por consideraciones de cortante y dispone la colocación de estribos cerrados en el canto útil (Figura 4).

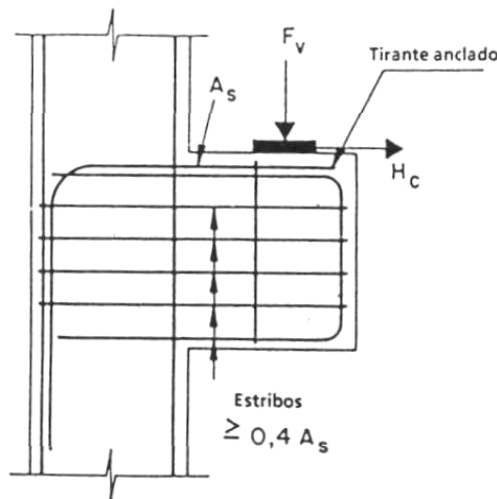


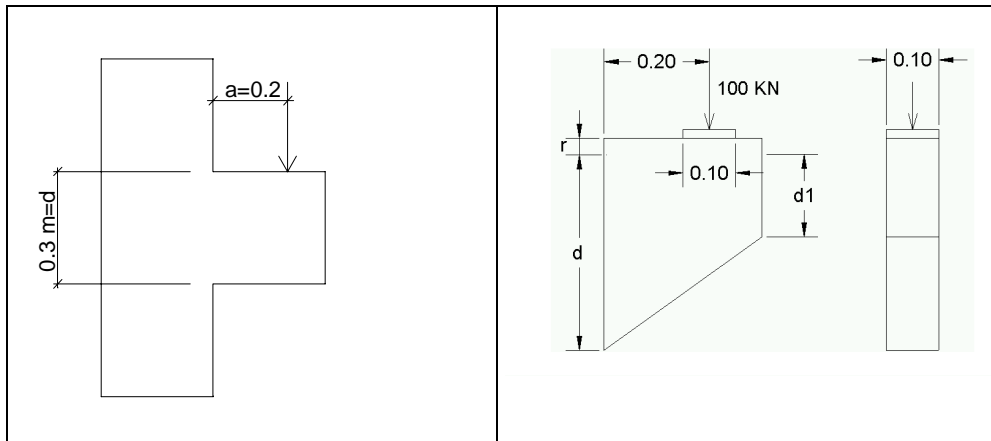
Figura 4. Armado de la ménsula según Eurocódigo

## SIMULACIONES

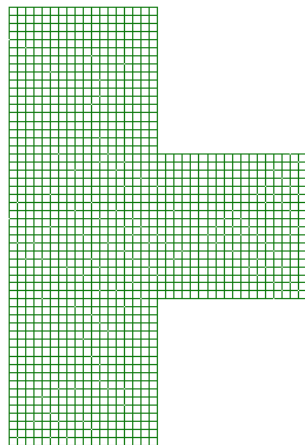
El modelo adoptado para el estudio de la ménsula se encuadra dentro de un estado de tensión plana dada la circunstancia, habitual en este tipo de estructura, de que el espesor es mucho menor que las restantes dimensiones y que las cargas actuantes están contenidas generalmente en su plano. Asimismo las normativas indican que se considera ménsula corta a la estructura que cumple que  $a \leq d$  (Figura 1). A partir de estas propiedades se adoptan los modelos geométricos de la Figura 5, que contemplan la unión de la ménsula con el pilar considerando que dicho pilar está empotrado en la parte superior e inferior. La modelización de la carga se hace suponiendo que la misma se aplica a través de una placa de reparto de 10 cm y de valor equivalente a una carga resultante de 100 kN. Para las condiciones de contorno se supone que el pilar está empotrado en la parte superior e inferior.

En el análisis se utilizan los programas GiD y Calsef, el primero como mallador y visualizador de resultados, y el segundo como procesador por el método de los elementos finitos. Los resultados permiten concluir que el elemento más adecuado es el cuadrilátero de ocho nodos con mallas entre 1000 y 3500 elementos (Figuras 6 y 7). Para la comprobación de resultados se estudia un caso real aplicando la normativa EHE y la resolución numérica por el método de elementos finitos, obteniéndose resultados muy similares con algunas conclusiones interesantes. Por ejemplo, la tensión máxima de tracción que se produce en la sección de empotramiento es algo menor que la calculada por la norma. Esto permitiría reducir el armado.

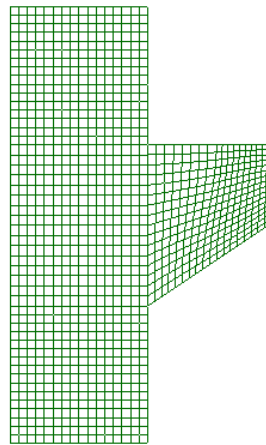
La tensión máxima de compresión en el hormigón no supera los  $12,25 \text{ N/mm}^2$  y se produce en el vértice inferior izquierdo de la ménsula, punto de unión de las tres bielas y por lo tanto en dicho punto pueden admitirse tensiones hasta tres veces superiores a la admisible, dado el estado de confinamiento del hormigón.



**Figura 5.** Geometría de las ménsulas cortas estudiadas



**Figura 6.** Malla estructurada de cuadriláteros de ocho nodos (1296 elementos)



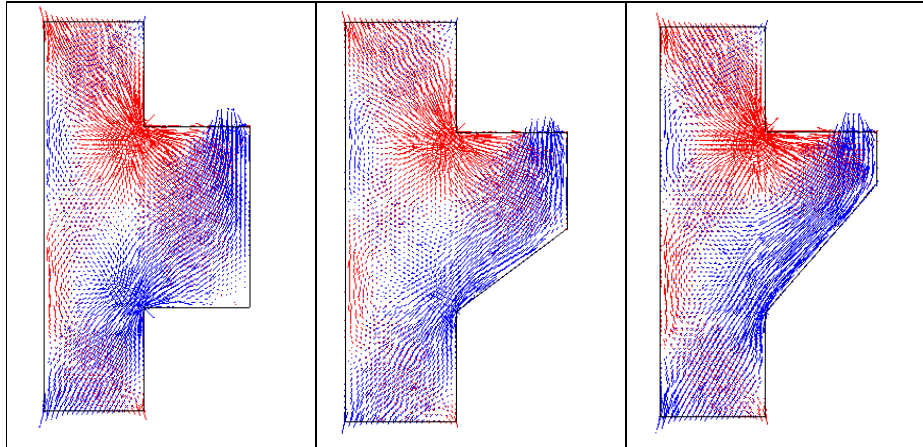
**Figura 7.** Malla de 1056 elementos con una cierta estructuración

A partir de estos resultados se modifican algunas de las variables del problema con el objeto de conocer de que forma intervienen en la respuesta de la ménsula corta. El estudio contempla la variación del canto exterior  $d_1$ , la variación del canto interior  $d$  y la variación de la distancia del punto de aplicación de la carga  $a$ , cumpliendo siempre con las condiciones de ménsula corta que define la normativa EHE.

#### a) Variación del canto exterior $d_1$

Las dimensiones iniciales de la ménsula, que identificaremos como ménsula 1, son  $a = 250$  mm,  $d = 520$  mm y  $d_1 = 520$  mm. La carga aplicada se mantiene constante para el estudio y es igual a  $q = 10000$  N/cm (carga total de 100 kN repartida en 10 cm). En las ménsulas 2 y 3 se modifica el valor del canto exterior  $d_1$ , siendo igual a 280 y 150 mm respectivamente. La discretización se realiza con elementos cuadriláteros de ocho nodos y mallas del orden de 1400 elementos.

Del análisis de las tres ménsulas claramente se aprecia que la biela de compresión (Figura 8) tiende a ser paralela al plano inclinado de la ménsula y además se observa en la ménsula 1 que el vértice inferior externo se encuentra libre de tensiones, es decir, que puede prescindirse de ese material de acuerdo con las conclusiones de Franz y Niedenhoff.

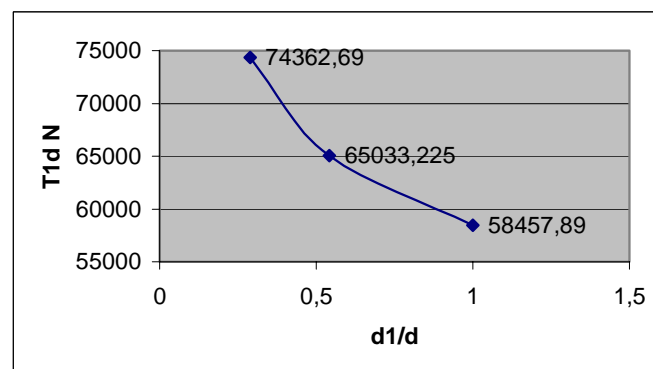


**Figura 8.** Trayectoria de las tensiones principales en las ménsulas 1, 2 y 3

En la Tabla I se resumen los resultados obtenidos:  $T_{1d}$  es la resultante de las tensiones normales de tracción en el empotramiento (el tirante),  $\sigma_I$  es la tensión principal máxima de tracción en el vértice superior interno y  $\sigma_{II}$  es la tensión principal máxima de compresión en el vértice inferior interno. Se observa que la tracción  $T_{1d}$  aumenta al disminuir el canto exterior  $d_1$ , además se reduce la tensión principal de compresión en el vértice inferior interno y aumentan las tensiones de tracción en el empotramiento.

	$T_{1d}$ [N]	$\sigma_I$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$\sigma_{II}$ [N/mm <sup>2</sup> ]
Ménsula 1	58457,89	24,33	-22,62
Ménsula 2	65033,22	24,53	-16,87
Ménsula 3	74362	27,27	-15,11

**Tabla I.** Valores de la resultante de tracción y de las tensiones principales al variar el canto exterior



**Figura 9.** Resultante de tracciones  $T_{1d}$  en función de  $d_1/d$  ( $d/a$  constante)

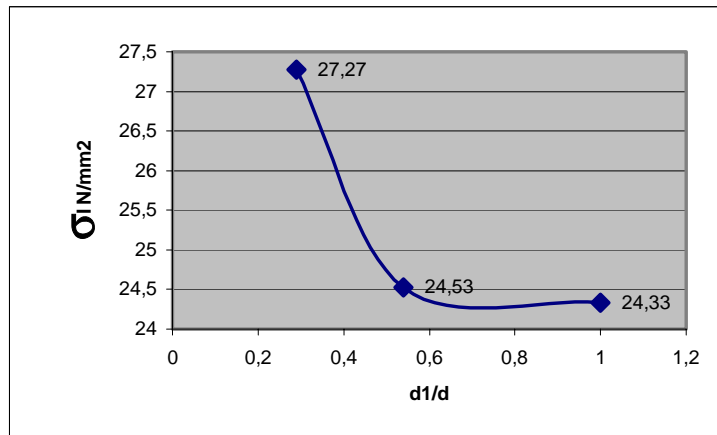


Figura 10. Tensión principal  $\sigma_{I \max}$  en función de  $d_1/d$  ( $d/a$  constante)

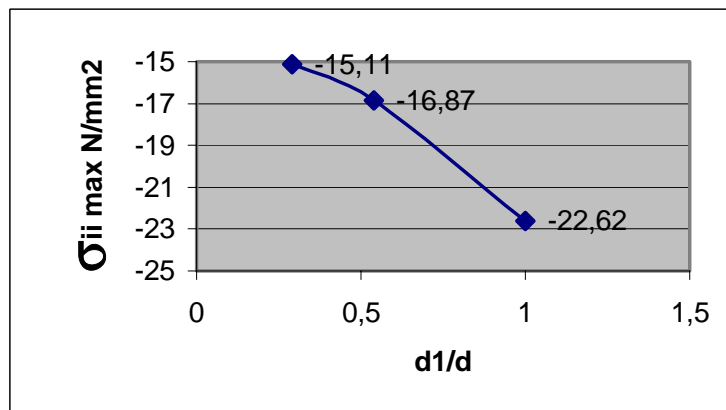


Figura 11. Tensión principal  $\sigma_{II \max}$  en función de  $d_1/d$  ( $d/a$  constante)

#### b) Variación del canto interior $d$

El análisis se continúa modificando el canto interior de la ménsula  $d$  hasta alcanzar el límite de validez de la teoría de ménsulas cortas  $d = a$ . Se mantiene constante la distancia de aplicación de la carga al empotramiento  $a$  y la relación  $d/d_1$ , que se adopta igual a la máxima permitida por las normas, es decir 0,5.

Las dimensiones iniciales de la ménsula, que identificaremos como ménsula 4, son:  $a = 250$  mm,  $d = 520$  mm y  $d_1 = 260$  mm, la carga aplicada es igual a la utilizada en el análisis anterior. Las dimensiones de la ménsula 5 son:  $a = 250$  mm,  $d = 350$  mm y  $d_1 = 175$  mm. La discretización se hace con elementos cuadriláteros de ocho nodos y mallas del orden de 1000 elementos.

Los resultados obtenidos permiten observar que la reducción del canto interior  $d$  produce un aumento de la tensión de tracción y de la compresión, tanto en el empotramiento como a lo largo de la ménsula. La biela sigue existiendo, pero no tan definida como en los casos anteriores (Figura 12).

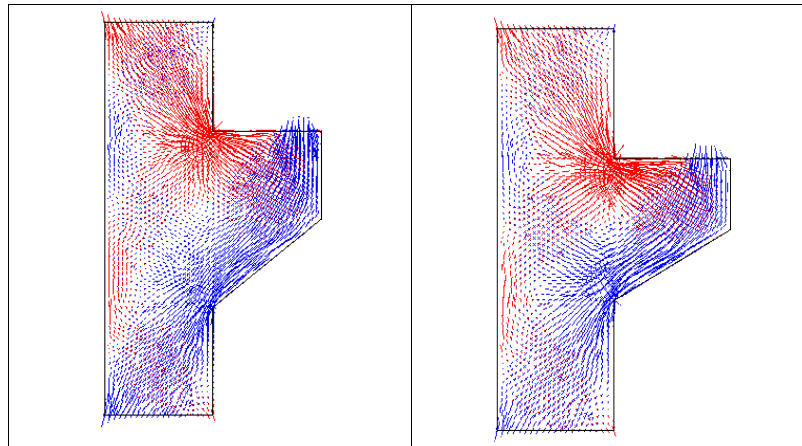


Figura 12. Trayectoria de las tensiones tangenciales ménsulas 4 y 5

	$T_{1d}$ [N]	$\sigma_I$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$\sigma_{II}$ [N/mm <sup>2</sup> ]
Ménsula 4	67495,88	25,29	-16,69
Ménsula 5	99415,5	35,84	-26,69

Tabla II. Resultante de tracción y tensiones principales al variar el canto interior  $d$

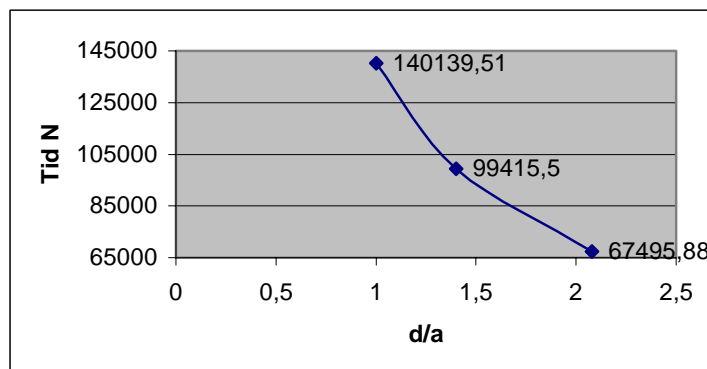


Figura 13. Resultante de tracción  $T_{1d}$  en función de  $d/a$  ( $d_1/d$  constante)

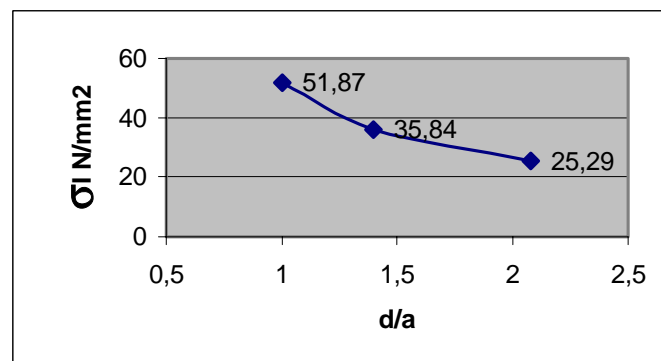


Figura 14. Tensión principal  $\sigma_{I_{max}}$  en función de  $d/a$  ( $d_1/d$  constante)



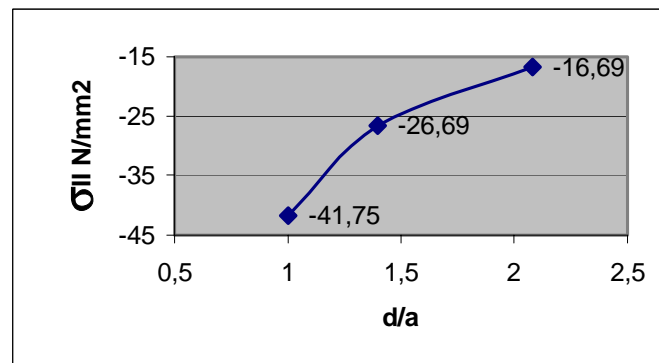


Figura 15. Tensión principal  $\sigma_{II_{\max}}$  en función de  $d/a$  ( $d_1/d$  constante)

### c) Variación del punto de aplicación de la carga $a$

Finalmente se analiza la respuesta de la ménsula para un caso límite de aplicabilidad de la teoría de ménsulas cortas de la EHE. Las dimensiones que se adoptan para la ménsula 6 son:  $a = 250$  mm,  $d = 250$  mm y  $d_1 = 125$  mm. Los resultados obtenidos permiten observar que los valores evolucionan en el mismo sentido que la ménsula 5 del análisis anterior, acentuándose los cambios respecto a la ménsula 4.

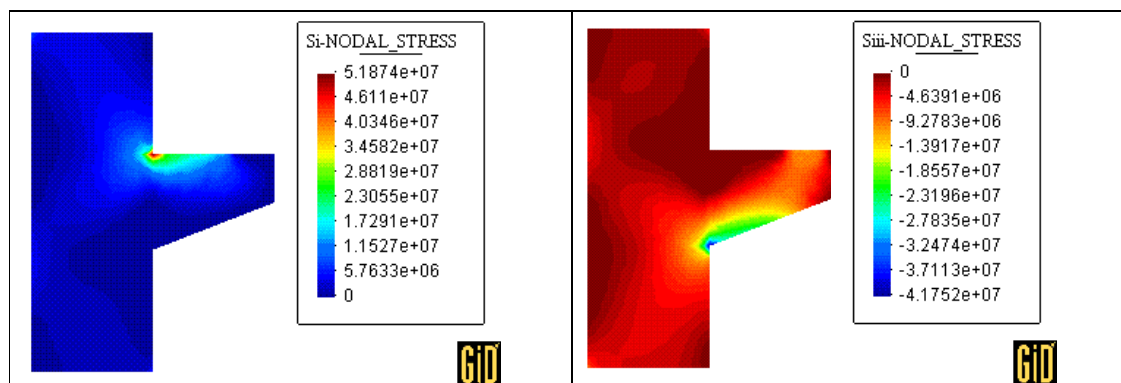


Figura 16. Tensiones principales de tracción y compresión en la ménsula 6

Simulación	$d_1/d$	$d/a$	$\sigma_{I_{\max}}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$\sigma_{II_{\max}}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$T_{1d}$ [N]
Ménsula 6	0,5	1	51,87	-41,75	140139,51

Tabla II. Resultante de tracción y tensiones principales en la ménsula 6

## CONCLUSIONES

Los resultados muestran claramente que la resultante de tracción en el empotramiento  $T_{1d}$  aumenta al reducir el canto exterior de la ménsula  $d_1$  respecto al canto interior  $d$  así como también al reducir la relación  $d/a$ . Se observa que en todos los casos la fibra de tensión nula va subiendo cuanto menor es  $d_1/d$ .

Asimismo al reducir  $d_1$  respecto a  $d$  se produce un aumento de la tensión principal de tracción  $\sigma_I$  en el vértice superior interno y aumenta el valor de la tensión principal de compresión  $\sigma_{II}$  en la biela. La biela de compresión se hace más nítida, siendo su valor tanto más constante cuanto menor es la relación  $d_1/d$ . Sin embargo, disminuye la tensión principal de compresión  $\sigma_{II}$  en el vértice inferior interno.

Se concluye igualmente que al reducir la relación  $d/a$  se produce un aumento de la resultante de tracción  $T_{1d}$  y aumenta la tensión principal de compresión  $\sigma_{II}$  en el vértice inferior interno. En este caso la biela del esquema resistente de la ménsula es menos definida.

En todos los casos la máxima tensión de compresión en el hormigón  $\sigma_{II}$  se produce en el vértice inferior interno. Sin embargo, nótese que la EHE obliga a comprobar las compresiones bajo la carga, donde el valor de la tensión es menor. Paradójicamente, el análisis del esquema resistente de la ménsula demuestra que esta condición es lógica. En efecto, se observa que aunque en el vértice inferior interno se presenta la máxima tensión de compresión, el estado de tensiones en dicho vértice es favorable de tricompresión; mientras que el nudo que constituye el hormigón bajo la carga tiene un tirante anclado, produciéndose un estado tensional más desfavorable frente a la rotura a compresión.

Estas consideraciones deben facilitar la toma de decisiones a la hora de modificar la geometría y evaluar la seguridad en obras de rehabilitación, reparación y refuerzo de edificaciones.

## AGRADECIMIENTOS

Expresamos nuestro agradecimiento al Ingeniero Carlos Encinas Sabio por su ayuda en la realización de este trabajo.

## REFERENCIAS

- 1 G. Franz y H. Niedenhoff, "Tratado de hormigón armado", Gustavo Gili, (1969).
- 2 A. Mattok, K.C. Chen y Soongswang. "The behavior of reinforced concrete corbels", *Journal Prestressed Concrete Institute*, Vol. **21**, N° 2, (1976).
- 3 EHE, "Instrucción de hormigón estructural", Ministerio de Fomento, (2000).
- 4 ACI, "Manual of concrete practice", Parte 3, American Concrete Institute, (1989).
- 5 AENOR, "Eurocódigo 2", (1998).
- 6 F. Leonhardt y E. Mönning, "Estructuras de hormigón armado", Tomo II, Ateneo, (1984).
- 7 P. Jiménez Montoya, A. García Meseguer y F. Morán Cabré, "Hormigón armado", Gustavo Gili, (2000).
- 8 J. Calavera Ruíz, "Proyecto y cálculo de estructuras de hormigón", Tomo I, Intemac, (2000).