

## MATERIALES COMPUESTOS - SIMULACIÓN DEL COMPORTAMIENTO ANISÓTROPO

Car, E.<sup>1</sup>; Oller, S.<sup>2</sup> y Oñate, E.<sup>3</sup>

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona  
Universidad Politécnica de Cataluña - UPC  
c/Gran Capitán s/n - Edif. C1,  
08034 Barcelon - España.

<sup>1</sup>e-mail: car@cimne.upc.es

<sup>2</sup>e-mail: oller@cimne.upc.es

<sup>3</sup>e-mail: onate@cimne.upc.es

### 1 GENERALIDADES

El uso de materiales compuestos en el diseño de estructuras se ha visto incrementado notablemente en los últimos años. Esta tendencia se debe al hecho de la posibilidad de diseñar el material con ciertas propiedades especiales con cualidades mecánicas superiores a los materiales tradicionales.

Estos materiales presentan una elevada relación resistencia-peso y rigidez-peso, son resistentes a la corrosión, térmicamente estables y resultan especialmente adecuados para estructuras en las que el peso constituye una variable fundamental en el proceso de diseño. Los componentes estructurales que requieren gran rigidez, resistencia a los impactos, formas complejas y considerable volumen de producción resultan ideales para ser fabricados a partir de materiales compuestos. Por ello, su utilización en la fabricación de piezas para la industria aeronáutica, aeroespacial, naval y de automóviles se ha extendido en los últimos años (Ali, 1996) (O'Rourke, 1989).

Entre las dificultades que se encuentran para la utilización de los materiales compuestos con fines estructurales está la falta de tecnología para garantizar las uniones entre piezas y también la dificultad de realizar un diseño fiable, debido a que las técnicas analíticas convencionales utilizadas para el estudio de materiales tradicionales no resultan adecuadas para el análisis de materiales compuestos. Tampoco ha resultado del todo satisfactoria la representación de un compuesto mediante un único material ortótropo con propiedades del conjunto, sobre todo cuando el comportamiento de al menos uno de sus componentes ha superado el límite de elasticidad. Puede observarse en distintas referencias los intentos que ha habido para modelar el comportamiento de materiales compuestos, utilizando la técnica de elementos finitos para el análisis y diseño de estructuras, donde la correlación entre los análisis y los resulta-

dos experimentales no resulta del todo satisfactoria (Ali, 1996) (Klintworth & Macmillan, 1992).

## 2 UTILIZACIÓN DE LOS MATERIALES COMPUESTOS

### 2.1 Utilización de materiales compuestos en la industria automotriz

La utilización de materiales compuestos con fines estructurales en la industria del automóvil es baja (Noguchi, 1993), aunque su uso es relevante en el mundo del automóvil de competición y en los laboratorio de prueba de la industria automotriz, donde se demuestra el alto potencial que poseen estos materiales. Los automóviles especiales, por ejemplo los vehículos de Fórmula 1, resultan extremadamente sofisticados en diseño, construcción y operación y por ello han realizado grandes inversiones en tecnología que les permite obtener ventajas respecto de otros sectores de la industria del automóvil. Como resultado, gracias al gran desarrollo e impulso que les ha dado la industria aeronáutica los materiales compuestos han comenzado a ser muy utilizados a partir del año 1980. Los diseñadores de automóviles de carrera deben respetar ciertas reglas impuestas en cuanto a la resistencia, rigidez y peso de los coches. El peso del vehículo constituye también una variable fundamental en el momento de definir los materiales que se utilizarán en la construcción del casco de los coches. La solución a este problema se obtiene optimizando la geometría, y la calidad de los materiales a emplear.

La utilización en la industria del automóvil de materiales compuestos reforzados con fibras se remonta al año 1950. En aquella época se utilizaban mucho los compuestos de matriz de resina polyester y refuerzo de fibra de vidrio orientada aleatoriamente. Este material se ha utilizado hasta finales de la década de 1980.

A partir de la década de los 80 comienza la utilización de materiales compuestos reforzados con fibras de carbono. Este uso se ha generalizado debido a que presentan una elevada relación resistencia-peso y rigidez-peso; son resistentes a la corrosión, térmicamente estables y resultan especialmente adecuados para estructuras en las que el peso constituye una variable fundamental en el proceso de diseño. En la actualidad en los vehículos de Fórmula 1 el 75% de los mismos está constituido por materiales compuestos, porcentaje que se incrementa a diario. En la Figura 1 se muestran las diversas partes de un coche de Fórmula 1 constituidas por materiales compuestos.

La utilización de materiales compuestos ha permitido por un lado mejorar las prestaciones de los vehículos y por otro incrementar la seguridad de los mismos debido a la gran capacidad de estos materiales para absorber energía ante impactos. Adicionalmente a las partes estructurales, los materiales com-

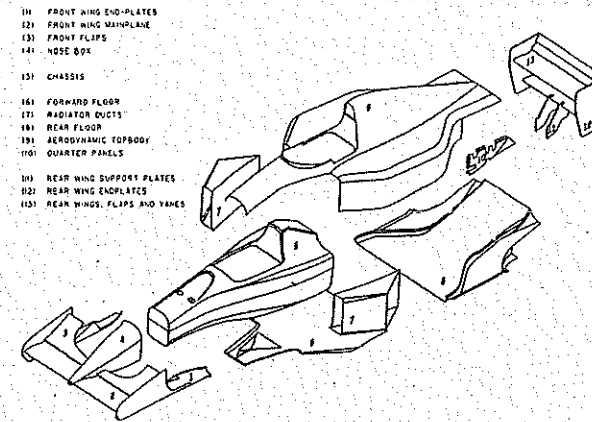


Figura 1: Esquema de los componentes de material compuesto en un automóvil de Fórmula 1 (McLaren MP4/7 1992).

puestos se utilizan en otras partes de los vehículos tales como discos de freno de carbono-carbono, embragues y como aislante térmico. Los discos de freno de carbono-carbono permiten una significativa reducción del peso de los mismos al igual que un aumento en la capacidad de frenado del vehículo.

La más reciente innovación ha sido el diseño de componentes de suspensión con materiales compuestos en el año 1992 por parte del equipo McLaren, lo que permitió una reducción del 50-60% del peso, lo que se traduce en una reducción de la inercia. En la Figura 2 se muestra el esquema típico de un sistema de suspensiones de un coche de Fórmula 1. (Savage, 1993)

### 2.2 Utilización de materiales compuestos en aviación

La utilización de materiales compuestos en la industria aeronáutica es anterior a la de la industria automotriz. Se la considera como precursora en el uso de estos materiales en diversas aplicaciones. La elevada resistencia y rigidez junto a menores costos y peso de los materiales compuestos son los principales factores que han permitido su uso en la industria aeroespacial. El peso constituye la variable fundamental para la elección del material a utilizar en las estructuras de aeronaves. La utilización a gran escala de estos materiales en motores de aviación se debe a Rolls-Royce, utilizando en partes del sistema de compresión de la turbina RB108 plástico reforzado con fibra de vidrio.

En motores, los materiales compuestos de matriz polimérica (PMC) com-

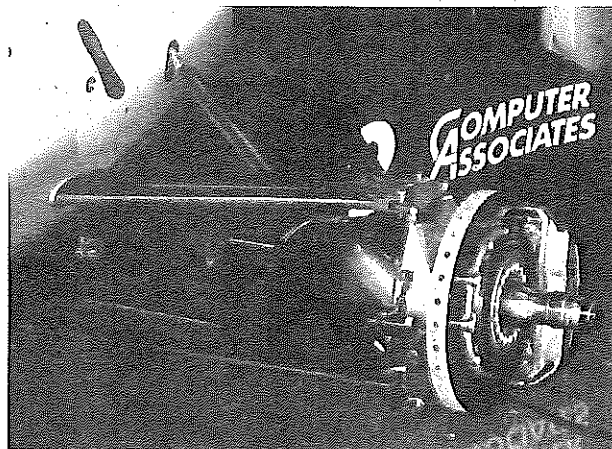


Figura 2: Diseño típico de la suspensión de un automóvil de Fórmula 1 (McLaren MP4-14 1999).

pitén con el titanio en su utilización debido a que presentan una elevada relación resistencia-peso y rigidez-peso. Los materiales compuestos de matriz metálica (MMC) resultan potencialmente atractivos en situaciones en que elevadas temperaturas puedan dañar los materiales compuestos de matriz polimérica. En zonas de temperaturas muy elevadas se utilizan materiales compuestos de matriz cerámica (CMC). Los materiales CMC son conceptualmente diferentes a los PMC y a los MMC debido a que las fibras modifican la forma de propagación de las fisuras en el material y no actúan como un refuerzo de una matriz (Ruffles, 1993).

La introducción de motores "big-fan" en los primeros años de la década de los 70 coincide con la amplia disponibilidad de los materiales compuestos reforzados con fibras de carbono. Con la introducción de estos materiales se lograba una mejora de sus características y una disminución considerable de peso. A pesar de las ventajas citadas, estos "fans" no superaban las pruebas de choque contra aves y el material compuesto fue reemplazado por titanio.

A excepción del propio "fan" y de la zona de combustión, la mayor parte de la estructura vista desde el exterior de una turbina está constituida por material compuesto reforzado con fibras de carbono. En la Figura 3 se observa la carcasa de una turbina realizada en material compuesto reforzado con fibra de carbono correspondiente a una turbina Rolls-Royce. En el interior de una turbina muy pocas piezas están realizadas en material compuesto. A pesar de esto los materiales compuestos representan alrededor del 10% en peso de una

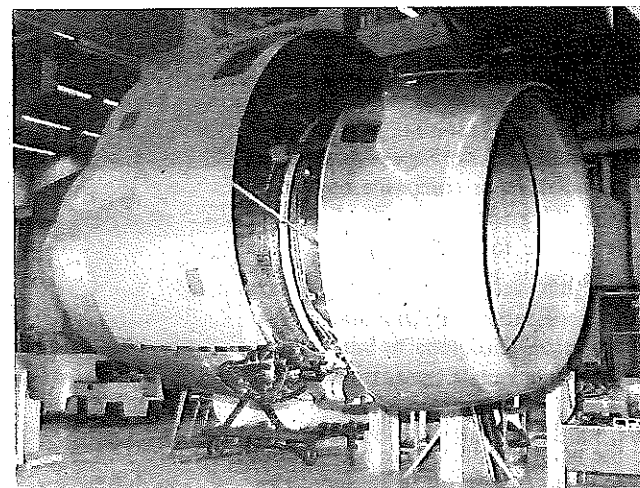


Figura 3: Carcasa de turbina realizada en matriz epoxídica con fibra de carbono (Rolls Royce RB211).

turbina (Ruffles, 1993).

En el futuro, la utilización de los materiales compuestos deberá extenderse hacia la zona interior de la turbina. Los programas de desarrollo de motores para aviación civil impulsados por Rolls-Royce tienen como objetivo realizar el "fan case" y la estructura de soporte del "fan" en material compuesto reforzado con fibras de carbono.

En los motores de aviación destinados a uso militar las partes realizadas con materiales compuestos son diferentes debido fundamentalmente a que estos motores se montan directamente en la estructura del avión y no tiene una cubierta exterior. En la actualidad se encuentran bajo desarrollo diversas partes realizadas con materiales MMC y CMC. (Ruffles, 1993)

### 2.3 Utilización de los materiales compuestos en la industria naval

El uso de materiales compuestos orgánicos (OMC) en aplicaciones marinas data del año 1940. En la actualidad su uso se ha extendido a pequeñas embarcaciones. La utilización en grandes navíos y estructuras offshore no se ha generalizado debido fundamentalmente a que los diseñadores y constructores de este tipo de estructuras no están familiarizados con este tipo de material y deben desarrollar nuevas tecnologías que permitan su aplicación en la industria

naval. Existe en la actualidad una fuerte demanda de materiales compuestos para la fabricación de embarcaciones, submarinos y estructuras offshore debido a que permiten una reducción en peso del 25-50% con respecto a los materiales tradicionales (aluminio y acero). Además, tienen una elevada resistencia a la corrosión (que se traduce en una disminución del mantenimiento), baja conductividad térmica, no resultan atraídas por campos magnéticos y su reparación resulta sencilla.

En la industria naval el uso de materiales compuestos reforzados con fibras de vidrio se ha extendido debido fundamentalmente a que presenta una muy buena relación precio-resistencia. Las fibras de vidrio tipo E son las más utilizadas debido a que tienen una buena resistencia y son resistentes al ataque del agua marina. La fibra de vidrio tipo S tiene una resistencia superior a la tipo E y tiene muy buena resistencia a la fatiga, pero su costo es elevado.

La aplicación naval más significativa de los materiales es en la construcción de buques buscaminas, debido a que este tipo de embarcaciones requiere fundamentalmente materiales con bajas propiedades magnéticas y buena resistencia a cargas de impacto. Otra aplicación la constituyen las embarcaciones de patrullas pequeñas (<25 m longitud) que se benefician en la reducción del peso y en el mantenimiento. En estructuras offshore los materiales compuestos se utilizan debido a su bajo peso y elevada resistencia a la corrosión. En el sector de las embarcaciones de competición los materiales compuestos reforzados con fibras de carbono y aramida resultan muy utilizados debido fundamentalmente a su elevada resistencia en comparación con los materiales compuestos reforzados con fibras de vidrio, minimizan el peso y permiten construir embarcaciones de altas prestaciones. En el mundo de la competición los diseñadores utilizan tecnología de punta, lo que permite obtener datos valiosos en cuanto a las prestaciones de los materiales que resultan útiles en otras aplicaciones en la industria naval.

Los materiales compuestos de matriz de resina termoestable y refuerzos de fibra de altas prestaciones (aramida, carbono) resultan adecuados para estructuras que requieren poco peso con buenas características mecánicas. A pesar de poseerlas es necesario realizar mejoras y ensayos para establecer su respuesta bajo condiciones de servicio, por ejemplo degradación a la exposición por largo tiempo en agua de mar, cargas de fatiga impacto o resistencia al fuego.

Los materiales compuestos resultan especialmente indicados para colocar en su interior sensores y actuadores durante el proceso de fabricación con el objetivo de controlar deformaciones, temperaturas, vibraciones, rigidez, etc. Esta característica puede facilitar información a diseñadores para optimizar el diseño estructural y los factores de seguridad en las estructuras.

Los materiales CMC y MMC se utilizan solo en casos excepcionales en los que se requiere elevada resistencia a las temperaturas y rigidez.

Los métodos de ensayo de materiales compuestos se basan en los realizados en la industria aeronáutica y algunos no pueden aplicarse a la industria naval, por lo tanto, es necesario definir ensayos y metodologías que permitan caracterizar estos materiales para aplicaciones en esta industria.

## 2.4 Utilización de los materiales compuestos en la ingeniería civil

La aplicación de materiales compuestos con fines estructurales en obras civiles comienza a ser relevante en la última década, ya que anteriormente su presencia en este campo ha sido casi inexistente. Hallan su aplicación en la industria de la construcción en estructuras sometidas a la acción de ambientes agresivos, partes de plataformas offshore, depósitos, anclajes al terreno, construcciones no conductivas y no magnéticas, refuerzos de estructuras, armaduras pasivas, armaduras activas, cables, tableros para pasarelas, perfiles y recubrimientos de túneles.

### 2.4.1 Refuerzos de estructuras

De los diversos métodos empleados en el refuerzo de estructuras, el encolado de chapas de acero mediante adhesivo estructural es uno de los sistemas más ampliamente utilizado y de mayor eficacia gracias al desarrollo de las técnicas adhesivas. A pesar de la eficacia demostrada por las láminas encoladas de acero, estas presentan algunos inconvenientes:

- Las láminas de acero constituyen elementos de peso elevado, lo que dificulta su manejo y puesta en obra. Son necesarios medios auxiliares para su colocación, los cuales deben permanecer por elevados períodos de tiempo con las consiguientes molestias en el tránsito en el caso de refuerzos de pasos a sobrenivel.
- Corrosión en las láminas, que afecta a su resistencia y a la adherencia entre la lámina y el hormigón.
- Necesidad de superficies de hormigón planas que permitan el perfecto encolado de las láminas.

El sistema de refuerzos de estructuras con materiales compuestos ha sido desarrollado en los Laboratorios Federales Suizos para el Ensayo de Materiales (EMPA) en la década de los 80 con el objetivo de solventar los inconvenientes citados anteriormente y ante el elevado número de estructuras existentes que requieren ser reforzadas.

La utilización de laminados compuestos de fibra de carbono y resina epoxi en el refuerzo de estructuras de hormigón, metálicas, de madera, etc. comienza a ser una alternativa al sistema de refuerzo convencional mediante el encolado

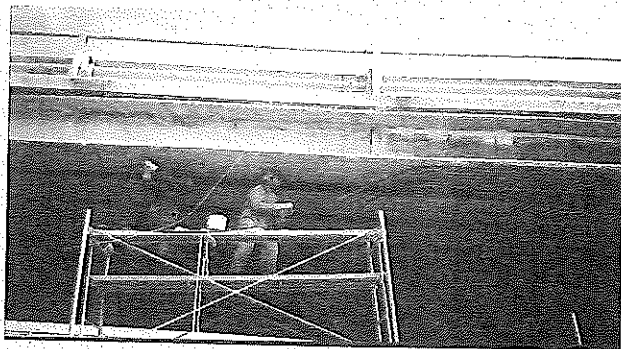


Figura 4: Colocación de refuerzo a flexión en viga lateral de un puente.

de chapas de acero. El aumento en el uso de materiales compuestos para refuerzos se debe fundamentalmente a las mejores prestaciones mecánicas, buena resistencia a la corrosión y bajo peso que facilita su transporte, manejo y colocación en obra. La primera aplicación a escala de este tipo de refuerzo data del año 1991 en el puente Ibach en Lucerna.

Este sistema se aplica en diversos países, y tan sólo en Suiza y Alemania el número de realizaciones de refuerzos de estructuras con láminas de material compuesto encoladas asciende a 250 y existen más de 1000 en el mundo, concentradas en países tales como Suiza, Alemania, Japón, EE.UU. y Canadá. Gracias al empleo de medios auxiliares más ligeros durante un tiempo menor se pueden llegar a obtener ahorros de hasta un 25% en el proceso total de refuerzo de la estructura, compensando el mayor costo económico del material compuesto frente al del acero (G. Pulido & Sobrino, 1998).

En la Figura 4 se observa el proceso de colocación del refuerzo a flexión en una viga lateral de un puente. En la misma fotografía se observan los medios auxiliares ligeros empleados en la colocación del material compuesto, lo que permite disminuir los costos del proceso de refuerzo de la estructura.

En la Figura 5 se muestra la colocación de refuerzo a cortante en una viga de un puente. Se aprecia la utilización, también, de sencillos medios auxiliares para la colocación del refuerzo en las caras laterales de la viga.

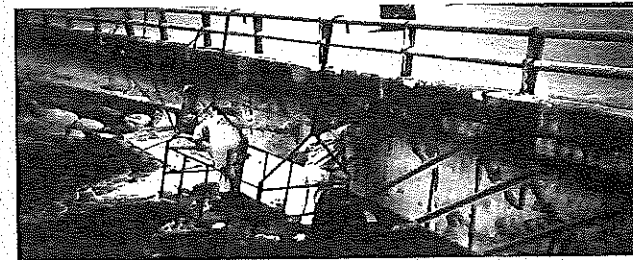


Figura 5: Colocación de refuerzo a esfuerzos cortantes en un puente.

#### 2.4.2 Armaduras del hormigón

Otra utilización de los compuestos reforzados con fibras es la de sustituir las armaduras utilizadas para el armado de hormigón o en tendones de pretensado. Se aplica fundamentalmente en ocasiones en que el uso del acero como armadura del hormigón presenta problemas de corrosión, magnetismo etc. La alternativa la constituye el redondo compuesto por fibra de vidrio revestida por una matriz termoendurecible (poliéster o epoxi). La adherencia entre el hormigón y este tipo de refuerzo es muy alta ya que se obtienen superficies con relieves comparables a las de los redondos de acero.

Actualmente las aplicaciones son muy variadas: losas no magnéticas, velos delgados de hormigón (las armaduras pueden estar muy próximas a la superficie exterior), tierra armada, tirantes de arriostramientos, etc.

#### 2.4.3 Tirantes

Los tirantes de fibras se utilizan fundamentalmente en aplicaciones donde existen problemas de corrosión, o en edificios de comunicaciones o transmisiones donde los tirantes metálicos serían susceptibles de calentamiento por absorción de la energía radiante o de interferencias en la transmisión de ondas electromagnéticas.

Para el caso de esfuerzos de tracción de nivel medio alto (hasta 2700 MPa.) se utilizan fibras de vidrio y para esfuerzos superiores se usan fibras de carbono o aramida. Un ejemplo de aplicación lo constituye la conocida Torre de Telecomunicaciones de Colserolla de 268 metros de altura de la ciudad de

Barcelona. En este caso se utilizó una fibra de aramida y cada uno de los tirantes se compone de siete cordones de 50 mm colocados dentro de una vaina de polietileno.

#### 2.4.4 Perfiles de pultrusión

Los perfiles fabricados por el proceso de pultrusión se utilizan en edificios industriales donde existe el peligro de corrosión debido a la presencia de ácidos. Un ejemplo lo constituyen las plantas de obtención de aluminio, donde la presencia de vapores de hidróxido de sodio y ácido hidrocórico generan serios problemas de corrosión. Otro ejemplo de aplicación lo constituyen los edificios industriales destinados para ensayos de ordenadores y productos electrónicos debido a las propiedades aislantes de estos materiales a ondas electromagnéticas.

### 3 PROPIEDADES DE LOS COMPUESTOS - CARACTERÍSTICAS ALCANZABLES

Los materiales compuestos surgen como consecuencia de la búsqueda de materiales alternativos que reúnan una o más de las siguientes características:

- Bajo costo.
- Buen comportamiento estructural.
- Bajo peso.
- Posibilidad de producción en forma masiva.

Estas premisas pueden cumplirse de muy diversas formas, así, las propiedades de los polímeros sintéticos pueden ser incrementadas, en gran medida, a través de mezclar componentes diferentes, que juntos dan lugar a un material con más capacidad estructural que una sustancia simple.

Los materiales compuestos son utilizados en diversos sectores industriales debido a las características económicas que presentan, pues reducen sustancialmente el volumen de materiales de alto costo colocándolos exclusivamente en las direcciones y o zonas en las que son realmente requeridas.

Los materiales que se obtienen presentan las siguientes características:

- Buen aislamiento térmico y acústico.
- Resistencia a algunos agentes químicos.
- Disipación de energía provocada por la microfisuración en las interfases de sus componentes de modo que el comportamiento general de la estructura no presenta una brusca caída de su resistencia última.

- Bajo peso, economía y facilidad de transporte y reducción de pesos muertos.
- Excelente comportamiento ante la corrosión en ambientes agresivos.
- Elevadas propiedades mecánicas.
- Alta resistencia al fuego.
- Configuración sandwich que permite conseguir bajos coeficientes de conductividad térmica.
- Inertes al agua y a agentes químicos diversos.

El componente más comúnmente utilizado está en forma de partículas o en forma de fibras. En el primero de los casos las partículas de un material o materiales específicos están adheridas entre sí mediante una matriz continua con bajo módulo de elasticidad. En compuestos fibrosos el refuerzo puede orientarse en la dirección que sea necesaria para proporcionar resistencia y rigidez óptimas. Gracias a la moldeabilidad del material pueden seleccionarse las formas estructurales que se consideren más efectivas.

En la industria de la construcción se utilizan la fibra de vidrio, la fibra de carbono o aramida, o la combinación de ambas para obtener fibras híbridas. La fibra de vidrio y el polímero de poliéster o epoxi se utilizan para conformar un material compuesto fibroso que recibe el nombre de poliéster. Entre las principales desventajas que presentan los materiales compuestos es posible mencionar:

- Los materiales presentan en general un comportamiento no-lineal aún para tensiones muy bajas.
- Al concluir el proceso de fabricación del material compuesto, este suele presentar tensiones residuales muy difíciles de cuantificar debido a las variaciones de temperatura.
- Los materiales de refuerzo en un compuesto (fibras, partículas, etc.), generalmente cambian sus propiedades mecánicas por influencia del medio ambiente.

Para la utilización de materiales compuestos en componentes estructurales es necesario realizar un diseño específico del material a utilizar. Esto se debe fundamentalmente a la elevada anisotropía y relación de resistencia entre fibra y matriz. Este proceso de diseño del material compuesto se basa en métodos empíricos, observándose en la literatura la ausencia de análisis o simulaciones del comportamiento de estos materiales sometidos a niveles de sollicitaciones que sobrepasan el límite elástico. Las técnicas convencionales para el análisis



de materiales tradicionales son inadecuadas para el análisis de materiales compuestos. Tampoco ha resultado satisfactorio el estudio a través de elementos finitos de un compuesto representado por un único material con propiedades del conjunto (Ali, 1996) (Klintworth & Macmillian, 1992). La principal dificultad que se encuentra con el método de los elementos finitos con modelos constitutivos convencionales es la imposibilidad de modelar el comportamiento de materiales altamente anisótropos sometidos a cargas que superan los límites de elasticidad de al menos un componente del material compuesto. Por ello, resulta necesario modelar materiales compuestos a partir de teorías que permitan simular el comportamiento de materiales con alta anisotropía y con deformaciones permanentes direccionadas; con comportamiento diferenciado para cada sustancia que conforma el compuesto; con un buen tratamiento de la fase de refuerzo con fibras; con capacidad de representar el deslizamiento relativo entre matriz y fibra (debonding); con capacidad de representar el pandeo local del refuerzo; con capacidad de simular grandes desplazamientos y deformaciones y otros fenómenos colaterales a estos mencionados. Todos estos fenómenos inducen a una pérdida de resistencia y rigidez global del material compuesto con pérdida de linealidad en la respuesta del conjunto.

## 4 CLASIFICACIÓN DE LOS MATERIALES COMPUESTOS

Es muy difícil definir un material compuesto dada sus cualidades, composición, propiedades, forma de fabricación, etc. Por esta razón hay distintas maneras de clasificar los materiales compuestos. En este libro se presenta la siguiente clasificación:

### 4.1 Clasificación según su topología

Entre las posibles clasificaciones, está la que se basa en su configuración topológica, es decir en como son y como se distribuyen los componentes: materiales de matriz compuesta, materiales de matriz compuesta con fibras cortas y/o largas, materiales laminados y también una combinación de cada uno de estos tipos enunciados. En la Figura 6 se observa la clasificación de los materiales compuestos en función de su configuración

### 4.2 Clasificación según sus componentes

Los materiales compuestos pueden también clasificarse según el tipo y forma en que están constituidos, en (Botello, 1993):

- **Fibrosos:** Compuestos por fibras continuas cortas o largas, en una dos o tres direcciones, o bien distribuidas en forma aleatoria aglutinados por



Figura 6: Clasificación de los materiales compuestos según su topología.

una matriz. A su vez esta matriz puede estar formada por dos o más materiales.

- **Particulados:** Formados por partículas que puntualmente trabajan aglutinadas por una matriz.
- **Laminares:** Compuestos por capas o constituyentes laminares con características de resistencia en magnitud y dirección diferentes.
- **Hojuelados:** Compuestos por hojuelas planas inmersas en una matriz.
- **Relleno barra esqueleto:** formado por un esqueleto relleno por otro material.

Los más utilizados son los fibrosos, en los cuales las fibras asumen el papel de resistir las acciones mecánicas y la matriz sirve como aglutinante y protector del medio ambiente. La resistencia mecánica de las fibras es del orden de 25 a 50 veces mayor que la matriz. En el caso del hormigón a tracción esta relación es del orden de 100 veces. Esto provoca un comportamiento fuertemente anisótropo.

Al aplicar una carga en un material compuesto se producen en su interior esfuerzos y para lograr una buena transición de estos entre fibra y matriz se coloca una resina y una encima.

La función de la matriz es la de repartir y transmitir las cargas a las fibras. En el caso de laminados compuestos las propiedades de resistencia al corte son muy importantes. La matriz cumple la función de asegurar la continuidad de desplazamientos entre láminas en todo el espesor de la estratificación e influye en el modo de rotura.

En láminas sometidas a compresión la matriz influye en la longitud de pandeo de las fibras. Las matrices más comunes están constituidas por polímeros, metales y cerámicos.

Las más utilizadas son las poliméricas, que a su vez se clasifican en: polímeros termoplásticos, polímeros termoestables y polímeros espumados.

Las propiedades mecánicas en estado sólido para un material termoplástico son generalmente no-lineales con un módulo de elasticidad muy bajo y un comportamiento dúctil. Los materiales termoendurecibles tienen unas propiedades muy linealizables con un alto módulo de elasticidad y comportamiento frágil.

#### 4.3 Clasificación estructural

Desde el punto de vista del estudio del comportamiento mecánico, los materiales compuestos pueden clasificarse según su:

- Estructura básica. En este caso se considera en la clasificación la estructura a nivel de las moléculas singulares o mallas cristalinas,
- Estructura microscópica. Se tiene en cuenta para la clasificación la interacción fibra-matriz, su influencia en la distribución de tensiones y la aparición de fallas, discontinuidades o fisuras bajo condiciones de cargas elementales,
- Estructura macroscópica. Se considera en la clasificación al material compuesto desde un punto de vista macroscópico, como una combinación de sustancias diferentes, que contribuyen al estado de equilibrio del conjunto.

En este capítulo se presentará un estudio estructural desde el punto de vista macroscópico, considerando las siguiente hipótesis:

- Las fibras se distribuyen uniformemente en la matriz,
- Existe perfecta adherencia entre la matriz y el refuerzo. En otro capítulo más adelante, se incorporará a la formulación, la influencia del desplazamiento relativo entre matriz y refuerzo,
- La matriz no contiene vacíos ni defectos,
- No existen tensiones residuales en el material compuesto provenientes de posibles defectos en la fabricación. Sin embargo, es posible incluirlos como condiciones iniciales.

Una extensa descripción sobre los tipos de materiales compuestos y de componentes, formas de fabricación y aplicaciones industriales, puede consultarse <sup>1</sup> (Miravete, 2000) y en (Car, 2000).

## 5 SIMULACIÓN DEL COMPORTAMIENTO ANISÓTROPO DE MATERIALES DE MATRIZ REFORZADA

Según se ha visto en los apartados anteriores, los materiales compuestos son de muy diversas formas y por lo tanto resulta complejo aproximar su comportamiento mediante un modelo constitutivo único y general. Esta afirmación se hace más cierta aun, cuando se quiere representar el comportamiento no lineal de estos materiales compuestos. Por otra parte, los compuestos son materiales muy anisótropos y éste fenómeno sólo tiene en consideración en régimen elástico o través de modelos que no diferencian explícitamente el comportamiento del refuerzo y de la matriz. Estos modelos presentan un buen acuerdo con los ensayos experimentales, pero la alteración de algunos de los componentes en forma o cantidad exige una nueva parametrización del material.

En este apartado se presenta la formulación de un modelo constitutivo anisotrópico no-lineal en grandes deformaciones, que permite representar fenómenos irreversibles, incluido problemas de fractura, partiendo de las propiedades de conjunto del compuesto. En un capítulo posterior, se ampliará esta formulación a través de la teoría de mezclas de sustancias básicas, permitiendo así el tratamiento del compuesto a partir de las propiedades y forma de participación de los componentes. También y en capítulos sucesivos se intensificará esta generalización para tener en cuenta los fenómenos de deslizamiento entre fibra y matriz y también el problema de inestabilidad local que ocurre cuando se comprime un compuesto de matriz reforzada con fibras. La gran diversidad de mecanismos que ocurren en el compuesto, hace que la exacta simulación numérica de los mismo sea un objetivo casi inalcanzable (Car, 2000), (Zalamea, 2001).

Los materiales compuestos constituidos por plásticos reforzados con fibras (FRP "fiber reinforced plastic") y, especialmente, los materiales compuestos reforzados con fibras de vidrio o carbono constituyen los materiales especialmente indicados para la fabricación de elementos estructurales en los que el peso y la resistencia constituyen variables fundamentales durante el proceso de diseño. Por lo tanto, es necesario establecer la respuesta de este tipo de materiales bajo diversos tipos de sollicitaciones. El mecanismo de falla en los materiales plásticos reforzados con fibras es complejo debido a la presencia de diversos fenómenos y mecanismos. Dependiendo del tipo de material y de los esfuerzos a los que está sometido la pieza el proceso de falla del material puede sobrevenir como una combinación de diversos mecanismos.

En el siguiente apartado se describe el modelo constitutivo elastoplástico en régimen de pequeñas deformaciones elásticas y grandes deformaciones plásticas, está escrito en el contexto de la termodinámica de sólidos irreversibles, trata la anisotropía en forma general y permite representar estados de fractura mediante



la aproximación del continuo llevada al límite de la discontinuidad.

## 6 MODELO CONSTITUTIVO ELASTOPLÁSTICO ISÓTROPICO

Los materiales compuestos surgen de una combinación adecuada en volumen y forma (orientación) de elementos de refuerzo y matrices. Estos elementos de refuerzo se caracterizan por sus excelentes propiedades mecánicas y su fuerte anisotropía. La posición y tipo de refuerzo dan lugar a diversos tipos de materiales compuestos.

En este apartado se formula el modelo constitutivo que es capaz de describir el comportamiento de materiales compuestos. Para ello es necesario desarrollar un modelo que permita simular los siguientes fenómenos: a) fuerte anisotropía con deformaciones permanentes direccionadas; b) flujo plástico unidireccional en el caso de refuerzo con fibras; c) tendencia de las fibras a alinearse con la dirección del esfuerzo mayor; d) presencia de grandes deformaciones debido al fenómeno de alineación del refuerzo en la dirección del esfuerzo mayor; e) fenómenos de microfisuración en la matriz y i) fallas en la fase de refuerzo. En capítulos posteriores se incorporará: i) la participación de distintas sustancias a través de la teoría de mezclas; ii) deslizamientos relativos entre matriz y fibra ("debonding") a nivel de interfase con pérdida de compatibilidad cinemática; iii) pandeo local del refuerzo.

El modelo se formula en el contexto de la mecánica no-lineal de medios continuos en régimen de grandes deformaciones y debe satisfacer entre otros postulados las leyes de la termodinámica. El mismo se desarrolla siguiendo el enfoque utilizado por Ortiz (1987) y Moran *et al.* (1990), entre otros que consiste en definir *a priori* los elementos del modelo constitutivo: energía libre, función de fluencia y potencial plástico, variables internas y sus leyes de evolución. El modelo se obtiene de la segunda ley de la termodinámica expresada en este contexto mediante la desigualdad de Clausius-Duhem (Malvern, 1969), (Lubliner, 1990). Además, toda esta formulación se realiza con el objetivo de ser introducida dentro de un análisis por elementos finitos no lineal.

### 6.1 Parámetros del modelo constitutivo

En presencia de grandes transformaciones la elección de la configuración en la que se obtienen las mediciones de los ensayos no resulta trivial. Si se pretende emplear en el contexto de las grandes deformaciones el valor de las tensiones uniaxiales  $\tau$  obtenidas a partir de ensayos de tracción simple, deben emplearse las medidas de deformación adecuadas para que el modelo constitutivo respete a física del problema (García Garino, 1993) (Bathe, 1982).

Existe una pérdida de unicidad en los resultados dependiendo si el ensayo se refiere a la configuración original o a la deformada. De aquí se concluye que es necesario emplear los argumentos adecuados en la descripción de la ecuación constitutiva. Con el objetivo de definir la ecuación constitutiva y para la implementación numérica del modelo constitutivo se utilizarán las variables espaciales que describen de manera natural la física del problema. Lo anterior no impide que el modelo constitutivo pueda formularse utilizando variables materiales o con referencia a otra configuración distinta de la deformada. La implementación práctica de este tipo de modelos supone un tratamiento matemático muy complejo (Car, 2000).

En presencia de estados tensionales uniaxiales el límite elástico del material se encuentra definido en las curvas tensión-deformación. En general, para casos tridimensionales, todos los estados tensionales que producen fluencia en el material constituyen el límite elástico del mismo definido matemáticamente a través de un cierto *criterio o condición de fluencia*. El criterio de fluencia inicial es una función del estado tensional y en general se expresa como,

$$\phi\{\tau; \alpha; g\} = f\{\tau; g\} - K\{\alpha\} \leq 0 \quad (1)$$

donde  $f$  es una función continua de las tensiones,  $\tau$  es el tensor de tensiones de Kirchhoff en la configuración actual o deformada y  $\alpha$  es un conjunto de variables internas que permiten tener en cuenta el cambio en la forma de la función  $\phi$ .

La ec.(1) no puede utilizarse indistintamente en cualquier configuración ya que cada configuración tiene una definición especial para la condición de fluencia (Cante, 1995):

$$f\{S\} \neq f\{\tau\} \quad (2)$$

donde  $S$  es el segundo tensor de tensiones de Piola Kirchhoff en la configuración inicial o de referencia y  $\tau$  es el tensor de tensiones de Kirchhoff en la configuración actual o deformada.

El primer término de la ec.(1) se puede interpretar como una tensión efectiva que se compara con un resultado experimental. Resulta esencial que la tensión efectiva que se calcula sea independiente de los argumentos que intervienen en su definición.

Como conclusión se puede expresar que ninguna medida de la deformación o de la tensión resultan inadecuadas para describir correctamente el comportamiento de un material, pero siempre respetando sus parámetros físicos. Las variables espaciales describen en forma natural la física del problema y por este motivo se utilizan en este trabajo como argumentos del modelo constitutivo, y sin pérdida de generalidad se extiende el modelo a variables materiales.

## 6.2 Caso de pequeñas deformaciones elásticas y grandes deformaciones plásticas. Expresión de la energía libre

Los materiales compuestos, a excepción de los elastómeros, presentan deformaciones elásticas pequeñas aún cuando están sometidos a procesos de grandes deformaciones. Esto conduce a que la parte elástica del tensor gradiente de deformaciones  $F^e$  se aproxime a la identidad y la parte elástica del tensor izquierdo de Cauchy-Green  $(b^e)^{-1}$  tiende al tensor métrico espacial  $g$  (Car, 2000). En este caso la distinción entre configuración intermedia y deformada carece de importancia. Sin embargo, las deformaciones plásticas continúan siendo finitas y es necesario mantener la presencia del tensor derecho de Cauchy-Green  $C$  en la expresión material del modelo constitutivo. Si este tensor no se tiene en cuenta explícitamente, se está definiendo un *material diferente*, matemáticamente válido, pero sin validez física. Para el caso de pequeñas deformaciones elásticas, resulta suficiente caracterizar la componente elástica de la energía libre mediante una función cuadrática del tensor elástico de deformaciones de Almansi  $e^e$ , esto es,

$$\psi^e = \frac{1}{2m} e^e : c : e^e \quad (3)$$

donde  $c$  es el tensor constitutivo en la configuración actualizada. Teniendo en cuenta la hipótesis de elasticidad desacoplada, la expresión de la energía libre (ec. 3) puede escribirse como,

$$\psi = \frac{1}{2m} (e^e : c : e^e) + \psi^p \quad (4a)$$

donde  $\psi^p$  representa la parte plástica de la energía libre.

## 6.3 Expresión del modelo constitutivo elastoplástico en la configuración actualizada. Definiciones básicas

Teniendo en cuenta la ecuación de disipación de Clausius-Duhem (Malvern, 1969); (Lubliner, 1990); (Car, 2000) y la cuota elástica de la deformación de Almansi  $e^e$ , que se define como:

$$e^e = e - e^p = \frac{1}{2} (I - b^{-1}) - \int_0^t d^p dt \quad (5)$$

las tensiones de Kirchhoff resultan,

$$\tau = c : e^e = c : (e - e^p) \quad (6)$$

donde  $c$  es el tensor constitutivo en la configuración actualizada. En la ec.(6) el tensor constitutivo  $c$  es posible considerarlo constante tanto en la configuración actualizada como en la referencial. En el caso de considerarlo constante

en la configuración referencial el tensor constitutivo  $c$  se obtiene como el "push forward" del tensor constitutivo en la configuración referencial. Así en la definición de la ecuación constitutiva y en su implementación numérica se utilizarán variables espaciales que describen la física del problema más cercana a la realidad. Esto no impide que el modelo constitutivo pueda formularse utilizando variables materiales o en otra configuración distinta de la deformada.

### 6.3.1 Condición de fluencia

La condición de fluencia distingue entre dos estados: uno elástico que se encuentra en el interior del dominio delimitado por la llamada función de fluencia y otro estado plástico que se localiza sobre dicha superficie (Crisfield, 1991). La condición de fluencia depende fundamentalmente del tipo de material y se define en la configuración actualizada de la siguiente forma:

$$\phi\{\tau; g; \alpha\} = F\{\tau; g\} - k\{\alpha\} = 0 \quad (7)$$

donde  $\tau$  es el tensor de tensiones de Kirchhoff,  $g$  es el tensor métrico en la configuración actualizada y  $\alpha$  es la variable interna de plasticidad que controla la evolución de la superficie  $\phi$ .

### 6.3.2 Regla de flujo

La regla de flujo establece la ley de evolución de las deformaciones plásticas y se define en la configuración actualizada como:

$$L_v(e)^p = d^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \tau} \quad (8)$$

donde  $L_v(\cdot)$  es la denominada derivada objetiva de Lee (Malvern, 1969); (Lubliner, 1990), ( $g = g\{\tau; g\}$ ) es la función de potencial plástico y  $\lambda$  es una función escalar no negativa conocida como parámetro de consistencia plástica que debe cumplir con las condiciones de Kuhn-Tucker (Crisfield, 1991) dadas por:

$$\lambda \geq 0 \quad \phi\{\tau; g; \alpha\} \leq 0 \quad \lambda \phi\{\tau; g; \alpha\} = 0 \quad (9)$$

Las condiciones dadas por la ec.(9) se conocen en la terminología clásica como condiciones de carga y descarga. Además, debe cumplirse la condición de persistencia expresada por la derivada objetiva de la función de fluencia:

$$\dot{\phi}\{\tau; g; \alpha\} = 0 \quad (10)$$

### 6.3.3 Tensor constitutivo elastoplástico tangente

El tensor constitutivo elastoplástico tangente relaciona el tensor de tensiones de Kirchhoff con las deformaciones de Almansi en la forma:

$$L_v(\tau) = c^{ep} : L_v(e) \quad (11)$$

La derivada objetiva de la ec.(6) resulta:

$$L_v(\tau) = L_v(c) : (e - e^p) + c : [L_v(e) - L_v(e^p)] \quad (12)$$

**Hipótesis 1: tensor constitutivo constante en la configuración actualizada** En este apartado se deduce la expresión del tensor constitutivo tangente del problema planteado, partiendo de la hipótesis que el tensor constitutivo  $c$  se mantiene constante en la configuración actualizada. Este modelo se conoce en la literatura como modelo de Murnagaham (1937) y cuya forma lineal ha sido denominada como *modelo hiperelástico lineal espacial*, por García Garino y Oliver (1988) . . Teniendo en cuenta la condición de fluencia en la configuración actualizada (ec.(7), resulta en forma detallada la condición de consistencia enunciada en la ecuación.(10),

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial \tau} : L_v(\tau) + \frac{\partial \phi}{\partial g} : L_v(g) + \frac{\partial \phi}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \alpha} \dot{\alpha} = 0 \quad (13)$$

donde  $\dot{\alpha}$  representa la ley de evolución de las variables internas y está dada por:

$$\dot{\alpha} = \dot{\lambda} \left[ h_\kappa : \frac{\partial g}{\partial \tau} \right] = h_\kappa : L_v(e^p) \quad (14)$$

y  $h_\kappa$  es un tensor de segundo orden, función del estado de tensiones y de la variable de endurecimiento plástico  $k$ ; que en el caso más simple de la teoría incremental de la plasticidad toma la forma del tensor de tensiones de Kirchhoff. La derivada objetiva del tensor métrico espacial se obtiene teniendo en cuenta la relación entre la variación temporal del tensor derecho de Cauchy-Green y la variación temporal del tensor de deformaciones de Green-Lagrange  $\dot{C} = 2\dot{E}$ . En la configuración actualizada la relación anterior se escribe como:

$$L_v(g) = 2L_v(e) \quad (15)$$

Considerando las ecs.(8), (12), (13) y (15) la condición de consistencia se reescribe de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{\partial \phi}{\partial \tau} : \underbrace{L_v(c) : (e - e^p) + c : \left( L_v(e) - \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \tau} \right)}_{L_v(\tau)} \\ + \frac{\partial \phi}{\partial g} : \underbrace{2L_v(e)}_{L_v(g)} - \underbrace{\frac{\partial k}{\partial \kappa} \dot{\lambda} \left[ h_\kappa : \frac{\partial g}{\partial \tau} \right]}_{\dot{\alpha}} &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

El producto doblemente contraído  $L_v(c) : (e - e^p)$  puede reescribirse en la forma deducida por Cante (1995), esto es:

$$L_v(c) : (e - e^p) = \hat{d} : L_v(e) \quad (17)$$

donde  $\hat{d}$  está dada por (Cante, 1995):

$$\hat{d}_{ijkl} = -4\bar{\mu} [e_{ij}^e \delta_{jk} + \delta_{ik} e_{lj}^e] - 2\bar{\lambda} [\delta_{ij} e_{kl}^e + \delta_{ik} \delta_{jl} \text{tr}[e^e]] \quad (18)$$

Teniendo en cuenta la ec.(16), la ec.(17) y la ec.(18) se obtiene el parámetro de consistencia plástica

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial \tau} : (c + \hat{d}) : L_v(e) + 2 \frac{\partial \phi}{\partial g} : L_v(e)}{\frac{\partial \phi}{\partial \tau} : c : \frac{\partial g}{\partial \tau} - \frac{\partial k}{\partial \kappa} \left[ h_\kappa : \frac{\partial g}{\partial \tau} \right]} \quad (19)$$

El tensor constitutivo elastoplástico tangente se obtiene teniendo en cuenta la ec.(12), el parámetro de consistencia plástica dado en la ec.(19) y la definición del flujo plástico dado por la ec.(8)

$$\begin{aligned} L_v(\tau) &= \left[ (c + \hat{d}) - \frac{\left[ \frac{\partial \phi}{\partial \tau} : (c + \hat{d}) + 2 \frac{\partial \phi}{\partial g} \right] \otimes \left( c : \frac{\partial g}{\partial \tau} \right)}{\frac{\partial \phi}{\partial \tau} : c : \frac{\partial g}{\partial \tau} - \frac{\partial k}{\partial \kappa} \left[ h_\kappa : \frac{\partial g}{\partial \tau} \right]} \right] : L_v(e) \\ &= c^{ep} : L_v(e) \end{aligned} \quad (20)$$

donde  $c^{ep}$  representa el tensor constitutivo elastoplástico tangente en la configuración espacial que relaciona el incremento de deformaciones en la configuración actualizada con el incremento de tensiones de Kirchhoff.

**Hipótesis 2: tensor constitutivo constante en la configuración referencial** En este apartado se obtiene el tensor constitutivo tangente partiendo de la hipótesis de que el tensor constitutivo permanece constante en la configuración referencial. En el caso elástico lineal este modelo coincide con el modelo de Kirchhoff-St. Venant (Marsden & Hughes, 1994) o modelo hiperelástico lineal material. Bajo esta hipótesis la derivada objetiva del tensor constitutivo  $L_v(c)$ , es decir su variación en la configuración referencial es nula. Por lo tanto, el primer miembro de la ec.(12) es nulo y la variación de la tensión resulta:

$$L_v(\tau) = c : [L_v(e) - L_v(e^p)] \quad (21)$$

Teniendo en cuenta la ec. (21) la condición de consistencia expresada en la ec. (16) resulta

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial \tau} : \left[ c : \left[ L_v(e) - \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \tau} \right] \right] + 2 \frac{\partial \phi}{\partial g} : L_v(e) - \frac{\partial k}{\partial \kappa} \dot{\lambda} \left[ h_{\kappa} : \frac{\partial g}{\partial \tau} \right] = 0 \quad (22)$$

El parámetro de consistencia plástica  $\dot{\lambda}$  se obtiene a partir de la ec.(22)

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial \tau} : (c) : L_v(e) + 2 \frac{\partial \phi}{\partial g} : L_v(e)}{\frac{\partial \phi}{\partial \tau} : c : \frac{\partial g}{\partial \tau} - \frac{\partial k}{\partial \kappa} \left[ h_{\kappa} : \frac{\partial g}{\partial \tau} \right]} \quad (23)$$

El tensor constitutivo elastoplástico tangente se obtiene teniendo en cuenta la ec.(21), el parámetro de consistencia plástica dado por la ec.(23) y la definición del flujo plástico dado por la ec.(8)

$$L_v(\tau) = \left[ (c) - \frac{\left[ \frac{\partial \phi}{\partial \tau} : c + 2 \frac{\partial \phi}{\partial g} \right] \otimes \left( c : \frac{\partial g}{\partial \tau} \right)}{\frac{\partial \phi}{\partial \tau} : c : \frac{\partial g}{\partial \tau} - \frac{\partial k}{\partial \kappa} \left[ h_{\kappa} : \frac{\partial g}{\partial \tau} \right]} \right] : L_v(e) \\ = c^{ep} : L_v(e) \quad (24)$$

donde  $c^{ep}$  representa el tensor constitutivo elastoplástico tangente en la configuración espacial que relaciona el incremento de deformaciones en la configuración actualizada con el incremento de tensiones de Kirchhoff.

**Comparación entre modelos** A partir de las ecuaciones que definen los distintos modelos constitutivos es posible comparar las respuestas para cada uno

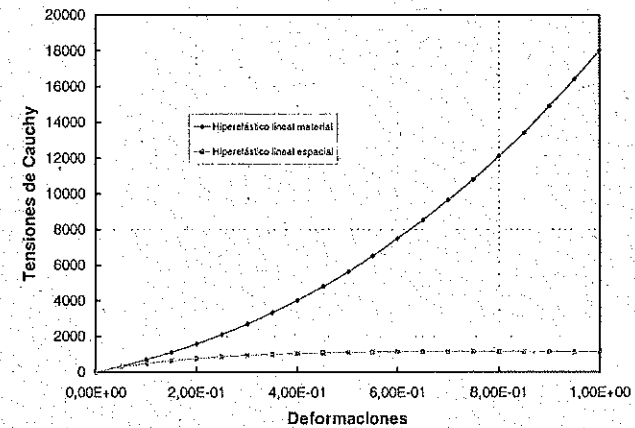


Figura 7: Comparación de la respuesta de los modelos constitutivos

de ellos para el caso elástico lineal. En la Figura 7 se muestra la respuesta (tensiones de Cauchy) del material en función de las deformaciones. En la misma se observa que el modelo hiperelástico lineal material caracteriza un material que endurece bajo deformación impuesta, mientras que el modelo hiperelástico lineal espacial define un material que ablanda bajo deformación impuesta.

## 7 CONSIDERACIÓN GENERAL DE LA ANISOTROPÍA EN LA ECUACIÓN CONSTITUTIVA

Los modelos constitutivos desarrollados para la simulación del comportamiento de materiales simples isotrópicos no resultan adecuados para el análisis de materiales compuestos, entre otros motivos por la fuerte anisotropía de estos materiales. Tampoco ha resultado satisfactoria la representación de un compuesto mediante el único material ortótropo con propiedades del conjunto, por ello también se presentará en el próximo capítulo la teoría de mezclas.

Existen diversas formulaciones para materiales anisótropos que presentan una respuesta constitutiva no-lineal (Hill, 1971) (Bassani, 1977) (Barlat & Lian, 1989) (Barlat et al., 1991). Estas teorías, en general, se basan en formular funciones de fluencia y potencial plástico anisótropas; lo que obliga a desarrollar nuevos procedimientos para integrar la ecuación constitutiva.

La formulación anisótropa que se presenta en este capítulo está orientada a generalizar la formulación isotrópica presentada en el apartado anterior. Se

basa en transportar desde el espacio real, a otro espacio isótropo ficticio los parámetros constitutivos del material y su estado tensional y deformacional. Una vez allí, se utiliza un modelo constitutivo isótropo junto a todas las técnicas y procedimientos desarrollados para ecuaciones constitutivas isótropas.

## 8 GENERALIDADES SOBRE LA NUEVA FORMULACIÓN PROPUESTA

La formulación de una ley constitutiva adecuada para sólidos ortótropos o anisótropos elastoplásticos no proporcionales<sup>1</sup> constituye un problema de elevada complejidad. Los materiales compuestos reforzados con fibras constituyen una forma simplificada de materiales no proporcionales anisótropos bifase. La descripción del comportamiento en régimen elástico de un sólido anisótropo no presenta grandes dificultades. Es posible utilizar para tal fin las formas generales de la teoría de la elasticidad (Hull, 1987), (Pendleton & Tuttle, 1989), (Matthews & Rawlings, 1994), sin embargo en el campo inelástico no se encuentran experiencias generales y satisfactorias.

Uno de los temas delicados y difícil de solucionar en los problemas anisótropos es la formulación de la función umbral de fluencia y todo los temas que derivan de utilizar estas complejas funciones. La formulación general de superficies de fluencia anisótropas debe ser capaz de tender al comportamiento de materiales isótropos como un caso particular del anisótropo y debe poseer las propiedades de funciones isótropas como describen Malvern (1969), Gurtin (1981) y Chen y Han (1988). Estas propiedades se refieren a la simetría<sup>2</sup> de la función de fluencia y a su convexidad.

Los primeros intentos de formular funciones de fluencia para materiales ortótropos no proporcionales se deben a Hill quien en 1948 consiguió extender el modelo isótropo de von Mises al caso ortótropo (Hill, 1971) (Hill, 1979) (Hill, 1990). La principal limitación de esta teoría se encuentra en la imposibilidad de representar el comportamiento de materiales sensibles a la presión, como por ejemplo es el caso de los geomateriales o materiales compuestos. Diversos autores han propuesto funciones de fluencia en el espacio de tensiones para materiales anisótropos, entre ellos se puede mencionar Bassani (1977), Budiansky (1984) y Barlat *et al.* (1989, 1991) (Barlat *et al.*, 1991). Barlat *et al.* (1991) utilizan una transformación lineal del estado tensional del material anisótropo multiplicando todos los componentes del tensor de tensiones por diferentes constantes. Karafilis y Boyce (1993) proponen una expresión general

<sup>1</sup>Se entiende por material no proporcional a aquel en el cual la relación entre los módulos elásticos del material en dos direcciones cualesquiera no es igual a la relación entre las resistencias en las mismas direcciones

<sup>2</sup>Dado un estado de tensiones principales  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $\sigma_3$  la función de fluencia  $f$  resulta simétrica si se cumple  $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = f(\sigma_2, \sigma_1, \sigma_3)$

para superficies de fluencia de materiales policristalinos que permite describir materiales isótropos y anisótropos. La anisotropía del material la describen introduciendo un conjunto de variables tensoriales irreducibles. Este conjunto de variables tensoriales permite realizar una transformación lineal del estado tensional del material anisótropo a un estado que denominan IPE (Isotropic Plasticity Equivalent material). Dvorak y Bahei-El-Din (1982) utilizaron también operadores tensoriales en conjunción con el criterio de fluencia de von Mises para el análisis de materiales compuestos. Diversos autores han utilizado tensores de cuarto orden en la formulación de criterios de fluencia para materiales anisótropos entre ellos se puede citar a Shih y Lee (1978), Eisenberg y Yen (1984) y Voyiadjis y Foroozesh (1990). Voyiadjis y Thiagarajan (1995) realizan el estudio de materiales compuestos reforzados unidireccionalmente formulando una superficie de fluencia general que depende de un tensor de cuarto orden.

La formulación anisótropa que se desarrolla en este capítulo, permite realizar una generalización de la teoría isótropa clásica. Esta teoría se basa en aplicar una transformación lineal tanto al tensor de tensiones como al de deformaciones a través de tensores de cuarto orden que contienen la información de la anisotropía del material. Esta transformación lineal garantiza la convexidad de la función de fluencia y del potencial plástico (Eggleston, 1969). La convexidad de la función de fluencia asegura que el material no retorna a un estado elástico una vez que ha plastificado bajo carga creciente. Esta teoría que se denomina de transformación de espacios, se basa en las ideas propuestas por Betten (Betten, 1981) (Betten, 1988) y utiliza el concepto de *tensor de tensiones mapeado* a un espacio de tensiones ficticio. La transformación generalizada del tensor de tensiones del material anisótropo se representa esquemáticamente en la Figura 8. Este concepto permite utilizar los algoritmos usados para el caso de materiales isótropos, con las consiguientes ventajas en la implementación computacional del modelo.

En trabajos previos, diversos autores han desarrollado una generalización de la teoría de plasticidad isótropa al caso anisótropo (Oller *et al.*, 1993b) (Oller *et al.*, 1993a). La idea básica consistía en modelar el comportamiento de un sólido en el *espacio anisótropo real* a través de un sólido ideal en el *espacio isótropo ficticio* (ver Figura 8). El modelo se basa en realizar una transformación lineal del tensor de tensiones suponiendo que las deformaciones elásticas son idénticas en ambos espacios lo cual introduce una limitación en la teoría anisótropa mapeada. Esta limitación está dada por el hecho de que se debe respetar la proporcionalidad entre el límite de resistencia y el módulo de elasticidad para cada dirección del material. Para evitar este inconveniente Oller *et al.* (1995) proponen que la aplicación lineal se realice tanto sobre el espacio de tensiones como sobre el de deformaciones.

El modelo constitutivo que se presenta en este trabajo resulta aplicable a materiales que presentan una fuerte anisotropía, como es el caso de los mate-

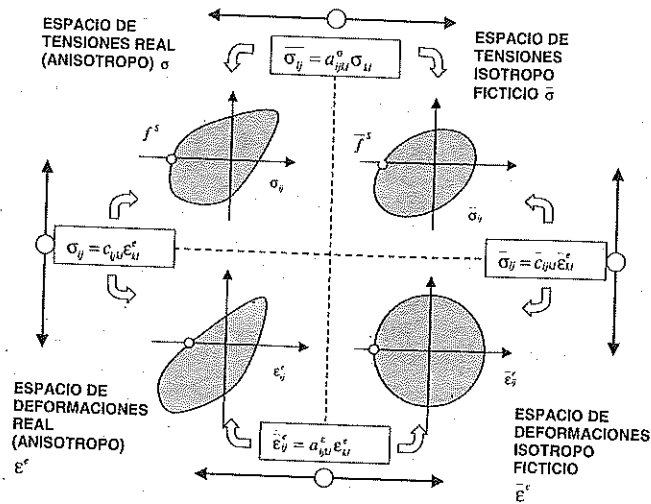


Figura 8: Transformación de espacios. Espacios de tensiones y deformaciones reales y ficticios en pequeñas deformaciones.

riales compuestos reforzados con fibras y resulta de una generalización de la teoría de la plasticidad clásica. El comportamiento anisótropo del material se formula a través de un espacio ficticio isotropo de tensiones y deformaciones que resulta de una transformación tensorial lineal de los espacios reales de tensiones y deformaciones anisótropo. Los parámetros que intervienen en la definición del tensor de transformación se obtienen a través de ensayos experimentales. La ventaja en la utilización de este tipo de modelos consiste en la posibilidad de utilizar las mismas funciones de fluencia, potenciales plásticos y métodos de integración de la ecuación constitutiva desarrollados para materiales isotropos. Toda la información de la anisotropía del material se encuentra en los tensores de cuarto orden de transformación de los espacios de tensiones ( $A^S$  o  $a^r$  en la configuración referencial o actualizada respectivamente) y deformaciones ( $A^E$  o  $a^e$  en la configuración referencial o actualizada respectivamente). La utilización de la teoría de transformación de espacios permite obtener una metodología para la definición de modelos anisótropos de carácter generalizado.

La formulación que resulta de este procedimiento es completamente general y permite realizar análisis de materiales que presentan un grado de anisotropía elevado.

### 9 FUNCIÓN DE FLUENCIA Y DE POTENCIAL PLÁSTICO PARA MATERIALES ANISÓTROPOS

En los apartados siguientes se presenta un modelo elasto plástico que puede formularse indistintamente en la configuración referencial o actualizada utilizando la cinemática lagrangeana total o actualizada (Green & P., 1964). Este modelo permite simular el comportamiento no-lineal de materiales sometidos a grandes deformaciones plásticas y pequeñas deformaciones elásticas debido a que para la definición de la energía libre elástica se utiliza un potencial cuadrático (García Garino & Oliver, 1991).

Las funciones de fluencia y potencial plástico pueden definirse en el espacio de tensiones de Kirchhoff (configuración actualizada) de la siguiente forma:

$$\text{Función de fluencia } \phi^r \{ \tau ; \alpha ; g \} = 0 \tag{25}$$

$$\text{Función de potencial } g \{ \tau ; g \} = K \tag{26}$$

donde  $\tau$  es el tensor de tensiones de Kirchhoff y  $\phi^r$  y  $g$  representan las funciones de fluencia y potencial plástico en la configuración actualizada. También pueden estar definidas estas funciones en la configuración referencial, esto es:

$$\text{Función de fluencia } \Phi^S \{ S ; \alpha ; G \} = 0 \tag{27}$$

$$\text{Función de potencial } G \{ S ; G \} = K \tag{28}$$

donde  $S$  es el segundo tensor de Piola Kirchhoff y  $\Phi^S$  y  $G$  son las funciones de fluencia y potencial plástico escritas en la configuración referencial. Es necesario resaltar que las funciones  $\phi^r$ ,  $g$ ,  $\Phi^S$  y  $G$  son funciones isotropas, simétricas y convexas.

La función de fluencia y potencial plástico en el caso más general puede expresarse como una función de 6 variables independientes, componentes del tensor de tensiones

$$\Phi^S \{ S_{11}; S_{22}; S_{33}; S_{12}; S_{13}; S_{23}; \alpha \} = 0 \tag{29}$$

$$G \{ S_{11}; S_{22}; S_{33}; S_{12}; S_{13}; S_{23}; \alpha \} = K \tag{30}$$

o en función de las tensiones principales en el caso isotropo:

$$\Phi^S \{ S_1; S_2; S_3; \alpha \} = 0 \tag{31}$$

$$G \{ S_1; S_2; S_3; \alpha \} = K \tag{32}$$



que resultan de una transformación del estado tensional. Las funciones de fluencia y potencial plástico resultan isotropas si se cumple que para cualquier transformación ortogonal se verifica la condición de invariancia de la función de fluencia o del potencial (Malvern, 1969), esto es:

$$\Phi^S \{a_{ip}a_{jq}S_{pq}; \alpha\} = \Phi^S \{S_{ij}; \alpha\} = 0 \quad (33)$$

$$\mathcal{G} \{a_{ip}a_{jq}S_{pq}; \alpha\} = \mathcal{G} \{S_{ij}; \alpha\} = K \quad (34)$$

donde  $a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}$  representa una transformación ortogonal y  $\delta_{ij}$  son las componentes del tensor de Kronecker. Los materiales isotropos satisfacen la condición de invariancia y esto permite escribir la función de fluencia y potencial plástico en función de los invariantes del tensor de tensiones, esto es:

$$\Phi^S \{I_1; I_2; I_3; \alpha\} = 0 \quad (35)$$

$$\mathcal{G} \{I_1; I_2; I_3; \alpha\} = K \quad (36)$$

En el caso de materiales que satisfacen la condición de incompresibilidad plástica<sup>3</sup>, las funciones de fluencia y potencial plástico resultan:

$$\Phi^S \{J_2; J_3; \alpha\} = 0 \quad (37)$$

$$\mathcal{G} \{J_2; J_3; \alpha\} = -K \quad (38)$$

donde  $J_2$  y  $J_3$  representan el segundo y tercer invariante de la parte desviadora del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff.

En forma análoga en la configuración actualizada se tiene que la función de fluencia o de potencial plástico resultan isotropas si se verifica la condición de invariancia de la función de fluencia o del potencial, y para el caso de materiales que satisfacen la condición de incompresibilidad plástica se escriben como:

$$\phi^r \{j_2; j_3; \alpha\} = 0 \quad (39)$$

$$g \{j_2; j_3; \alpha\} = K \quad (40)$$

donde  $j_2$  y  $j_3$  representan el segundo y tercer invariante de la parte desviadora del tensor de tensiones de Kirchhoff.

<sup>3</sup>La condición de incompresibilidad plástica se verifica cuando la función de fluencia no está afectada de la parte esférica del tensor de tensiones.

## 10 ANISOTROPIA EN LA CONFIGURACIÓN REFERENCIAL

Los procedimientos tradicionales que permiten obtener las ecuaciones constitutivas para materiales anisotropos elastoplásticos se basan en la descripción de una superficie de fluencia y una superficie de potencial plástico en términos de las propiedades características del material. Satisfacer las condiciones de invariancia en estos casos resulta difícil y en algunos casos imposible.

Un procedimiento que garantiza esta condición de invariancia consiste en definir las propiedades del sólido "anisótropo real" en términos de un sólido "isótropo ficticio", estableciendo una relación lineal entre el espacio de tensiones real y el espacio de tensiones ficticio a través de un tensor de cuarto orden que contiene la información de la anisotropía que producen las distintas resistencias en las direcciones ortogonales del material (Oller et al., 1995) (Casas et al., 1998) (ver Figura 8).

### 10.1 Transformación del espacio de tensiones

La transformación del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff del espacio anisótropo real al espacio isótropo ficticio que garantiza la invariancia antes definida, se realiza a través de un tensor de cuarto orden (Oller et al., 1995)

$$\bar{S}_{IJ} = A_{IJKL}^S S_{KL} \quad (41)$$

donde  $A^S$  es un tensor de cuarto orden definido como el operador lineal  $A^S : \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_2$  que establece la relación entre el espacio de los tensores simétricos de tensiones reales y ficticias respectivamente,  $\bar{S}$  es el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff en el espacio ficticio y  $S$  es el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff en el espacio anisótropo real. El tensor de cuarto orden  $A^S$  se define en la configuración referencial y permanece constante en esta configuración. La condición de fluencia del material anisótropo en el espacio isótropo ficticio resulta:

$$\bar{\Phi} \{\bar{S}; C; \alpha\} = 0 \quad (42)$$

donde  $\bar{\Phi}$  es la función de fluencia en el espacio isótropo ficticio y se diferencia de la función de fluencia en el espacio anisótropo  $\Phi$  en que el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff en el espacio isótropo ficticio  $\bar{S}$  sustituye al segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff en el espacio isótropo ficticio  $S$  como argumento. En la definición de la forma y propiedades del operador tensorial  $A^S$  introducido es necesario tener en cuenta la simetría del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff en los espacios anisótropo real e isótropo ficticio  $S$  y  $\bar{S}$  respectivamente, esto es:

$$A_{IJKL}^S = A_{JIKL}^S = A_{JILK}^S \quad (43)$$

Se parte de la hipótesis de que el tensor de cuarto orden de transformación de espacio de tensiones  $A^S$  presenta la simetría

$$A_{IJKL}^S = A_{KLIJ}^S \quad (44)$$

Oller *et al.* (1995) definen una forma simplificada del operador lineal  $A^S$  como:

$$A_{IJKL}^S = f_{IK}^S (f_{JL}^S)^{-1} \quad (45)$$

donde  $f_{IK}^S$  y  $f_{JL}^S$  son los tensores de segundo orden de tensiones que representan la resistencia correspondiente a los espacios isótropo ficticio y anisótropo real. La definición del operador lineal dada en la ec. (45) no es unívoca ya que en general dado un par  $(f^S, (f^S)^{-1})$  no es posible obtener un tensor  $A^S$  que verifique la relación

$$f_{IJ}^S = A_{IJKL}^S f_{KL}^S \quad (46)$$

La ec. (46) se verifica solo para el caso de tensores  $f^S$  y  $f^S$  diagonales.

La determinación del límite elástico se realiza sobre ensayos experimentales reales y por lo tanto con la pieza en estado deformado (configuración actualizada). Por consiguiente este valor límite obtenido se encuentra en la configuración actualizada. Para hallar el tensor  $A^S$  es necesario obtener el valor de este límite de resistencia en la configuración referencial y por lo tanto debe realizarse el pull-back de la tensión límite obtenida en un ensayo uniaxial, esto es:

$$f_S = \overline{\phi}(\tau) \quad (47)$$

donde  $\overline{\phi}$  representa el pull-back del primer tensor de Kirchhoff, función del tensor gradiente de las deformaciones. El cálculo de este tensor se obtiene componente a componente a partir del tensor gradiente de las deformaciones, que para el caso unidimensional resulta

$$F = \frac{\partial x}{\partial X} = l_f/l_0 \quad (48)$$

donde  $l_0$  es la longitud de la probeta ensayada en forma uniaxial y  $l_f$  es la longitud de la probeta correspondiente a la tensión en la que se verifica la

pérdida de linealidad en la respuesta. Teniendo en cuenta que  $\tau = J\sigma$ , el valor de la resistencia del material en la configuración referencial<sup>4</sup> resulta:

$$f_S = \frac{l_0}{l_f} f_\sigma \quad (49)$$

donde  $f_\sigma$  es la resistencia del material en la configuración referencial.

## 10.2 Transformación del espacio de deformaciones

La transformación de espacios definida en la ec. (41) solo puede aplicarse a materiales proporcionales, esto es, materiales para los cuales la relación entre las tensiones de fluencia y el módulo de Young para cada dirección del espacio es constante, esto es:

$$f_{11}/E_{11} = f_{22}/E_{22} = \dots = f_{23}/E_{23} \quad (50)$$

donde  $f$  y  $E$  representan la resistencia y el módulo elástico del material en la configuración referencial para cada dirección del espacio. Esta implica que el tensor de deformación elástica debe ser el mismo en los espacios real y ficticio (Oller *et al.*, 1993a). Con el objetivo de generalizar la formulación a diversos materiales Oller *et al.* (1995) proponen una transformación del espacio de deformaciones reales.

Se define la relación entre las deformaciones de Green-Lagrange elásticas en el espacio "anisótropo real"  $E_{IJ}^e$  y las deformaciones de Green-Lagrange elásticas en el espacio "isótropo ficticio"  $\overline{E}_{IJ}^e$  (ver Figura 9) a través de un tensor de cuarto orden

$$\overline{E}_{IJ}^e = A_{IJKL}^E E_{KL}^e \quad (51)$$

donde  $A^E$  es un tensor de cuarto orden definido como el operador lineal  $A^E: S_2 \rightarrow S_2$  que establece la relación entre el espacio de los tensores simétricos de deformaciones de Green-Lagrange reales y ficticias respectivamente,  $\overline{E}$  es el tensor de deformaciones de Green-Lagrange en el espacio isótropo ficticio y  $E$  es el tensor de deformaciones de Green-Lagrange anisótropo real. Esta hipótesis implica no unicidad en las deformaciones elásticas entre espacios. El tensor de transformación de las deformaciones  $A^E$  se puede calcular teniendo en cuenta la ec. (41) y la ec. (51) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \overline{C}_{IJMN} \overline{E}_{MN}^e &= A_{IJKL}^S C_{KLR S} E_{RS}^e \\ \overline{C}_{IJMN} A_{MNRS}^E E_{RS}^e &= A_{IJKL}^S C_{KLR S} E_{RS}^e \\ \overline{C}_{IJMN} A_{MNRS}^E &= A_{IJKL}^S C_{KLR S} \\ A_{MNRS}^E &= (\overline{C}_{IJMN})^{-1} A_{IJKL}^S C_{KLR S} \end{aligned} \quad (52)$$

<sup>4</sup>En este trabajo la expresión configuración referencial se refiere a la configuración inicial en la que el material se encuentra en estado virgen

donde  $\bar{\mathcal{C}}$  es un tensor constitutivo arbitrario definido en el espacio isótropo ficticio y  $\mathcal{C}$  es el tensor constitutivo en el espacio anisótropo real. La elección de  $\bar{\mathcal{C}}$  es arbitraria y puede estar representado por las propiedades de cualquier material isótropo conocido, debido a que solo se utiliza para trabajar en el espacio ficticio y luego se cancela su influencia al regresar al espacio real. Teniendo en cuenta la ec. (52) es posible establecer la relación entre los tensores constitutivos en el espacio anisótropo real e isótropo ficticio:

$$C_{KLR S} = (A_{IJKL}^S)^{-1} \bar{C}_{IJMN} A_{MNR S}^E \quad (53)$$

El tensor constitutivo anisótropo real  $\mathcal{C}$  y el tensor de transformación de tensiones  $A^S$  están expresados en coordenadas locales, por lo tanto resulta necesario expresarlos en el sistema de referencia global a través de un tensor de rotación de cuarto orden  $R$  esto es:

$$C_{IJKL} = R_{IJRS} (C_{RSPQ})_{loc} R_{PQKL} \quad (54)$$

$$A_{IJKL}^S = R_{IJRS} (A_{RSPQ}^S)_{loc} R_{PQKL} \quad (55)$$

donde  $(C_{RSPQ})_{loc}$  es el tensor constitutivo local de cuarto orden en el espacio anisótropo real y  $(A_{RSPQ}^S)_{loc}$  es el tensor de cambio de espacios local. El tensor de rotaciones  $R_{IJKL}$  se define como:

$$R_{IJKL} = r_{IK} r_{JL} \quad (56)$$

donde  $r_{IK} = \cos [(\bar{e}_I)_{glob}, (\bar{e}_K)_{loc}]$ , siendo  $\bar{e}_i$  el versor unitario correspondiente a la componente  $i$ -ésima del sistema de referencia coordinado. El tensor de rotación  $R$  tiene en cuenta los ángulos entre las direcciones principales del material anisótropo y el sistema de coordenadas globales.

## 11 ANISOTROPÍA EN LA CONFIGURACIÓN ACTUALIZADA

Luego de un detallado estudio de la generalización del modelo elastoplástico isótropo en la configuración referencial, es posible extender el tratamiento de la anisotropía a la configuración actualizada en forma análoga a lo realizado en la configuración referencial. Se presentan a continuación los tensores de cuarto orden que definen la aplicación lineal que relaciona los espacios anisótropo real e isótropo ficticio de tensiones y deformaciones en la configuración actualizada y se demostrará la veracidad de esta formulación, lo que da una gran generalidad a la teoría desarrollada.

### 11.1 Transformación del espacio de tensiones

La relación lineal entre los espacios de tensiones de Kirchhoff isótropo ficticio y anisótropo real en la configuración actualizada (ver Figura 9) se propone a través de un tensor de cuarto orden como:

$$\bar{\tau}_{ij} = a_{ijkl}^T \tau_{kl} \quad (57)$$

donde  $a^T$  es un tensor de cuarto orden definido como el operador lineal  $a^T : S_2 \rightarrow S_2$  que establece la relación entre el espacio de los tensores simétricos de tensiones reales y ficticias respectivamente en la configuración actualizada,  $\bar{\tau}$  es el tensor de tensiones de Kirchhoff en el espacio isótropo ficticio y  $\tau$  es el tensor de tensiones de Kirchhoff en el espacio anisótropo real. La condición de fluencia del material anisótropo en el espacio isótropo ficticio en la configuración actualizada resulta:

$$\bar{\phi}(\bar{\tau}; \alpha; g) = 0 \quad (58)$$

donde  $\bar{\phi}$  es la función de fluencia en el espacio isótropo ficticio en la configuración actualizada y se diferencia de la función de fluencia en el espacio anisótropo  $\phi$  en que el tensor de tensiones de Kirchhoff en el espacio isótropo ficticio  $\bar{\tau}$  reemplaza a  $\tau$  como argumento de la función de fluencia dada en la ec. (7).

En el contexto de deformaciones finitas el operador lineal  $a^T$ , que relaciona los espacios de tensiones de Kirchhoff ficticio y real, no es constante. Esto se debe al cambio de configuración y, por lo tanto, es función del tensor de transformación de tensiones en la configuración referencial  $A^S$  y de los gradientes de deformaciones  $F$ , como se demostrará a continuación.

El tensor de cambio de espacio entre tensiones en la configuración actualizada se obtiene teniendo en cuenta la ec. (41) y la operación push-forward  $\bar{\phi}$  del tensor de tensiones, esto es:

$$\bar{\tau} = \phi^* \bar{S} \Rightarrow \bar{\tau}_{ij} = F_{iI} \bar{S}_{IJ} (F^T)_{Jj} \quad (59)$$

Sustituyendo el valor del segundo tensor de Piola-Kirchhoff en el espacio isótropo ficticio por la expresión dada en la ec. (41) se tiene:

$$\bar{\tau}_{ij} = F_{iI} A_{IJKL}^S S_{KL} (F^T)_{Jj} \quad (60)$$

El tensor de tensiones anisótropo real en la configuración referencial se obtiene realizando el pull-back  $\bar{\phi}$  del tensor de tensiones anisótropo de Kirchhoff, esto es:

$$S_{KL} = (F^{-1})_{Kk} \tau_{kl} (F^{-T})_{lL} \quad (61)$$

Reemplazando la ec.(61) en la ec.(60) se obtiene:

$$\bar{\tau}_{ij} = F_{iI} \underbrace{A_{IJKL}^S (F^{-1})_{Kk} (F^{-T})_{iL} (F^T)_{Jj}}_{a_{ijkl}^T} \tau_{kl} \quad (62)$$

De la ecuación anterior se obtiene que el tensor de transformación de espacios de tensiones en la configuración actualizada es una función del gradiente de las deformaciones, que expresa el movimiento del sistema referencial, y del tensor de transformaciones de espacios de tensiones en la configuración referencial (ver Figura 9)

$$a_{ijkl}^T = F_{iI} (F^{-1})_{Kk} (F^{-T})_{iL} (F^T)_{Jj} A_{IJKL}^S \quad (63)$$

donde  $F$  es el tensor gradiente de la deformaciones,  $F^T$  es la traspuesta del tensor gradiente de las deformaciones,  $F^{-1}$  es la inversa del tensor gradiente de las deformaciones,  $F^{-T}$  es la traspuesta de la inversa del tensor gradiente de las deformaciones y  $A^S$  es el tensor de cambio de espacio en la configuración referencial.

## 11.2 Transformación del espacio de deformaciones

En forma análoga a lo dicho en el apartado 10.2, la transformación de espacios definida en la ec. (57) solo puede aplicarse a materiales proporcionales, esto es, materiales para los cuales la relación entre las tensiones de fluencia y el módulo de Young para cada dirección del espacio es constante, esto es:

$$f_{11}/E_{11} = f_{22}/E_{22} = \dots = f_{23}/E_{23} \quad (64)$$

donde  $f$  y  $E$  representan la resistencia y el módulo elástico del material en la configuración actualizada para cada dirección del espacio. Esta implica que el tensor de deformación elástica sea el mismo en los espacios real y ficticio. Con el objetivo de generalizar la formulación a diversos materiales Oller *et al.* (1995) proponen una transformación del espacio de deformaciones reales.

La relación entre los espacios de deformaciones de Almansi isotrópico ficticio y anisótropo real en la configuración actualizada se define a través de un tensor de cuarto orden (ver Figura 9)

$$\bar{e}_{ij} = a_{ijkl}^e e_{kl} \quad (65)$$

donde, en forma análoga a lo expresado en el apartado 10.2  $a^e$  es un tensor de cuarto orden definido como el operador lineal  $a^e : S_2 \rightarrow S_2$  que establece la relación entre el espacio de los tensores simétricos de deformaciones de Almansi reales y ficticias respectivamente,  $\bar{e}$  es el tensor de deformaciones de Almansi

en el espacio isotrópico ficticio y  $e$  es el tensor de deformaciones de Almansi en el espacio anisótropo real.

El operador lineal  $a^e$  se encuentra definido en la configuración actualizada y debido al cambio de configuración no permanece constante. En el contexto de deformaciones finitas este operador es función del tensor de cambio de tensiones en la configuración material  $A^E$  y de los gradientes de deformaciones  $F$ , como se demostrará a continuación.

El tensor de cambio de espacio en la configuración actualizada entre tensiones se obtiene teniendo en cuenta la ec.(41) y la operación push-forward  $\bar{\phi}$  del tensor de deformaciones de Green-Lagrange, esto es,

$$\bar{e} = \phi^* \bar{E} \Rightarrow \bar{e}_{ij} = (F^{-T})_{iI} \bar{E}_{IJ} (F^{-1})_{Jj} \quad (66)$$

Sustituyendo el valor de las deformaciones de Green-Lagrange en el espacio isotrópico ficticio por la expresión dada en la ec.(51) se tiene:

$$\bar{e}_{ij} = (F^{-T})_{iI} A_{IJKL}^E E_{KL} (F^{-1})_{Jj} \quad (67)$$

El tensor de deformaciones de Green-Lagrange anisótropo real en la configuración referencial se obtiene realizando el pull-back  $\phi$  del tensor de deformaciones de Almansi anisótropo, esto es:

$$E_{KL} = (F^T)_{Kk} e_{kl} F_{lL} \quad (68)$$

Reemplazando la ec.(68) en la ec.(67) se obtiene:

$$\bar{e}_{ij} = (F^{-T})_{iI} \underbrace{A_{IJKL}^E (F^T)_{Kk} F_{lL} (F^{-1})_{Jj}}_{a_{ijkl}^e} e_{kl} \quad (69)$$

De la ecuación anterior se obtiene el tensor de transformación de espacios de deformaciones en la configuración actualizada

$$a_{ijkl}^e = (F^{-T})_{iI} (F^T)_{Kk} F_{lL} (F^{-1})_{Jj} A_{IJKL}^E \quad (70)$$

donde  $A^E$  es el tensor de cambio de espacio de deformaciones en la configuración referencial. En la Figura 9 los espacios de tensiones y deformaciones en las configuraciones referencial y actualizada. La relación entre los espacios de tensiones y deformaciones reales y ficticios está dada por los operadores lineales  $A^S : S_2 \rightarrow S_2$ ,  $A^E : S_2 \rightarrow S_2$ ,  $a^T : S_2 \rightarrow S_2$  y  $a^e : S_2 \rightarrow S_2$ . La relación entre los espacios de tensiones y deformaciones, tanto en la configuración referencial como actualizada está dada por la ley de Hooke generalizada.

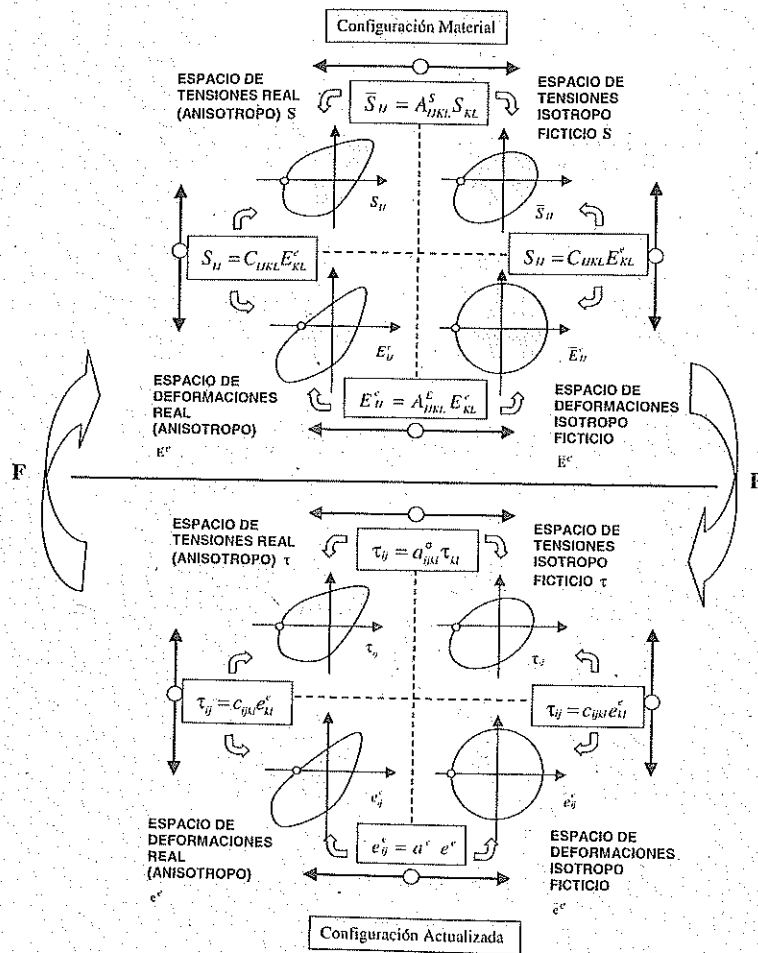


Figura 9: Tensores de transformación de tensiones y deformaciones en las configuraciones referencial y actualizada.

### 11.3 Transformación de espacios aplicada a diversas funciones umbrales de discontinuidad

Las transformaciones dadas en la ecs.(41) y (57) conduce a cambios en la forma de la superficie de fluencia en las configuraciones referencial y actualizada. Esto se puede observar en la Figura 10 para los criterios de fluencia más utilizados: Tresca, Von Mises, Mohr-Coulomb y Drucker-Prager. La transformación de espacios permite representar adecuadamente materiales altamente anisótropos, tal el caso de una fibra de refuerzo en una matriz de material compuesto cuando la relación  $r_{ii} = \bar{\sigma}_{ii}/\sigma_{ii}$  tiende a infinito<sup>5</sup>. Por ejemplo para el caso de plasticidad asociada y criterio de fluencia de von Mises la Figura 10 muestra la pérdida resistencial en una dirección dada, mientras que en la dirección normal a esta existe un crecimiento del flujo plástico en la misma proporción.

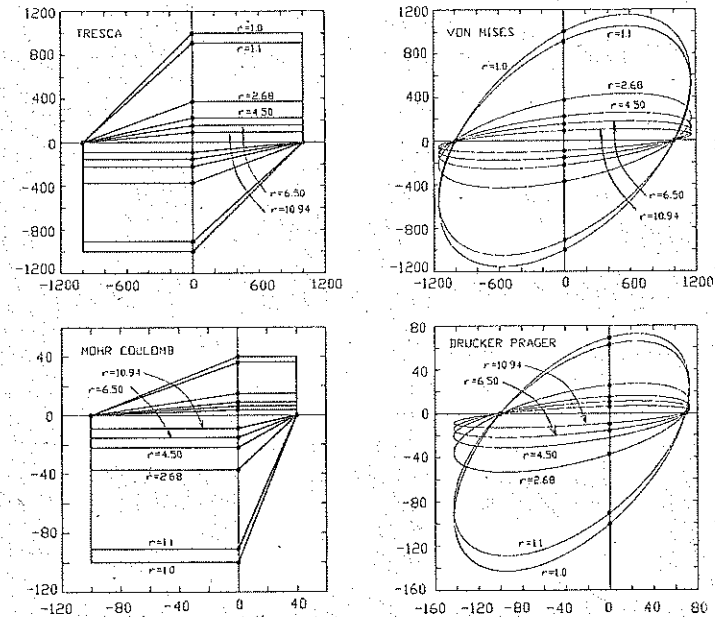


Figura 10: Modificación de la forma de diversas funciones de fluencia.

<sup>5</sup>  $r_{ii}$  es la relación entre las tensiones de fluencia en los espacios isotrópico ficticio y anisótropo real

## 12 REGLA DE FLUJO. LEY DE EVOLUCIÓN DE LAS VARIABLES INTERNAS

A continuación se presenta la regla de flujo y la ley de evolución de las variables internas que rigen el comportamiento del material en régimen plástico. En forma análoga a lo realizado en apartados anteriores su deducción se realiza para los modelos constitutivos en las configuraciones referencial y actualizada.

### 12.1 Configuración referencial

En la configuración referencial la ley de evolución de la deformación plástica en el espacio anisótropo está dada por la siguiente regla de normalidad:

$$\dot{E}^p = \lambda \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \bar{S}} \quad (71)$$

Teniendo en cuenta que toda la información de la anisotropía del material está contenida en el tensor de transformación  $A^S$ , se propone la función de potencial plástico para el sólido anisótropo de la siguiente forma:

$$\mathcal{G}\{S; C; \alpha\} = \bar{\mathcal{G}}\{S; A^S; C; \alpha\} = \bar{\mathcal{G}}\{\bar{S}; C; \alpha\} = K \quad (72)$$

Reemplazando la ec.(72) en la ec.(71) el incremento de la cuota plástica de la deformación de Green-Lagrange resulta:

$$\dot{E}^p = \lambda \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial S} = \lambda \frac{\partial \bar{\mathcal{G}}}{\partial \bar{S}} : \frac{\partial \bar{S}}{\partial S} = \lambda \frac{\partial \bar{\mathcal{G}}}{\partial \bar{S}} : A^S = \left(\dot{\bar{E}}\right)^S : A^S \quad (73)$$

donde  $\left(\dot{\bar{E}}\right)^S = \lambda \frac{\partial \bar{\mathcal{G}}}{\partial \bar{S}}$  es el flujo plástico normal al potencial isótropo  $\bar{\mathcal{G}}$ . El concepto de aditividad de las deformaciones en la configuración referencial<sup>6</sup> permite extender la regla de transformación de las deformaciones a la cuota plástica de las deformaciones, es decir:

$$\dot{\bar{E}}^p = A^E : \dot{E}^p = \lambda A^E : \frac{\partial \bar{\mathcal{G}}}{\partial \bar{S}} : A^S = A^E : \left(\dot{\bar{E}}\right)^S : A^S \quad (74)$$

donde  $\dot{\bar{E}}^p$  es el incremento de la deformación plástica isótropa ficticia en la configuración referencial. La ley de evolución de las variables internas de endurecimiento plástico viene dada por la siguiente regla general

<sup>6</sup>El concepto de aditividad de las deformaciones establece que  $\dot{E}^e = \dot{E} - \dot{E}^p$  y al ser  $A^E$  una aplicación lineal, la cuota elástica de la deformación de Green-Lagrange resulta  $A^E \dot{E}^e = A^E (\dot{E} - \dot{E}^p)$  con lo cual se obtiene  $\dot{E}^e = \dot{E} - \dot{E}^p$  donde la ley de evolución de la deformación plástica ficticia está dada por:  $\dot{\bar{E}}^p = A^E \dot{E}^p$

$$\dot{\alpha} = \lambda (H^m)_S : \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \tau} = \lambda (H^m)_S : \frac{\partial \bar{\mathcal{G}}}{\partial \bar{S}} : \frac{\partial \bar{S}}{\partial S} = \lambda (H^m)_S : \frac{\partial \bar{\mathcal{G}}}{\partial \bar{S}} : A^S \quad (75)$$

donde  $(H^m)_S$  es un tensor de segundo orden, función del estado de tensiones actualizado y de la variable de endurecimiento plástico también actualizada que en el caso más simple de la teoría de la plasticidad toma la forma del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff y en este caso  $\dot{\alpha}$  coincide con la densidad de energía plástica. La ley de evolución de la variable interna resulta:

$$\dot{\alpha} = \lambda \bar{S} : \frac{\partial \bar{\mathcal{G}}}{\partial \bar{S}} = \dot{\Psi}^p \quad (76)$$

### 12.2 Configuración actualizada

En la configuración actualizada la ley de evolución de las deformaciones plásticas en el espacio anisótropo está dada por la siguiente regla de normalidad:

$$L_v(e^p) = d^p = \lambda \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \tau} \quad (77)$$

Teniendo en cuenta que toda la anisotropía del material está contenida en el tensor de transformación  $a^T$ , la función de potencial plástico para el sólido anisótropo se propone como:

$$g\{\tau; g; \alpha\} = \bar{g}\{\tau; a^T; g; \alpha\} = \bar{g}\{\bar{\tau}; g; \alpha\} = k \quad (78)$$

Reemplazando la ec.(78) en la ec.(77) el incremento de la cuota plástica de la deformación de Almansi resulta:

$$d^p = \lambda \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \tau} = \lambda \frac{\partial \bar{\mathcal{G}}}{\partial \bar{\tau}} : \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \tau} = \lambda \frac{\partial \bar{\mathcal{G}}}{\partial \bar{\tau}} : a^T = \left(\dot{\bar{e}}\right)^T : a^T \quad (79)$$

donde  $\left(\dot{\bar{e}}\right)^T = \lambda \frac{\partial \bar{\mathcal{G}}}{\partial \bar{\tau}}$  es el flujo plástico normal al potencial plástico isótropo  $\bar{g}$ . El concepto de aditividad de las deformaciones<sup>7</sup> en la configuración espacial permite extender la regla de transformación de las deformaciones a la cuota plástica de las deformaciones, es decir:

$$\bar{d}^p = a^e : d^p = \lambda a^e : \frac{\partial \bar{\mathcal{G}}}{\partial \bar{\tau}} : a^T = a^e : \left(\dot{\bar{e}}\right)^T : a^T \quad (80)$$

<sup>7</sup>El concepto de aditividad de las deformaciones establece que  $\dot{e}^e = \dot{e} - \dot{e}^p$  y al ser  $a^E$  una aplicación lineal, la cuota elástica de la deformación de Green-Lagrange resulta  $a^e \dot{e}^e = a^e (\dot{e} - \dot{e}^p)$  con lo cual se obtiene  $\dot{e}^e = \dot{e} - \dot{e}^p$  donde la ley de evolución de la deformación plástica ficticia está dada por:  $\dot{\bar{e}}^p = a^e \dot{e}^p$



donde  $\bar{d}^p$  es la deformación plástica isotropa ficticia en la configuración actualizada. La ley de evolución de la variable interna de endurecimiento plástico viene dada por la siguiente regla general:

$$\dot{\alpha} = \lambda (h^m)_\tau : \frac{\partial g}{\partial \tau} = \lambda (h^m)_\sigma : \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\tau}} : \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \tau} = \lambda (h^m)_\sigma : \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\tau}} : \alpha \tau \quad (81)$$

donde  $(h^m)_\tau$  es un tensor de segundo orden, función del estado de tensiones actualizado y de la variable de endurecimiento plástico también actualizada que en el caso más simple de la teoría de la plasticidad toma la forma del tensor de tensiones y en este caso  $\alpha$  coincide con la densidad de energía plástica. La ley de evolución de la variable interna resulta:

$$\dot{\alpha} = \lambda \bar{\tau} : \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\tau}} = \dot{\psi}^p \quad (82)$$

Los valores de la disipación plástica dada por las ecs. (76) y (82) son los mismos. Esto puede demostrarse teniendo en cuenta las operaciones de transporte push-forward y pull-back<sup>8</sup> y considerando la expresión de la disipación en la configuración referencial, se verifica su conservación en la configuración actualizada

$$\begin{aligned} \dot{\psi}^p &= S : \dot{E}^p = (F^{-1} \cdot \tau \cdot F^{-T}) : (F^T \cdot d^p \cdot F) \\ &= (\tau) : \left( \underbrace{F^{-T} \cdot F^T}_I \cdot d^p \cdot \underbrace{F \cdot F^{-1}}_I \right) = \dot{\psi}^p \end{aligned} \quad (83)$$

### 13 DEFINICIÓN DE LA DISIPACIÓN EN EL ESPACIO ISÓTROPICO FICTICIO. UNICIDAD DE DISIPACIÓN

Este apartado tiene como objetivo demostrar que la disipación plástica del modelo constitutivo anisótropo desarrollado en los apartados anteriores es igual, independientemente de si se la considera en el espacio anisótropo real o en el espacio isotropo ficticio. Como se ha mencionado anteriormente la utilización del modelo constitutivo en el espacio ficticio tiene la ventaja de poder utilizar todos los algoritmos desarrollados para materiales isotropos con la consiguiente ventaja en la implementación en un código de elementos finitos.

<sup>8</sup>El producto tensorial  $(A \cdot B) : C = B : (A^T : C) = A : (C \cdot B^T)$

#### 13.1 Configuración referencial

En la configuración referencial isotropa la expresión de la energía libre de Helmholtz para un proceso isotérmico resulta:

$$\bar{\Psi}(\bar{E}^c; \alpha) = \frac{J}{2m^0} (\bar{E}^c : \bar{C} : \bar{E}^c) + \bar{\Psi}^p \{\alpha\} \quad (84)$$

donde  $\bar{\Psi}$  es la energía libre total ficticia y  $\bar{\Psi}^p$  es la cuota plástica de la energía libre en el espacio isotropo ficticio. La ecuación constitutiva en la configuración actualizada del material isotropo ficticio surge de considerar la expresión de Clausius-Duhem y las ecuaciones de transformación de espacios de tensiones y deformaciones (ecs. 41 y 51). La disipación está dada en forma general por:

$$\Xi = S : \dot{E}^p - m^0 \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} \dot{\alpha} - \frac{1}{\theta} \dot{q} \cdot \nabla \theta \geq 0 \quad (85)$$

El primer término de la expresión de la disipación en la configuración referencial es posible escribirlo en función de los tensores de transformación de espacios de tensiones y deformaciones  $A^S$  y  $A^E$  respectivamente y de los espacios de tensiones y deformaciones ficticias como

$$S : \dot{E}^p = \left[ (A^S)^{-1} : \bar{S} \right] : \left[ (A^E)^{-1} : \dot{\bar{E}}^p \right] \quad (86)$$

Reemplazando en la ec.(86) la variación de la deformación plástica ficticia dada por la ec.(80) se obtiene:

$$S : \dot{E}^p = \lambda (A^S)^{-1} : \bar{S} : (A^E)^{-1} : A^E : \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{S}} : A^S \quad (87)$$

$$S : \dot{E}^p = \lambda \bar{S} : \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{S}} = \bar{S} : \dot{\bar{E}}^p \quad (88)$$

Considerando la ecuación anterior, la expresión de la disipación para procesos isotérmicos resulta:

$$\Xi_{mec} = S : \dot{E}^p - m^0 \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} \dot{\alpha} = \bar{S} : \dot{\bar{E}}^p - m^0 \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \equiv \bar{\Xi}_{mec} \geq 0 \quad (89)$$

La expresión anterior de la disipación obtenida a partir de la ec. (85) demuestra que teniendo en cuenta las transformaciones entre espacios, resulta equivalente escribir el modelo constitutivo en el espacio real o en el ficticio. La implementación computacional de este modelo para anisotropía presenta grandes ventajas. Al tratarse el material en un espacio isotropo ficticio solo es necesario realizar una transformación de los espacios de tensión y deformación a un espacio isotropo ficticio y luego utilizar los algoritmos desarrollados en la literatura clásica para materiales isotropos.

### 13.2 Configuración actualizada

La expresión de la energía libre de Helmholtz en el espacio isótropo ficticio en la configuración actualizada para un proceso isotérmico resulta:

$$\bar{\psi} \{ \bar{\epsilon}^e; \alpha \} = \frac{1}{2m} (\bar{\epsilon}^e : \bar{\epsilon} : \bar{\epsilon}^e) + \bar{\psi}^p \{ \alpha \}$$

donde  $\bar{\psi}$  es la energía libre total ficticia y  $\bar{\psi}^p$  es la cuota plástica de la energía libre en el espacio isótropo ficticio. La ecuación constitutiva en la configuración actualizada del material isótropo ficticio surge de considerar la expresión de Clausius-Duhem y las ecuaciones de transformación de espacios de tensiones y deformaciones (ecs. 57 y 65). La disipación está dada en forma general por:

$$\Xi = \tau : d^p - m \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \dot{\alpha} - \frac{1}{\theta} q \cdot \nabla \theta \geq 0 \quad (90)$$

El primer término de la expresión de la disipación en la configuración actualizada es posible escribirlo en función de los tensores de transformación de espacios de tensiones y deformaciones  $a^\sigma$  y  $a^e$  respectivamente y de los espacios de tensiones y deformaciones ficticias como

$$\tau : d^p = \left[ (a^r)^{-1} : \bar{\tau} \right] : \left[ (a^e)^{-1} : \bar{d}^p \right] \quad (91)$$

Reemplazando en la ec.(91) la variación de la deformación plástica ficticia dada por la ec.(80) se obtiene:

$$\tau : d^p = \lambda (a^r)^{-1} : \bar{\tau} : (a^e)^{-1} : a^e : \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\tau}} : a^\sigma \quad (92)$$

$$\tau : d^p = \lambda \bar{\tau} : \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\tau}} = \bar{\tau} : \bar{d}^p \quad (93)$$

Considerando la ecuación anterior, la expresión de la disipación, para procesos isotérmicos, está dada por:

$$\Xi_{mec} = \tau : d^p - m \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \dot{\alpha} = \bar{\tau} : \bar{d}^p - m \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \equiv \bar{\Xi}_{mec} \geq 0 \quad (94)$$

De la ec.(94) se deduce, como era de esperar, que la disipación es una invariante del proceso termodinámico, siendo su valor independiente si se calcula en el espacio isótropo ficticio o en el anisótropo real.

## 14 ECUACIÓN CONSTITUTIVA TANGENTE

El método de Newton-Raphson, que utiliza matrices de rigidez tangente es una de las técnicas más utilizadas en la aproximación numérica de las ecuaciones que rigen el comportamiento de sólidos elastoplásticos. Por lo tanto, es

necesaria una relación incremental entre las tensiones y las deformaciones para obtener el operador lineal tangente. A continuación se presentan los operadores lineales elastoplásticos tangentes continuos que establecen la relación entre el incremento de tensiones y el de deformaciones totales en las configuraciones referencial y actualizada.

El caso de materiales con comportamiento inelástico requiere la integración numérica de sistemas acoplados de ecuaciones diferenciales de primer orden de pasos de tiempo (Simo & Taylor, 1985). El resultado del algoritmo de integración es una función de respuesta no-lineal que define el tensor de tensiones como una función de la historia de deformaciones hasta el paso de tiempo actual. Este algoritmo de integración permite tratar el problema elastoplástico fundamentalmente como un problema linealizado equivalente en el paso de tiempo.

El operador tangente que interviene en el problema linealizado se debe obtener mediante una linealización de la función de respuesta consistente con el algoritmo de integración de la ecuación constitutiva. La utilización de estos operadores tangentes preserva la convergencia cuadrática de esquemas de solución iterativos basados en métodos de Newton (Simo & Taylor, 1985) (Crissfield, 1991). La precisión con la que se obtiene la matriz de rigidez tangente del sistema influye directamente en la velocidad de convergencia y es de una importancia fundamental en la exactitud general del análisis. (Ortiz & Popov, 1985)

El operador elastoplástico que se presenta en este apartado es independiente del proceso de integración de la ecuación constitutiva y por lo tanto no preserva la convergencia cuadrática propia de los esquemas de solución basados en métodos de Newton. En la referencia (Car, 2000) se presenta la expresión del operador lineal elastoplástico tangente consistente con el algoritmo de integración de la ecuación constitutiva. La utilización de este operador permite obtener convergencia cuadrática en el problema no-lineal propia del método Newton-Raphson.

### 14.1 Configuración referencial

La ecuación constitutiva tangente en la configuración espacial se obtiene considerando la variación temporal de la tensión de Piola Kirchhoff, esto es:

$$\dot{S}_{ij} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial E_{kl}^e} \dot{E}_{kl}^e \quad (95)$$

Teniendo en cuenta que la tensión de Piola Kirchhoff en el espacio anisótropo es función de la tensión en el espacio isótropo ficticio se tiene

$$\dot{S}_{ij} = \underbrace{\frac{\partial S_{ij}}{\partial \bar{S}_{rs}}}_{(A_{ijrs}^S)^{-1}} \frac{\partial \bar{S}_{rs}}{\partial E_{mn}^e} \underbrace{\frac{\partial \bar{E}_{mn}^e}{\partial E_{kl}^e}}_{A_{mnkl}^e} \dot{E}_{kl}^e$$

$$\dot{S}_{ij} = (A_{ijrs}^S)^{-1} \bar{C}_{rsmn} A_{mnkl}^e \dot{E}_{kl}^e$$

$$\dot{S}_{ij} = (A_{ijrs}^S)^{-1} \bar{C}_{rsmn} \left( \dot{\bar{E}}_{kl} - \dot{\bar{E}}_{kl}^p \right) \quad (96)$$

Teniendo en cuenta la condición de consistencia plástica es posible obtener la ecuación constitutiva en el espacio isotropo ficticio, esto es:

$$\dot{\bar{S}} = (\bar{C})^{ep} : \dot{\bar{E}} \quad (97)$$

donde  $(\bar{C})^{ep}$  representa el tensor constitutivo elastoplástico tangente en el espacio isotropo ficticio y está dado por:

$$\bar{C}_{ijkl}^{ep} = \bar{C}_{ijkl} - \frac{\left( \bar{C}_{ijrs} \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{\sigma}_{rs}} \right) \left( \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{S}_{rs}} \bar{C}_{rskl} \right)}{\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{S}_{pq}} \bar{C}_{pqln} \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{S}_{ln}} - \sum_n \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \alpha_s^m} (h_{tu}^m)_{\bar{S}} \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{S}_{tu}}} \quad (98)$$

Teniendo en cuenta la ec.(41), que relaciona el tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff en los espacios real y ficticio, es posible obtener la variación de tensión anisótropa real como:

$$\dot{S}_{ij} = (A_{ijkl}^S)^{-1} \bar{C}_{klrs}^{ep} \dot{\bar{E}}_{rs} \quad (99)$$

Combinando la ec.(99) con la ec.(51) y teniendo en cuenta que el tensor de transformación de espacios  $A^E$  no depende del tiempo, se obtiene la expresión del tensor constitutivo elastoplástico anisótropo como:

$$\dot{S}_{ij} = \underbrace{(A_{ijkl}^S)^{-1} \bar{C}_{klrs}^{ep} A_{rspq}^E}_{C_{ijpq}^{ep}} \dot{E}_{pq} \quad (100)$$

donde  $C_{ijpq}^{ep} = (A_{ijkl}^S)^{-1} \bar{C}_{klrs}^{ep} A_{rspq}^E$  es el tensor elastoplástico anisótropo, que resulta una función del tensor constitutivo elastoplástico tangente isotropo ficticio.

## 14.2 Configuración espacial

La ecuación constitutiva tangente en la configuración espacial se obtiene considerando la variación temporal de la tensión de Kirchhoff, esto es:

$$\dot{\tau}_{ij} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial e_{kl}^e} \dot{e}_{kl}^e \quad (101)$$

Teniendo en cuenta que la tensión de Kirchhoff en el espacio anisótropo es función de la tensión en el espacio isotropo ficticio se tiene

$$\dot{\tau}_{ij} = \underbrace{\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial \bar{\tau}_{rs}}}_{(a_{ijrs}^e)^{-1}} \frac{\partial \bar{\tau}_{rs}}{\partial \bar{e}_{mn}^e} \underbrace{\frac{\partial \bar{e}_{mn}^e}{\partial e_{kl}^e}}_{a_{mnkl}^e} \dot{e}_{kl}^e$$

$$\dot{\tau}_{ij} = (a_{ijrs}^e)^{-1} \bar{c}_{rsmn} a_{mnkl}^e \dot{e}_{kl}^e$$

$$\dot{\tau}_{ij} = (a_{ijrs}^e)^{-1} \bar{c}_{rsmn} \left( \dot{\bar{e}}_{kl} - \dot{\bar{e}}_{kl}^p \right) \quad (102)$$

Teniendo en cuenta la condición de consistencia plástica es posible obtener la ecuación constitutiva en el espacio isotropo ficticio, esto es:

$$\dot{\bar{\tau}} = (\bar{c})^{ep} : \dot{\bar{e}} \quad (103)$$

donde  $(\bar{c})^{ep}$  representa el tensor constitutivo elastoplástico tangente en el espacio isotropo ficticio y está dado por:

$$\bar{c}_{ijkl}^{ep} = \bar{c}_{ijkl} - \frac{\left( \bar{c}_{ijrs} \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{\tau}_{rs}} \right) \left( \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{\tau}_{rs}} \bar{c}_{rskl} \right)}{\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{\tau}_{pq}} \bar{c}_{pqln} \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{\tau}_{ln}} - \sum_n \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \alpha_s^m} (h_{tu}^m)_{\bar{\tau}} \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{\tau}_{tu}}} \quad (104)$$

Teniendo en cuenta la ec.(57) que relaciona el tensor de tensiones en el espacio anisótropo real y el espacio isotropo ficticio es posible obtener la variación de tensión en el espacio anisótropo real como:

$$\dot{\tau}_{ij} = (a_{ijkl}^e)^{-1} \bar{c}_{klrs}^{ep} \dot{\bar{e}}_{rs} \quad (105)$$

Combinando la ec.(105) con la ec.(65) y teniendo en cuenta que el tensor de transformación de espacios  $a^e$  no cambia en la configuración referencial, se obtiene la expresión del tensor constitutivo elastoplástico anisótropo como:

$$\hat{\tau}_{ij} = \underbrace{(a_{ijkl})^{-1} c_{klrs}^{ep} a_{rspq}^e}_{c_{ijpq}^{ep}} \epsilon_{pq} \quad (106)$$

La ec.(106) muestra la expresión del tensor elastoplástico anisótropo, que resulta una función del tensor constitutivo elastoplástico tangente en el espacio isótropo ficticio.

Los tensores constitutivos elastoplásticos tangentes obtenidos anteriormente no permiten obtener convergencias cuadráticas en la solución de problemas incrementales basados en métodos de Newton, debido a que en su deducción no se ha tenido en cuenta el procedimiento de integración de la ecuación constitutiva y por lo tanto no es consistente con el mismo.

Los tensores constitutivos elastoplásticos tangentes ficticios dados por las ecs. (98) y (104) para el caso de plasticidad asociada resultan simétricos, mientras que el tensor elastoplástico tangente anisótropo en las configuraciones referencial o actualizada dado por las ecs. (100) y (106) en general resultan no simétricos.

Para mayor detalle y profundización sobre la formulación y su implementación computacional, es recomendable consultar la referencia, (Car, 2000).

## REFERENCIAS

- Ali, R. (1996). Use of finite element technique for the analysis of composite structures. *Computers & Structures*, 58, No. 5, 1015-1023.
- Barlat, F., Lege, D. J., & Brem, J. C. (1991). A six-component yield function for anisotropic materials. *Int. J. Plasticity*, 7, 693.
- Barlat, F. & Lian, J. (1989). Plastic behavior and stretchability of sheet metals. part i: A yield function for orthotropic sheet under plane stress conditions. *Int. Journal of Plasticity*, 5, 51.
- Bassani, J. L. (1977). Yield characterization of metals with transversely isotropic plastic properties. *Int. J. Mech. Sci.*, 19, 651.
- Bathe, K. J. (1982). *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, Inc.
- Betten, J. (1981). Creep theory of anisotropic solids. *J. Rheol.*, 25, 565-581.
- Betten, J. (1988). Application of tensor functions to the formulation of yield criteria for anisotropic materials. *International Journal of Plasticity*, 4, 29-46.
- Botello, S. (1993). *Análisis de estructuras multilaminares por el método de los elementos finitos*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña.
- Budiansky, B. (1984). Anisotropic plasticity of plane-isotropic sheet. In G. J. Dvorak & R. T. Shield (Eds.), *Mechanics of Material Behavior* (pp.15). Amsterdam: Elsevier.
- Cante, J. C. (1995). *Simulación numérica de procesos de compactación de pulvimateriales. Aplicación de técnicas de cálculo paralelo*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña.
- Car, E. J. (2000). *Modelo constitutivo continuo para el estudio del comportamiento mecánico de los materiales compuestos*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña.
- Casas, E. L., Oller, S., Rubert, J., Proença, S., & Oñate, E. (1998). A large strain explicit formulation for composites. In S. Idelsohn, E. Oñate, & E. Dvorkin (Eds.), *Proceedings of the Fourth World Congress on Computational Mechanics* Buenos Aires (Argentina): CIMNE, Barcelona, Spain.
- Chen, W. F. & Han, D. J. (1988). *Plasticity for structural engineers*. New York: Springer-Verlag.
- Crisfield, M. (1991). *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. John Wiley & Sons Ltd.
- Eggleston, H. G. (1969). *Convexity*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Eisenberg, M. A. & Yen, C. F. (1984). The anisotropic deformation of yield surfaces. *J. Engng. Mater. Technol.*, 106, 355.
- G. Pulido, M. D. & Sobrino, J. (1998). Los materiales compuestos en el refuerzo de puentes. *Revista Internacional de Ingeniería de Estructuras*, 3(1), 75-95.
- García Garino, C. (1993). *Un modelo numérico para el análisis de sólidos elastoplásticos sometidos a grandes deformaciones*. PhD thesis, Universitat Politecnica de Catalunya.
- García Garino, C. & Oliver, J. (1991). *A numerical model for elastoplastic large strain elastoplasticity*. Technical report, Escuela Técnica Superior de Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona.
- García Garino, C. & Oliver, X. (1988). Estudio comparativo de la influencia de la ecuación constitutiva en la respuesta de sólidos elásticos sometidos a grandes deformaciones. In *MECOM 88 Córdoba - Argentina*.

- Grabovac, I. & Turley, D. (1993). Present and future of composite materials for marine applications. In A. Miravete (Ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference on Composite Materials ICCM 9 Metal Matrix Composites* (pp. 89 - 96). Zaragoza - Spain: University of Zaragoza - Woodhead Publishing Limited.
- Green, A. & P., N. (1964). A general theory of an elasto-plastic continuum. *Archives Rational Mech. Anal.*, 18, 19-281.
- Gurtin, M. E. (1981). *An introduction to continuum mechanics*. New York: Academic Press.
- Hill, R. (1971). *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford University Press.
- Hill, R. (1979). Theoretical plasticity of textured aggregates. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 85(1), 179 - 191.
- Hill, R. (1990). Constitutive modelling of orthotropic plasticity in sheet metals. *J. Mech. Phys. Solids*, 38(3), 405 - 417.
- Hull, D. (1987). *An Introduction to Composite Materials*. Cambridge University Press.
- Karafillis, A. P. & Boyce, M. C. (1993). A general anisotropic yield criterion using bounds and a transformation weighting tensor. *J. Mech. Phys. Solids*, 41(12), 1859 - 1886.
- Klintonworth, J. & Macmillan, S. (1992). Effective analysis of laminated composite structures. *Benchmark, NAFEMS*, (pp. 20-22).
- Lubliner, J. (1990). *Plasticity Theory*. Macmillan Publishing, U.S.A.
- Malvern, L. (1969). *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall.
- Marsden, J. & Hughes, T. (1994). *Mathematical foundations of elasticity*. New York: Dover Publications.
- Matthews, F. L. & Rawlings, R. D. (1994). *Composite Materials: Engineering and Science*. Chapman and Hall.
- Miravete, A. (2000). *Materiales Compuestos. Vol. 1 y Vol. 2*. Director de la obra: Antonio Miravete.
- Moran, B., Ortiz, M., & Shih, F. (1990). Formulation of implicit finite element methods for multiplicative finite deformation plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29, 483-514.
- Murnagaham, F. (1937). Finite deformations of an elastic solid. *Am. J. Math.*, 59, 235-260.
- Noguchi, M. (1993). Present and future of composite materials for automotive application in japan. In A. Miravete (Ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference on Composite Materials ICCM 9 Metal Matrix Composites* (pp. 97 - 110). Zaragoza - Spain: University of Zaragoza - Woodhead Publishing Limited.
- Oller, S., Botello, S., Miquel, J., & Oñate, E. (1995). An anisotropic elastoplastic model based on an isotropic formulation. *Engineering Computations*, 12(3), 245-262.
- Oller, S., Oñate, E., & Miquel, J. (1993a). Simulation of anisotropic elastic-plastic behaviour of materials by means of an isotropic formulation. In *2nd. US Nat. Congr. Comput. Mech.* Washington DC.
- Oller, S., Oñate, E., Miquel, J., & Botello, S. (1993b). A finite element model for analysis of multiphase composite materials. In A. Miravete (Ed.), *Ninth International Conferences on Composite Materials* Zaragoza - Spain: Woodhead Publishing Limited.
- O'Rourke, B. P. (1989). The use of composite materials in the design and manufacture of formula 1 racing cars. *Proc. Inst. Mech. Engng.*, C387/025, 39-48.
- Ortiz, M. (1987). Some computational aspects of finite deformation plasticity. In D. R. J. Owen (Ed.), *Computational Plasticity* (pp. 1717-1756).
- Ortiz, M. & Popov, E. (1985). Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering Vol. 21*, (pp. 1561 - 1576).
- Pendleton, R. & Tuttle, M. (1989). *Manual on Experimental Methods for Mechanical Testing of Composites*. Elsevier Applied Science Publishers.
- Ruffles, C. (1993). Applications of advanced composites in gas turbine aero engines. In A. Miravete (Ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference on Composite Materials ICCM 9 Metal Matrix Composites* (pp. 123 - 130). Zaragoza - Spain: University of Zaragoza - Woodhead Publishing Limited.
- Savage, G. (1993). The use of fibre reinforced composite materials in formula 1 motor racing. In A. Miravete (Ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference on Composite Materials ICCM 9 Metal Matrix Composites* (pp. 97 - 110). Zaragoza - Spain: University of Zaragoza - Woodhead Publishing Limited.

- Shih, C. F. & Lee, D. (1978). Further developments in anisotropic plasticity. *J. Engng Mater. Technol.*, 105, 242.
- Simo, J. & Taylor, R. (1985). Consistent tangent operators for rate-dependent elastoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 48, 101-118.
- Voyiadjis, G. Z. & Foroozesh, M. (1990). Anisotropic distortional yield model. *J. Appl. Mech.*, 57, 537.
- Voyiadjis, G. Z. & Thiagarajan, G. (1995). An anisotropic yield surface model for directionally reinforced metal matrix composites. *International Journal of Plasticity*, 11, 867 - 894.
- Zalamea, F. (2001). *Tratamiento numérico de materiales compuestos mediante la teoría de homogeneización*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña.

## TEORÍA DE MEZCLAS PARA EL ESTUDIO DE LOS MATERIALES COMPUESTOS: MATRIZ REFORZADA CON FIBRAS LARGAS Y CORTAS

Oller, S.<sup>1</sup> y Car, E.<sup>2</sup>

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona  
Universidad Politécnica de Cataluña - UPC

c/Gran Capitan s/n - Edif. C1

08034 Barcelona - España

<sup>1</sup>e-mail: oller@cimne.upc.es

<sup>2</sup>e-mail: car@cimne.upc.es

### 1 INTRODUCCIÓN

Los materiales compuestos están formados por diferentes tipos de sustancias inorgánicas u orgánicas. Su estado de equilibrio atómico depende de ligaduras interatómicas de distintos tipos dando lugar a materiales amorfos o cristalinos.

Las características mecánicas de los materiales compuestos dependen de sus propiedades intrínsecas: estructura macroscópica, tipo de ligadura, estructura cristalina, etc.. También influyen en el comportamiento de estos materiales sus propiedades extrínsecas: características del proceso de fabricación, tamaño de microporos y distribución de los mismos, microfisuras, estados tensionales iniciales, etc. Desde el punto de vista de la simulación del comportamiento constitutivo sólo se puede contribuir en estudios que conduzcan a mejorar las propiedades extrínsecas del compuesto.

Cada una de las sustancias componentes que integran el compuesto condicionan con su propia ley constitutiva el comportamiento del conjunto en función de la proporción del volumen en que participan y de su distribución morfológica en el compuesto.

Existen diversas teorías que permiten simular el comportamiento constitutivo de los materiales compuestos. Una de ellas es la *Teoría de Mezclas*, que se considera adecuada para la simulación del comportamiento de materiales compuestos en régimen lineal y con ciertas modificaciones permite simular, también, el comportamiento una vez superado el límite de proporcionalidad del material. Por otro lado, esta teoría establece que los materiales componentes, que coexisten en un punto del sólido deben tener la misma deformación. Esta hipótesis plantea una fuerte limitación de la teoría de mezclas para ser utilizada