

Funções de base hierárquicas para a versão- p do método de elementos finitos

Alberto Costa Nogueira Junior e Marco Lúcio Bittencourt

Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Mecânica, Departamento de Projeto Mecânico
P.O. Box 6051, Zip Code 13083-970, Campinas/SP, Brazil
Tel.: 55-19-788 3257, Fax: 55-19-289 3722
e-mail: rapadura@fem.unicamp.br
e-mail: mlb@fem.unicamp.br

Resumen

O presente trabalho realiza um estudo comparativo entre funções de base hierárquicas associadas a elementos triangulares e tetraédricos. Discute-se, a partir da análise das propriedades de esparsidade e condicionamento das matrizes elementares, o desempenho de vários conjuntos de funções sugeridos na literatura. Apresenta-se ainda uma nova proposta para funções hierárquicas associadas a elementos triangulares e tetraédricos. As funções de forma e suas respectivas matrizes locais de rigidez e massa são geradas analiticamente usando o software MATHEMATICA 3.0.

HIERARCHICAL BASIS FUNCTIONS FOR THE p -VERSION OF THE FINITE ELEMENT METHOD

Summary

This paper presents a comparative study of hierarchical basis functions for triangular and tetrahedral elements. The performance of some sets of shape functions presented in the literature is discussed based on the sparsity and condition number of the elemental matrices. In addition, new triangular and tetrahedral basis functions are proposed. The shape functions and their respective stiffness and mass elemental matrices are calculated analytically using the software MATHEMATICA 3.0.

INTRODUÇÃO

Na abordagem de problemas pelo Método de Elementos Finitos (MEF), o potencial ou campo vetorial desconhecido é aproximado por uma soma ponderada das funções de base (de forma ou de interpolação) associadas a cada elemento. A escolha dessas funções desempenha um papel fundamental na determinação da eficiência e flexibilidade do método.

Os elementos mais simples empregados no MEF utilizam funções polinomiais de baixa ordem definidas num espaço de coordenadas local. Elementos mais elaborados usam funções de base constituídas por polinômios de alta ordem. Entre os elementos de alta ordem, aqueles que preservam a continuidade da função de aproximação ao longo de malhas compostas por elementos de ordens polinomiais diferentes são conhecidos como elementos *hierárquicos*¹⁴. O conceito de hierarquia usado na versão- p do MEF³ fundamenta-se na propriedade de que o conjunto de funções de base que gera o espaço de aproximação de uma dada ordem p contém integralmente o conjunto de funções de base do espaço de aproximação de ordem $p - 1$.

As funções de forma hierárquicas tipicamente empregadas na formulação p do MEF são comumente associadas a entidades topológicas dos elementos como vértices, arestas, faces e interiores¹¹. O tratamento clássico dessas funções envolve o uso de polinômios unidimensionais de Legendre ou Chebyshev. Para os casos de elementos quadriláteros ou hexaédricos, constroem-se as funções hierárquicas a partir do produto tensorial de funções de base unidimensionais⁷. A utilização do produto tensorial na obtenção de funções hierárquicas para domínios triangulares ou tetraédricos não é imediata, necessitando-se uma abordagem especial.

Sherwin & Karniadakis¹⁰ propuseram um conjunto de funções hierárquicas para triângulos e tetraedros, baseado em coordenadas cartesianas, que preserva as propriedades do produto tensorial. As funções de base sugeridas nessa formulação empregam polinômios de Jacobi e acomodam uma integração numérica exata usando apenas as regras de quadratura unidimensionais de Gauss-Jacobi⁸. A vantagem de não requerer procedimentos especiais de integração numérica¹⁰ decorre da utilização de um conjunto de transformações de coordenadas, o qual permite definir domínios triangulares e tetraédricos a partir de sistemas de coordenadas retangulares e hexaédricos¹⁰.

Webb & Abouchakra¹³ descreveram um elemento triangular hierárquico no qual também se utilizam os polinômios de Jacobi para gerar as funções de interpolação. Esse desenvolvimento mantém, no entanto, o esquema tradicional de definição do elemento de referência usado na formulação h do MEF¹⁴, necessitando portanto das regras de quadratura sugeridas por Dunavant⁶. Uma versão tridimensional desse elemento para o caso de malhas tetraédricas foi sugerida por Abouchakra¹.

Um aspecto essencial na busca de alta performance para a versão- p do MEF diz respeito às propriedades de condicionamento e esparsidade das matrizes de rigidez e massa locais associadas ao elemento de referência^{2,4,7,12}. Os padrões de esparsidade e condicionamento das matrizes locais são determinados pela definição das funções de base e indiretamente influenciam esses mesmos padrões das matrizes globais^{4,7,15}. O bom condicionamento das matrizes globais demonstra-se particularmente importante quando se empregam aproximações de alta ordem e/ou métodos iterativos na solução dos problemas de álgebra linear decorrentes da discretização por elementos finitos. No caso do uso de métodos iterativos, o bom condicionamento resulta na redução do número de iterações. Da mesma maneira, a esparsidade dessas matrizes resulta num menor custo por operação⁴.

As funções hierárquicas clássicas para elementos quadriláteros e hexaédricos propostas por Szabó & Babuška¹¹ apresentam boas características quanto a esparsidade e condicionamento⁷. Tais características decorrem diretamente das propriedades das integrais dos polinômios de Legendre e do caráter tensorial dessas funções. No entanto, para elementos triangulares e tetraédricos, as funções sugeridas por estes mesmos autores¹¹ não exibem propriedades tão boas, as quais tendem lamentavelmente a se degenerar com o aumento da ordem polinomial p ⁴.

Carnevali *et al.*⁴ apresentaram um conjunto de funções de base hierárquicas para triângulos, tetraedros e prismas dando ênfase especial às propriedades de ortogonalidade das derivadas dessas funções. Essa particularidade resulta na obtenção de matrizes de rigidez locais com maior grau de esparsidade e melhor condicionamento que as matrizes associadas às funções hierárquicas propostas por Szabó & Babuška¹¹. Esse conjunto de funções de base demonstrou ainda conservar muitos termos nulos nas matrizes de rigidez globais mesmo quando se empregavam funções de mapeamento não-lineares⁴.

O presente trabalho realiza um estudo comparativo entre funções de base hierárquicas associadas a triângulos e tetraedros. Discute-se, a partir da análise das propriedades de esparsidade e condicionamento locais, o desempenho de vários conjuntos de funções sugeridos na literatura^{1,4,10,11,13}. Com base na formulação apresentada por Sherwin & Karniadakis¹⁰, apresenta-se uma nova proposta para funções hierárquicas associadas a triângulos e tetraedros. Esse conjunto de funções, construído a partir do produto tensorial generalizado de

polinômios de Jacobi, permite acomodar uma integração numérica exata usando-se apenas as regras de quadratura unidimensionais de Gauss-Jacobi.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. Na primeira seção, são apresentados os conjuntos de funções de forma hierárquicas bi e tridimensionais considerados. A segunda seção traz resultados numéricos comparando as propriedades de esparsidade e condicionamento das matrizes locais (rigidez e massa) associadas às diferentes funções hierárquicas definidas sobre triângulos e tetraedros. A obtenção desses resultados é realizada com o auxílio do software MATHEMATICA 3.0. As conclusões a respeito das investigações realizadas são apresentadas na terceira seção. Em anexo, apresenta-se um programa computacional (elaborado a partir do software MATHEMATICA 3.0) para a geração das funções e respectivas derivadas associadas ao elemento tetraédrico sugerido por Sherwin & Karniadakis¹⁰.

FUNÇÕES DE BASE HIERÁRQUICAS

Quadriláteros

As funções hierárquicas associadas a quadriláteros sugeridas por Szabó & Babuška são definidas sobre o elemento de referência $\hat{Q} = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid |\xi| < 1, |\eta| < 1\}$ (Figura 1a) e construídas com base na integração dos polinômios de Legendre. Essas funções são organizadas de acordo com as entidades topológicas do elemento como funções de vértice, de aresta e de face^{2,11}.

As 4 funções associadas aos vértices desse elemento são exatamente as mesmas empregadas nos elementos de 4 nós utilizados na versão- h do MEF, ou seja

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi_i\xi)(1 - \eta_i\eta) \quad i = 1, \dots, 4; \xi_i = \eta_i = \pm 1 \quad (1)$$

Definem-se $4(p - 1)$ funções de forma associadas às arestas as quais são dadas pelas seguintes expressões para $i = 2, \dots, p$

$$\begin{aligned} N_i^{(1)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \eta)\phi_i(\xi) \\ N_i^{(2)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 + \xi)\phi_i(\eta) \\ N_i^{(3)}(\xi, \eta) &= \frac{(-1)^i}{2}(1 + \eta)\phi_i(\xi) \\ N_i^{(4)}(\xi, \eta) &= \frac{(-1)^i}{2}(1 - \xi)\phi_i(\eta) \end{aligned} \quad (2)$$

A função $\phi_i(\zeta)$ é dada por

$$\phi_i(\zeta) = \sqrt{\frac{2i-1}{2}} \int_{-1}^{\zeta} P_{i-1}(t) dt \quad (3)$$

sendo $P_{i-1}(t)$ o polinômio de Legendre de grau $i - 1$. O termo $(-1)^i$ presente nas funções $N_i^{(3)}$ e $N_i^{(4)}$ é necessário para se obter invariância com respeito à rotação de coordenadas².

Finalmente, definem-se $(p - 2)(p - 3)/2$ funções associadas à face, para $p \geq 4$, as quais são dadas por

$$N_{i,j}^{(0)}(\xi, \eta) = \phi_i(\xi)\phi_j(\eta) \quad i, j = 2, \dots, p - 2; 0 \leq i + j \leq p \quad (4)$$

Hexaedros

De maneira geral, as funções de forma associadas a hexaedros são análogas àquelas definidas para elementos quadrilaterais. Neste caso, além das funções de vértices, arestas e faces, definem-se ainda funções associadas ao interior do elemento de referência.

Para o elemento hexaédrico¹¹ $\hat{Q} = \{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 \mid |\xi| < 1, |\eta| < 1, |\zeta| < 1\}$ (Figura 1b), definem-se 8 funções de forma hierárquicas associadas a seus vértices, as quais são as mesmas empregadas na versão- h do MEF, ou seja

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi_i \xi)(1 - \eta_i \eta)(1 - \zeta_i \zeta) \quad i = 1, \dots, 8; \xi_i = \eta_i = \zeta_i = \pm 1 \quad (5)$$

Para $p \geq 2$, definem-se $12(p - 1)$ funções de forma associadas às arestas do elemento. Essas funções são similares às funções de aresta definidas para o elemento quadrilateral. As funções que conectam os vértices (1, 2) e (2, 3) (Figura 1b), por exemplo, são representadas por

$$\begin{aligned} N_{i-1}^{(1,2)}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{4} \phi_i(\xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \\ N_{i-1}^{(2,3)}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{4} \phi_i(\eta)(1 + \xi)(1 - \zeta) \end{aligned} \quad (6)$$

com $\phi_i(\zeta)$ dado pela relação (3). As demais funções de aresta são obtidas analogamente, permutando-se as variáveis ξ, η e ζ e seus respectivos sinais ± 1 .

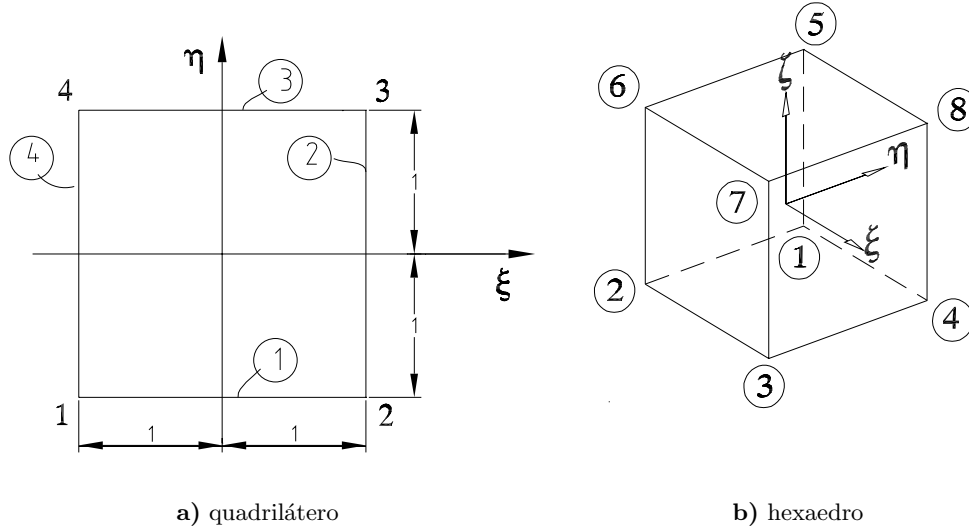


Figura 1. Elementos de referência quadrilateral e hexaédrico de Szabó & Babuška¹¹

Para $p \geq 4$, definem-se $3(p - 2)(p - 3)$ funções de forma associadas às faces do elemento, as quais são similares às funções de face descritas para o elemento quadrilateral. A função associada à face definida pelos vértices (1, 2, 5, 6) (Figura 1b), por exemplo, é dada pela seguinte expressão

$$N_m^{(1,2,5,6)}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2}(1 - \eta)\phi_i(\xi)\phi_j(\zeta) \quad i, j = 2, 3, \dots, p - 2; i + j = 4, 5, \dots, p \quad (7)$$

sendo $m(i, j)$ o índice convencional para a numeração das funções de face ^{BA_{Szabo}1991}. As demais funções de face são obtidas analogamente, permutando-se as variáveis ξ, η e ζ e seus respectivos sinais ± 1 .

Finalmente, definem-se $(p - 3)(p - 4)(p - 5)/6$ funções de forma associadas ao interior do elemento, para $p \geq 6$. Essas funções são dadas pela seguinte expressão geral

$$N_m^{(0)} = \phi_i(\xi)\phi_j(\eta)\phi_k(\zeta) \quad i, j, k = 2, 3, \dots, p - 4; i + j + k = 6, 7, \dots, p \quad (8)$$

sendo $m = m(i, j, k)$ o índice convencional para a numeração das funções internas¹¹.

Como constatado pelo trabalho de Edgar & Surana⁷, o emprego das funções hierárquicas associadas a quadriláteros e hexaedros sugeridas por Szabó & Babuška¹¹ resultam em excelentes propriedades de esparsidade e condicionamento numérico das matrizes locais. Segundo⁴, no entanto, não se pode esperar o mesmo para as funções associadas a triângulos e tetraedros desenvolvidas por estes últimos. Dessa forma, o restante deste artigo concentra-se no estudo de funções hierárquicas para triângulos e tetraedros.

Triângulos

As funções hierárquicas associadas a elementos triangulares propostas por¹¹ são definidas sobre o triângulo de referência equilátero $\hat{T} = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \eta < \sqrt{3}(\xi + 1), -1 < \xi < 0 \text{ ou } 0 < \eta < \sqrt{3}(1 - \xi), 0 < \xi < 1\}$ (Figura 2a) e, assim como no caso dos elementos quadrilaterais, são construídas com base na integração dos polinômios de Legendre. Essas funções são dadas em termos das coordenadas de área L_i ($i = 1, 2, 3$) do elemento padrão, as quais obedecem a relação $L_1 + L_2 + L_3 = 1$. Definem-se, nesse caso, 3 funções de vértice, $3(p - 1)$ funções de aresta, para $p \geq 2$, e $(p - 1)(p - 2)/2$ funções de face, para $p \geq 3$. As funções associadas aos vértices são dadas pelas próprias coordenadas de área L_i ($i = 1, 2, 3$). Essas funções possuem um comportamento linear, assumindo valor unitário no vértice i do elemento de referência e anulando-se nos lados opostos a esse mesmo vértice. As funções de aresta são construídas de modo que em cada lado do triângulo, as mesmas se encaixem exatamente nas funções de aresta correspondentes definidas para o elemento quadrilateral e ainda se anulem ao longo dos outros dois lados do triângulo. As funções de face possuem um aspecto do tipo bolha e são construídas de forma que se anulem em cada um dos lados do triângulo de referência.

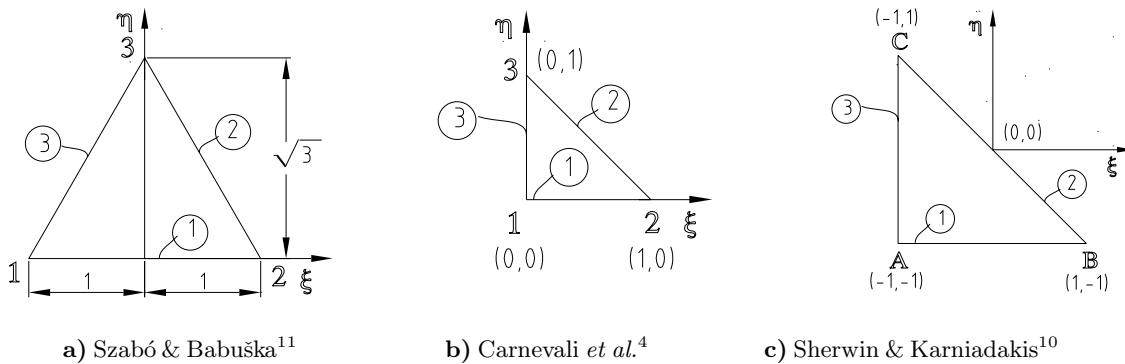


Figura 2. Elementos de referência triangulares

Em geral, as funções hierárquicas associadas a triângulos definidas adiante possuem os mesmos comportamentos descritos acima. A quantidade de funções por elemento a

cada nível de aproximação p também segue o mesmo padrão sugerido anteriormente. As diferenças aparecem na forma do elemento de referência utilizado e nos tipos de polinômios que compõem as funções de interpolação. A utilização de coordenadas de área é bastante comum, mas não obrigatória¹⁰.

As funções hierárquicas associadas ao elemento triangular de Carnevali *et al.*⁴ são definidas sobre o triângulo de referência retângulo $\hat{T} = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \eta < 1 - \xi, 0 < \xi < 1\}$, denominado $[0, 1]$ 2-*simplex* (Figura 2b). Essas funções, assim como no caso anterior, são dadas em termos das coordenadas de área L_i ($i = 1, 2, 3$) do elemento padrão. Com o objetivo de se obter ortogonalidade entre as derivadas das funções associadas a esse elemento, empregam-se alguns resultados teóricos, além do procedimento de Gram-Schmidt na construção das mesmas⁴.

As funções hierárquicas de Webb & Abouchakra¹³ são construídas com base nos polinômios de Jacobi. Essas funções são definidas exatamente sobre o mesmo triângulo padrão usado por Carnevali *et al.* e também são descritas através das coordenadas de área L_i ($i = 1, 2, 3$).

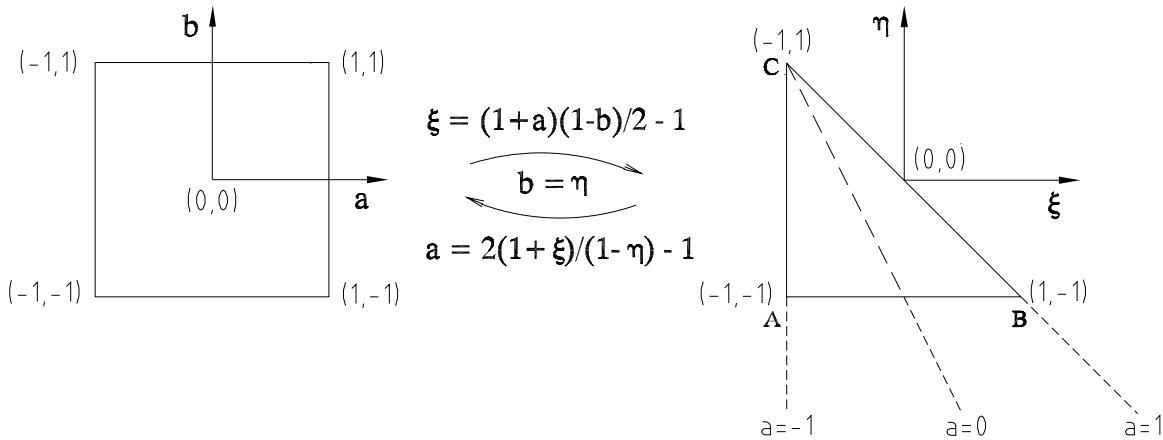


Figura 3. Mapeamento de coordenadas do elemento quadrilateral para o elemento triangular de Sherwin & Karniadakis¹⁰

O conjunto de funções hierárquicas proposto por Sherwin & Karniadakis¹⁰ é definido sobre o triângulo padrão $T^2 = \{(\phi, \psi) \mid -1 \leq \phi, \psi; \phi + \psi \leq 0\}$, mapeado a partir do domínio quadrilateral $R^2 = \{(\Phi, \Psi) \mid -1 \leq \Phi, \Psi \leq 1\}$ (Figuras 2c e 3). Essas funções são construídas com base nos polinômios de Jacobi e também podem ser escritas nas coordenadas de área L_i ($i = 1, 2, 3$).

A Tabela I apresenta, em termos das coordenadas de área L_i ($i = 1, 2, 3$), as expressões para as funções hierárquicas associadas aos diferentes tipos de elementos triangulares mencionados acima. Essa tabela traz ainda um novo conjunto de funções hierárquicas para malhas triangulares proposto com base na referência¹⁰. Partindo-se do conjunto de funções de base ortogonal proposto por Dubiner⁵ e aproveitando a formulação multi-domínios sugerida por Sherwin & Karniadakis¹⁰, a qual preserva a continuidade C^0 sobre malhas triangulares conformes, obteve-se uma base hierárquica adequada para os espaços de aproximação comumente utilizados no MEF. As funções associadas a esse novo elemento são definidas sobre o mesmo triângulo padrão sugerido em¹⁰. O novo conjunto de funções hierárquicas foi idealizado para se gerar ortogonalidade entre as funções associadas à face do elemento de referência.

Szabó ¹¹	vértice	$N_1^{(1)} = L_1, \quad N_1^{(2)} = L_2, \quad N_1^{(3)} = L_3$
	aresta ¹	$N_i^{(1)} = L_1 L_2 \varphi_i(L_2 - L_1)$ $N_i^{(2)} = L_2 L_3 \varphi_i(L_3 - L_2)$ $N_i^{(3)} = L_3 L_1 \varphi_i(L_1 - L_3)$
	face ²	$N_{(p-2)(p-3)/2+i}^{(0)} = L_1 L_2 L_3 P_{(p-3)+1-i}(L_2 - L_1) P_{i-1}(2L_3 - 1)$
Carnevali ¹⁴	vértice	$h_1^{(1)} = L_1, \quad h_2^{(1)} = L_2, \quad h_3^{(1)} = L_3$
	aresta ³	$h_1^{(p)} = -2L_1 L_2 E_{p-2}(L_1, L_2)$ $h_2^{(p)} = -2L_2 L_3 E_{p-2}(L_2, L_3)$ $h_3^{(p)} = -2L_3 L_1 E_{p-2}(L_3, L_1)$
	face ⁴	$h_{\alpha,\beta}^{(p)} = L_1 L_2 L_3 F_{\alpha,\beta}(L_1, L_2)$
Webb ¹³	vértice	$N_1 = L_1, \quad N_2 = L_2, \quad N_3 = L_3$
	aresta ⁵	$N_{a+1} = L_1 L_2 P_{p-2}^{(2,2)}(L_2 - L_1)$ $N_{a+2} = L_2 L_3 P_{p-2}^{(2,2)}(L_3 - L_2)$ $N_{a+3} = L_3 L_1 P_{p-2}^{(2,2)}(L_1 - L_3)$
	face ⁶	$N_{a+4+i} = L_1 L_2 L_3 (1 - L_3)^k P_i^{(2,2k+5)} (1 - 2L_3) P_k^{(2,2)} \left(\frac{L_2 - L_1}{1 - L_3} \right)$
Sherwin ¹⁰	vértice	$g_{10}^{1-2^{vert A}} = L_1, \quad g_{01}^{1-2^{vert B}} = L_2, \quad g_{01}^{1-2^{vert C}} = L_3$
	aresta	$g_{l0}^{1-2^{aresta 1}} = L_1 L_2 P_{l-2}^{1,1} \left(\frac{L_2 - L_1}{1 - L_3} \right) (1 - L_3)^{l-2}$ $g_{1m}^{1-2^{aresta 2}} = L_2 L_3 P_{m-1}^{1,1} (2L_3 - 1)$ $g_{1m}^{1-2^{aresta 3}} = L_3 L_1 P_{m-1}^{1,1} (2L_3 - 1)$
	face ⁷	$g_{lm}^{1-2^{face}} = L_1 L_2 L_3 P_{l-2}^{1,1} \left(\frac{L_2 - L_1}{1 - L_3} \right) (1 - L_3)^{l-2} P_{m-1}^{2l-1,1} (2L_3 - 1)$
Propostas	vértice	$N_{10}^{1-2^{(vert A)}} = L_1, \quad N_{01}^{1-2^{(vert B)}} = L_2, \quad N_{01}^{1-2^{(vert C)}} = L_3$
	aresta	$N_{l0}^{1-2^{(aresta 1)}} = L_1 L_2 P_{l-2}^{2,2} \left(\frac{L_2 - L_1}{1 - L_3} \right) (1 - L_3)^{l-2}$ $N_{1m}^{1-2^{(aresta 2)}} = L_2 L_3 P_{m-1}^{2,2} (2L_3 - 1)$ $N_{1m}^{1-2^{(aresta 3)}} = L_3 L_1 P_{m-1}^{2,2} (2L_3 - 1)$
	face ⁸	$N_{lm}^{1-2^{(face)}} = L_1 L_2 L_3 P_{l-2}^{2,2} \left(\frac{L_2 - L_1}{1 - L_3} \right) (1 - L_3)^{l-2} P_{m-1}^{2l+1,2} (2L_3 - 1)$

¹ O termo $\varphi_i(\zeta)$ é definido através da seguinte expressão:

$$\frac{1}{4}(1 - \zeta^2)\varphi_i(\zeta) = \phi_i(\zeta) = \sqrt{\frac{2i-1}{2}} \int_{-1}^{\zeta} P_{i-1}(t) dt.$$

² P_k é o polinômio de Legendre de ordem k .

³ O termo $E_{p-2}(L_i, L_j)$ é definido através da seguinte expressão, para $p \geq 2$:

$$E_{p-2}(L_i, L_j) = \sum_{k=0}^{p-2} (-1)^k \frac{1}{k+1} \binom{p-2}{k} \binom{p-1}{k} L_i^k L_j^{p-2-k}.$$

⁴ O termo $F_{\alpha,\beta}(L_1, L_2)$ é definido através da seguinte expressão, para $\alpha, \beta = 0, \dots, p-3$;

$$\alpha + \beta = p-3 \text{ e } p \geq 3: F_{\alpha,\beta}(L_r, L_s) = \sum_{i=0}^{\beta} \sum_{j=0}^{\alpha} \left(-\frac{1}{2}\right)^{i+j} i! j! (i+j)! \binom{\alpha}{j} \binom{\alpha+1}{i} \binom{\beta}{i} \binom{\beta+1}{i} \times \\ \times \frac{1}{\prod_{k=1}^{i+j} [k(\alpha+\beta+2) - k(k-1)/2]} (L_r)^{\alpha-j} (L_s)^{\beta-i}.$$

⁵ O índice a , para $p = 2, 3, \dots, n$, é definido por $a = \frac{1}{2}p(p+1)$. $P_k^{(\alpha,\beta)}$ são polinômios de Jacobi de ordem k e pesos α e β .

⁶ O índice k , para $p \geq 3$, é dado por $k = p-3-i$.

⁷ O índice lm é definido de modo que $(2 \leq l; 1 \leq m \mid l < L; l+m < M)$, com L e M indicando o número total de funções de base. $P_k^{\alpha,\beta}$ são polinômios de Jacobi de ordem k e pesos α e β .

⁸ O índice lm e os polinômios $P_k^{\alpha,\beta}$ são definidos tal como em Sherwin & Karniadakis¹⁰.

Tabela I. Expressões para as funções hierárquicas associadas aos elementos triangulares

Os gráficos de algumas funções hierárquicas associadas às arestas e às faces dos diferentes elementos estudados são ilustrados na Figura 4.

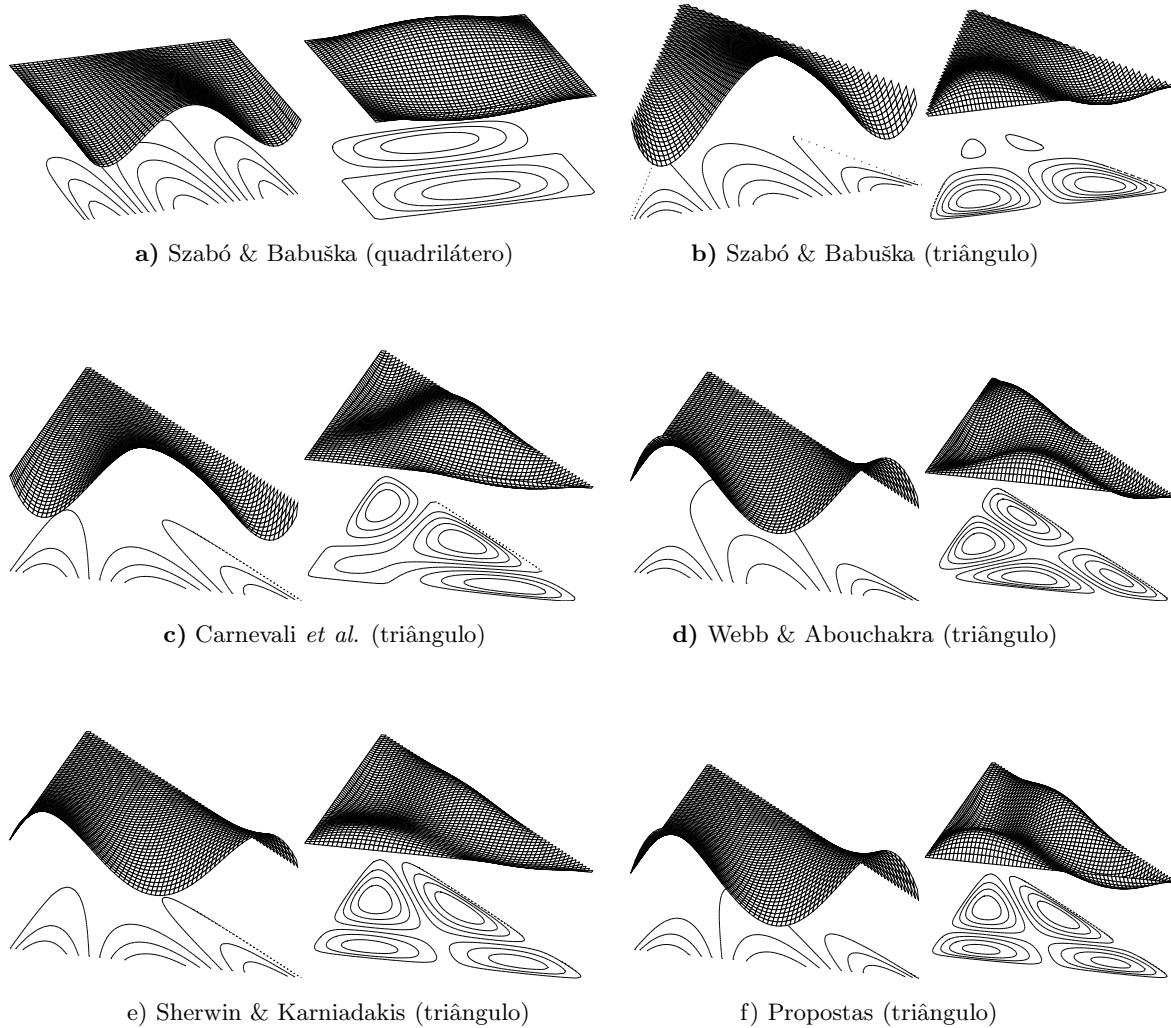


Figura 4. Funções hierárquicas de ordens 4 e 5 associadas às arestas e às faces, respectivamente, dos diferentes elementos estudados

Tetraedros

As funções hierárquicas associadas ao elemento tetraédrico de Szabó & Babuška¹¹ são definidas sobre o tetraedro padrão derivado do triângulo equilátero descrito anteriormente (Figura 5a). Essas funções são elaboradas com base na integração dos polinômios de Legendre e representadas em termos das coordenadas de volume L_i ($i = 1, 2, 3, 4$) do tetraedro de tal forma que $L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1$. Definem-se, nesse caso, 4 funções de vértice, $6(p-1)$ funções de aresta, para $p \geq 2$, $2(p-1)(p-2)$ funções de face, para $p \geq 3$, e $(p-1)(p-2)(p-3)/6$ funções internas, para $p \geq 4$. As funções associadas a esse elemento possuem características semelhantes àsquelas encontradas nas funções hierárquicas definidas para o elemento triangular de Szabó & Babuška.

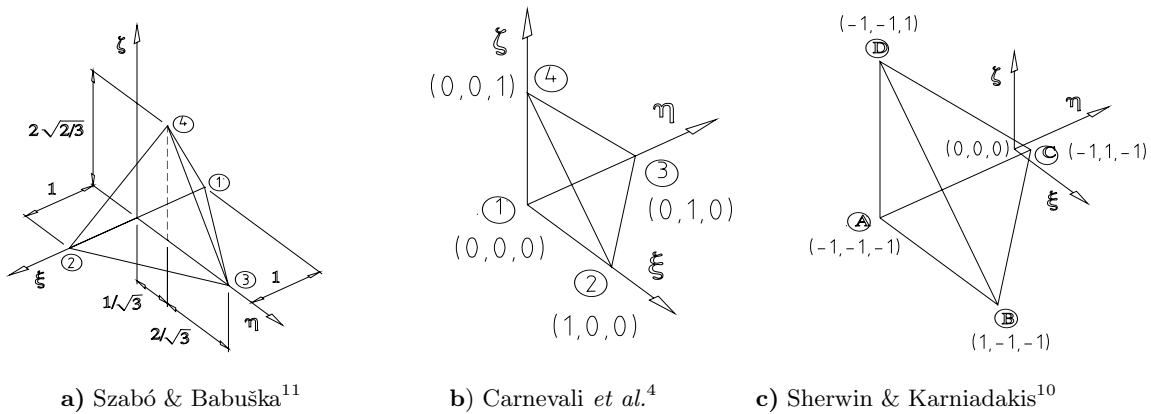


Figura 5. Elementos de referência tetraédricos

Os demais elementos tetraédricos sugeridos na literatura^{1,4,10} são extensões diretas dos respectivos elementos triangulares descritos e portanto preservam as propriedades destes últimos. Observa-se, por exemplo, que as funções hierárquicas associadas aos elementos tetraédricos de Carnevali *et al.*⁴ e Abouchakra¹ são definidas sobre o elemento de referência $[0, 1] 3 - simplex$ (Figura 5b). Já as funções elaboradas por Sherwin & Karniadakis¹⁰ são definidas sobre o elemento de referência $T^3 = \{(\phi, \psi, \tau) \mid -1 \leq \phi, \psi, \tau; \phi + \psi + \tau \leq -1\}$, mapeado a partir do domínio hexaédrico $R^3 = \{(\Phi, \Psi, \Gamma) \mid -1 \leq \Phi, \Psi, \Gamma \leq 1\}$ (Figura 5c e 6). No caso tridimensional, a quantidade de funções por elemento a cada nível de aproximação p , normalmente respeita o padrão adotado por Szabó & Babuška¹¹.

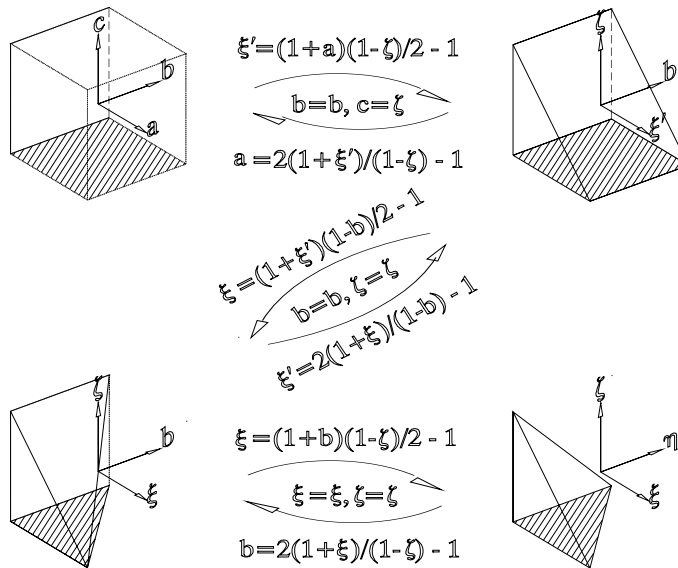


Figura 6. Mapeamento de coordenadas do elemento hexaédrico para o elemento tetraédrico de Sherwin & Karniadakis¹⁰

A Tabela II apresenta as expressões para as funções hierárquicas associadas aos diferentes tipos de elementos tetraédricos mencionados acima. Essa tabela traz ainda um novo conjunto de funções hierárquicas para malhas tetraédricas concebido com base na referência¹⁰. Esse conjunto de funções é uma extensão imediata do conjunto associado a malhas triangulares proposto anteriormente.

Szabó ¹¹	vértice	$N_1^{(1)} = L_1, \quad N_1^{(2)} = L_2, \quad N_1^{(3)} = L_3, \quad N_1^{(4)} = L_4$
	aresta ⁹	$N_{i-1}^{(1,2)} = L_1 L_2 \varphi_i(L_2 - L_1)$ $N_{i-1}^{(2,3)} = L_2 L_3 \varphi_i(L_3 - L_2)$ $N_{i-1}^{(3,1)} = L_3 L_1 \varphi_i(L_1 - L_3)$ $N_{i-1}^{(4,1)} = L_4 L_1 \varphi_i(L_1 - L_4)$ $N_{i-1}^{(2,4)} = L_2 L_4 \varphi_i(L_4 - L_2)$ $N_{i-1}^{(3,4)} = L_3 L_4 \varphi_i(L_4 - L_3)$
	face ¹⁰	$N_m^{(1,2,3)} = L_1 L_2 L_3 P_i(L_2 - L_1) P_j(2L_3 - 1)$ $N_m^{(1,2,4)} = L_1 L_2 L_4 P_i(L_2 - L_1) P_j(2L_4 - 1)$ $N_m^{(2,3,4)} = L_2 L_3 L_4 P_i(L_3 - L_2) P_j(2L_4 - 1)$ $N_m^{(3,1,4)} = L_3 L_1 L_4 P_i(L_1 - L_3) P_j(2L_4 - 1)$
	interior ¹¹	$N_m^{(0)} = L_1 L_2 L_3 L_4 P_i(L_2 - L_1) P_j(2L_3 - 1) P_k(2L_4 - 1)$
Carnevali ⁴	vértice	$h_1^{(1)} = L_1, \quad h_2^{(1)} = L_2, \quad h_3^{(1)} = L_3, \quad h_4^{(1)} = L_4$
	aresta ¹²	$h^{(p)} = -2L_i L_j E_{p-2}(L_i, L_j)$
	face ¹³	$h_{\alpha,\beta}^{(p)} = L_r L_s L_t F_{\alpha,\beta}(L_r, L_s)$
	interior ¹⁴	$h_{\alpha\beta\gamma}^{(p)} = L_1 L_2 L_3 L_4 B_{\alpha\beta\gamma}(L_1, L_2, L_3)$
Abouchakra ¹	vértice	$N_1 = L_1, \quad N_2 = L_2, \quad N_3 = L_3, \quad N_4 = L_4$
	aresta ¹⁵	$N_{a+1} = L_1 L_2 P_{p-2}^{(2,2)}(L_2 - L_1)$ $N_{a+2} = L_1 L_3 P_{p-2}^{(2,2)}(L_3 - L_1)$ $N_{a+3} = L_1 L_4 P_{p-2}^{(2,2)}(L_4 - L_1)$ $N_{a+4} = L_2 L_3 P_{p-2}^{(2,2)}(L_3 - L_2)$ $N_{a+5} = L_2 L_4 P_{p-2}^{(2,2)}(L_4 - L_2)$ $N_{a+6} = L_3 L_4 P_{p-2}^{(2,2)}(L_4 - L_3)$
	face ¹⁶	$N_{a+7+i} = L_1 L_2 L_3 (1 - L_3)^k P_i^{(2,2k+5)}(1 - 2L_3) P_k^{(2,2)}\left(\frac{L_2 - L_1}{1 - L_3}\right)$ $N_{a+8+i+(p-3)} = L_1 L_2 L_4 (1 - L_4)^k P_i^{(2,2k+5)}(1 - 2L_4) P_k^{(2,2)}\left(\frac{L_2 - L_1}{1 - L_4}\right)$ $N_{a+9+i+2(p-3)} = L_1 L_3 L_4 (1 - L_4)^k P_i^{(2,2k+5)}(1 - 2L_4) P_k^{(2,2)}\left(\frac{L_3 - L_1}{1 - L_4}\right)$ $N_{a+10+i+3(p-3)} = L_2 L_3 L_4 (1 - L_4)^k P_i^{(2,2k+5)}(1 - 2L_4) P_k^{(2,2)}\left(\frac{L_3 - L_2}{1 - L_4}\right)$
	interior ¹⁷	$N_{a+11+j+\frac{i(i+1)}{2}+4(p-3)} = L_1 L_2 L_3 L_4 (1 - L_2 - L_3)^k (1 - L_3)^q P_k^{(2,2)}\left(\frac{L_4 - L_1}{1 - L_2 - L_3}\right)$ $\times P_q^{(2,2k+5)}\left(\frac{1 - L_3 - 2L_2}{1 - L_3}\right) P_j^{(2,2k+2q+8)}(1 - 2L_3)$

- ⁹ O termo $\varphi_i(\zeta)$ é definido exatamente como no caso do elemento triangular.
- ¹⁰ $m = m(i, j)$ é o índice convencionado para a numeração das funções de facedo tetraedro; P_i, P_j são polinômios de Legendre de ordens i e j respectivamente, com $i, j = 0, 1, 2, \dots, p - 3$ e $i + j = 0, 1, \dots, p - 3$.
- ¹¹ $m = m(i, j, k)$ é o índice convencionado para a numeração das funções internas do tetraedro padrão; P_i, P_j, P_k são polinômios de Legendre de ordens i, j e k respectivamente, com $i, j, k = 0, 1, 2, \dots, p - 4$ e $i + j + k = 0, 1, \dots, p - 4$.
- ¹² O termo $E_{p-2}(L_i, L_j)$ é definido exatamente como no caso do elemento triangular.
- ¹³ O termo $F_{\alpha,\beta}(L_r, L_s)$ é definido exatamente como no caso do elemento triangular.
- ¹⁴ O termo $B_{\alpha\beta\gamma}(L_1, L_2, L_3)$ é definido pela seguinte expressão, para $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$;
 $\alpha + \beta + \gamma = p - 4$ e $p \geq 4$: $B_{\alpha\beta\gamma}(L_1, L_2, L_3) = \bar{B}_{\alpha 0 0}^{(\alpha+\beta+\gamma)}(L_1) \times \bar{B}_{0 \beta 0}^{(\beta+\gamma)}(L_1, L_2) \times \bar{B}_{0 0 \gamma}^{(\gamma)}(L_1, L_2, L_3)$, com $\bar{B}_{\alpha 0 0}^{(m)}(L_1) = \sum_{i=0}^{\alpha} (-1)^i i! \binom{\alpha}{i} \binom{\alpha+1}{i}$
 $\frac{(2m+5-i)!}{(2m+5)!} L_1^{\alpha-i}$; $\bar{B}_{0 \beta 0}^{(m)}(L_1, L_2) = \sum_{i=0}^{\beta} i! \binom{\beta}{i} \binom{\beta+1}{i}$
 $\frac{(2m+3-i)!}{(2m+3)!} L_2^{\beta-i} (L_1 - 1)^i$; $\bar{B}_{0 0 \gamma}^{(m)}(L_1, L_2, L_3) = \sum_{i=0}^{\beta} i! \binom{\gamma}{i} \binom{\gamma+1}{i} \frac{(2m+1-i)!}{(2m+1)!} L_3^{\gamma-i} (L_2 + L_1 - 1)^i$.
- ¹⁵ O índice a , para $p = 2, 3, \dots, n$, é definido por $a = p(p+1)(p+2)/6$ e $P_m^{(a,b)}$ são polinômios de Jacobi de ordem m e pesos a e b .
- ¹⁶ O índice k , para $p \geq 3$ e $i = 0, 1, \dots, p - 3$, é dado por $k = p - 3 - i$.
- ¹⁷ Os índices k e q , para $p \geq 4$, $i = 0, 1, \dots, p - 4$ e $j = 0, 1, \dots, i$, são dados respectivamente por $k = p - 4 - i$ e $q = i - j$.

Sherwin ¹⁰	vértice	$g_{100}^{1-3vert A} = L_1, \quad g_{100}^{1-3vert B} = L_2, \quad g_{010}^{1-3vert C} = L_3, \quad g_{001}^{1-3vert D} = L_4$
	aresta	$g_{100}^{1-3aresta 1} = L_1 L_2 P_{l-2}^{1,1} \left(\frac{L_2-L_1}{1-L_3-L_4} \right) (1-L_3-L_4)^{l-2}$ $g_{1m0}^{1-3aresta 2} = L_2 L_3 P_{m-1}^{1,1} \left(\frac{2L_3}{1-L_4} - 1 \right) (1-L_4)^{m-1}$ $g_{1m0}^{1-3aresta 3} = L_1 L_3 P_{m-1}^{1,1} \left(\frac{2L_3}{1-L_4} - 1 \right) (1-L_4)^{m-1}$ $g_{10n}^{1-3aresta 4} = L_1 L_4 P_{n-1}^{1,1} (2L_4 - 1)$ $g_{10n}^{1-3aresta 5} = L_2 L_4 P_{n-1}^{1,1} (2L_4 - 1)$ $g_{01n}^{1-3aresta 6} = L_3 L_4 P_{n-1}^{1,1} (2L_4 - 1)$
	face	$g_{1m0}^{1-3face 1} = L_1 L_2 L_3 P_{l-2}^{1,1} \left(\frac{L_2-L_1}{1-L_3-L_4} \right) (1-L_3-L_4)^{l-2} P_{m-1}^{2l-1,1} \left(\frac{2L_3}{1-L_4} - 1 \right) (1-L_4)^{m-1}$ $g_{10n}^{1-3face 2} = L_1 L_2 L_4 P_{l-2}^{1,1} \left(\frac{L_2-L_1}{1-L_3-L_4} \right) (1-L_3-L_4)^{l-2} P_{n-1}^{2l-1,1} (2L_4 - 1)$ $g_{1mn}^{1-3face 3} = L_2 L_3 L_4 P_{m-1}^{1,1} \left(\frac{2L_3}{1-L_4} - 1 \right) (1-L_4)^{m-1} P_{n-1}^{2m+1,1} (2L_4 - 1)$ $g_{1mn}^{1-3face 4} = L_1 L_3 L_4 P_{m-1}^{1,1} \left(\frac{2L_3}{1-L_4} - 1 \right) (1-L_4)^{m-1} P_{n-1}^{2m+1,1} (2L_4 - 1)$
	interior ¹⁸	$g_{lmn}^{1-3interior} = L_1 L_2 L_3 L_4 P_{l-2}^{1,1} \left(\frac{L_2-L_1}{1-L_3-L_4} \right) (1-L_3-L_4)^{l-2}$ $\times P_{m-1}^{2l-1,1} \left(\frac{2L_3}{1-L_4} - 1 \right) (1-L_4)^{m-1} P_{n-1}^{2l+2m-1,1} (2L_4 - 1)$
Propostas	vértice	$N_{100}^{1-3vert A} = L_1, \quad N_{100}^{1-3vert B} = L_2, \quad N_{010}^{1-3vert C} = L_2, \quad N_{001}^{1-3vert D} = L_4$
	aresta	$N_{100}^{1-3aresta 1} = L_1 L_2 P_{l-2}^{2,2} \left(\frac{L_2-L_1}{1-L_3-L_4} \right) (1-L_3-L_4)^{l-2}$ $N_{1m0}^{1-3aresta 2} = L_2 L_3 P_{m-1}^{2,2} \left(\frac{2L_3}{1-L_4} - 1 \right) (1-L_4)^{m-1}$ $N_{1m0}^{1-3aresta 3} = L_1 L_3 P_{m-1}^{2,2} \left(\frac{2L_3}{1-L_4} - 1 \right) (1-L_4)^{m-1}$ $N_{10n}^{1-3aresta 4} = L_1 L_4 P_{n-1}^{2,2} (2L_4 - 1)$ $N_{10n}^{1-3aresta 5} = L_2 L_4 P_{n-1}^{2,2} (2L_4 - 1)$ $N_{01n}^{1-3aresta 6} = L_3 L_4 P_{n-1}^{2,2} (2L_4 - 1)$
	face	$N_{1m0}^{1-3face 1} = L_1 L_2 L_3 P_{l-2}^{2,2} \left(\frac{L_2-L_1}{1-L_3-L_4} \right) (1-L_3-L_4)^{l-2} P_{m-1}^{2l+1,2} \left(\frac{2L_3}{1-L_4} - 1 \right) (1-L_4)^{m-1}$ $N_{10n}^{1-3face 2} = L_1 L_2 L_4 P_{l-2}^{2,2} \left(\frac{L_2-L_1}{1-L_3-L_4} \right) (1-L_3-L_4)^{l-2} P_{n-1}^{2l+2,2} (2L_4 - 1)$ $N_{1mn}^{1-3face 3} = L_2 L_3 L_4 P_{m-1}^{2,2} \left(\frac{2L_3}{1-L_4} - 1 \right) (1-L_4)^{m-1} P_{n-1}^{2m+4,2} (2L_4 - 1)$ $N_{1mn}^{1-3face 4} = L_1 L_3 L_4 P_{m-1}^{2,2} \left(\frac{2L_3}{1-L_4} - 1 \right) (1-L_4)^{m-1} P_{n-1}^{2m+4,2} (2L_4 - 1)$
	interior ¹⁹	$N_{lmn}^{1-3interior} = L_1 L_2 L_3 L_4 P_{l-2}^{2,2} \left(\frac{L_2-L_1}{1-L_3-L_4} \right) (1-L_3-L_4)^{l-2}$ $\times P_{m-1}^{2l+1,2} \left(\frac{2L_3}{1-L_4} - 1 \right) (1-L_4)^{m-1} P_{n-1}^{2l+2m+2,2} (2L_4 - 1)$

¹⁸ O índice lmn é definido de tal forma que $(2 \leq l; 1 \leq m, n \mid l < L; l + m < M; l + m + n < N)$, com L, M e N indicando o número total de funções de base. $P_k^{\alpha,\beta}$ são polinômios de Jacobi de ordem k e pesos α e β .

¹⁹ O índice lm e os polinômios $P_k^{\alpha,\beta}$ são definidos tal como em Sherwin & Karniadakis.

Tabela II. Expressões para as funções hierárquicas associadas aos elementos tetraédricos

RESULTADOS NUMÉRICOS PARA TRIÂNGULOS E TETRAEDROS

Condicionamento das matrizes de rigidez e massa locais

A seguir são apresentados resultados sobre o condicionamento das matrizes de rigidez e massa locais para os diferentes tipos de elementos triangulares e tetraédricos considerados anteriormente. O mesmo tipo de análise para elementos quadrilaterais e hexaédricos pode ser encontrado em^{2,7}. As matrizes de rigidez locais são obtidas a partir do operador de Laplace $(-\Delta u = f)$ sobre o triângulo ou tetraedro padrões. Calcula-se o número de condição das matrizes locais com base em três procedimentos distintos utilizados por Zumbusch,¹⁵ Webb & Abouchakra¹³ e Carnevali *et al.*,⁴ respectivamente.

No primeiro caso, computa-se o número de condição das matrizes de rigidez através da seguinte relação $\kappa_1 = \frac{\max \mu}{\min \mu \neq 0}$, sendo $\max \mu$ o maior valor singular e $\min \mu$, o menor valor singular diferente de zero (ou mais próximos de zero) dessas matrizes, respectivamente. No

caso das matrizes de massa, procede-se analogamente sem desconsiderar o valor singular mais próximo de zero. Esse modo de avaliação equivale a calcular o número de condição a partir da sua definição considerando a norma euclidiana (norma-2), i.e., $\kappa_1 = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$, uma vez que as matrizes $[A]$ são reais, simétricas e positivas-definidas. Nessa situação, os valores singulares μ e os auto-valores λ das matrizes locais são idênticos.

No segundo caso, calcula-se o número de condição considerando o mesmo procedimento anterior, mas efetuando-se desta vez a seguinte mudança de escala nas matrizes locais

$$\tilde{A} = DAD$$

sendo D uma matriz diagonal cujos elementos são fornecidos pela relação $D_{ii} = \frac{1}{\sqrt{A_{ii}}}$, com A_{ii} dado pelos elementos diagonais das matrizes de rigidez e massa originais. Nesse caso, o número de condição será dado pela relação $\kappa_2 = \|\tilde{A}\|_2 \|\tilde{A}^{-1}\|_2$. Esse procedimento é equivalente a normalizar as funções de base através da multiplicação destas por fatores constantes. A mudança de escala nas matrizes locais permite tomar como parâmetro um conjunto de funções de base ideal (conjunto ortogonal) cujo número de condição das matrizes locais seria 1¹³.

Finalmente, no terceiro procedimento para a obtenção do número de condição, utiliza-se a definição deste último considerando a norma-1, ou seja, $\kappa_3 = \|\tilde{A}\|_1 \|\tilde{A}^{-1}\|_1$. Repete-se novamente a mudança de escala sobre as matrizes de rigidez e massa locais. Remove-se ainda um grau de liberdade nodal das matrizes de rigidez locais para eliminar os modos de corpo rígido, o que equivale a tornar as matrizes $[\tilde{A}]$ não singulares.

Triângulos

A Figura 7 apresenta os números de condição obtidos a partir das matrizes de rigidez e massa locais em função da ordem polinomial p das funções hierárquicas analisadas ($p = 1, \dots, 10$). Consideram-se as três metodologias de cálculo adotadas.

Observa-se a partir desses gráficos que, para qualquer método de cálculo do número de condição das matrizes de rigidez locais, o conjunto de funções propostas por Webb & Abouchakra¹³ forneceu os melhores resultados. As funções de base apresentadas por Sherwin & Karniadakis¹⁰ e Webb & Abouchakra¹³ e aquelas propostas neste trabalho demonstraram, em todos os casos, um comportamento de estabilização do número de condição com o aumento da ordem polinomial p . Nota-se que o desempenho apresentado pelas funções de base fornecidas por Carnevali *et al.*⁴ é fortemente dependente da normalização das mesmas. Confirmou-se ainda a acentuada tendência de degeneração do número de condição das funções propostas por Szabó & Babuska¹¹ com o aumento da ordem polinomial p . Os mesmos comentários feitos em relação ao condicionamento das matrizes de rigidez locais se aplicam ao caso das matrizes de massa locais.

Tetraedros

A Figura 8 apresenta os números de condição obtidos a partir das matrizes de rigidez e massa locais em função da ordem polinomial p das funções hierárquicas analisadas ($p = 1, \dots, 8$). Consideram-se as três metodologias de cálculo adotadas.

Observa-se a partir desses gráficos que, para a segunda e terceira metodologias de cálculo do número de condição, com exceção das funções de Szabó & Babuška,¹¹ todas as demais apresentaram um desempenho bastante similar, demonstrando um comportamento de estabilização do número de condição com o aumento da ordem polinomial p . Analogamente ao caso dos elementos triangulares, empregando-se a primeira metodologia de cálculo do número de condição, é possível notar que o desempenho das funções de base fornecidas por Carnevali *et al.*⁴ é fortemente dependente da normalização das mesmas. Do mesmo modo,

constata-se a tendência de degeneração do número de condição das funções propostas por Szabó & Babuška¹¹ com o aumento da ordem polinomial p . Os comentários em relação as matrizes de massa locais é idêntico ao que acaba de ser apresentado para as matrizes de rigidez locais.

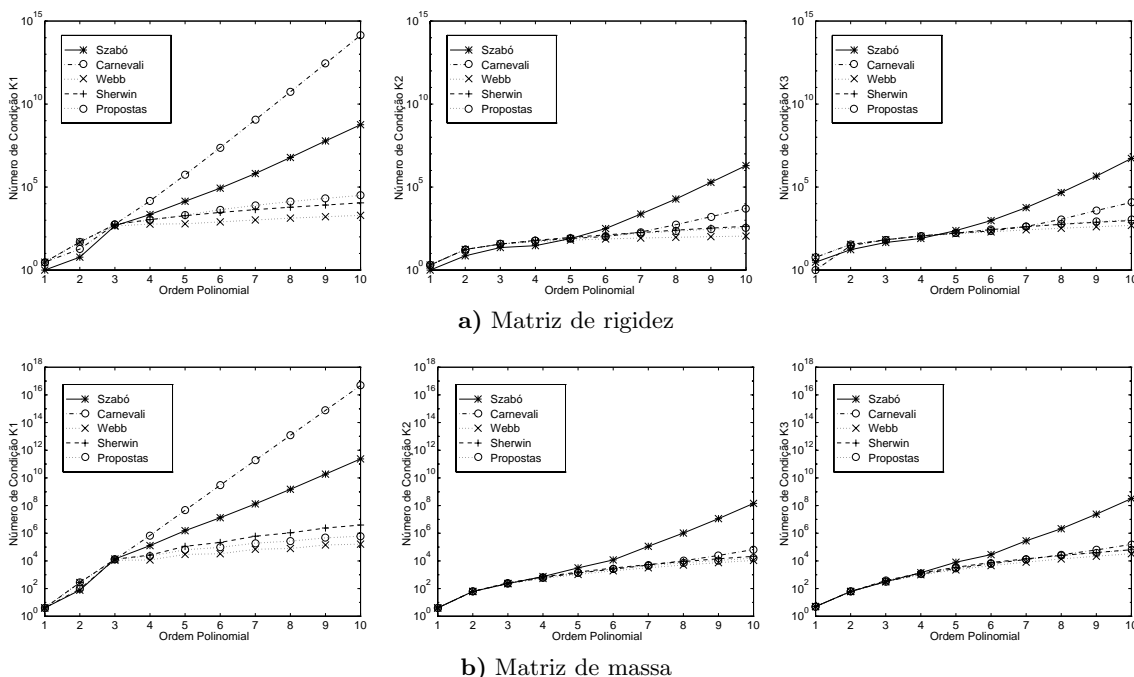


Figura 7. Número de condição das matrizes de rigidez e massa locais vs. ordem polinomial p , considerando-se as definições de κ_1 , κ_2 e κ_3 (triângulos)

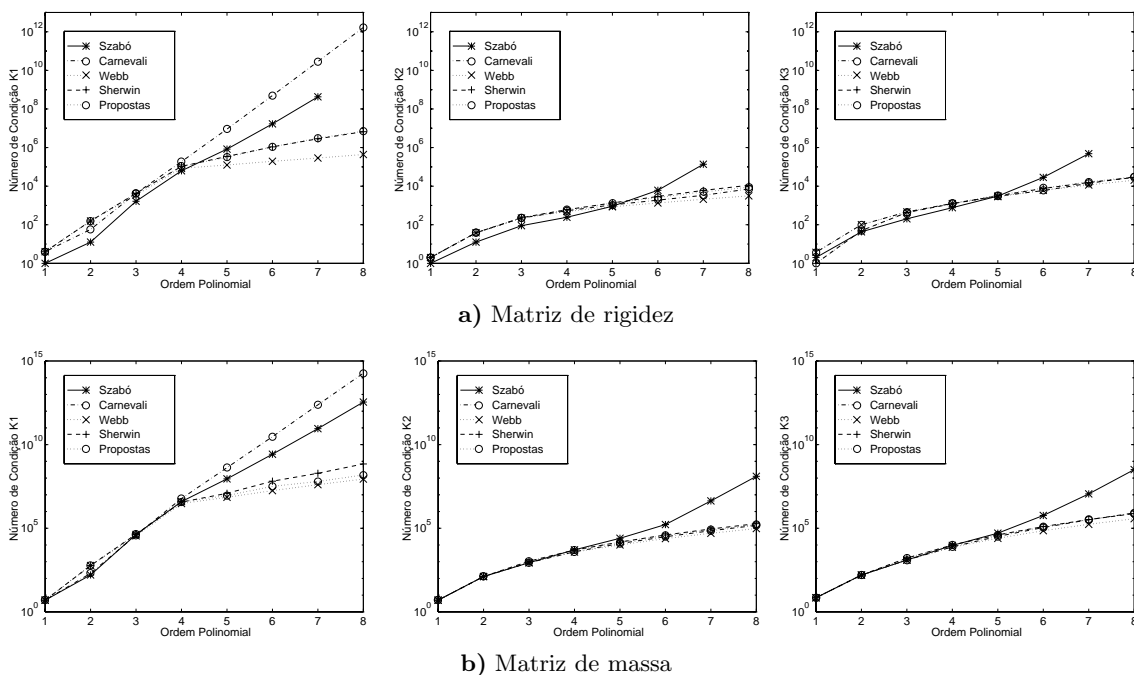


Figura 8. Número de condição das matrizes de rigidez e massa locais vs. ordem polinomial p , considerando-se as definições de κ_1 , κ_2 e κ_3 (tetraedros)

Esparsidade das matrizes de rigidez e massa locais

A seguir são apresentados resultados sobre o grau de esparsidade das matrizes de rigidez e massa locais para os diferentes tipos de elementos triangulares e tetraédricos considerados previamente. Observa-se que as integrais nas matrizes de rigidez e massa locais foram obtidas de forma exata a partir do programa de manipulação simbólica MATHEMATICA 3.0. A não utilização de procedimentos numéricos de integração permite uma avaliação precisa da ortogonalidade entre as funções hierárquicas analisadas e conseqüentemente da esparsidade das matrizes locais. Assim como na análise do condicionamento, as matrizes de rigidez locais também são obtidas a partir do operador de Laplace sobre o triângulo ou tetraedro padrões. O grau de esparsidade é computado como o inverso da densidade do elemento,⁴ i.e., a fração de elementos nulos presente nas matrizes de rigidez e massa locais.

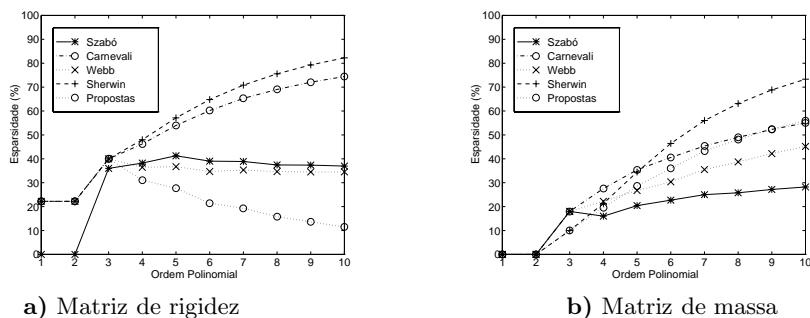


Figura 9. Porcentagem de elementos nulos das matrizes de rigidez e massa locais vs. ordem polinomial p (triângulos)

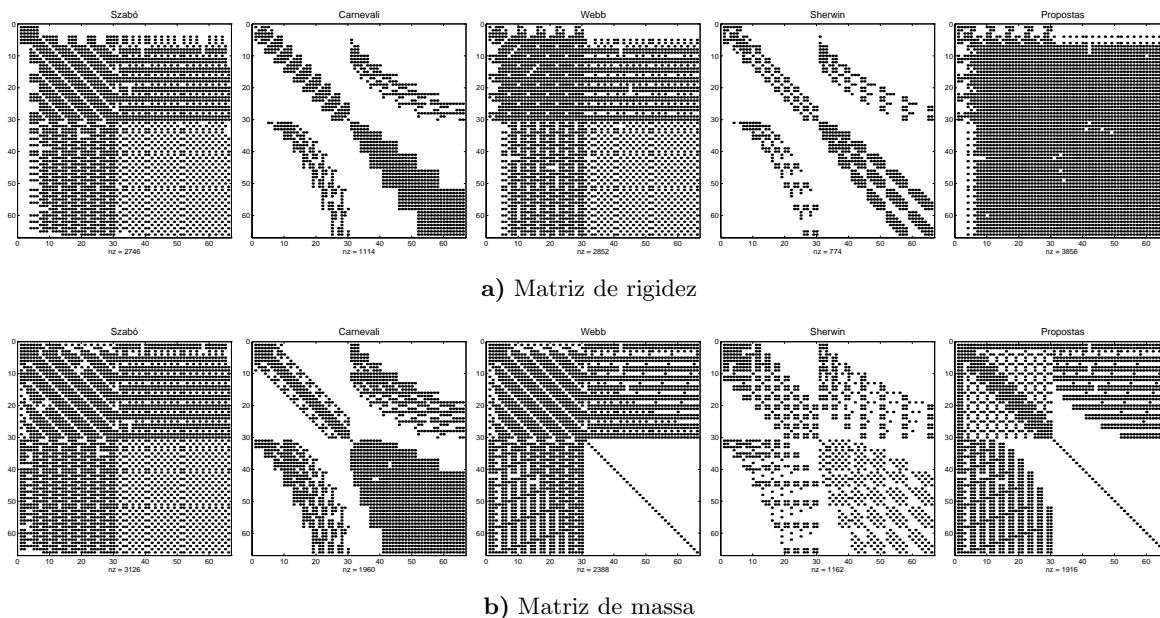


Figura 10. Padrão de esparsidade das matrizes de rigidez e massa locais associadas aos cinco tipos de funções hierárquicas estudados (triângulos)

Triângulos

Na Figura 9, a porcentagem de elementos nulos das matrizes de rigidez e massa locais é mostrada em função da ordem polinomial p das funções hierárquicas analisadas ($p = 1, \dots, 10$).

Observa-se que os maiores níveis de esparsidade com o aumento da ordem polinomial p acontecem para o conjunto de funções de forma proposto por Sherwin & Karniadakis,¹⁰ tanto para as matrizes de rigidez quanto para as de massa. Esse fato demonstra que os polinômios de Jacobi, tal como empregados nessa formulação, conferem uma acentuada ortogonalidade a essas funções de forma. Da mesma maneira, verifica-se que a propriedade de ortogonalidade entre essas funções é preservada entre as suas derivadas.

A Figura 10 mostra o padrão de esparsidade encontrado nas matrizes de rigidez e massa locais associadas aos cinco tipos de funções hierárquicas estudadas.

Tetraedros

Na Figura 11, a porcentagem de elementos nulos das matrizes de rigidez e massa locais é mostrada em função da ordem polinomial p das funções hierárquicas analisadas ($p = 1, \dots, 8$).

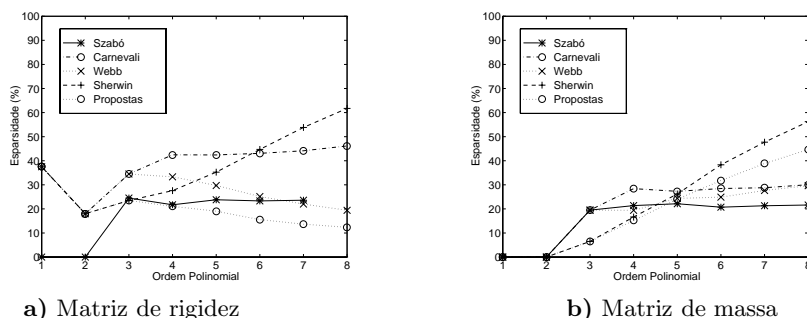


Figura 11. Porcentagem de elementos nulos das matrizes de rigidez e massa locais vs. ordem polinomial p (tetraedros)

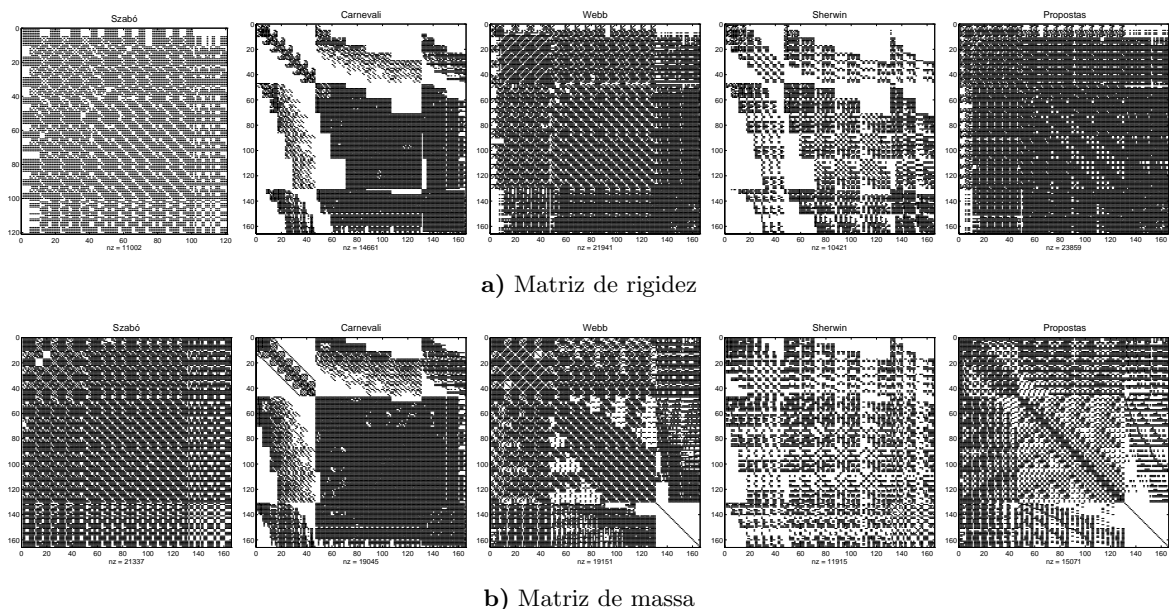


Figura 12. Padrão de esparsidade das matrizes de rigidez e massa locais associadas aos cinco tipos de funções hierárquicas estudados (tetraedros)

Observa-se novamente em ambos os casos (rigidez e massa) que os maiores níveis de esparsidade com o aumento da ordem polinomial p ocorrem para o conjunto de funções proposto por Sherwin & Karniadakis¹⁰.

A Figura 12 mostra o padrão de esparsidade encontrado nas matrizes de rigidez e massa locais associadas aos cinco tipos de funções hierárquicas estudadas.

Esparsidade e condicionamento das matrizes de rigidez locais para o caso de elementos distorcidos

Apresenta-se a seguir uma análise sobre o efeito da distorção dos elementos estudados nos níveis de esparsidade e condicionamento das matrizes de rigidez locais. A análise se resume às distorções do tipo linear uma vez que na maior parte das situações os elementos da malha são descritos por funções de mapeamento lineares⁴. A mesma análise não se repete para as matrizes de massa já que as distorções lineares não alteram suas características de esparsidade e condicionamento (funções de mapeamento lineares produzem jacobianos de transformação constantes de modo que as matrizes de massa locais, para os elementos padrões e distorcidos, diferem somente por um fator constante). Emprega-se a mesma metodologia de análise utilizada anteriormente, considerando-se agora dois casos de distorção: alongamento (dimensões de base e altura na proporção 1 : 16 para triângulos e dimensões de comprimento, largura e altura na proporção 1 : 1 : 16 para tetraedros) e achatamento (dimensões na proporção 16 : 1 para triângulos e 16 : 1 : 1 para tetraedros).

Triângulos

A Figura 13 apresenta os números de condição obtidos a partir das matrizes de rigidez locais em função da ordem polinomial p das funções hierárquicas analisadas ($p = 1, \dots, 10$). Consideram-se as três metodologias de cálculo adotadas e em cada uma delas o primeiro e o segundo casos de distorção (alongamento e achatamento).

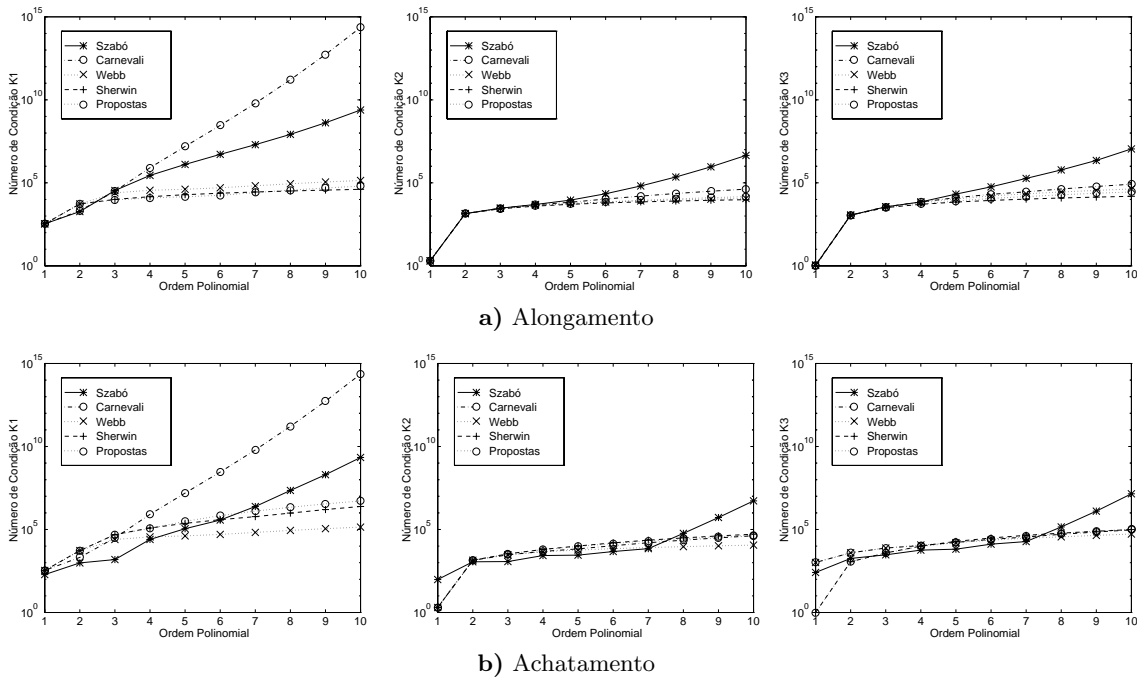


Figura 13. Número de condição das matrizes de rigidez locais vs. ordem polinomial p considerando-se as definições de κ_1 , κ_2 e κ_3 , e ambos os casos de distorção: (a) alongamento e (b) achatamento (triângulos)

Observa-se, a partir dos dois últimos conjuntos de gráficos, uma elevação dos números de condição das matrizes de rigidez locais em relação ao comportamento demonstrado na

Figura 7. Nota-se ainda que as menores sensibilidades à distorção linear, para o caso de alongamento, foram apresentadas pelas funções sugeridas por Sherwin & Karniadakis¹⁰ e aquelas propostas neste trabalho. Para o caso de achatamento, as menores sensibilidades à distorção foram demonstradas pelas funções sugeridas por Webb & Abouchakra¹³.

A Figura 14 apresenta a porcentagem de elementos nulos das matrizes de rigidez locais em função da ordem polinomial p das funções hierárquicas analisadas ($p = 1, \dots, 10$) quando se consideram os dois casos de distorção.

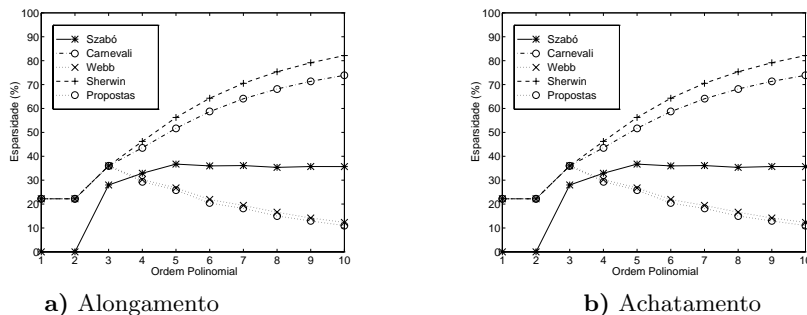


Figura 14. Porcentagem de elementos nulos das matrizes de rigidez locais vs. ordem polinomial p : (a) triângulos padrões alongados; (b) triângulos padrões achatados

Comparativamente à Figura 9, é possível notar que apenas o elemento sugerido por Sherwin & Karniadakis¹⁰ não apresentou queda nos níveis de esparsidade das matrizes de rigidez locais sob o efeito das distorções lineares (alongamento e achatamento).

Tetraedros

A Figura 15 apresenta os números de condição obtidos a partir das matrizes de rigidez locais em função da ordem polinomial p das funções hierárquicas analisadas ($p = 1, \dots, 8$).

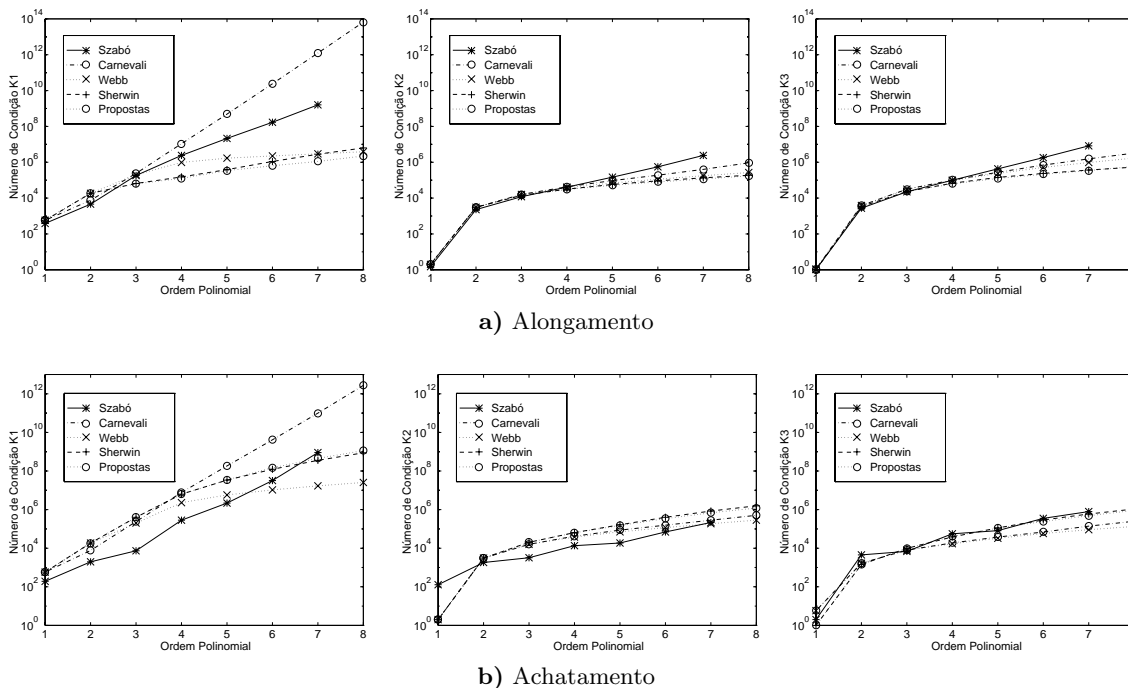


Figura 15. Número de condição das matrizes de rigidez locais vs. ordem polinomial p considerando-se as definições de κ_1 , κ_2 e κ_3 , e ambos os casos de distorção: (a) alongamento e (b) achatamento (tetraedros)

Consideram-se as três metodologias de cálculo adotadas e em cada uma delas o primeiro e o segundo casos de distorção (alongamento e achatamento).

Assim como no caso dos elementos triangulares, observa-se uma elevação dos números de condição das matrizes de rigidez locais em relação ao comportamento demonstrado na Figura 8. Da mesma maneira, nota-se que os comportamentos demonstrados pela distorção dos elementos tetraédricos é análogo àquele exibido pelos elementos triangulares.

A Figura 16 apresenta a porcentagem de elementos nulos das matrizes de rigidez locais em função da ordem polinomial p das funções hierárquicas analisadas ($p = 1, \dots, 8$) quando se consideram os dois casos de distorção.

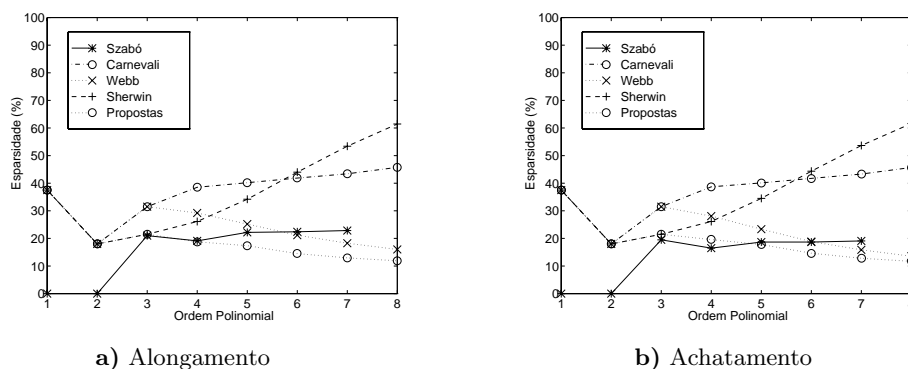


Figura 16. Porcentagem de elementos nulos das matrizes de rigidez locais vs. ordem polinomial p : (a) tetraedros padrões alongados; (b) tetraedros padrões achatados

Comparativamente à Figura 11, é possível notar que as distorções lineares (alongamento e achatamento) provocaram, em geral, uma queda nos níveis de esparsidade das matrizes de rigidez locais, tendo sido o elemento proposto por Sherwin & Karniadakis¹⁰ o menos afetado.

CONCLUSÕES

Dentro do conjunto de análises conduzido neste trabalho, pode-se dizer que, relativamente ao condicionamento, as funções hierárquicas associadas a triângulos e tetraedros sugeridas por Webb e Abouchakra^{1,13} demonstraram, na maioria dos casos, os melhores resultados. Essas funções apresentaram em geral, os menores números de condição com o aumento da ordem polinomial p . Ainda dentro desse tipo de análise, observou-se que as funções hierárquicas propostas por Sherwin & Karniadakis¹⁰ e aquelas sugeridas neste trabalho também alcançaram resultados expressivos, com a vantagem sobre as funções de Webb e Abouchakra de não necessitarem de procedimentos especiais de integração numérica. No que diz respeito às análises sobre esparsidade, as funções propostas por Sherwin & Karniadakis¹⁰ foram nitidamente superiores em todos os casos.

Tendo em vista que os padrões de condicionamento e esparsidade das matrizes locais influenciam os das matrizes globais^{4,7,15} e que essas propriedades por sua vez são de extrema relevância para o emprego de métodos iterativos na solução de sistemas lineares, este trabalho teve como objetivo central selecionar o conjunto de funções de forma mais adequado para a utilização de métodos iterativos e multigrid algébricos quando aplicados às versões p e hp do MEF.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (<http://www.fapesp.br>).

REFERÊNCIAS

- 1 R. Abouchakra, “Hierarchical tetrahedral elements using orthogonal polynomials”, in *1966 Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering (CCEC'96)*, Vol. **18**, part 2, pp. 525–528, Calgary, (1996).
- 2 I. Babuška, M. Griebel e J. Pitkaranta, “The problem of selecting the shape functions for p -type finite elements”, *Int. J. Num. Engng.*, Vol. **28**, pp. 1891–1908, (1989).
- 3 I. Babuška, B.A. Szabó e I.N. Katz, “The p -version of the finite element method”, *SIAM J. Num. Anal.*, Vol. **18**, N° 3, pp. 515–545, (1981).
- 4 P. Carnevali, R.B. Morris, Y. Tsuji e G. Taylor, “New basis functions and computational procedures for p -version finite element analysis”, *Int. J. Num. Engng.*, Vol. **36**, pp. 3759–3779, (1993).
- 5 M. Dubiner, “Spectral methods on triangles and other domains”, *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol. **6**, p. 345, (1991).
- 6 D.A. Dunavant, “High degree efficient symmetrical gaussian quadrature rules for the triangle”, *Int. J. Num. Engng.*, Vol. **21**, pp. 1129–1148, (1985).
- 7 N.B. Edgar e K.S. Suranra, “On the conditioning number and the selection criteria for p -version approximation functions”, *Computers and Structures*, Vol. **60**, N° 4, pp. 512–530, (1996).
- 8 G. Karniadakis e S.J. Sherwin, “*Spectral/hp element methods for CDF*”, Oxford University Press, New York, (1999).
- 9 A.A. Novotný e E.A. Fancello, “Um refinamento h , p e hp adaptativo na análise de flexão de placas semi-espessas”, *Métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería*, Vol. **14**, N° 1, pp. 25–48, (1998).
- 10 S.J. Sherwin e G. Karniadakis, “A new triangular and tetrahedral basis for high-order (hp) finite element methods”, *Int. J. Num. Engng.*, Vol. **38**, pp. 3775–3802, (1995).
- 11 B.A. Szabó e I. Babuška, “*Finite element analysis*”, Wiley Interscience, New York, (1991).
- 12 B.A. Szabó e A.G. Peano, “*Hierarchical finite elements*”, in “*Finite element handbook*”, H. Kardestuncer e D.H. Norrie (Eds.), pp. 2227–2233, McGraw-Hill, New York, (1987).
- 13 J.P. Webb e R. Abouchakra, “Hierarchical triangular elements using orthogonal polynomials” *Int. J. Num. Engng.*, Vol. **38**, pp. 245–257, (1995).
- 14 O.C. Zienkiewicz e R.L. Taylor, “*The finite element method*, Vol. **1**, McGraw-Hill, London, 4th ed., (1989).
- 15 G. Zumbusch, “Simultaneous $h - p$ adaption in multilevel finite elements”, PhD. thesis, Freien Universitat Berlin, Alemanha, (1995).

APÊNDICE

A seguir apresenta-se um programa computacional elaborado com o auxílio do software MATHEMATICA 3.0 para a geração das funções e respectivas derivadas associadas ao elemento tetraédrico de Sherwin & Karniadakis¹⁰. Uma versão desse programa para as funções de Webb & Abouchakra¹³ associadas a elementos triangulares pode ser encontrada em⁹.

```
(* Calculo das Funcoes de Forma Hierarquicas e Derivadas para *)
(* Elementos Tetraedricos de S. J. Sherwin & G. Karniadakis, 1995 *)
p = 8; (* Ordem da funcao de maior grau *)
bet = 1;
(* Calculo dos Polinomios de Jacobi para "alf" variavel e "bet" = 1 *)
Do[
PF1[0,alf] = PF2[0,alf] = PF3[0,alf] = PF4[0,alf] = PI1[0,alf] = PI2[0,alf] = 0;
PF1[1,alf] = PF2[1,alf] = PF3[1,alf] = PF4[1,alf] = PI1[1,alf] = PI2[1,alf] = 1;
Do[
i = j - 1; u = i - 1; g = alf + bet + i; s = g + u;
h = s + 1; t = s - 1; b = 2 i g t; c = h s t;
e = s (alf2 - bet2); f = 2 (alf + u)(bet + u) h;
PF1[j,alf] = ((c x1 + e)/b) PF1[j-1,alf] - (f/b) PF1[j-2,alf];
PF2[j,alf] = ((c x2 + e)/b) PF2[j-1,alf] - (f/b) PF2[j-2,alf];
PF3[j,alf] = ((c x3 + e)/b) PF3[j-1,alf] - (f/b) PF3[j-2,alf];
PF4[j,alf] = ((c x4 + e)/b) PF4[j-1,alf] - (f/b) PF4[j-2,alf];
PI1[j,alf] = ((c z1 + e)/b) PI1[j-1,alf] - (f/b) PI1[j-2,alf];
PI2[j,alf] = ((c z2 + e)/b) PI2[j-1,alf] - (f/b) PI2[j-2,alf]
,j,2,p
]
,alf,0,20
]
(* Calculo dos Polinomios de Jacobi para "alf" = 1 e "bet" = 1 *)
QA1[0] = QA2[0] = QA3[0] = QA4[0] = QA5[0] = QA6[0] = 0;
QA1[1] = QA2[1] = QA3[1] = QA4[1] = QA5[1] = QA6[1] = 1;
QF1[0] = QF2[0] = QF3[0] = QF4[0] = QI[0] = 0;
QF1[1] = QF2[1] = QF3[1] = QF4[1] = QI[1] = 1;
Do[
i = j - 1; u = i - 1; g = 1 + bet + i; s = g + u;
h = s + 1; t = s - 1; b = 2 i g t; c = h s t;
e = s (1 - bet2); f = 2 (1 + u)(bet + u) h;
QA1[j] = ((c y1 + e) / b) QA1[j-1] - (f/b) QA1[j-2];
QA2[j] = ((c y2 + e) / b) QA2[j-1] - (f/b) QA2[j-2];
QA3[j] = ((c y3 + e) / b) QA3[j-1] - (f/b) QA3[j-2];
QA4[j] = ((c y4 + e) / b) QA4[j-1] - (f/b) QA4[j-2];
QA5[j] = ((c y5 + e) / b) QA5[j-1] - (f/b) QA5[j-2];
QA6[j] = ((c y6 + e) / b) QA6[j-1] - (f/b) QA6[j-2];
QF1[j] = ((c w1 + e) / b) QF1[j-1] - (f/b) QF1[j-2];
QF2[j] = ((c w2 + e) / b) QF2[j-1] - (f/b) QF2[j-2];
QF3[j] = ((c w3 + e) / b) QF3[j-1] - (f/b) QF3[j-2];
QF4[j] = ((c w4 + e) / b) QF4[j-1] - (f/b) QF4[j-2];
```

```

QI[j] = ((c w5 + e) / b) QI[j-1] - (f/b) QI[j-2]
,j,2,p
]
(* Calculo das funcoes de forma hierarquicas nas coordenadas *)
(* de volume L1, L2, L3 *)
(* Funcoes de Vertice *)
VF[0] = L1; VF[1] = L2; VF[2] = L3; VF[3] = L4;
aa = -6;
bb = -4;
Do[ (* Funcoes de Aresta *)
aa = aa + 6;
y1 = (L2 - L1)/(1 - L3 - L4);
AF[aa] = L1 L2 QA1[ip-1] (1 - L3 - L4)ip - 2;
y2 = ((2 L3)/(1 - L4) - 1);
AF[aa+1] = L2 L3 QA2[ip-1] (1 - L4)ip - 2;
y3 = ((2 L3)/(1 - L4) - 1);
AF[aa+2] = L1 L3 QA3[ip-1] (1 - L4)ip - 2;
y4 = 2 L4 - 1;
AF[aa+3] = L1 L4 QA4[ip-1];
y5 = 2 L4 - 1;
AF[aa+4] = L2 L4 QA5[ip-1];
y6 = 2 L4 - 1;
AF[aa+5] = L3 L4 QA6[ip-1];
Do[ (* Funcoes de Face *)
bb = bb + 4;
ni = ip - 3 - i;
x1 = ((2 L3)/(1 - L4) - 1);
w1 = (L2 - L1)/(1 - L3 - L4);
FF[bb] = L1 L2 L3 QF1[ni+1] (1 - L3 - L4)ni PF1[i+1,2 ni+3] (1 - L4)i;
x2 = (2 L4 - 1);
w2 = (L2 - L1)/(1 - L3 - L4);
FF[bb+1] = L1 L2 L4 QF2[ni+1] (1 - L3 - L4)ni PF2[i+1,2 ni+3];
x3 = (2L4 - 1);
w3 = ((2 L3)/(1 - L4) - 1);
FF[bb+2] = L2 L3 L4 QF3[ni+1] (1 - L4)ni PF3[i+1,2 ni+3];
x4 = (2 L4 - 1);
w4 = ((2 L3)/(1 - L4) - 1);
FF[bb+3] = L1 L3 L4 QF4[ni+1] (1 - L4)ni PF4[i+1,2 ni+3]
,i,0,ip-3
]
,ip,2,p
]
cc = -1;
Do[
Do[
Do[ (* Funcoes Internas *)
cc = cc + 1;
ro = ip - 4 - j;

```

```

mi = j - k;
w5 = (L2 - L1)/(1 - L3 - L4);
z1 = ((2 L3)/(1 - L4) - 1);
z2 = (2L4 - 1);
IF[cc] = L1 L2 L3 L4 QI[ro+1] (1 - L3 - L4)r o PI1[mi+1,2 ro+3]
(1 - L4)mi PI2[k+1,2 ro+2 mi+5]
,k,0,j
]
,j,0,ip-4
]
,ip,4,p
]
(* Avaliacao das funcoes de forma hierarquicas nas coordenadas locais *)
(* csi, eta, zeta *)
L1 = 1-L2-L3-L4;
L2 = (1+csi)/2;
L3 = (1+eta)/2;
L4 = (1+zeta)/2;
(* Impressao das Funcoes de forma hierarquicas na tela*)
(* Funcoes de Vertice *)
Do[
Print["VF[" ,n,"] = ",CForm[Simplify[VF[n]]]]
,n,0,3
]
(* Funcoes de Aresta *)
Do[
Print["AF[" ,n,"] = ",CForm[Simplify[AF[n]]]]
,n,0,6(p-1)-1
]
(* Funcoes de Face *)
Do[
Print["FF[" ,n,"] = ",CForm[Simplify[FF[n]]]]
,n,0,2(p-1)(p-2)-1
]
(* Funcoes de Internas *)
Do[
Print["IF[" ,n,"] = ",CForm[Simplify[IF[n]]]]
,n,0,(p-1)(p-2)(p-3)/6-1
]
(* Calculo das derivadas das funcoes hierarquicas em relacao as *)
(* coordenadas locais csi, eta, zeta. Impressao na tela *)
n=-3; (* Funcoes de Vertice *)
Do[
n=n+3;
dcsiVF[i] = D[VF[i], csi];
detaVF[i] = D[VF[i], eta];
dzetaVF[i] = D[VF[i], zeta];
Print["dcsiVF[" ,n,"] = ",CForm[Simplify[dcsiVF[i]]]];

```

```

Print["detaVF[" ,n+1,"] = ",CForm[Simplify[detaVF[i]]];
Print["dzetaVF[" ,n+2,"] = ",CForm[Simplify[dzetaVF[i]]]]
,i,0,3
]
n=-3; (* Funcoes de Aresta *)
Do[
n=n+3;
dcsiAF[i] = D[AF[i], csi];
detaAF[i] = D[AF[i], eta];
dzetaAF[i] = D[AF[i], zeta];
Print["dcsiAF[" ,n,"] = ",CForm[Simplify[dcsiAF[i]]];
Print["detaAF[" ,n+1,"] = ",CForm[Simplify[detaAF[i]]];
Print["dzetaAF[" ,n+2,"] = ",CForm[Simplify[dzetaAF[i]]]]
,i,0,6(p-1)-1
]
n=-3; (* Funcoes de Face *)
Do[
n=n+3;
dcsiFF[i] = D[FF[i], csi];
detaFF[i] = D[FF[i], eta];
dzetaFF[i] = D[FF[i], zeta];
Print["dcsiFF[" ,n,"] = ",CForm[Simplify[dcsiFF[i]]];
Print["detaFF[" ,n+1,"] = ",CForm[Simplify[detaFF[i]]];
Print["dzetaFF[" ,n+2,"] = ",CForm[Simplify[dzetaFF[i]]]]
,i,0,2(p-1)(p-2)-1
]
n=-3; (* Funcoes Internas *)
Do[
n=n+3;
dcsiIF[i] = D[IF[i], csi];
detaIF[i] = D[IF[i], eta];
dzetaIF[i] = D[IF[i], zeta];
Print["dcsiIF[" ,n,"] = ",CForm[Simplify[dcsiIF[i]]];
Print["detaIF[" ,n+1,"] = ",CForm[Simplify[detaIF[i]]];
Print["dzetaIF[" ,n+2,"] = ",CForm[Simplify[dzetaIF[i]]]]
,i,0,(p-1)(p-2)(p-3)/6-1
]

```