

# ANÁLISE DA LEI DE BAZANT E DE CARPINTERI NA RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO DO CONCRETO<sup>1</sup>

Cláudia V. G. Coura<sup>2</sup>, Maria Teresa G. Barbosa<sup>3</sup> y Fathi A. I. Darwish<sup>4</sup>

**Resumen:** Este trabalho apresenta uma análise crítica da influência da dimensão do corpo-de-prova e do agregado no estudo do efeito escala e do efeito tamanho, pois diversos autores desconsideraram o seu comportamento. Esses efeitos foram estudados pela comparação comportamental de concretos com a mesma classe de resistência à compressão, usando-se corpos-de-prova cilíndricos de três diferentes dimensões, porém geometricamente similares, a saber: 100 mm × 200 mm, 150 mm × 300 mm e 200 mm × 400 mm, bem como diferentes dimensões de agregado graúdo, com diâmetros característicos de 9.5 mm, 25.0 mm e 32.0 mm. Para tanto, empregou-se o ensaio de compressão axial. Realizou-se uma análise das diferenças existentes entre o efeito tamanho e o efeito escala, já que ambos ocorrem, e foi proposta uma equação que avalia com mais clareza alguns fenômenos ocorridos na pesquisa.

**Palabras clave:** efeito escala, efeito tamanho, lei de Bazant, lei de Carpinteri, resistencia do concreto.

## ANALYSIS OF THE BAZANT AND CARPINTERI LAWS FOR COMPRESSIVE STRENGTH OF CONCRETE

**Abstract:** The paper presents a critical analysis of the influence of the dimensions of the testing coupons and aggregates on size and scale effects, for which several authors have studied this behavior. The effects were studied through experiments of concrete coupons with the same compressive strength and geometric relations, but with different dimensions, namely: 100 mm × 200 mm, 150 mm × 300 mm, and 200 mm × 400 mm. Aggregate size was also changed to test with characteristic diameters 9.5 mm, 25.0 mm and 32.0 mm. Axial compression testing was performed in all cases. The results are discussed to understand the differences between scale and size effects, because both take place in this case. An equation is proposed to evaluate the main phenomena in this problem.

**Keywords:** Bazant law, Carpinteri law, concrete strength, size effect, scale effect

### INTRODUÇÃO

Existem diversos estudos teóricos e experimentais sobre o efeito escala e o efeito tamanho, na literatura técnica, os quais geralmente proporcionam uma grande confusão. Evitando-se tal fato, serão adotadas as seguintes definições neste trabalho: o efeito escala será denominado como sendo a influência das dimensões da estrutura sobre as propriedades dos materiais, sendo insignificante em grandes estruturas, mas com grande influência nas pequenas, por exemplo, na determinação das propriedades mecânicas de um material com estrutura granular, como o concreto. Por outro lado, o efeito tamanho analisa a influência crescente do peso próprio sobre a capacidade relativa das estruturas para resistirem a cargas adicionais diretamente aplicadas.

O estudo do efeito tamanho e do efeito escala na fratura de materiais heterogêneos tem sido uma importante área de pesquisa ao longo dos tempos. Existem diversos parâmetros que devem ser considerados na determinação do efeito tamanho, como o que se refere ao tamanho do agregado que afeta o efeito escala aparente dos materiais frágeis, porque influencia no processo de microfissuração, provocando o avanço das fissuras.

No estudo do efeito escala, realizado por Bazant e seus colaboradores relacionou-se a resistência do concreto em função da razão entre as dimensões do corpo-de-prova e as dimensões do agregado. Entretanto, constata-se neste estudo,

<sup>1</sup> Artículo recibido el 5 de abril de 2007 y aceptado el 10 de junio de 2007.

<sup>2</sup> Professora, M.Sc., Universidade Federal de Juiz de Fora, UFJF, Juiz de Fora, MG, Brasil.

<sup>3</sup> Professora, D.Sc., Universidade Federal de Juiz de Fora, UFJF, Juiz de Fora, MG, Brasil. Email: teresa.barbosa@engenharia.ufjf.br

<sup>4</sup> Professor, Ph.D., Universidade Federal Fluminense, UFF, Niteroi, RJ, Brasil. Email: fadarwish@civil.uff.br

a necessidade de se empregá-lo com certa cautela nos materiais granulares, pois se concluiu que à medida que aumenta o diâmetro do corpo-de-prova, a resistência à compressão diminui o que não é verdadeiro, na prática.

Este trabalho apresenta, por meio do estudo da influência dos diversos parâmetros que afetam a resistência do concreto. Um modelo matemático para o efeito escala e uma comparação deste com a lei de Bazant e a lei de Carpinteri.

## REVISÃO DAS LEIS DE EFEITO TAMANHO

### **Lei de Bazant (Size Effect Law – SEL)**

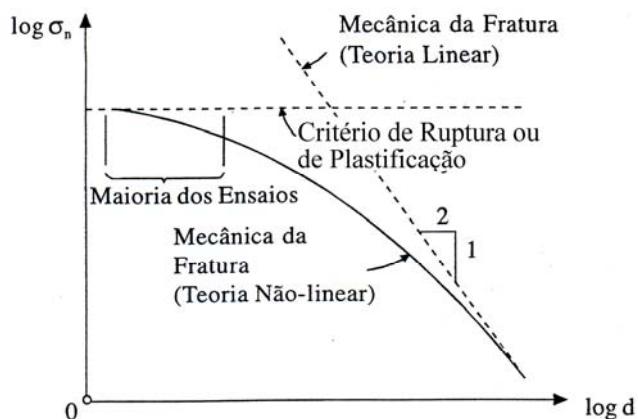
Considerando o equilíbrio da energia necessária para a propagação de uma fissura em uma estrutura de concreto, Bazant e seus colaboradores propuseram, numa análise de peças de concreto armado de diferentes dimensões e geometricamente semelhantes, a fórmula designada por SEL (Size Effect Law) (Barbosa et al., 1998; Barbosa, 2000), como segue:

$$\sigma_n = \frac{P}{b \cdot D} = \frac{B \cdot f'_t}{\sqrt{1 + \frac{D}{\lambda_o \cdot d_a}}} \quad (1)$$

onde:  $\sigma_n$  – tensão nominal de ruptura;  
 P – carga máxima;  
 b – espessura;  
 D – dimensão característica da amostra;  
 $f'_t$  - resistência à tração direta;  
 $d_a$  – dimensão máxima do agregado;  
 B e  $\lambda_o$  – constantes empíricas.

A curva que representa esta equação (1) é dada conforme ilustrado na Figura 1. Em seus estudos, Bazant empregou a teoria proposta por Griffith que se baseia na propagação de fissuras pré-existentes. Constatou que quando se aplica a SEL em corpos-de-prova não fissurados a hipótese torna-se falha. Diante das inúmeras críticas Bazant introduziu um termo  $\sigma_o$  que foi designado como sendo a resistência de um corpo-de-prova infinitamente grande:

$$\sigma_n = \frac{P}{bD} = \frac{B \cdot f_t}{\sqrt{1 + \frac{D}{\lambda_o d_a}}} + \sigma_0 \quad (2)$$



**Figura 1: Lei de efeito escala de Bazant.**

Na literatura técnica observa-se que existem duas teorias sobre o efeito escala: uma proposta por Bazant cuja validade é limitada e outra por Carpinteri, a qual se baseia na heterogeneidade do concreto e considera que para pequenas estruturas de concreto o tamanho do agregado é grande em relação a esta, logo a heterogeneidade do material é

grande e o efeito escala será acentuado. Entretanto, para grandes estruturas em relação ao tamanho do agregado, o material torna-se homogêneo e o efeito escala desaparece.

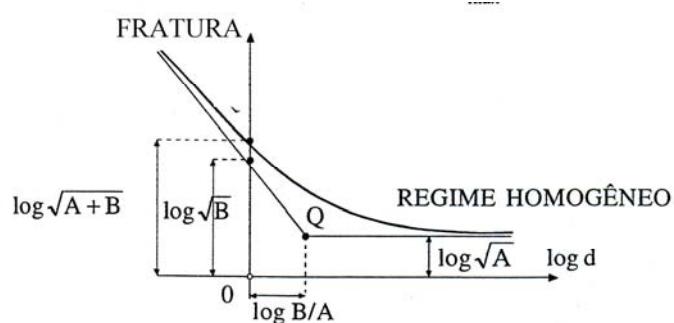
### Lei de Carpinteri (Multifractal Scaling Law – MFSL)

A fórmula que representa esta lei é a seguinte (Barbosa et al., 1999):

$$\sigma_n = \left( A + \frac{B}{d} \right)^{1/2} = f_t \left( 1 + \alpha_o \frac{d_{\max}}{d} \right)^{1/2} \quad (3)$$

onde:  $\sigma_n$  – tensão nominal de ruptura;  
 $d$  – dimensão característica da estrutura;  
 $A$  e  $B$  – constantes físicas;  
 $d_{\max}$  – dimensão máxima do agregado;  
 $\alpha_o$  – constante.

A curva que representa esta equação (3) está ilustrada na Figura 2. Se  $d$  tende para o infinito, a resistência nominal tende para um valor constante diferente de zero (resistência limite). Ao contrário, quando  $d$  tende para zero, a resistência nominal tende para o infinito. Isto significa que o efeito escala para algumas estruturas de concreto é acentuado, somente para algumas faixas de dimensões, que podem ser grandes ou pequenas, dependendo do tipo de situação. Na equação (3) a constante  $B$  depende das características das dimensões da estrutura. Para estruturas com  $d > B$  o efeito escala tende a desaparecer, por exemplo, a estrutura falha no início da fissuração – ruptura frágil. Entretanto, para  $d < B$ , o efeito escala é acentuado e a ruptura é dúctil.



**Figura 2: Diagrama da MSFL.**

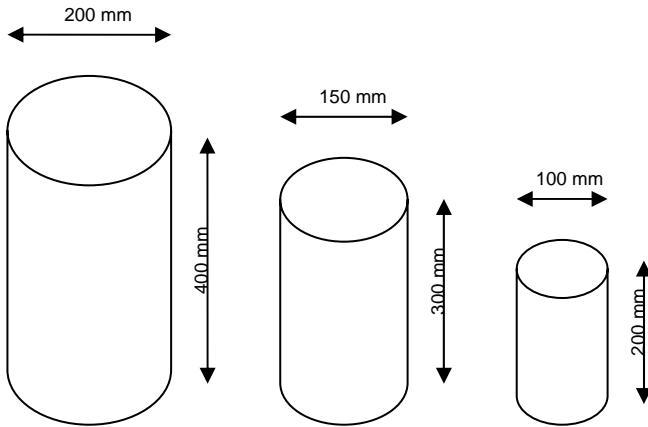
### METODOLOGIA

O efeito tamanho e efeito escala foram estudados pela comparação comportamental de concretos com a mesma classe de resistência à compressão usando corpos-de-prova cilíndricos de diferentes dimensões, porém, geometricamente similares, a saber, (diâmetro x altura): 100 mm x 200 mm, 150 mm x 300 mm e 200 mm x 400 mm (Figura 3), bem como diferentes graduações de agregado graúdo, com dimensão máxima característica de: 9.5 mm, 25.0 mm e 32 mm. Para tanto, empregou-se o ensaio de compressão axial.

Cumpre esclarecer que foram moldados quatro corpos-de-prova para cada dimensão de CP e cada um deles foi avaliado para as três graduações de agregado graúdo, perfazendo um total de 36 corpos-de-prova, sendo todos ensaiados aos 28 dias de idade.

### Materiais:

Foram proporcionados três traços de concreto fixando um teor de argamassa de 52% e relação água / cimento de 0.53. Objetivando uma resistência aos 28 dias de 22 MPa, como mostra a Tabela 1. Os materiais utilizados foram: cimento CP II-E-32 (Holcim do Brasil S.A.), areia natural de rio, brita de gnaisse e água potável.



**Figura 3: Dimensões dos corpos-de-prova de concreto.**

**Tabela 1: Concreto – proporção da mistura.**

Diâmetro do agregado (mm)	Proporção da mistura (kg)	fc (28dias) Estimado(MPa)
9.5	1: 1.94: 2.62: 0.53	22
25.0	1: 2.49: 3.11: 0.53	22
32.0	1: 2.60: 3.20: 0.53	22

#### Programa experimental:

Os resultados obtidos no experimento encontram-se na Tabela 2. Salienta-se que o coeficiente de variação (CV) é uma análise estatística preliminar, com o qual se avalia a variação dos resultados de um experimento. Esse procedimento é empregado quando se deseja comparar a variabilidade de várias amostras com medias diferentes ou quando as variáveis aleatórias têm dimensões diferentes. Em geral, o valor do  $CV \leq 25\%$  é considerado aceitável para as amostras ensaiadas.

**Tabela 2: Resistência à compressão axial (MPa).**

Corpo-de-prova (dimensão)	Diâmetro do agregado – $d_{máx1} = 9.5$ mm		Diâmetro do agregado – $d_{máx2} = 25.0$ mm		Diâmetro do agregado – $d_{máx3} = 32.0$ mm	
	$f_{c28}$ medio	CV (%)	$f_{c28}$ medio	CV (%)	$f_{c28}$ medio	CV (%)
ST <sub>1</sub> (100 mm × 200 mm)	29.47	5.10	27.25	2.01	26.17	4.38
ST <sub>2</sub> (150 mm × 300 mm)	26.20	2.20	25.35	1.06	24.13	2.38
ST <sub>3</sub> (200 mm × 400 mm)	24.75	1.68	24.14	1.67	22.83	1.67

Analizando-se os dados da Tabela 2 verifica-se que todas as amostras têm um coeficiente de variação inferior a 25%, donde se conclui que os resultados obtidos são aceitáveis.

As Figuras 4 e 5 mostram as curvas que representam os resultados obtidos experimentalmente. Numa análise preliminar das curvas obtidas nos gráficos de resistência média à compressão (MPa) x dimensão do corpo-de-prova (mm) (Figura 4) constata-se uma tendência ao modelo de Carpinteri (Carpinteri, 1994; Carpinteri et al., 1995) enquanto que o modelo de Bazant (1998), fica mais evidenciado para as curvas de resistência média à compressão (MPa) x graduação da brita (mm), conforme ilustrado na Figura 5.

Observa-se que o aumento do diâmetro da brita acarreta numa diminuição da curvatura da curva da resistência média à compressão com relação à dimensão do corpo-de-prova, conforme ilustrado na Figura 4. Em contrapartida, há um aumento da curvatura da curva quando se estuda a relação entre resistência à compressão e a dimensão do agregado (Figura 5).

Para se obter um estudo mais consistente, efetuou-se uma análise estatística do valor médio obtido para a resistência à compressão, verificando-se uma influência significativa da dimensão característica do corpo-de-prova (d) e da dimensão máxima do agregado ( $d_{máx}$ ) sobre a resistência à compressão axial.

Buscando-se obter uma expressão que represente os resultados para resistência à compressão em função das dimensões do corpo-de-prova e da dimensão do agregado, para os materiais brasileiros, empregou-se uma regressão obtendo-se a seguinte expressão (Coura, 2006):

$$f_c = 33,448 - 0,037d - 0,106d_{máx} \quad (\text{erro} = 0,544 \text{ MPa}) \quad (4)$$

onde:  $f_c$  – resistência à compressão (MPa);  
 $d$  – diâmetro do corpo-de-prova (mm);  
 $d_{máx}$  – dimensão característica do agregado (mm).

Salienta-se que a aplicabilidade da expressão (4) é limitada para corpos-de-prova estudados, ou seja, de dimensão entre 100 mm × 200 mm a 200 mm × 400 mm.

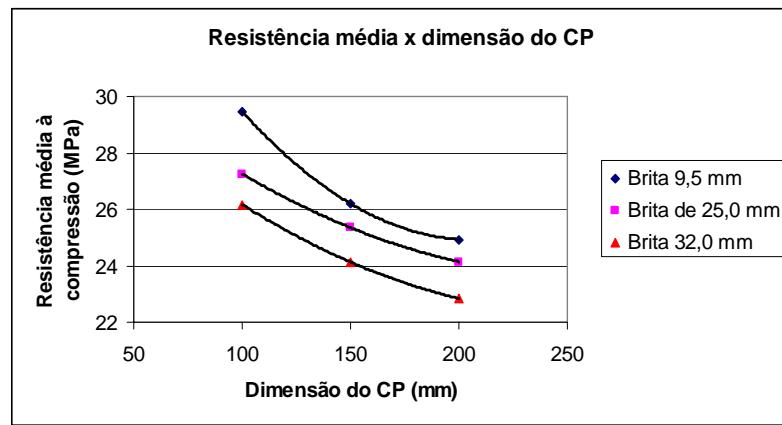


Figura 4: Resistência media à compressão (MPa) × diâmetro do CP (mm).

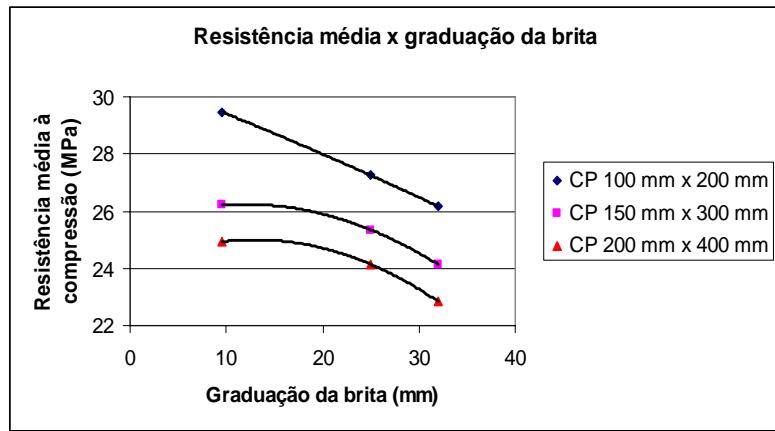


Figura 5: Resistência media à compressão (MPa) × graduação da brita (mm).

As Figuras 6, 7 e 8 ilustram os resultados obtidos por meio da expressão (4). Onde se observa que, com o aumento da dimensão do agregado graúdo, há um decréscimo do termo independente, ou seja, termo constante da equação (32.441 a 30.056). Constatata-se, portanto, um deslocamento descendente da curva no gráfico.

Na tentativa de se efetuar uma análise mais consistente entre o modelo de Coura (2006), a lei de Bazant e a lei de Carpinteri, empregou-se a equação (5) proposta por Hilsdorf (1999) que estima de maneira mais precisa a resistência à tração indireta.

$$f_{ctm} = f_{ctmo} \ln \left( 1 + \frac{f_{cm}}{f_{cmo}} \right) \quad (5)$$

onde:  $f_{ctm}$  – resistência média à tração axial (MPa);  
 $f_{cm}$  – resistência média à compressão (MPa);  
 $f_{ctmo} = 2.12$  MPa;  
 $f_{cmo} = 10$  MPa.

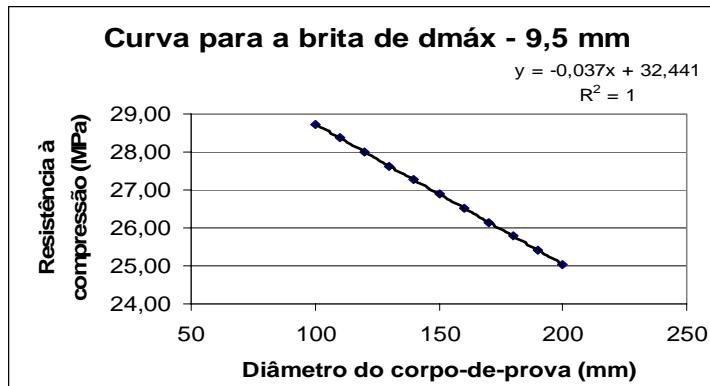


Figura 6: Curvas da expressão proposta para as dimensões do agregado de 9.5 mm.

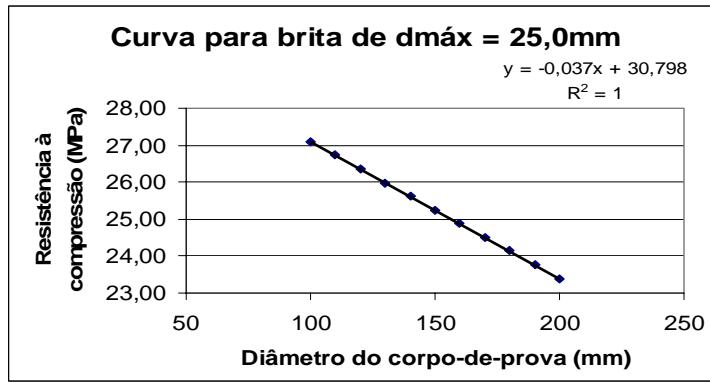


Figura 7: Curvas da expressão proposta para as dimensões do agregado de 25.0 mm.

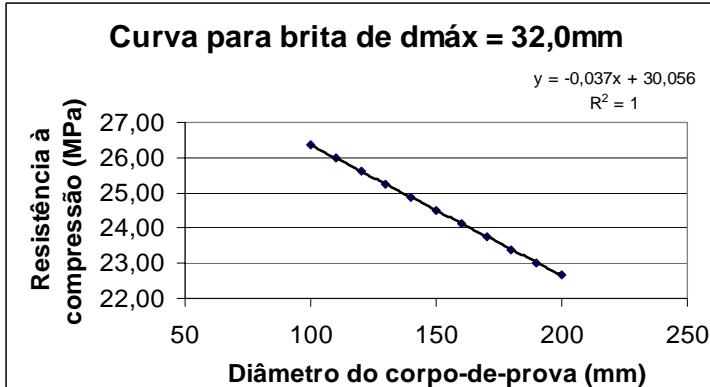


Figura 8: Curvas da expressão proposta para as dimensões do agregado de 32.0 mm.

E, finalmente, para verificar a relação entre a lei de Bazant (expressão (1)), a lei de Carpinteri (expressão (3)) e o modelo de Coura (expressão (4)), foram usadas as constantes:  $B = 2.2$ ,  $\lambda_0 = 1$  e  $\alpha_0 = 0.5$ . Obtendo-se as Figuras 9, 10 e 11. Analisando essas figuras, constata-se que os resultados obtidos experimentalmente, neste estudo, se assemelham

melhor aos estudos realizados por Carpinteri do que os de Bazant, pois existe uma boa aproximação dos resultados experimentais.

O que foi exposto nos leva a crer, que a contradição das leis propostas é a aparente falha na concepção do conceito da zona de transição na interface agregado - pasta de cimento.

Barbosa (2000) observa que a microestrutura da pasta de cimento hidratada na vizinhança das partículas de agregado graúdo, difere da microestrutura do restante da pasta de cimento, pois a relação água / cimento na interface é maior, ocorrendo ainda a presença de cristais grandes de  $\text{Ca}(\text{OH})_2$  indicando que a porosidade na zona de interface é maior do que em qualquer outro ponto.

Constatou-se, portanto, que quanto maior o agregado, maior será a relação água/cimento local na zona de transição, e menor será a resistência do concreto à compressão.

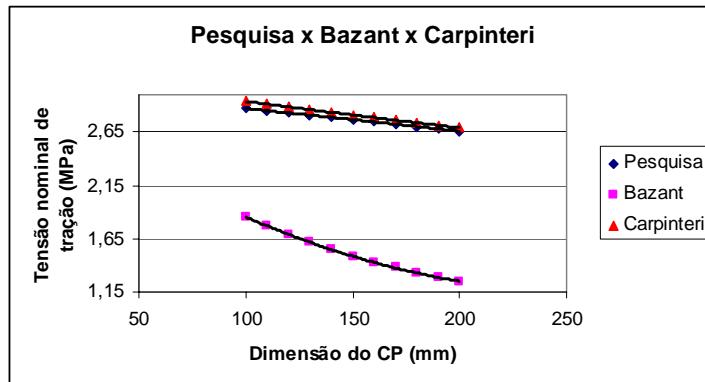


Figura 9: Lei de Bazant × Lei de Carpinteri x Modelo de Coura para dimensão do agregado = 9,5 mm.

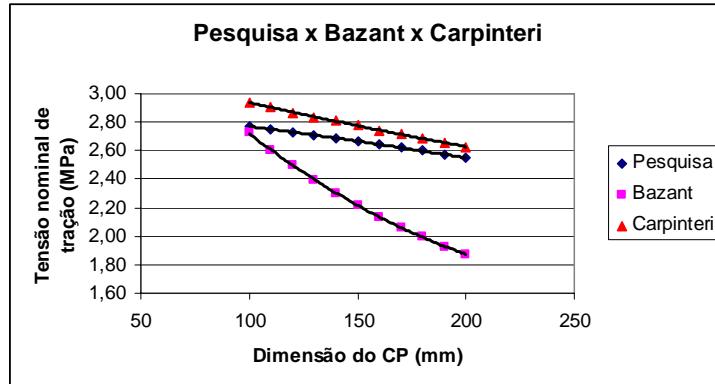


Figure 10: Lei de Bazant × Lei de Carpinteri × Modelo de Coura para dimensão do agregado = 25,0 mm.

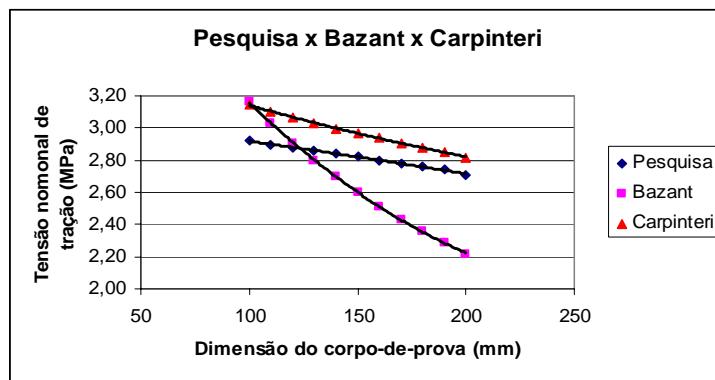


Figura 11: Lei de Bazant × Lei de Carpinteri × Modelo de Coura para dimensão do agregado = 32,0 mm.

## CONCLUSÕES

Os resultados dos testes experimentais para resistência à compressão axial do concreto confirmam que o efeito escala e o efeito tamanho estão presentes neste estudo, isto é, há um decréscimo da resistência à compressão axial com o incremento da dimensão do corpo-de-prova e do agregado graúdo.

A influência da dimensão do agregado graúdo e do corpo-de-prova na resistência à compressão axial mostrou-se significante, para todas as amostras ensaiadas.

No estudo do efeito escala e do efeito tamanho, deve ser considerada a zona de transição na interface pasta – agregado que resulta numa redução da resistência do concreto para agregados de maiores dimensões, visto que há um incremento na quantidade de água nessa região aumentando a porosidade local e, consequentemente, comprometendo a resistência à compressão do concreto.

Comparando-se as curvas obtidas pela expressão de Coura, a lei de Bazant e a lei de Carpinteri, constata-se que os resultados obtidos experimentalmente, no estudo efetuado, se assemelha melhor aos estudos realizados por Carpinteri, demonstrando a superioridade deste último.

Verifica-se, nos ensaios realizados, que para o mesmo diâmetro máximo do agregado, porém com diferentes dimensões de corpo-de-prova, o efeito escala tornar-se-á evidente, ou seja, os parâmetros que são ignorados no corpo-de-prova grande (ex. dimensão do agregado), por exercerem pequena influência, no corpo-de-prova pequeno passam a exercer uma grande influência.

Observou-se que o efeito tamanho é evidente quando se varia o diâmetro máximo característico do agregado para as mesmas dimensões de corpo-de-prova, pois existe uma influência crescente do peso próprio sobre a capacidade relativa da estrutura de resistir às cargas adicionais diretamente aplicadas, ou seja, os parâmetros são os mesmos, mas com valores diferentes.

Constatou-se, por meio da análise dos resultados experimentais, que também ocorreu efeito parede quando a dimensão máxima do agregado é grande em relação às dimensões do corpo-de-prova provavelmente sendo esta a causa do decréscimo da resistência à compressão, quando do aumento do diâmetro máximo do agregado graúdo, pois o adensamento do concreto e a uniformidade de distribuição das partículas grandes ficaram prejudicados.

As fórmulas sobre efeito escala e efeito tamanho para determinação das propriedades de resistência mecânica dos materiais não podem ser empregadas para avaliar esses efeitos em grandes estruturas de concreto armado, como pontes, em virtude deles desaparecerem em corpos-de-prova de grandes dimensões.

Quando se utilizam corpos-de-prova maiores, torna-se sem importância a afirmação exagerada que Bazant et al. (1991), Bazant (1998), Bazant e Kim (1999), e alguns pesquisadores transcrevem até os dias atuais, ou seja, “na medida em que se aumentam as dimensões das peças de concreto, sua resistência diminui”.

E, finalmente, salienta-se que a origem desta contradição está no fato que, contrariamente à fórmula de Bazant, o efeito escala ocorre mais evidente em corpos-de-prova muito pequenos e não nos comuns e, com mais razão, nas grandes estruturas.

## REFERÊNCIAS

- Barbosa, M. T. (2000). “Influência do agregado no efeito escala”, *Engenharia: Estudo e Pesquisa*, Vol. 3, pp. 85-87.
- Barbosa, M. T., Sánchez, E. e Martins, P. C. (1998). “Efeito escala em peças de concreto estrutural”, *Engenharia: Estudo e Pesquisa*, Vol. 1, pp. 27-41.
- Barbosa, M. T., Sánchez, E. e Martins, P. C. (1999). “Uma Análise Crítica do Efeito Escala em Estruturas de Concreto”. *Engenharia: Estudo e Pesquisa*, Vol. 2, pp. 23-38.
- Bazant, Z. P. (1998). “Size effect in blunt fracture: concrete, rock, metal”, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 110, pp. 518-533.
- Bazant, Z. P., Kim, J. (1999). “Size effect in shear failure of longitudinally reinforced beams”, *ACI Journal*, Vol. 81, Nro. 5, pp. 456-468.
- Bazant, Z. P., Kazemi, M.T., Hasegawa, T. e Mazars, J. (1991). “Size effect in Brazilian split-cylinder tests: measurements and fracture analysis”, *ACI Journal*, Vol. 88, Nro. 3, pp. 325-332.

- Carpinteri, A. (1994). "Fractural Nature of Material Microstructure and Size Effects on Apparent Mechanical Properties", *Mechanics of Materials*, Vol. 18, pp. 89-101.
- Carpinteri, A., Chiaia, B. e Ferro, G. (1995). "Size effect on nominal tensile strength of concrete structures: multifractality of material ligaments and dimensional transition from order to disorder", *Materials and Structures* (RILEM), Vol. 28, Nro. 6, pp. 311-317.
- Coura, C. V. (2006). "Estudo da Influência da Dimensão do Agregado e do Corpo-de-prova na Resistência à Compressão do Concreto", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal Fluminense, Niteroi, Brasil.
- Hilsdorf, M. (1999). *Materials*, Chapter 3 in: *Structural Concrete: Textbook on Behaviour, Design and Performance*, FIB Sprint-Druck, Stuttgart, Germany, Vol. 1, pp. 21-223.

