Vol. **17**, **2**, 185–197 (2001)

Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería

Evolução da fissuração num túnel de betão

Jorge Alfaiate e Eduardo Pires

Departamento de Engenharia Civil
Instituto Superior Técnico e Instituto de Engenharia de Estruturas, Território e Construção
Av. Rovisco Pais, 1049-001 Lisboa, Portugal
Tel.: 351-21-841 84 07, Fax: 351-21-841 84 02
e-mail: alfaiate@civil.ist.utl.pt, bpires@civil.ist.utl.pt

Sumário

Neste artigo efectua-se a análise dum túnel de betão em fundação elástica. A fractura é modelada utilizando uma abordagem de fenda discreta baseada no modelo de fenda fictícia de Hillerborg. Os resultados numéricos são obtidos pelo método dos elementos finitos. As zonas fracturadas são representadas na malha por elementos de interface com espessura inicial nula. A malha de elementos finitos mantém-se fixa durante a análise, não se efectuando quaisquer remalhamentos. As fendas abrem ao longo dos elementos de interface em modo I de fractura, isto é, radialmente. O túnel é analisado: a) considerando a resistência à tracção do solo e b) desprezando a resistência à tracção do solo.

CRACK EVOLUTION IN A CONCRETE TUNNEL

Summary

In this paper a concrete tunnel in an elastic foundation is analysed. Fracture is modelled according to a discrete crack approach based on Hillerborg's concepts of discrete crack formation and fracture energy dissipation. Numerical results are obtained with the finite element method. The fracture zones or fictitious cracks are represented in the mesh by interface elements with initial zero thickness. The finite element mesh is kept fixed: no remeshing is performed during the analysis. Cracks open along the interface elements according to mode I fracture, i.e., radially. The tunnel is analyzed: a) taking into account the tensile strength of the soil and b) neglecting the tensile strength of the soil.

INTRODUÇÃO

Neste artigo utiliza-se uma abordagem de fenda discreta para estudar a evolução da fissuração num túnel de betão cujas geometria, propriedades e carregamento são semelhantes aos considerados em túneis de betão recentemente construídos. Na abordagem de fenda discreta o amolecimento do material, relacionado com o desenvolvimento da microfissuração no betão, não é descrito por uma relação tensão-deformação. É descrito por uma relação entre a tensão e o deslocamento relativo medido ao longo das superfícies de descontinuidade. O modelo de fenda fictícia, desenvolvido por Hillerborg *et al.*[8] em 1976, é representativo desta abordagem. Neste modelo admite-se que, no interior de certas regiões, as superfícies de descontinuidade evoluem transformando-se em fendas reais nas quais não existe transferência de tensões entre as suas faces. A energia de fractura G_F é definida como a quantidade de energia necessária para criar uma unidade de área de fenda e é considerada um parâmetro material.

 ISSN: 0213–1315 Recibido: Julio 2000

Contrariamente à abordagem de fenda distribuída, na qual se utilizam elementos finitos convencionais, na abordagem de fenda discreta as superfícies de descontinuidade são representadas, na malha de elementos finitos, por elementos de interface com espessura inicial nula. A malha de elementos finitos mantém-se fixa durante a análise não sendo necessários quaisquer remalhamentos. As fendas abrem ao longo dos elementos de interface em modo I de fractura.

O túnel, em betão simples, está submetido ao seu próprio peso e a pressões radiais exercidas pelo solo. Neste caso verifica-se que as fendas abrem radialmente. Este facto, no entanto, não impede que a formulação utilizada se aplique a situações nas quais os caminhos de fenda não são previamente conhecidos[1,2,3]. Numa situação de forte sobreconsolidação, onde não se espera que ocorram efeitos de dilatância, o solo pode ser modelado como uma fundação elástica[13]. Como em muitos casos os solos não apresentam resistência significativa à tracção, foram também executadas simulações em que se desprezou o desenvolvimento de tensões de tracção no solo.

Consideraram-se, nos testes efectuados, vários valores para a energia de fractura G_F.

Finalmente discutem-se os resultados obtidos e apresentam-se algumas conclusões.

MODELO MATERIAL

Apresentam-se, nesta secção, as relações constitutivas adoptadas para o betão. Distinguem-se duas regiões no interior do material: a) uma, correspondente ao meio contínuo, onde se empregam elementos finitos convencionais e b) as zonas de fractura, correspondentes à microfissuração do betão.

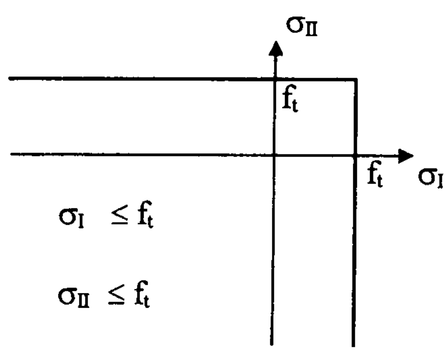

Figura 1. Curva limite de resistência adoptada para o betão

Adopta-se uma relação constitutiva elástica, linear e isotrópica para descrever o comportamento do material nas zonas não fracturadas. O amolecimento à tracção inicia-se quando as tensões atingem uma curva limite de resistência correspondente ao critério de Rankine: a resistência do material é limitada pela tensão uniaxial de tracção f_t (Figura 1).

Nas zonas fracturadas permite-se que as fendas se desenvolvam de acordo com o modelo de fenda fictícia de Hillerborg. Em cada ponto das fendas fictícias, o amolecimento é descrito por uma curva tensão normal-deslocamento relativo normal $(\sigma - w)$ a qual, juntamente com a energia de fractura, é considerada uma característica do material. Adopta-se aqui a relação bilinear entre a tensão normal à fenda fictícia e a abertura relativa da fenda introduzida por Petersson[15]. Os ramos de descarga e de recarga são obtidos unindo pontos na curva envolvente BCD com a origem dos eixos $(\sigma - w)$. A energia de fractura G_F é dada pela área debaixo da curva $(\sigma - w)$ (Figura 2). O primeiro ramo da relação $(\sigma - w)$ é aproximado por uma função de penalização a qual, na prática, impede a abertura das interfaces antes da tensão principal σ_I atingir f_t.

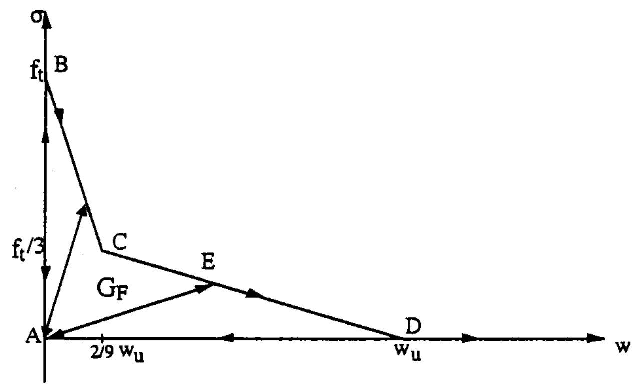

Figura 2. Relação constitutiva bilinear ($\sigma - w$) adoptada

Admite-se que a fractura no início e no desenvolvimento duma fenda fictícia ocorre em modo I: os caminhos das fendas são perpendiculares à direcção da tensão principal máxima σ_I. Devido a esta hipótese, as direcções principais de tensão não variam após o início duma fenda visto que não são permitidas tensões tangenciais nas zonas de fractura.

IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Descrevem-se, nesta secção, os aspectos principais da implementação numérica do modelo.

Utiliza-se, para parâmetro de controle, a abertura da primeira fenda. Neste exemplo, esta fenda está localizada sobre o eixo de simetria vertical na parte inferior do túnel. A fenda de controle inicia-se na superfície interior da parede. O deslocamento relativo normal medido no início desta fenda é a abertura da boca da fenda (CMOD-"crack mouth opening displacement"). Impõe-se o crescimento monótono desta abertura relativa (CMOD) através dum aumento no valor do parâmetro de carga invertendo-se, se necessário, o sinal da solução incremental caso se verifique que esta abertura diminui após resolução do sistema de equações. Este tipo de controle tem sido correntemente utilizado experimental e numericamente por vários autores[10,11] e permite o traçado não só das trajectórias de equilíbrio pós-pico bem como das trajectórias de equilíbrio de "snap-back".

Hillerborg *et al.*[8,9,10,14,15] desenvolveram um método não incremental para a determinação da resposta da estrutura se apenas uma fenda estiver prescrita. Contudo, é necessário recorrer a um procedimento incremental em problemas mais complicados como são aqueles em que estão envolvidas várias fendas, podendo algumas delas estar a abrir enquanto outras estarão porventura a fechar. Para além disso é necessário utilizar um algoritmo iterativo para impedir a violação da relação constitutiva. Tal algoritmo é baseado no método de Newton-Raphson sendo a matriz de rigidez tangente calculada em cada iteração. O facto de a relação bilinear ($\sigma - w$) ser usada como relação constitutiva na interface e as fendas abrirem radialmente tem duas consequências importantes no processo iterativo utilizado: a) o modelo é incrementalmente linear e b) alguns dos pontos indicados na Figura 2 (nomeadamente os pontos B, C e D) têm que ser atingidos por forma a obter uma dissipação de energia correcta; caso contrário, apesar de se poder obter ainda uma solução equilibrada, a dissipação de energia seria incorrectamente calculada. O algoritmo utilizado pode ser descrito pelos 6 passos seguintes:

1. Determinação da rigidez incremental da estrutura $\mathbf{K}_t$.
2. Resolução do sistema de equações $\mathbf{K}_t \Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{F}$, em que $\Delta \mathbf{u}$ é o vector dos deslocamentos incrementais e $\Delta \mathbf{F}$ é o vector das forças incrementais.

3. Verificação da satisfação da relação constitutiva incremental adoptada para cada um dos elementos de interface. Se não se registar nenhuma violação segue-se para o passo 4; caso contrário impõe-se a satisfação desta relação e regressa-se ao passo 1.
4. Definição do tamanho final do passo de forma a atingir, tão precisamente quanto possível, os pontos A, B, C, D e E da relação $\sigma - w$ adoptada para as fendas fictícias (Figura 2).
5. Determinação dos valores das variáveis totais.
6. Regresso ao passo 1.

A rigidez obtida para os elementos usados para discretizar o meio contínuo é constante e é guardada em memória durante a análise. Como enunciado no passo 3 do algoritmo, sempre que a relação incremental $(\sigma - w)$ for violada reconstrói-se a matriz de rigidez incremental e a resposta é verificada até esta relação ser satisfeita. Se, após um dado número de iterações, o processo não convergir, permite-se que a fenda de controle feche; executa-se, em seguida, um novo conjunto de iterações por forma a obter uma solução admissível. Pode ser necessário recorrer a um tal procedimento sempre que não for possível abrir ainda mais a fenda de controle. Se se atingir uma solução, a fenda de controle é obrigada a abrir no instante de tempo seguinte e executa-se uma vez mais todo o algoritmo.

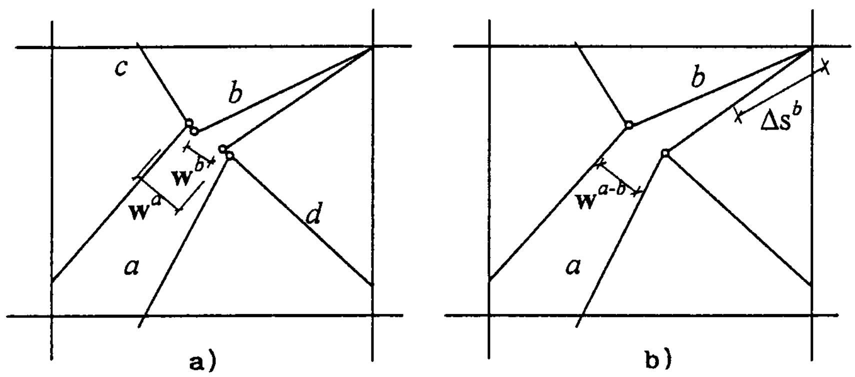

Figura 3. Ligação dos nós entre interfaces: a) incorrecto; b) correcto

Como já mencionado, as fendas fictícias são representadas, na malha de elementos finitos, por elementos de interface. A evolução de uma fenda fictícia no interior do material pode dar origem à ligação entre duas interfaces. Se num dado ponto convergirem vários elementos de interface é necessário considerar nesse ponto um número de nós igual ao número de interfaces de modo a que a fenda possa evoluir segundo qualquer um destes elementos. Por exemplo, na situação representada na Figura 3a, na qual se intersectam 4 interfaces a, b, c e d, é necessário considerar 4 nós para que a fenda a possa evoluir segundo qualquer uma das outras 3 fendas b, c ou d. Obtêm-se, em geral, deslocamentos relativos diferentes em cada par de nós: o deslocamento relativo $\mathbf{w}^a$ é medido a partir da interface a enquanto que o deslocamento relativo $\mathbf{w}^b$ é medido a partir da interface b. Como a fenda exibe um único deslocamento relativo em cada ponto, considera-se o vector $\mathbf{w}^{a-b}$, dado por

$$\mathbf{w}^{a-b} = \frac{\Delta s^a \mathbf{w}^a + \Delta s^b \mathbf{w}^b}{\Delta s^a + \Delta s^b} \tag{1}$$

como o deslocamento relativo comum nos nós de ligação entre as interfaces a e b. As quantidades Δs^a e Δs^b são, respectivamente, segmentos de linha segundo as interfaces a e b (Figura 3b). No caso de elementos de interface lineares estes segmentos de linha têm um comprimento igual a metade do comprimento das interfaces. Em consequência, a componente do vector das tensões internodal incremental $d\sigma_i^{a-b}$ nos pontos de ligação entre as interfaces a e b é dada por

$$d\sigma_i^{a-b} = K_{ij}(\mathbf{w})dw_j^{a-b} \tag{2}$$

em que K_{ij} é a rigidez tangente da interface obtida de acordo com a relação constitutiva $\sigma - w$ representada na Figura 2. Deste modo, a abertura da fenda fictícia nestes pontos de ligação ocorre quando σ^{a-b} atingir o valor da tensão limite do betão à tracção f_t.

RESULTADOS NUMÉRICOS

O teste numérico apresentado consiste num túnel em fundação elástica. O túnel está submetido ao seu peso próprio e a pressões radiais do solo. O peso próprio e as pressões radiais são feitos variar proporcionalmente a um parâmetro de carga. Admite-se um estado plano de deformação.

Dada a simetria, só se considera metade da secção do túnel (Figura 4). Admite-se que o solo se comporta como uma fundação elástica que é modelada por apoios elásticos actuando como molas visto que só se considera a rigidez radial. Consideram-se dois valores para a rigidez radial do solo: 5925,93 KN/m na região A e 9795,92 KN/m na região B (Figura 4). Os apoios elásticos estão ligados aos nós da fronteira exterior do túnel. Inicialmente permite-se que estas molas reajam para dentro e para fora da parede com rigidez constante, simulando a resistência à tracção e a resistência à compressão do solo, respectivamente. Contudo, dado que na maioria dos casos o solo não exibe resistência significativa à tracção, também se efectuam simulações desprezando a rigidez radial dos apoios quando submetidos à tracção.

Os parâmetros materiais adoptados para o túnel de betão são:

- módulo de elasticidade:	$E = 29$ GPa
- coeficiente de Poisson:	$\nu = 0,2$
- peso específico:	$\gamma_c = 25$ KN/m^3
- resistência uniaxial à tracção:	$f_t = 4$ MPa
- energia de fractura:	75 N/m$\leq G_F \leq$ 200 N/m

Neste teste as fendas fictícias evoluem segundo direcções radiais mas as localizações destas fendas não são previamente conhecidas. Por este facto efectuou-se primeiro uma análise elástica após a qual se identificaram três zonas como candidatas à formação de fendas devido à presença de tensões de tracção elevadas (Figura 4). Nestas zonas introduziram-se elementos de interface nas direcções radial e circunferencial. Dado que a espessura da parede é pequena quando comparada com o perímetro do túnel, torna-se necessário um certo grau de refinamento da malha nessas zonas para modelar as fendas fictícias. Na Figura 4 apresenta-se a malha de elementos finitos adoptada em que se utilizaram elementos isoparamétricos de 4 nós e elementos de interface lineares. O uso duma função de penalização na relação constitutiva adoptada para as interfaces (ver secção MODELO MATERIAL) implica que os pontos de integração usados nestes elementos tenham que estar localizados nos nós; caso contrário obter-se-iam resultados numéricos espúrios[12]. Deste modo os elementos de interface lineares foram integrados usando a regra de integração dos trapézios.

As forças nodais são aplicadas em todos os nós da superfície externa da parede.

Em todos os testes analisados adoptou-se o parâmetro de controle correspondente à abertura da primeira fenda (CMOD). Esta ocorre na zona 1, na intersecção do raio vertical com a superfície interna da parede, em baixo (Figura 5). Os resultados obtidos mostraram que não se verifica a existência de fissuração na zona 3, apesar das elevadas tensões de tracção inicialmente detectadas nesta zona. A ausência de fissuração nesta zona deve-se à redistribuição de tensões no túnel após o início da fendilhação na zona 1. Em consequência, as tensões de tracção na zona 3 diminuem e nunca atingem a resistência à tracção do betão. Por este motivo, não se tornou necessário refinar a malha nesta zona.

Efectuaram-se dois conjuntos de simulações: a) no primeiro admite-se que o solo exibe o mesmo valor de rigidez radial à tracção e à compressão; b) no segundo despreza-se a rigidez à tracção do solo. Nos dois conjuntos consideram-se vários valores da energia de fractura G_F.

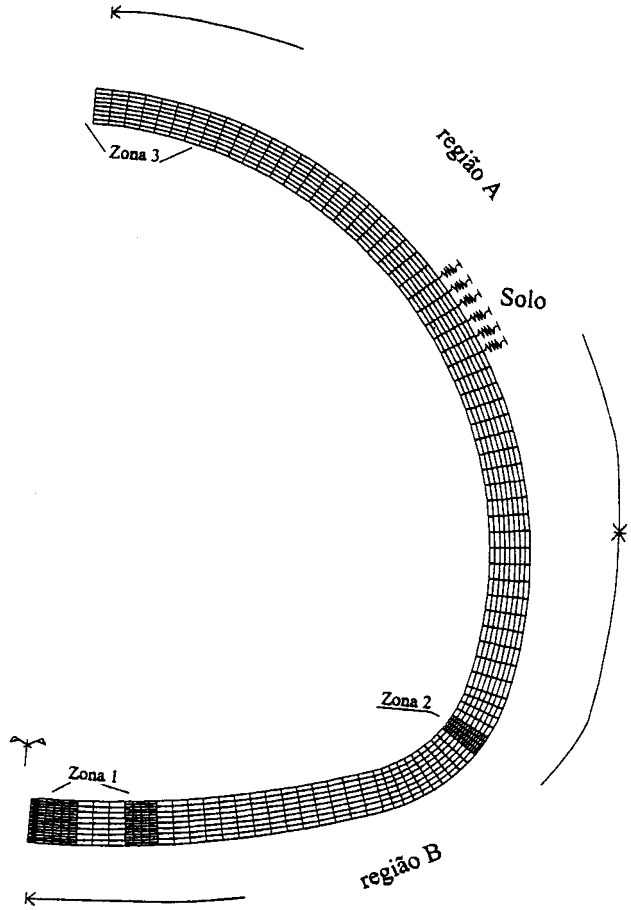

Figura 4. Metade da secção transversal do túnel. Malha adoptada e zonas candidatas à fissuração

Soluções numéricas tendo em consideração a resistência à tracção do solo

Após a primeira fenda se ter iniciado, na superfície interior do túnel, uma segunda fenda surge na zona 2, na superfície exterior da parede. Na Figura 5 apresenta-se a malha deformada obtida num estádio em que estas duas fendas avançaram significativamente. Na Figura 6 mostra-se a relação entre a força nodal vertical P, medida no ponto mais baixo na linha de simetria (ponto Q na Figura 5), e a abertura da fenda (CMOD). Esta força nodal P não é mais do que a resultante das pressões radiais actuantes no lado do elemento adjacente à linha de simetria. Na fenda vertical situada sobre o eixo de simetria o CMOD medido é metade do CMOD real. A primeira fenda permanece fechada até que a força nodal P atinge 22 kN aproximadamente. Esta é a carga elástica máxima obtida durante a análise. Para além deste ponto a abertura da fenda aumenta e a força vertical P diminui, até se atingir o ponto B na figura. Na Figura 7 apresenta-se a relação carga-deslocamento ($P - \delta$), em que δ é o deslocamento vertical medido no ponto Q. Depois da formação da primeira fenda obtém-se um "snap-back" após o qual a força aumenta uma vez mais até ao valor de 22 kN (ponto B).

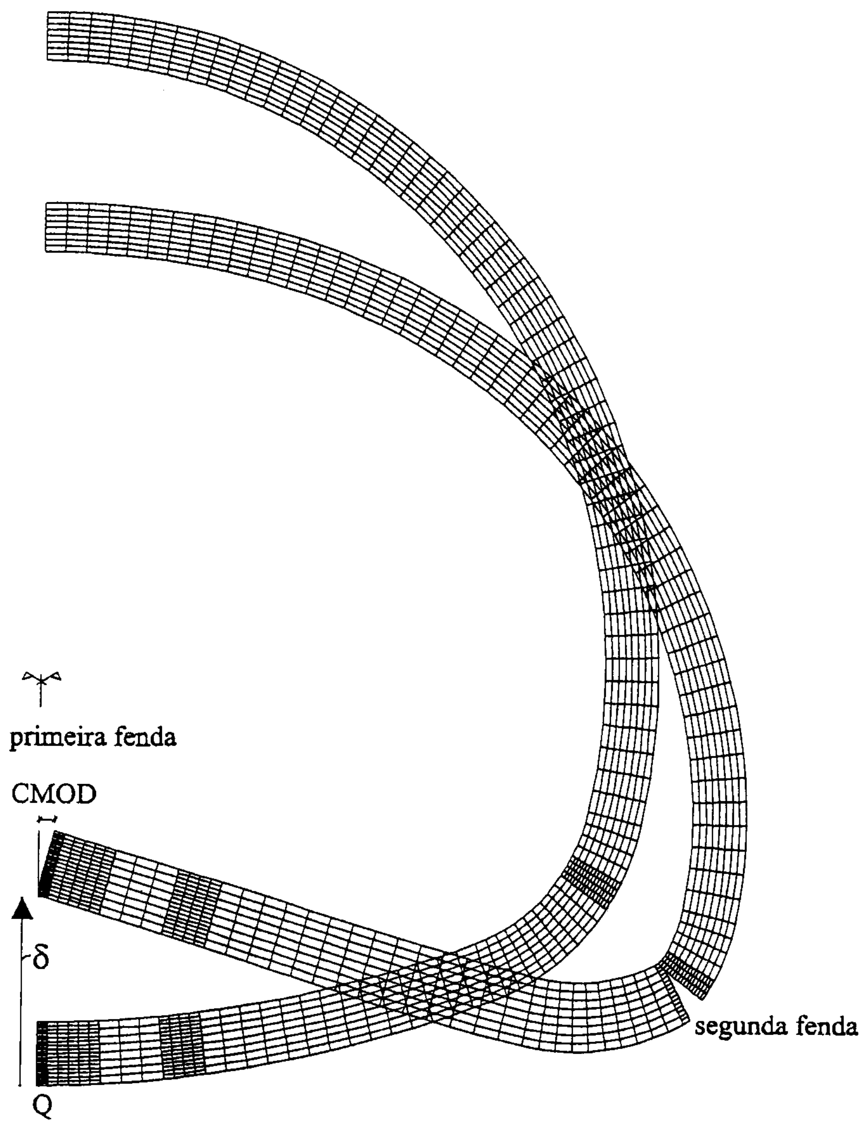

Figura 5. Malha deformada correspondente ao ponto D nas Figuras 6 e 7 (deslocamentos ampliados 150 vezes)

Embora se tente impor o aumento da abertura da primeira fenda em cada passo, a primeira fenda é obrigada a fechar assim que a segunda fenda se inicia, o que acontece precisamente no ponto B das Figuras 6 e 7. A força P diminui uma vez mais entre os pontos B e C, dando origem a "snap-backs" agora presentes em ambas as relações: P-CMOD (Figura 6) e $P - \delta$ (Figura 7). Para além do ponto C permite-se a reabertura da primeira fenda. As duas fendas evoluem até que a carga P atinge o valor máximo registado no teste, próximo de 40 kN (ponto D nas Figuras 6 e 7). Surge então uma terceira fenda na zona 1. A abertura desta terceira fenda obriga uma vez mais a fenda de controle a fechar e a carga a diminuir até se atingir o ponto E nas Figuras 6 e 7, onde se termina análise. Na Figura 8 apresenta-se a malha deformada obtida no fim do teste. Os resultados das Figuras 6-8 foram obtidos com um valor de G_F igual a 150 N/m.

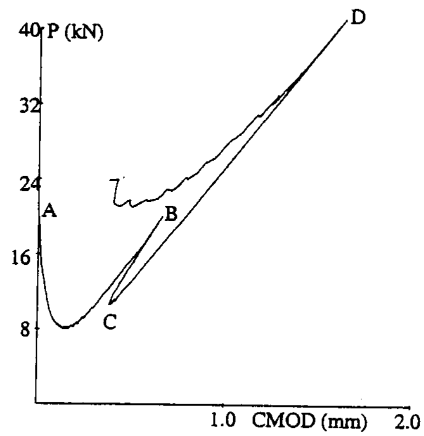

Figura 6. Relação força-abertura de fenda (P-CMOD) obtida do primeiro teste

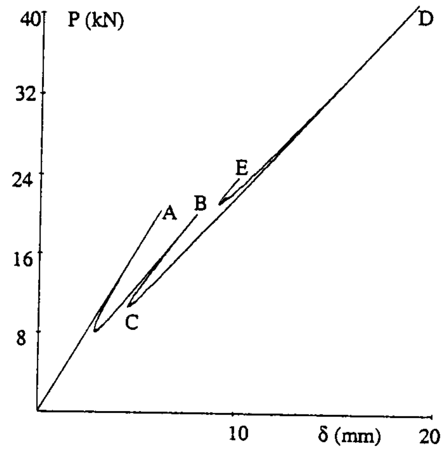

Figura 7. Relação carga-deslocamento ($P - \delta$) obtida do teste

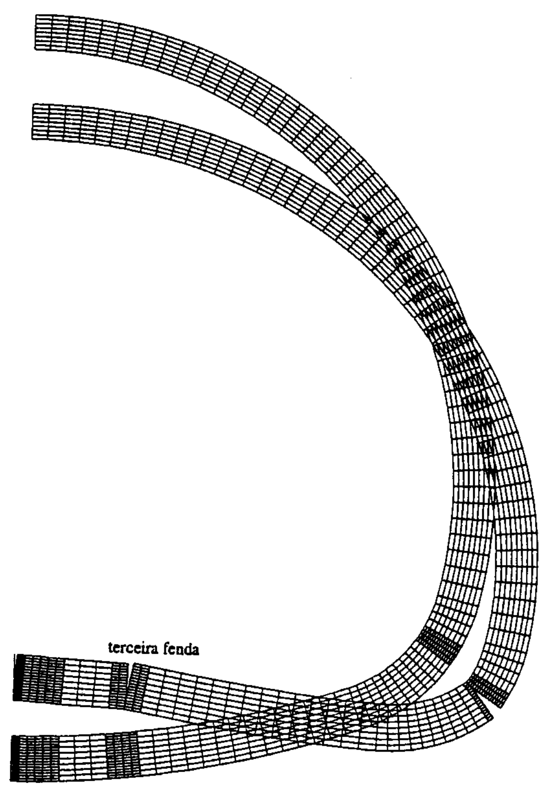

Figura 8. Malha deformada obtida no fim do teste (deslocamentos ampliados 150 vezes)

Conforme se referiu atrás, consideram-se vários valores da energia de fractura G_F. Na Figura 9 mostram-se três relações carga-abertura de fenda (P-CMOD), correspondentes a $G_F = 90$ N/m, $G_F = 150$ N/m e $G_F = 200$ N/m. Na Figura 10 apresentam-se as três correspondentes relações carga-deslocamento ($P - \delta$). Obtiveram-se as cargas máximas de $P_{\max} = 38$ kN para $G_F = 90$ N/m, $P_{\max} = 40$ kN para $G_F = 150$ N/m e $P_{\max} = 42$ kN para $G_F = 200$ N/m.

Testou-se igualmente um valor de $G_F = 100$ N/m situando-se os resultados correspondentes entre os obtidos para $G_F = 90$ N/m e $G_F = 150$ N/m, conforme se esperava. No entanto, para valores da energia de fractura inferiores a 90 N/m, o desenvolvimento da fissuração é diferente: embora a primeira fenda surja sempre sobre a linha de simetria, a segunda e terceira fendas abrem quase simultaneamente. A fenda anteriormente denominada *terceira fenda*, evolui em primeiro lugar seguida pela fenda localizada mais à direita (previamente denominada por *segunda fenda*). Em consequência, a primeira fenda permanece praticamente fechada durante a análise. Por este motivo esta fenda deixa de poder ser utilizada como fenda de controle e os resultados obtidos com valores de G_F inferiores a 90 N/m não podem ser comparados com os restantes.

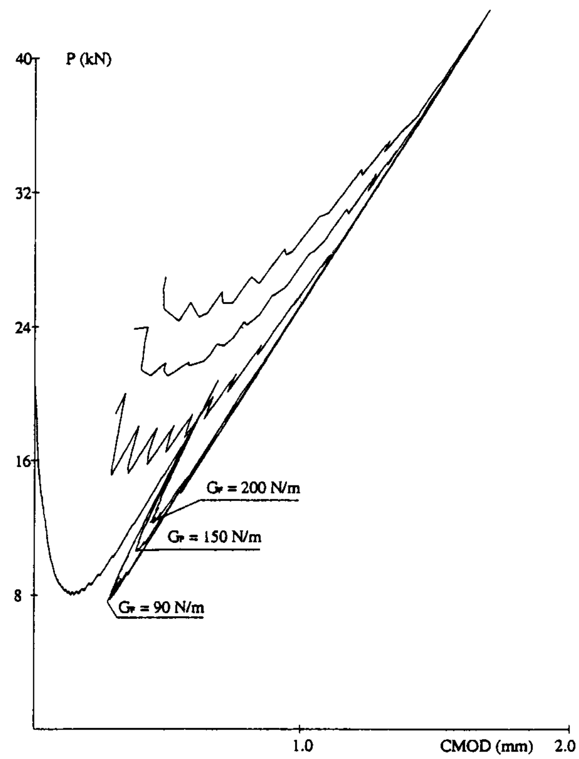

Figura 9. Relações P-CMOD obtidas para três valores diferentes de G_F

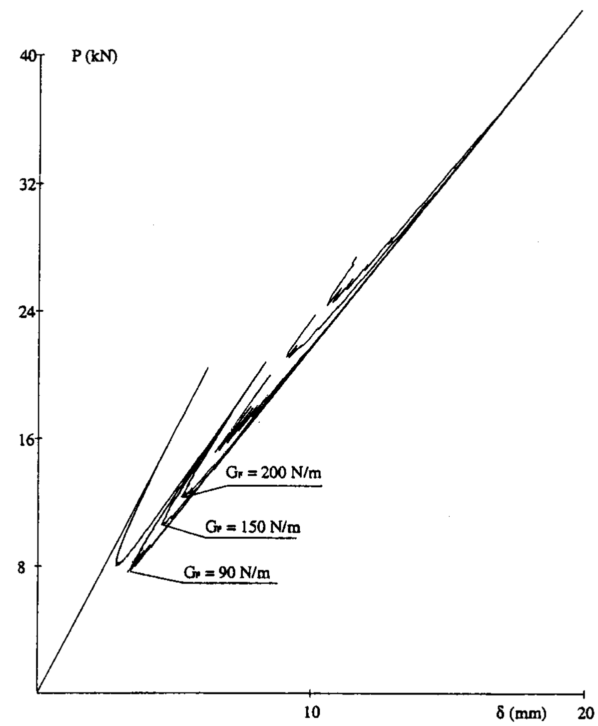

Figura 10. Relações $P - \delta$ obtidas para três valores diferentes de G_F

Soluções numéricas não tendo em consideração a resistência à tracção do solo

Efectuou-se uma outra análise em que quer a rigidez quer a resistência à tracção do solo foram desprezadas. Nas Figuras 11, 12 e 13 mostram-se os resultados, obtidos com a mesma malha, relativos à malha deformada no fim do teste, à relação força-abertura de fenda (P-CMOD) e à relação carga-deslocamento ($P - \delta$), respectivamente. A evolução da fissuração observada é semelhante à fissuração observada no primeiro teste para as duas fendas iniciais. No entanto, neste teste, não se obtém a terceira fenda. Nota-se que, em todas as fases da análise, a rigidez da estrutura obtida no segundo teste (Figuras 12 e 13) é significativamente inferior à rigidez obtida no primeiro teste (Figuras 6 e 7). Esta diferença é esperada dado que, no primeiro caso, o túnel está completamente livre do solo quando o deslocamento se dá para dentro. Este facto também implica o não aparecimento

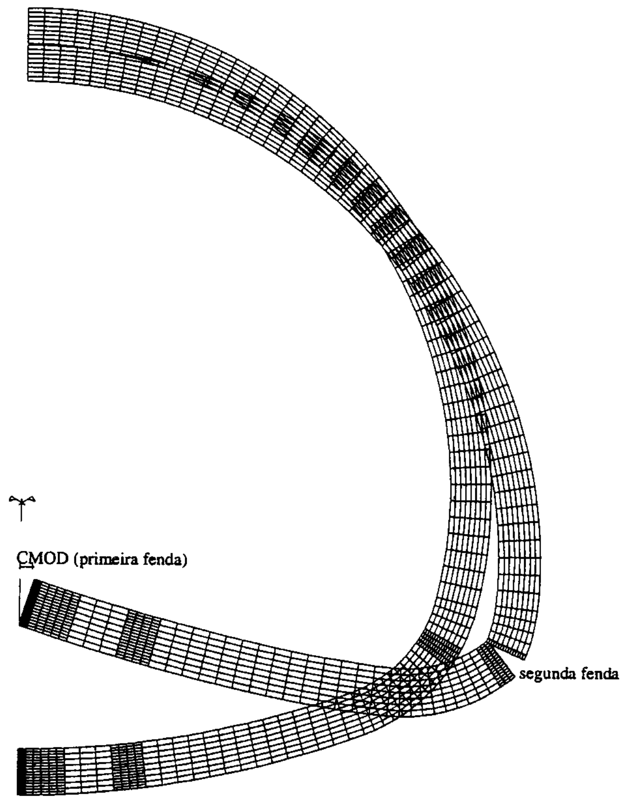

Figura 11. Malha deformada obtida no fim do teste (deslocamentos ampliados 150 vezes)

de uma terceira fenda: dado que o solo não apresenta resistência à tracção, não se obtêm tensões elevadas na face interior do túnel, onde surge uma terceira fenda no primeiro teste. É também por este facto que a carga elástica máxima obtida no segundo teste (19 kN) é menor que a correspondente carga obtida no primeiro teste (22 kN). Para além disso é interessante verificar que, contrariamente ao primeiro teste, a força obtida no ponto D do segundo teste (Figuras 12 e 13), não ultrapassa a carga elástica máxima. Pelo contrário, as forças registadas nos pontos B e D são progressivamente menores que a força registada no ponto A. Este resultado é uma consequência dos grandes deslocamentos observados para o interior do túnel, que dão origem a reacções consideráveis no solo no primeiro teste, mas não no segundo teste.

Os resultados obtidos com outros valores para G_F são qualitativamente semelhantes aos resultados apresentados acima. Os resultados obtidos com valores de $G_F = 75$ N/m, $G_F = 150$ N/m e $G_F = 200$ N/m estão representados nas Figuras 14 e 15. Na Figura 14 apresentam-se as relações carga-abertura de fenda (P-CMOD) e na Figura 15 apresentam-se as relações carga-deslocamento ($P - \delta$). Uma vez mais, os resultados correspondentes a $G_F = 100$ N/m situam-se entre os resultados obtidos com $G_F = 75$ N/m e $G_F = 100$ N/m, conforme esperado. Neste caso não se detectou um desenvolvimento diferente da fissuração no teste obtido com o menor valor de G_F testado, $G_F = 75$ N/m. Note-se que este segundo conjunto de simulações se aproxima muito mais da realidade no que diz respeito à não consideração da rigidez do solo à tracção. De facto, mesmo que se possam admitir, em casos particulares, alguma rigidez e resistência à tracção do solo, estes valores deverão ser muito menores que os valores adoptados para a rigidez e resistência à compressão do solo. Este não foi o caso considerado na secção anterior, onde se adoptaram valores iguais para a rigidez à compressão e à tracção.

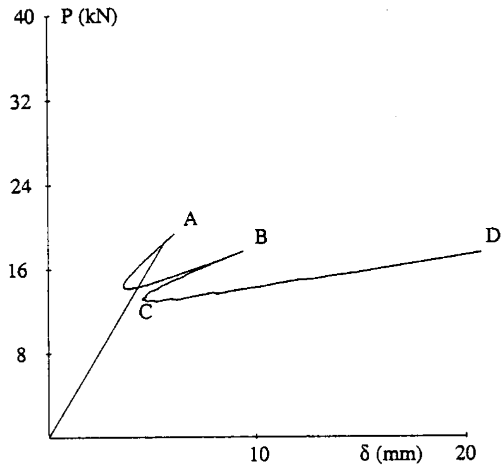

Figura 12. Relação carga-abertura de fenda (P-CMOD) obtida do segundo conjunto de testes para $G_F = 150$ N/m

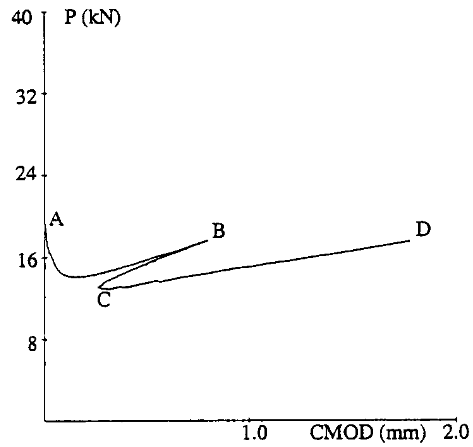

Figura 13. Relação força-deslocamento ($P - \delta$) obtida do segundo conjunto de testes para $G_F = 150$ N/m

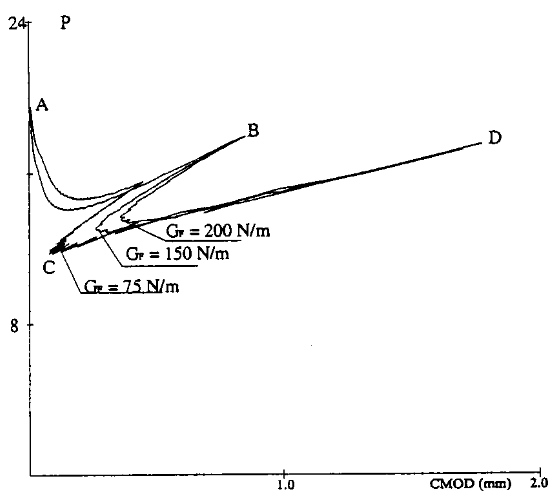

Figura 14. Relações P-CMOD obtidas para três valores diferentes de G_F

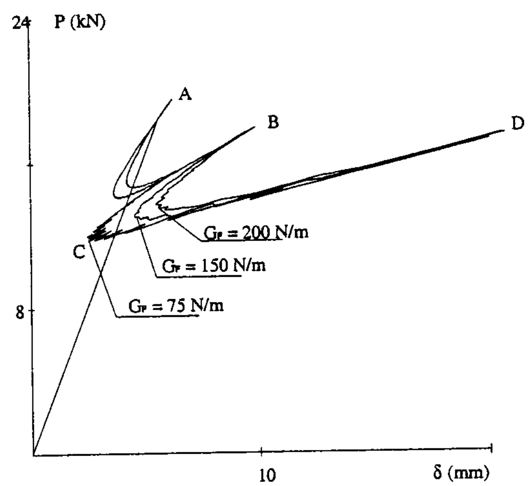

Figura 15. Relações $P - \delta$ obtidas para três valores diferentes de G_F

CONCLUSÕES

As conclusões principais obtidas das simulações numéricas apresentadas são:

1. O modelo numérico permite a formação de mais do que uma fenda simultaneamente; estas fendas interagem entre si, fechando e reabrindo sempre que surge uma nova fenda.
2. A influência da resistência à tracção do solo no comportamento do túnel é significativa. As soluções obtidas são bastante mais rígidas e as cargas mais elevadas se se considerar a resistência à tracção do solo; obtêm-se três fendas com a solução mais rígida e duas fendas quando não se considera a resistência à tracção do solo.

3. A carga elástica máxima coincide com a carga máxima obtida durante a análise em que se desprezou a resistência à tracção do solo; pelo contrário, a consideração da resistência e da rigidez à tracção do solo dá origem a uma carga máxima consideravelmente superior à carga elástica máxima.
4. No caso em que se desprezou a resistência à tracção do solo, não se verificaram diferenças significativas no desenvolvimento da fissuração quando se fez variar a energia de fractura G_F.

Como conclusão geral pode referir-se que a abordagem discreta, em associação com o conceito da energia de fractura, permanece um instrumento promissor para o estudo da fractura em materiais quase-frágeis. Esta abordagem tem sido também utilizada: a) em problemas em que os caminhos de fenda não são conhecidos à priori[1,2,3,4], b) na análise da propagação da fissuração em modo misto de fractura no betão[5,6] e c) no estudo da resistência à fissuração de paredes de alvenaria[7].

REFERÊNCIAS

1 J. Alfaiate, E.B. Pires e J.A.C. Martins, "A finite element model for the study of crack propagation", *Proceedings of the 2nd International Conference on Localised Damage*, M.H. Aliabadi, D.J. Cartwright e H. Nisitani (Eds.), Computational Mechanics Publications and Elsevier Applied Science, Southampton, pp. 261–282, (1992).

2 J. Alfaiate, E.B. Pires e J.A.C. Martins, "Non-prescribed discrete crack evolution in concrete: algorithm and numerical tests", *Proceedings of the 3rd International Conference on Localised Damage*, M.H. Aliabadi, A. Carpinteri, S. Kaliszky e D.J. Cartwright (Eds.), Udine, Italy, pp. 185–192, (1994).

3 J. Alfaiate, E.B. Pires e J.A.C. Martins, "A finite element analysis of non-prescribed crack propagation in concrete", *Comput. Struct.*, Vol. **63**, N° 1, pp. 17–26, (1997).

4 J. Alfaiate e E.B. Pires, "A discrete crack numerical model", "*Computational fracture mechanics in concrete technology*", A. Carpinteri and M. Aliabadi (Eds.), ISBN 1 83512 5075 WIT Press/Computational Mechanics Publications, Great Britain, pp. 133–162, (1999).

5 J. Alfaiate e E.B. Pires, "Mode I and mixed mode non-prescribed discrete crack propagation in concrete", *Proceedings of FRAMCOS-3*, H. Mihashi and K. Rokugo (Eds.), Japan, Vol. **2**, pp. 739–748, (1998).

6 J. Alfaiate e E.B. Pires, "Mixed mode fracture in concrete", *Proceedings of the International Conference on Fracture e Damage Mechanics*, University of London Queen Mary & Westfield College London, United Kingdom, (1999).

7 J.R. Almeida e J. Alfaiate, "The study of confined masonry walls submitted to imposed displacements and temperature effects", *Proceedings of the ECCM Conference*, München, Germany, (1999).

8 A. Hillerborg, M. Modéer e P.E. Petersson, "Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements", *Cem. Concr. Res.*, Vol. **6**, pp. 773–782, (1976).

9 A. Hillerborg, "Numerical methods to simulate softening and fracture of concrete", *Engineering applications of fracture mechanics*, George C. Sih e A. DiTommaso (Eds.), Martinus Nijhoff Publishers, The Hague, (1985).

10 A. Hillerborg e J. Rots, "Crack concepts and numerical modelling", *Fracture mechanics of concrete structures-from theory to applications*, report of the Technical Committee 90-FMA Fracture Mechanics of Concrete-Applications, L. Elfgren (Ed.), Chapman and Hall, London, U.K., (1989).

11 A. Ingraffea e V. Saouma, "Numerical modelling of discrete crack propagation in reinforced and plain concrete", *Engineering application of fracture mechanics*, George C. Sih e A. DiTommaso (Eds.), Martinus Nijhoff Publishers, The Hague, (1985).

12 N. Kikuchi e J.T. Oden, "*Contact problems in elasticity: a study of variational inequalities and finite element methods*", SIAM, Philadelphia, USA, (1988).

13 H.J. Kim e Z. Eisenstein, "*Prediction of lining loads case histories, tunnels and metropolises*", Negro Jr. e Ferreira (Eds.), Balkema, Rotherdam, ISBN 90 5410 936 X, (1998).

14 M. Modéer, "A fracture mechanics approach to failure analysis of concrete materials", report TVBM-1001, Div. of Building Materials, Lund Inst. of Technology, Sweden, (1979).

15 P.-E. Petersson, "Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials", report TVBM-1006, Div. of Building Materials, Lund Inst. of Technology, Sweden, (1981).