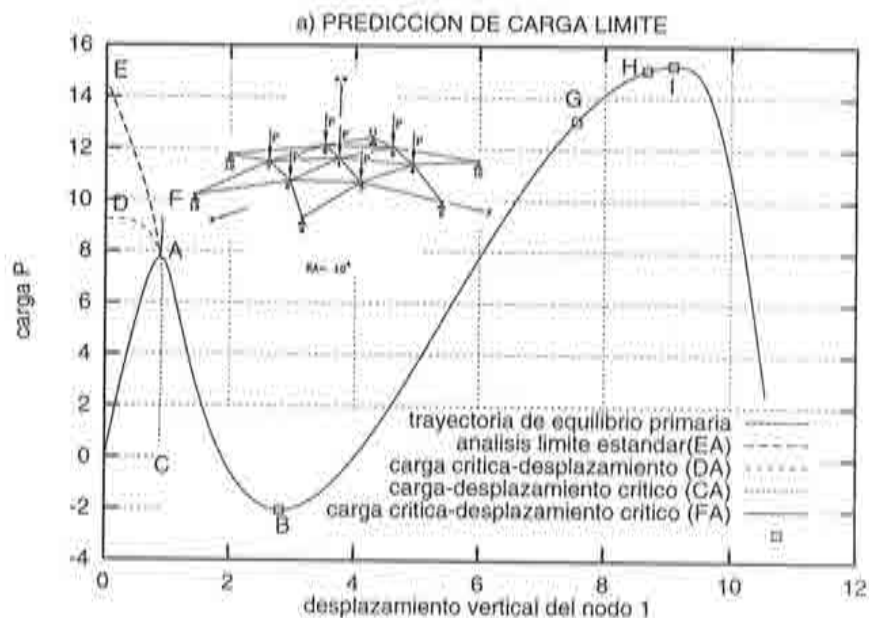


El Método de Desplazamiento Crítico para la Predicción de Puntos Límite y de Bifurcación en Estructuras

W.T. Matias Silva
E. Oñate



El Método de Desplazamiento Crítico para la Predicción de Puntos Límite y de Bifurcación en Estructuras

**W.T. Matias Silva
E. Oñate**

Monografía CIMNE Nº 35, Enero 1997

Diseño de la cubierta: Jordi Pallí

Primera Edición, Enero 1997

@ Los autores

Edita:

Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería

Edificio C1, Campus Norte UPC

Gran Capitán, s/n

08034 Barcelona, España

ISBN: 84-87867-89-8

Deposito Legal: B-8144-97

PRÓLOGO

En esta monografía se presenta un nuevo método de predicción de puntos críticos para el análisis de inestabilidad estructural. La formulación que aquí se presenta, surge del estudio realizado en la tesis doctoral: *“El método de desplazamiento crítico en el análisis de inestabilidad estructural”*, escrita en la Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Cataluña, en el año 1996, por William Taylor Matias Silva bajo la dirección del Prof. Eugenio Oñate.

Con el método aquí propuesto, se muestra la eficiencia y la buena aproximación de los resultados mediante la simulación numérica de varias tipologías estructurales en la predicción de cargas críticas de dichos sistemas. Cabe destacar que esta línea de trabajo presenta toda su potencialidad para continuar con nuevos desarrollos y/o mejorar los ya iniciados en el análisis de inestabilidad de sistemas estructurales.

William T. M. Silva

Barcelona, noviembre de 1996

RESUMEN

Se presenta la descripción Lagrangiana Generalizada para el análisis estático de sólidos con no linealidad geométrica. Se describen las relaciones incrementales básicas de la cinemática, de la estática y del modelo constitutivo. Se obtiene la forma incremental completa de las ecuaciones de equilibrio no lineales a través del principio de los trabajos virtuales. La discretización de dichas ecuaciones por el método de los elementos finitos conduce a la obtención de una expresión paramétrica general y no simétrica de la matriz de rigidez secante incremental. Se obtienen formas simétricas de dicha matriz asignando determinados valores a los parámetros. A partir de la matriz de rigidez secante incremental se deduce, de forma directa, la clásica expresión de la matriz de rigidez tangente empleada en problemas no lineales.

Se formula, de manera incremental, la matriz de rigidez secante a través de la descripción Lagrangiana Generalizada, de tal modo que se pueda obtener una relación entre *incrementos finitos* de fuerzas y desplazamientos. Se discuten las posibilidades de aplicación de la matriz secante en el análisis no lineal de estabilidad, de bifurcación y de carga límite en sistemas estructurales.

Se presenta una nueva técnica de predicción de puntos críticos para el análisis de inestabilidad estructural. Este método se basa en la determinación de un *campo de desplazamiento crítico* que aproxima el modo de bifurcación o el modo de deformación crítico del sistema estructural. Se determinan estos desplazamientos críticos imponiendo la condición de singularidad en una *expresión aproximada* de la matriz de rigidez tangente en el punto crítico. La carga crítica se obtiene a posteriori, de modo directo, utilizando la *relación secante* entre carga y desplazamiento. Se detalla este procedimiento y las formas explícitas de las matrices secante y tangente para elementos de barra y de sólido en dos y tres dimensiones. Se muestra la eficiencia y la buena aproximación de los resultados en la simulación numérica de varios ejemplos.

ABSTRACT

A Generalized Lagrangian approach for the geometrically non linear static analysis of solids and structures is presented. The basic geometric, kinematic and constitutive relationships are obtained in incremental form. The full incremental form of the equilibrium equations is derived from the virtual work expression and the corresponding secant stiffness matrix is obtained in a general non symmetric parametric form. A convenient simplified symmetric expression results from particular values of the parameters.

The secant stiffness matrix is formulated in an *incremental* form using the Generalized Lagrangian description so as to provide a non linear relationship between *finite increments* of nodal displacements and forces. The expression of the tangent stiffness matrix can be easily obtained as the limit of the incremental secant stiffness matrix when the values of the displacement increments tend to zero. The possibilities of application of the secant stiffness matrix for non linear structural problems including stability, bifurcation and limit load analysis are also discussed.

A new technique for predicting structural instability points using the finite element method is presented. The approach is based on the estimation of the critical displacement pattern using an approximation of the tangent stiffness singularity condition at the instability point. The critical load is subsequently computed using a secant load-displacement relationship. Details of this procedure are given together with explicit forms of the secant stiffness matrix for analysis of trusses and solids. The accuracy and effectiveness of the method are shown in the non linear analysis of several two and three dimensional structures.

ÍNDICE

	<u>página</u>
Prólogo	i
Resumen	iii
Abstract	v
Índice	vii
1. Introducción	1
1.1 Introducción	1
1.2 Marco histórico	2
1.3 Objetivos	6
1.4 Contenido de la monografía	7
1.5 Referencias	8
2. Formulación incremental de las ecuaciones de movimiento del sólido en mecánica no lineal	11
2.1 Introducción	11
2.2 Conceptos generales	13
2.2.1 Notación	14
2.3 Ecuaciones de movimiento	15
2.3.1 Forma diferencial	15
2.3.2 Forma variacional	15
2.4 Descripción incremental de la cinemática	17
2.4.1 Tensores de incremento de deformaciones de primer y segundo orden	19
2.4.2 Variación virtual de los campos de desplazamiento y de deformaciones incrementales	20

2.4.3	Forma matricial de los tensores de incremento de deformaciones de primer y segundo orden y de sus variaciones virtuales	22
2.5	Relación constitutiva incremental	25
2.5.1	Forma matricial de los tensores de tensiones y de incremento de tensiones	28
2.6	Ecuaciones incrementales de equilibrio	29
2.7	Comparación entre las variables cinemáticas y estáticas obtenidas en las formulaciones Lagrangiana Total y Actualizada	32
2.7.1	Relación entre los tensores gradientes de la deformación	34
2.7.2	Relación entre los gradientes de incremento de desplazamientos	34
2.7.3	Relación entre los tensores de incremento de deformaciones	35
2.7.4	Relación entre los tensores de incremento de tensiones	37
2.7.5	Relación entre las ecuaciones incrementales de equilibrio	38
2.8	Referencias	40
3.	Obtención de la matriz de rigidez secante incremental y sus aplicaciones en mecánica no lineal	43
3.1	Introducción	43
3.2	Discretización de la ecuación incremental de movimiento por el método de los elementos finitos	44
3.2.1	Discretización de los campos de desplazamiento inicial y de incremento de desplazamiento	44
3.2.2	Discretización de los campos de incremento de deformaciones	45
3.2.3	Discretización de la ecuación constitutiva incremental	49
3.3	Expresión paramétrica de la matriz de rigidez secante incremental	52
3.4	Obtención de la matriz de rigidez tangente	60
3.5	Expresión paramétrica de la matriz de rigidez secante total	60
3.6	Aplicaciones de la matriz de rigidez secante a problemas de no linealidad geométrica	62
3.6.1	Algoritmos de solución de la ecuación incremental de equilibrio utilizando la matriz secante	63
3.7	Referencias	66

4. El método de desplazamiento crítico para la predicción de puntos límite y de bifurcación	69
4.1 Introducción	69
4.2 Antecedentes del método de desplazamiento crítico	72
4.3 Ideas básicas del método de desplazamiento crítico	76
4.4 El método de desplazamiento crítico	78
4.4.1 Campo de desplazamiento crítico	78
4.4.2 Discretización del campo de deformación crítica	80
4.4.3 Discretización del campo de tensión crítica	80
4.4.4 Obtención de la matriz de rigidez tangente crítica	81
4.4.5 Predicción de la carga crítica	83
4.5 Estrategias numéricas para la obtención del desplazamiento crítico	86
4.5.1 Estrategia I. Predicción en un solo paso de carga	87
4.5.2 Estrategia II. Predicción paso a paso	88
4.5.3 Estrategia III. Predicción paso a paso mejorada	89
4.6 Estrategias numéricas en la solución de problemas no lineales de valores propios	90
4.6.1 Técnicas iterativas	90
4.6.2 Técnica de iteración sobre la matriz de rigidez tangente	91
4.6.3 Técnica de iteración sobre la matriz de rigidez incremental	92
4.6.4 Método de transformación directa	93
4.7 El método de iteración inversa	95
4.8 Referencias	98
5. Resolución del sistema de ecuaciones de equilibrio no lineal	101
5.1 Introducción	101
5.2 Caracterización de la no linealidad del problema	102
5.3 Ecuaciones de gobierno	104
5.4 Representaciones paramétricas	105
5.5 Trayectoria fundamental no lineal	107
5.6 Caracterización de puntos críticos	109
5.7 Procedimientos de solución. Métodos de continuación	112
5.8 El avance en la respuesta	118
5.9 Detección de puntos críticos	123
5.10 Consideraciones sobre la implementación computacional	130
5.11 Referencias	133

6. Ejemplos numéricos	135
6.1 Introducción	135
6.2 Estructuras articuladas planas	137
6.2.1 Modelo de un grado de libertad con comportamiento precrítico no lineal	137
6.2.2 Modelo con pérdida de rigidez y comportamiento postcrítico con rebote hacia atrás	148
6.2.3 Estructura articulada en forma de arco rebajado con bifurcación anterior al punto límite	157
6.3 Estructuras articuladas espaciales	162
6.3.1 Estructura articulada espacial en forma de estrella	162
6.3.2 Estructura articulada espacial en forma de cúpula	167
6.4 Tipologías estructurales analizadas con elementos de sólido 2D	175
6.4.1 Arco circular rebajado biempotrado	175
6.4.2 Arco circular de gran altura biapoyado	180
6.5 Tipologías estructurales analizadas con elementos de sólido 3D	184
6.5.1 Lámina cilíndrica biapoyada	184
6.6 Referencias	193
7. Conclusiones y líneas futuras de investigación	195
7.1 Conclusiones sobre el trabajo de investigación	195
7.2 Aportaciones al estado del conocimiento	197
7.3 Líneas de investigación futura	197
Anexo A1: Forma matricial de los tensores de incremento de deformación de primer y segundo orden	199
Anexo A2: Simetrización y parametrización de la expresión de la matriz de rigidez secante incremental	203
Anexo A3: Matriz de rigidez secante incremental para el elemento de barra articulado 3D	211
Anexo A4: Matrices relevantes en el cálculo de la matriz de rigidez secante incremental del elemento de sólido 2D	223

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1 INTRODUCCIÓN

La utilización de manera general del concepto de la matriz de rigidez secante en el contexto de la mecánica no lineal del sólido ha recibido poca atención por parte de la comunidad científica de la mecánica computacional. Una excepción la constituye el empleo de métodos basados en una expresión aproximada de la matriz secante en la resolución del sistema de ecuaciones no lineales como los métodos cuasi-Newton y secante-Newton. En estos métodos se deduce una expresión numérica de la matriz secante utilizando algoritmos de Broyden y los derivados del BFGS. Se trata de métodos potentes para la solución de ecuaciones no lineales.

Recientemente, varios investigadores (BADAWI [1992], CARRERA [1992], FELIPPA [1991], KRÖPLIN [1985,88,89 y 90] y ONATE [1986 y 91]) han reconocido las posibilidades de aplicación de la forma "exacta" de la matriz de rigidez secante en el análisis no lineal de sistemas estructurales. Se pueden encontrar en la literatura técnica en el área de mecánica no lineal trabajos que han desarrollado el concepto de la matriz secante aplicada a distintos campos como, por ejemplo, en la deducción de distintos algoritmos para la solución de sistemas de ecuaciones no lineales; en la predicción del grado de inestabilidad de sistemas estructurales en análisis estático y dinámico; en la predicción y localización de puntos límite y de bifurcación; en el análisis postcrítico a través de la formulación de algoritmos de búsqueda de ramas secundarias de equilibrio. También se ha explotado el concepto del operador secante para reinterpretar el concepto de los operadores tangentes consistentes en plasticidad (KRÖPLIN [1990]).

Cabe destacar que, en el área de inestabilidad estructural, gran parte de los estudios se centran en el concepto de la matriz de rigidez secante obtenida a través de la formulación mixta del método de los elementos finitos. Por otro lado, los principales códigos del método de elementos finitos orientados a la aplicación práctica están elaborados con la formulación en desplazamientos de dicho método. Este hecho, por sí sólo, ha motivado la investigación de métodos que utilicen el concepto de la matriz secante deducida a través de la formulación en desplazamientos del método de los elementos finitos.

Las diversas posibilidades de aplicación de la matriz de rigidez secante en mecánica no lineal del sólido, como las mencionadas anteriormente, incentivan a la investigación de este tema en distintas áreas de aplicación del método de los elementos finitos. En esta monografía se han explorado dichas posibilidades en el área de inestabilidad del equilibrio de sistemas estructurales. En este contexto, se propone en la monografía un nuevo método para la predicción de la carga crítica de dichos sistemas utilizando el concepto de la matriz secante. A efectos introductorios se describe en el próximo apartado la evolución del concepto de la matriz secante en los métodos de análisis no lineal de sólidos a través de una breve reseña histórica.

1.2 MARCO HISTÓRICO

En la mecánica no lineal del sólido se utilizan fundamentalmente dos principios en las aplicaciones del método de elementos finitos para la resolución de las ecuaciones diferenciales de equilibrio descritas en coordenadas materiales: El principio del mínimo en la energía potencial total y el principio de los trabajos virtuales. Se sabe que los dos principios son análogos en muchos casos pero se utiliza más frecuentemente el principio de los trabajos virtuales por su carácter más general. El principio de mínima energía potencial conduce a expresiones simétricas para la matriz de rigidez secante, mientras que a partir del principio de los trabajos virtuales se obtienen expresiones no simétricas de dicha matriz. A continuación se enfoca la evolución de los dos principios en el contexto de la mecánica no lineal.

En 1968, MALLET y MARCAL establecen una nomenclatura estándar para el análisis de no linealidad geométrica de sólidos mediante el método de los elementos finitos utilizando la descripción Lagrangiana Total. Con el fin de proporcionar una discusión más amplia del tema se introducen algunos conceptos a continuación. Se considera un sistema estructural sometido a cargas conservativas cuasiestáticas, discretizado por medio de elementos finitos, con desplazamientos nodales expresados mediante el vector \mathbf{v} . Estos desplazamientos representan el movimiento del sólido de la configuración indeformada \mathcal{C}_0 hacia la configuración actual \mathcal{C} . Las fuerzas que actúan en los nodos son independientes de \mathbf{v} , y se describen mediante el vector \mathbf{p} . La energía potencial total del sistema estructural se obtiene mediante una función $J = U - W$, que expresa la diferencia entre la energía de deformación U y el potencial de las fuerzas externas $W = \mathbf{p}^T \mathbf{v}$. Las fuerzas residuales se definen como $\mathbf{r} = \partial J / \partial \mathbf{v}$, y el símbolo Δ indica el incremento asociado a la variación de las variables cinemáticas y estáticas definidas en la última configuración deformada. Manteniendo el espíritu del trabajo de MALLET y MARCAL se utiliza, en este apartado, el incremento de estas variables para expresar sus variaciones virtuales.

MALLET y MARCAL [1968] han expresado la energía potencial total, las ecuaciones de las fuerzas residuales (fuerzas no equilibradas) y las ecuaciones incrementales de equilibrio del siguiente modo:

$$J = U - W = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \left[\mathbf{K}_0 + \frac{1}{3} \mathbf{N}_1 + \frac{1}{6} \mathbf{N}_2 \right] \mathbf{v} - \mathbf{p}^T \mathbf{v}$$

$$\mathbf{r} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{v}} = \left[\mathbf{K}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{N}_1 + \frac{1}{3} \mathbf{N}_2 \right] \mathbf{v} - \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (1.2.1)$$

$$\Delta \mathbf{r} = \left[\mathbf{K}_0 + \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 \right] \Delta \mathbf{v} - \Delta \mathbf{p} = \mathbf{0}$$

donde \mathbf{K}_0 es la *matriz de rigidez lineal* evaluada en la configuración indeformada, mientras que \mathbf{N}_1 y \mathbf{N}_2 son *matrices de rigidez no lineal*, también evaluadas en la configuración indeformada, que dependen lineal y cuadráticamente de los desplazamientos nodales \mathbf{v} . Nótese que las matrices \mathbf{N} se repiten en los tres niveles variacionales en (1.2.1). Debido a esto se denomina esta nomenclatura “notación- \mathbf{N} ” y, a las matrices \mathbf{N} , *formas repetidas*. (Esta notación está actualmente en desuso, empleándose en esta monografía el símbolo \mathbf{N} para denotar la matrices de función de forma de un elemento finito).

Cinco años más tarde RAJASEKARAN y MURRAY [1973] estudiaron minuciosamente la estructura de las matrices que aparecen en las ecuaciones anteriores. Dichos autores tomaron como punto de partida las *matrices fundamentales* que expresan relaciones entre las variables cinemáticas y estáticas a nivel local. Estas matrices se corresponden a sus homólogas \mathbf{K} , \mathbf{N}_1 y \mathbf{N}_2 , y se expresan en términos de los gradientes de los desplazamientos; esto implica que dichas matrices no tienen en cuenta el tipo de interpolación que se adopta en la discretización del sólido, es decir, son independientes del tipo de elemento finito con que se discretiza el sólido. Dichos autores demostraron que, para determinados elementos finitos, las matrices no lineales \mathbf{N}_1 y \mathbf{N}_2 *no tienen una forma única*. Sin embargo, estos autores no han presentado una expresión general válida para un elemento finito arbitrario.

En 1974, FELIPPA presentó una discusión respecto al trabajo de RAJASEKARAN y MURRAY proponiendo una expresión paramétrica y general para cada nivel variacional representado en las ecuaciones (1.2.1). Las ecuaciones (1.2.1) pueden ser reescritas de manera compacta como

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{K}^U \mathbf{v} + (\mathbf{p}^0 - \mathbf{p})^T \mathbf{v}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{K}^r \mathbf{v} + \mathbf{p}^0 - \mathbf{p} = \mathbf{f} - \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (1.2.2)$$

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{K} \Delta \mathbf{v} - \Delta \mathbf{p} = \mathbf{0}$$

donde \mathbf{K}^U , \mathbf{K}^r y \mathbf{K} denotan la matriz de rigidez asociada a la energía de deformación del sólido, la matriz de *rigidez secante* asociada a las fuerzas internas y la matriz de *rigidez tangente*, respectivamente. Además, \mathbf{p}^0 es el vector de tensiones iniciales, que se anulan si se considera la configuración indeformada libre de tensiones, y $\mathbf{f} = \mathbf{K}^r \mathbf{v} + \mathbf{p}^0$ representa el vector de fuerzas internas. La matriz de rigidez asociada a la energía de deformación del sólido tiene gran importancia teórica, ya que el resto de las matrices, en los demás niveles variacionales, se obtienen a partir de ella.

En problemas lineales estas matrices coinciden, es decir, $\mathbf{K}^U = \mathbf{K}^r = \mathbf{K} = \mathbf{K}_0$. Sin embargo, en problemas no lineales dichas matrices son diferentes; además, las expresiones de \mathbf{K}^U y \mathbf{K}^r contienen parámetros arbitrarios. Las expresiones generales y paramétricas de dichas matrices fueron obtenidas por FELIPPA [1974], mediante las siguientes hipótesis:

- \mathbf{K}^r es simétrica.
- La configuración de referencia está libre de tensiones iniciales
- La medida de la deformación es cuadrática respecto al gradiente de desplazamiento.
- La transformación entre el gradiente del desplazamiento y los desplazamientos nodales en el modelo de elementos finitos es lineal.

En 1991, FELIPPA y CRIVELLI presentaron una expresión general y paramétrica de las ecuaciones de gobierno del problema geoméricamente no lineal, donde eliminan las dos primeras restricciones mencionadas anteriormente. Además, incluyen la posibilidad de que la transformación entre las variables cinemáticas de una partícula arbitraria y los grados de libertad del sistema sea no lineal.

Por otro lado, en lo que concierne a la literatura técnica en el ámbito de la no linealidad geométrica del sólido, surge a partir de 1973, con la tesis doctoral de WOOD [1973], otra nomenclatura estándar utilizando el método de los elementos finitos. Esta metodología se debe a investigadores como NAYAK [1971] y ZIENKIEWICZ [1973], entre otros. Se trata de la linealización directa de las ecuaciones no lineales de equilibrio expresadas por el principio de los trabajos virtuales utilizando la descripción Lagrangiana Total, lo que conduce directa-

mente a la obtención de la clásica matriz de rigidez tangente. Esta nomenclatura se la denomina “notación- \mathbb{B} ” porque emplea el símbolo \mathbf{B} para referirse a la matriz de deformación que forma parte de la expresión de la matriz tangente. Con esta formulación se deduce la expresión de la matriz de rigidez tangente como suma de tres matrices: \mathbf{K}_0 , matriz de rigidez lineal; \mathbf{K}_L , matriz de desplazamiento inicial que depende lineal y cuadráticamente de los desplazamientos y \mathbf{K}_σ , matriz de rigidez geométrica que depende del estado de tensiones que actúa en el sólido. Posteriormente, WOOD y SCHREFLER [1978] han presentado la correlación de manera explícita entre la notación- \mathbb{N} y la notación- \mathbb{B} a través de la expresión de la matriz de rigidez tangente obtenida por ambas formulaciones.

$$\text{notación-}\mathbb{N} \implies \mathbf{K}_T = \mathbf{K}_0 + \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 \quad (1.2.3)$$

$$\text{notación-}\mathbb{B} \implies \mathbf{K}_T = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma$$

Este hecho representa un hito importante porque unifica las dos notaciones en el contexto de la no linealidad geométrica del sólido. A partir de entonces ha sido posible generalizar esta unificación para la matriz de rigidez secante, lo que ha posibilitado la obtención de varias expresiones simétricas de dicha matriz como se verá a continuación.

OÑATE et al [1986] utilizando el principio de los trabajos virtuales, expresaron la forma completa, sin linealizar, de las ecuaciones de equilibrio en la descripción Lagrangiana Generalizada. Estos autores dedujeron, con este procedimiento, una expresión no simétrica para la matriz de rigidez secante incremental. OÑATE [1991] obtuvo una expresión simétrica para la matriz secante con la misma formulación anterior, además de utilizar las expresiones explícitas de la correlación obtenida por WOOD [1978]. Posteriormente, OÑATE [1995] ha obtenido una expresión general para la matriz secante análoga a la forma paramétrica propuesta por FELIPPA y CRIVELLI [1991]. Estos trabajos han sido el punto de partida de muchas de las ideas que se presentan en esta monografía.

La descripción Lagrangiana Generalizada permite obtener las ecuaciones de gobierno del problema en forma incremental de tal modo que la matriz de rigidez secante relaciona incrementos finitos entre fuerzas y desplazamientos. Además, dicha descripción unifica la formulación de las ecuaciones de movimiento que se pueden escribir en la forma Lagrangiana Total o en la Lagrangiana Actualizada, como casos particulares de la descripción Lagrangiana Generalizada.

Utilizando el concepto de la matriz de rigidez secante en el análisis de no linealidad geométrica de sólidos se puede citar, en años más recientes, los trabajos de BADAWI y CUSENS [1992] y CARRERA [1992]. En estos trabajos se han obtenido expresiones simétricas particulares de la matriz secante utilizando la formulación Lagrangiana Total.

1.3 OBJETIVOS

El objetivo global del presente trabajo es avanzar en el estudio y desarrollo de nuevas posibilidades de aplicación de la matriz de rigidez secante en el contexto de la mecánica no lineal del sólido.

Dicho objetivo global puede descomponerse en los siguientes objetivos concretos:

- a) Desarrollo de las ecuaciones no lineales de equilibrio utilizando la formulación Lagrangiana Generalizada a través de:
 - la descripción incremental de las variables cinemáticas.
 - la definición de una relación constitutiva incremental hiperelástica.
 - la descripción incremental de las ecuaciones no lineales de equilibrio utilizando el principio de los trabajos virtuales.
- b) Obtención de una expresión general y paramétrica de la matriz de rigidez secante por medio de:
 - la discretización de las ecuaciones incrementales de equilibrio en su forma completa por el método de los elementos finitos con formulación en desplazamientos.
- c) Discusión sobre aplicaciones de la matriz secante en:
 - la resolución del sistema de ecuaciones de equilibrio no lineal.
 - la predicción de puntos críticos y del grado de estabilidad de sistemas estructurales.
- d) Propuesta y validación de una nueva y sencilla técnica para la predicción y localización de puntos críticos a través de:
 - la definición de una expresión aproximada para la matriz de rigidez tangente en un estado crítico.
 - la posterior predicción de la carga crítica utilizando la matriz secante.

Esta técnica denominada *método de desplazamiento crítico*, puede considerarse la principal aportación de esta monografía.

1.4 CONTENIDO DE LA MONOGRAFÍA

Para la materialización de los objetivos enumerados en el punto anterior, la monografía se estructura en siete capítulos y cuatro anexos.

En el capítulo 2 se presenta la formulación incremental de las ecuaciones de movimiento del sólido en mecánica no lineal utilizando la descripción Lagrangiana Generalizada. Para ello se discute en detalle los conceptos que fundamentan dicha descripción. Además, se presenta la notación que se utiliza en esta monografía. Se define un modelo constitutivo hiperelástico incremental para modelar el comportamiento del material. Se describen las ecuaciones incrementales de equilibrio utilizando el principio de los trabajos virtuales y se discuten las implicaciones que hay en el modelo constitutivo al describir el movimiento del sólido en la configuración indeformada o en la configuración actualizada.

En el capítulo 3 se discretizan las ecuaciones de equilibrio no lineal en su forma completa por medio de los elementos finitos mediante una formulación en desplazamientos. A partir de esta discretización se obtiene una expresión general y paramétrica de la matriz de rigidez secante. Con la expresión de dicha matriz se deduce, de forma directa, la clásica expresión de la matriz de rigidez tangente empleada en problemas no lineales. Por último, se comentan algunas aplicaciones de la matriz secante en el contexto de la solución de ecuaciones no lineales y en el análisis de inestabilidad de sistemas estructurales.

En el capítulo 4 se presenta un nuevo método para la predicción y localización de un punto crítico simple en la trayectoria fundamental de equilibrio. El método se basa en la determinación de un campo de desplazamiento crítico que aproxima el modo de bifurcación o de deformación crítico del sistema estructural. Se determinan estos desplazamientos críticos imponiendo la condición de singularidad en una expresión aproximada de la matriz de rigidez tangente en el estado crítico. Este procedimiento implica un problema generalizado y no lineal de autovalores que se resuelve con técnicas iterativas, transformando un problema no lineal en una secuencia de problemas lineales de valores propios. A posteriori, se calcula la carga crítica, de manera directa, utilizando la matriz secante.

En el capítulo 5 se abordan los métodos de resolución de sistemas algebraicos de ecuaciones no lineales. En primer lugar, se discute la naturaleza de la no linealidad geométrica del problema en cuestión. Se describen brevemente los principales métodos incrementales iterativos con control de la respuesta. Se discute cómo incluir en estos métodos la matriz de rigidez secante, tanto en la fase predictorica como en la fase correctora. Se presenta la definición de puntos singulares simples en problemas no transitorios (cuasiestáticos). Se definen y se discuten de forma detallada los principales parámetros que se utilizan en los métodos indirectos para la detección de puntos críticos. En esta monografía se utilizan estos métodos para contrastar los resultados obtenidos

con el método presentado en el capítulo 4. Por último, se discuten los aspectos de la implementación computacional de algunos de los algoritmos desarrollados en este capítulo.

En el capítulo 6 se estudia el comportamiento del modelo numérico del método de desplazamiento crítico. Se hace el análisis de inestabilidad de equilibrio de distintas tipologías estructurales utilizando dicho método. Se analiza la inestabilidad de equilibrio de estructuras articuladas planas y espaciales utilizando el elemento de barra articulado desarrollado en el Anexo A3. Se estudia la inestabilidad de equilibrio de arcos y láminas por medio de elementos de sólidos 2D y 3D, desarrollados en el capítulo 3 y el Anexo A4, respectivamente.

Finalmente, en el capítulo 7 se presentan las conclusiones del estudio, se destacan las aportaciones originales y se sugieren futuras líneas de investigación.

En el anexo A1 se presenta la forma matricial de la representación tensorial de las variables cinemáticas que se definen en el capítulo 2.

En el anexo A2 se describe el desarrollo algebraico para la simetrización y parametrización de la expresión de la matriz de rigidez secante incremental.

En el anexo A3 se detalla la forma explícita de las matrices que forman parte de la expresión general de la matriz de rigidez secante para elementos de barra articulados.

En el anexo A4 se presentan las matrices relevantes en el cálculo de la matriz de rigidez secante incremental para elementos de sólidos en dos dimensiones, adoptando la hipótesis de tensión plana.

1.5 REFERENCIAS

BADAWI, M. and CUSENS, A.R. [1992], Symmetry of the stiffness matrices for geometrically non-linear analysis, *Communications in Appl. Num. Meth.*, Vol. 8, pp. 135-140.

CARRERA, E. [1992], Sull'uso dell'operatore secante in analisi non lineare di strutture multistrato con il metodo degli elementi finiti, XI Congresso Nazionale AIMETA, Trento, 28 Sept-2 Oct.

DUDDECK, H., KRÖPLIN, B., DINKLER, D., HILLMANN, J., WAGEVHUBER, W. [1989], Non linear computations in Civil Engineering Structures (in German), DFG Colloquium, 2-3 March 1989, Springer-Verlag, Berlin.

FELIPPA, C. [1974], Discussions on the paper by Rajasekaran and Murray (1973), *J. Struct. Div.*, ASCE, **100**, pp. 2521-2523.

- FELIPPA, C. and CRIVELLI, L.A. [1991], The core congruential formulation of geometrically non linear finite elements. in *Non Linear Computational Mechanics. The State of the Art.*, P. Wriggers and W. Wagner (eds.), Springer-Verlag, Berlin.
- KRÖPLIN, B., DINKLER, D. and HILLMANN, J. [1985], An energy perturbation method applied to non linear structural analysis, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, VOL. 52, 885-897.
- KRÖPLIN, B. and DINKLER, D. [1988], A material law for coupled load yielding and geometric instability, *Engineering Computations*, Vol. 5, Nº3, 210-216.
- KRÖPLIN, B. and DINKLER, D. [1990], Some thoughts on consistent tangent operators in plasticity, in *Computational Plasticity*, D.R.J. OWEN, E. HINTON and E. OÑATE (eds.), Pineridge Press/ CIMNE.
- MALLET, R. and MARCAL, P. [1968], Finite element analysis of non-linear structures, *J. Struct. Div.*, ASCE, **94**, pp. 2081-2105.
- NAYAK, G.C. [1971], Plasticity and large deformation problems by finite element method, Univ. of Wales, Swansea, C/PH/15/71.
- OÑATE, E., OLIVER, J., MIQUEL, J. and SUÁREZ, B., [1986], Finite element formulation for geometrically non linear problems using a secant matrix", in *Computational Plasticity'86*, S. Atluri and G. Yagawa (eds.), Springer-Verlag.
- OÑATE, E. [1991], Possibilities of the secant stiffness matrix for non linear finite element analysis, in *Non Linear Engineering Computations*, N. Bicanic et al. (eds), Pineridge Press.
- OÑATE, E. [1995], On the derivation and possibilities of the secant stiffness matrix for non linear finite element analysis, *Computational Mechanics*, Vol. 15, pp. 572-593.
- RAJASEKARAN, S. and MURRAY, D.W. [1973], On incremental finite element matrices, *J. Struct. Div.*, ASCE, **99**, pp. 2423-2438.
- WOOD, R.D. [1973], The application of finite element methods to geometrically non-linear structural analysis, Univ. of Wales, Swansea, C/PH/20/73.
- WOOD, R.D. and SCHREFLER, B. [1978], Geometrically non-linear analysis -A correlation of finite element notations, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 12, pp. 635-642.
- ZIENKIEWICZ, O.C. and NAYAK, G.C. [1971], A general approach to problems of plasticity and large deformation using isoparametric elements, *Proc. Conf. Matrix Meth. Struct. Mech.*, Wright-Patterson A.F.B. Ohio, (Pub. 1973).

CAPÍTULO 2

FORMULACIÓN INCREMENTAL DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO DEL SÓLIDO EN MECÁNICA NO LINEAL

2.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se desarrolla la forma incremental de las ecuaciones no lineales de equilibrio en las formulaciones *Lagrangiana Total* (LT) y *Lagrangiana Actualizada* (LA) para el análisis de problemas con no linealidad geométrica por el método de los elementos finitos (MEF).

La forma incremental de las ecuaciones de equilibrio para la solución de problemas de no linealidad geométrica en mecánica de sólidos puede obtenerse por varios procedimientos. El método más popular consiste en una linealización directa de las ecuaciones no lineales de equilibrio expresadas por el principio de los trabajos virtuales, lo que conduce directamente a la obtención de la clásica *matriz de rigidez tangente* (HUGHES y PISTER [1978]). Este método ha sido utilizado por un gran número de autores tanto en el contexto de la formulación Lagrangiana Total como en el de la formulación Lagrangiana Actualizada. Los trabajos más significativos sobre el tema pueden encontrarse en la lista de referencias de los capítulos 8 y 6 de los libros de ZIENKIEWICZ y TAYLOR [1994b] y de BATHE [1996], respectivamente.

Un segundo procedimiento para obtener las ecuaciones incrementales de equilibrio resulta de restar las ecuaciones del principio de los trabajos virtuales para dos configuraciones de equilibrio y efectuar seguidamente una linealización de las ecuaciones resultantes. Este método fue sugerido inicialmente por YAGHMAI [1968] y luego seguido por otros autores (LARSEN [1971], BATHE, RAMM y WILSON [1975], MONDKAR y POWELL [1977]). Este procedimiento es algo más complejo que el de linealización directa, no obstante tiene la ventaja de que permite mostrar claramente todos los términos no lineales que intervienen en el análisis. FREY [1978a] y FREY y CESCOTTO [1978b] han demostrado que las ecuaciones finales que se obtienen por ambos procedimientos son las mismas si el campo de desplazamientos se expresa como una función lineal de los desplazamientos nodales, tal y como sucede en las aproximaciones clásicas por el método de los elementos finitos en sólidos (ver ZIENKIEWICZ y TAYLOR [1994a]).

En este trabajo se adopta una tercera alternativa menos popular basada en la expresión del principio de los trabajos virtuales en una configuración deformada desconocida en el instante $t + \Delta t$ como incremento de su expresión en la vecina configuración de equilibrio conocida en el instante t (ver CESCOTTO [1978]). La forma incremental completa (sin linealizar) de las ecuaciones incrementales de equilibrio resultantes conduce a la obtención de una *matriz de rigidez secante*, a partir de la cual puede deducirse de forma directa la matriz tangente clásica. De esta manera, se establece una relación incremental de las variables cinemáticas y estáticas entre las dos configuraciones deformadas del sólido. Los valores de dichas variables se suponen conocidos entre los instantes inicial y t . Las incógnitas son los incrementos de estas variables entre los instantes t y $t + \Delta t$.

Para describir las ecuaciones no lineales de equilibrio de forma incremental se utiliza una formulación *Lagrangiana Generalizada*. En el apartado 2.2 se introducen algunos conceptos generales acerca de esta formulación.

En el apartado 2.3 se muestran las formas diferencial y variacional de las ecuaciones de movimiento descritas con variables Eulerianas. Dichas expresiones, junto con las ecuaciones del modelo constitutivo, constituyen el sistema global de ecuaciones a resolver.

En el apartado 2.4 se definen las variables cinemáticas básicas para describir de forma incremental la ecuación de movimiento, utilizando para este fin la formulación *Lagrangiana Generalizada*. Para medir deformación e incremento de deformación se adopta el tensor de Green-Lagrange. Se describen la representación tensorial y matricial de las variables cinemáticas definidas en este apartado.

En el apartado 2.5 se estudia un modelo constitutivo que cumpla con el *Principio de Objetividad* y que represente un material elástico, homogéneo e isótropo que permita grandes desplazamientos, grandes giros y deformaciones infinitesimales. Para este fin, como medida de tensión e incremento de tensión se adopta el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff. Nuevamente se describen la representación tensorial y matricial de las variables estáticas definidas en este apartado.

Una vez definidas las variables cinemáticas y estáticas capaces de describir de manera incremental la ecuación de movimiento, en el apartado 2.6 se obtiene la forma variacional de dicha ecuación a través del principio de los trabajos virtuales en representación tensorial y matricial, considerándose solamente fuerzas conservativas.

Con el modelo constitutivo aquí adoptado se demuestra en el apartado 2.7 que las ecuaciones incrementales de equilibrio obtenidas en la formulación Lagrangiana Total son idénticas a las ecuaciones de equilibrio derivadas de la formulación Lagrangiana Actualizada.

2.2 CONCEPTOS GENERALES

En el análisis numérico de los problemas en mecánica no lineal es necesario utilizar una descripción incremental del movimiento del sólido. El objetivo es encontrar las configuraciones de equilibrio del sólido para distintos valores de carga. Así, para conocer la solución en el instante $t + \Delta t$ se debe conocer la solución para todas las configuraciones de equilibrio previas en el intervalo de tiempo $[0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, t]$. Con la finalidad de describir la cinemática del sólido se adopta un sistema de referencia Cartesiano estacionario.

Se designa *configuración inicial* o *configuración* 0V , a la configuración indeformada sin tensiones del sólido, siendo 0V su volumen en el tiempo cero ($t = 0$). La configuración del sólido en el tiempo t , sometido a un nivel de carga conocido, se define como *configuración* t o *configuración* tV , donde tV es el volumen del sólido en el instante t . La configuración del sólido en el tiempo $t + \Delta t$, correspondiente a una variación de la configuración t debido a un incremento de cargas que actúan en dicha configuración, se designa como *configuración* $t + \Delta t$ o *configuración* ${}^{t+\Delta t}V$, siendo ${}^{t+\Delta t}V$ el volumen del sólido en el instante $t + \Delta t$ (ver Figura 2.1).

Para estudiar el proceso de deformación del sólido se necesita definir una *configuración de referencia* con respecto a la cual se expresan las variables estáticas y cinemáticas. En principio, cualquier configuración de equilibrio conocida entre las configuraciones inicial y en el tiempo t puede utilizarse como configuración de referencia denominada genéricamente como *configuración* rV . Este procedimiento se conoce con el nombre de formulación *Lagrangiana Generalizada* (LG), denominación debida a FREY [1978a] y CESCOTTO [1978]. Esta formulación describe el proceso de deformación del sólido de manera elegante, consistente y unificada y engloba las demás descripciones Lagrangianas. Como casos particulares de dicha formulación se pueden citar la formulación *Lagrangiana Total* (LT) en la que se toma como configuración de referencia la configuración indeformada 0V , y la formulación *Lagrangiana Actualizada* (LA) en la que la configuración de referencia coincide con la configuración tV . Generalmente son las formulaciones más utilizadas en el análisis por elementos finitos.

Las ecuaciones básicas de ambas formulaciones, LT y LA, pueden obtenerse a partir del principio de los trabajos virtuales o métodos energéticos. No obstante, el método de los trabajos virtuales es más general y permite tener en cuenta fácilmente leyes constitutivas no lineales que dependan de la historia del proceso de carga. Por consiguiente, este procedimiento será el adoptado en este trabajo.

En la formulación Lagrangiana Generalizada el principio de los trabajos virtuales en su forma incremental se escribe en la configuración deformada desconocida ${}^{t+\Delta t}V$ utilizando como configuración de referencia rV . Se suponen conocidas las variables cinemáticas y estáticas en el intervalo de tiempo $[0, t]$ y el incremento de carga entre los instantes t y $t + \Delta t$. Los incrementos de las

variables cinemáticas y estáticas pertenecientes al intervalo $[t, t + \Delta t]$ son las incógnitas del problema. De este modo se puede mostrar claramente todos los términos no lineales que intervienen en el análisis.

Las aplicaciones de las ecuaciones incrementales de equilibrio basadas en la matriz de rigidez secante están restringidas, en principio, a problemas en los que la ecuación constitutiva puede expresarse en forma incremental. En este trabajo no se estudia en forma detallada los modelos constitutivos no lineales que permiten dicho tratamiento.

Se adopta el modelo de la elasticidad infinitesimal y se aplica, indistintamente, tanto en una descripción material en la formulación LT como en la espacial en la formulación LA. Este procedimiento, como se verá en el apartado 2.6 de este capítulo, es válido porque se supone que el sólido experimenta pequeñas deformaciones (infinitesimales) y grandes desplazamientos y, además, se supone al material isótropo y homogéneo. Bajo este conjunto de hipótesis las simulaciones numéricas basadas en las formulaciones LT y LA obtienen los mismos resultados. Por otro lado, si se acepta la hipótesis de grandes deformaciones, las formulaciones LT y LA representan materiales diferentes al adoptarse el tensor constitutivo de la elasticidad infinitesimal. Ello conduce a resultados distintos en las simulaciones numéricas para el mismo problema. Para mayores detalles se puede consultar GARINO y OLIVER [1988].

2.2.1 Notación

En esta monografía, más específicamente en los capítulos 2, 3 y 4, se combinará la notación tensorial con la matricial. La notación que se sigue es la misma adoptada en el capítulo 6 del libro de BATHE [1996], y para más detalles, también se puede consultar el libro de KLEIBER [1989].

Las matrices y vectores se indicarán con una letra negrita mayúscula \mathbf{A} y minúscula \mathbf{a} , respectivamente. Salvo cuando se indique lo contrario, las matrices serán cuadradas y los vectores serán vectores columna. La inversa de la matriz \mathbf{A} se denota por \mathbf{A}^{-1} y su traspuesta con \mathbf{A}^T .

Las variables cinemáticas y estáticas se definen en un sistema de referencia Cartesiano estacionario (x_1, x_2, x_3) . De esta manera, las coordenadas de un punto genérico $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$ en el instante 0 son $({}^0x_1, {}^0x_2, {}^0x_3)$. Las coordenadas del mismo punto en el instante t y $t + \Delta t$ vienen dadas por $({}^tx_1, {}^tx_2, {}^tx_3)$ y $({}^{t+\Delta t}x_1, {}^{t+\Delta t}x_2, {}^{t+\Delta t}x_3)$, respectivamente. La densidad, el área y el volumen del cuerpo \mathcal{B} se representarán en los instantes 0, t , y $t + \Delta t$ como ${}^0\rho$, ${}^t\rho$, ${}^{t+\Delta t}\rho$; 0A , tA , ${}^{t+\Delta t}A$; y 0V , tV , ${}^{t+\Delta t}V$, respectivamente. La configuración de referencia se indica con un subíndice izquierdo. Finalmente, un subíndice derecho, definido por una de estas letras i, j, k y $l = 1, 2, 3$, indica la dirección del eje en que está definida la variable. Los tensores de segundo

y cuarto orden en el espacio Euclidiano tridimensional serán representados por matrices columna y matrices cuadradas, respectivamente.

2.3 ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Se describen a continuación las formas Eulerianas diferencial e integral de las ecuaciones de movimiento de un sólido que permiten expresar las relaciones de equilibrio en problemas de no linealidad geométrica y física, (ver MALVERN [1969], cap. 5).

2.3.1 Forma diferencial

La ecuación de conservación del momento lineal en el tiempo $t + \Delta t$ para problemas cuasiestáticos puede expresarse como

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\sigma_{ij}}{\partial {}^{t+\Delta t}x_j} + {}^{t+\Delta t}f_i^B &= 0 \\ {}^{t+\Delta t}\sigma_{ij} &= {}^{t+\Delta t}\sigma_{ji} \end{aligned} \right\} \text{ en } {}^{t+\Delta t}V \quad (2.3.1)$$

$${}^{t+\Delta t}\sigma_{ij} {}^{t+\Delta t}n_j = {}^{t+\Delta t}f_i^S \quad \text{en } {}^{t+\Delta t}S_f$$

donde ${}^{t+\Delta t}S_f$ es la porción de la superficie del contorno ${}^{t+\Delta t}S$ del cuerpo $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^N$ ($N = 1, 2, 3$), en una configuración deformada arbitraria en el tiempo $t + \Delta t$. La normal unitaria a ${}^{t+\Delta t}S_f$ en el punto ${}^{t+\Delta t}x_j$ se expresa como ${}^{t+\Delta t}n_j$. ${}^{t+\Delta t}f_i^S$ son las fuerzas de superficie prescritas en ${}^{t+\Delta t}S_f$. ${}^{t+\Delta t}f_i^B$ representa la fuerza de volumen y ${}^{t+\Delta t}\sigma_{ij}$ son las componentes cartesianas del tensor de tensiones de Cauchy. Las fuerzas de volumen pueden escribirse como ${}^{t+\Delta t}f_i^B = {}^{t+\Delta t}\rho {}^{t+\Delta t}\bar{f}_i^B$, siendo ${}^{t+\Delta t}\rho$ la densidad del sólido y ${}^{t+\Delta t}\bar{f}_i^B$ fuerzas por unidad de masa en el instante $t + \Delta t$. La simetría del tensor de tensiones de Cauchy en (2.3.1b) resulta de la conservación del momento angular.

2.3.2 Forma variacional

Considérese el cuerpo \mathcal{B} sometido a fuerzas de volumen f_i^B y fuerzas de superficie f_i^S prescritas en la porción ${}^{t+\Delta t}S_f$ del contorno ${}^{t+\Delta t}S$. En la parte restante del contorno ${}^{t+\Delta t}S_u$, tal que ${}^{t+\Delta t}S_f \cap {}^{t+\Delta t}S_u = \emptyset$, el movimiento se prescribe por ${}^{t+\Delta t}u_i$. Se supone que el campo de desplazamientos ${}^{t+\Delta t}u_i$ genera deformaciones cinemáticamente admisibles en \mathcal{B} y cumple las condiciones de frontera, es decir, ${}^{t+\Delta t}u_i = {}^{t+\Delta t}\bar{u}_i$ en ${}^{t+\Delta t}S_u$.

Sea δu_i una variación virtual suficientemente suave del campo de desplazamientos ${}^{t+\Delta t}u_i$ en el instante $t + \Delta t$ definida sobre el dominio ${}^{t+\Delta t}V$. La forma débil de la ecuación (2.3.1) puede escribirse como

$$\int_{{}^{t+\Delta t}V} \delta u_i \left(\frac{\partial {}^{t+\Delta t}\sigma_{ij}}{\partial {}^{t+\Delta t}x_j} + {}^{t+\Delta t}f_i^B \right) dV = 0 \quad (2.3.2)$$

donde δu_i es tal que $\delta u_i = 0$ sobre ${}^{t+\Delta t}S_u$. Así, integrando por partes la ecuación (2.3.2) resulta que

$$\underbrace{\int_{{}^{t+\Delta t}V} \frac{\partial \delta u_i}{\partial {}^{t+\Delta t}x_j} {}^{t+\Delta t}\sigma_{ij} dV}_{\mathcal{F}^{int}} = \underbrace{\int_{{}^{t+\Delta t}V} \delta u_i {}^{t+\Delta t}f_i^B dV + \int_{{}^{t+\Delta t}S_f} \delta u_i {}^{t+\Delta t}f_i^S dS}_{\mathcal{F}^{ext}} \quad (2.3.3)$$

donde los operadores de fuerzas internas y externas quedan naturalmente indentificados. Cada uno de estos términos puede ser interpretado como el trabajo virtual realizado por tales fuerzas al aplicarse al cuerpo una variación virtual del campo de desplazamientos en el instante $t + \Delta t$.

El problema consiste en determinar el campo de desplazamientos ${}^{t+\Delta t}u_i$ que satisfaga la ecuación variacional

$$\mathcal{F}^{int}({}^{t+\Delta t}u_i) - \mathcal{F}^{ext}({}^{t+\Delta t}u_i) = 0 \quad (2.3.4)$$

para cualquier variación virtual δu_i admisible que satisfaga las condiciones de frontera.

Nótese que debido a la simetría del tensor de tensiones de Cauchy, el operador de fuerzas internas puede reescribirse como

$$\mathcal{F}^{int} = \int_{{}^{t+\Delta t}V} \delta^{t+\Delta t}\epsilon_{ij} {}^{t+\Delta t}\sigma_{ij} dV \quad (2.3.5)$$

donde $\delta^{t+\Delta t}\epsilon_{ij}$ representa la parte simétrica del tensor gradiente de desplazamientos virtuales $\partial \delta u_i / \partial {}^{t+\Delta t}x_j$ en el instante $t + \Delta t$, es decir,

$$\delta^{t+\Delta t}\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial {}^{t+\Delta t}x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial {}^{t+\Delta t}x_i} \right) \quad (2.3.6)$$

Una dificultad fundamental para resolver la ecuación (2.3.4) es que los límites de integración sobre el dominio $t+\Delta tV$ y $t+\Delta tS$ son incógnitas del problema. Así, para seguir el proceso de deformación del cuerpo B se necesita definir una configuración de referencia con respecto a la cual se refieren las variables estáticas y cinemáticas. Como se dijo antes, el proceso de deformación del cuerpo B se describirá en la monografía utilizando una formulación *Lagrangiana Generalizada* (LG), donde se adopta una configuración de equilibrio conocida arbitraria rV perteneciente al intervalo $[0, t]$, dentro del cual se suponen conocidas las variables cinemáticas y estáticas. La estrategia de solución se detalla en el próximo apartado.

2.4 DESCRIPCIÓN INCREMENTAL DE LA CINEMÁTICA

Para más detalles sobre la temática desarrollada en este apartado se puede consultar el capítulo 2 del libro de KLEIBER [1989] y el capítulo 6 del libro de BATHE [1996].

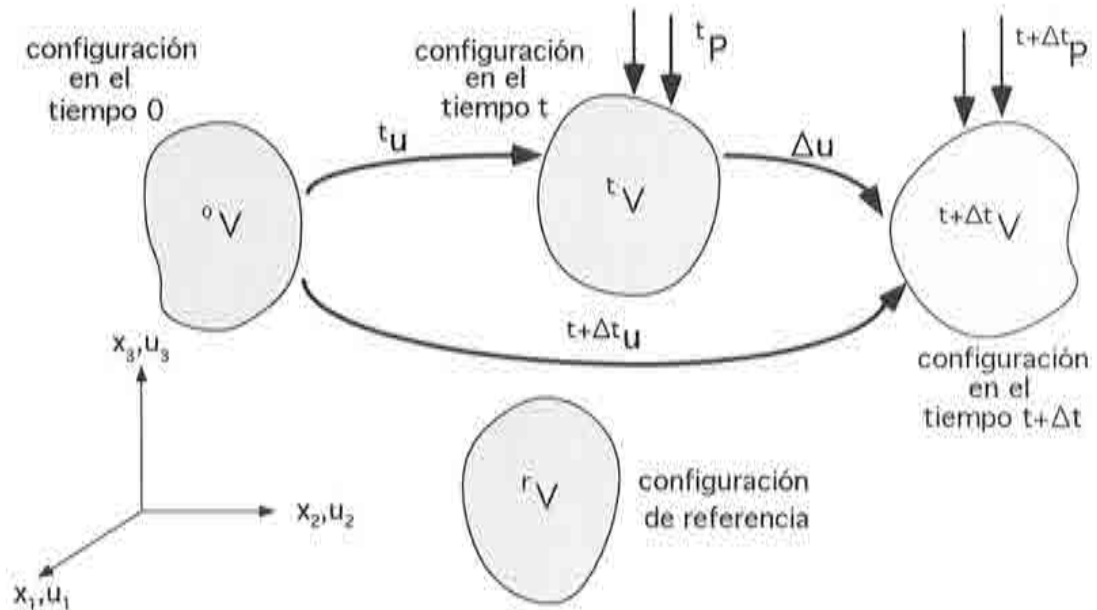


Figura 2.1 Movimiento de un sólido en un sistema de coordenadas Cartesiano estacionario

Sea $[0, T]$ el intervalo de tiempo de interés en la descripción incremental de la cinemática del sólido. Aquí, la variable t se debe interpretar como un

parámetro que se incrementa de forma monótona, e indica el nivel de progreso en el proceso de deformación. Para problemas cuasiestáticos, los valores discretos de t indican pasos de carga.

Considérese un cuerpo $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^N$ ($N = 1, 2, 3$), que en la configuración indeformada posee el volumen inicial 0V , y en una configuración de equilibrio conocida en el instante t posee un volumen tV . En dicho instante el cuerpo está sometido a fuerzas de volumen ${}^t f_i^B$ y de superficie ${}^t f_i^S$ prescritas en la porción del contorno ${}^t S_f \subset {}^t S$ de \mathcal{B} .

Las coordenadas de una partícula arbitraria $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$ en cada instante de tiempo t son referidas a un sistema de referencia Cartesiano estacionario x_1, x_2, x_3 , (ver Figura 2.1). El desplazamiento de \mathcal{X} en la configuración de equilibrio tV está definido como

$${}^t u_i = {}^t x_i - {}^0 x_i \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.4.1)$$

El desplazamiento ${}^t u_i$ de \mathcal{X} en el intervalo de tiempo $[0, t]$ se denomina *desplazamiento inicial*.

Al incrementar las fuerzas de volumen y las fuerzas de superficie se tiene que

$${}^{t+\Delta t} f_i^B = {}^t f_i^B + \Delta f_i^B \quad (2.4.2a)$$

$${}^{t+\Delta t} f_i^S = {}^t f_i^S + \Delta f_i^S \quad (2.4.2b)$$

donde Δf_i^B representa el incremento de las fuerzas de volumen y Δf_i^S es el incremento de las fuerzas de superficie. ${}^{t+\Delta t} f_i^B$ y ${}^{t+\Delta t} f_i^S$ están definidas en la ecuación (2.3.1).

Debido al incremento de las fuerzas de volumen y de superficie el cuerpo cambiará su posición de tV a ${}^{t+\Delta t}V$. El incremento del desplazamiento de la partícula \mathcal{X} se define, entonces, como

$$\Delta u_i = {}^{t+\Delta t} x_i - {}^t x_i \quad (2.4.3)$$

El desplazamiento total de la partícula \mathcal{X} en el instante $t + \Delta t$ viene dado por

$${}^{t+\Delta t} u_i = {}^t u_i + \Delta u_i \quad (2.4.4)$$

2.4.1 Tensores de incremento de deformaciones de primer y segundo orden

Los tensores Lagrangianos de deformación y tensión, en la descripción *Lagrangiana Generalizada*, serán representados en una configuración intermedia de equilibrio conocida rV . El tensor de deformación de la partícula $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$ en el instante $t + \Delta t$ referido a la configuración rV se puede escribir como

$${}^{t+\Delta t}{}_r\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} ({}^{t+\Delta t}{}_r u_{i,j} + {}^{t+\Delta t}{}_r u_{j,i} + {}^{t+\Delta t}{}_r u_{k,i} {}^{t+\Delta t}{}_r u_{k,j}) \quad (2.4.5a)$$

con

$${}^{t+\Delta t}{}_r u_{i,j} = \frac{\partial {}^{t+\Delta t}u_i}{\partial {}^r x_j} \quad , \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.4.5b)$$

donde ${}^{t+\Delta t}{}_r u_{i,j}$ es el gradiente del desplazamiento total.

Nótese que para ${}^rV = {}^0V$ la ecuación (2.4.5a) se convierte precisamente en la conocida expresión del tensor de deformación de Green-Lagrange utilizada en la formulación *Lagrangiana Total*. En el caso en que se toma como referencia la configuración en el tiempo t , ${}^rV = {}^tV$, la formulación se conoce con el nombre de *Lagrangiana Actualizada*.

El incremento en la deformación de \mathcal{X} , debido al incremento de desplazamiento entre tV y ${}^{t+\Delta t}V$, se puede obtener al sustituir la ecuación (2.4.4) en (2.4.5a). Dicho incremento se escribe en forma tensorial como

$${}^r\Delta\varepsilon_{ij} = {}^{t+\Delta t}{}_r\varepsilon_{ij} - {}^t{}_r\varepsilon_{ij} = {}^r e_{ij} + {}^r \eta_{ij} \quad (2.4.6)$$

donde ${}^t{}_r\varepsilon_{ij}$ es el tensor de deformación de la partícula $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$ en tV referido a rV , que se define como

$${}^t{}_r\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} ({}^t{}_r u_{i,j} + {}^t{}_r u_{j,i} + {}^t{}_r u_{k,i} {}^t{}_r u_{k,j}) \quad (2.4.7a)$$

con

$${}^t{}_r u_{i,j} = \frac{\partial {}^t u_i}{\partial {}^r x_j} \quad , \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.4.7b)$$

donde ${}^t{}_r u_{i,j}$ es el gradiente del desplazamiento inicial. Nótese que en la descripción *Lagrangiana Generalizada* el tensor de deformación ${}^t\varepsilon_{ij}$ se anula, ya

que el efecto del desplazamiento inicial se incorpora en la coordenada actualizada de \mathcal{X} , es decir, ${}^t x_i = {}^0 x_i + {}^t u_i$. Por tanto, se acepta como hipótesis básica en dicha formulación que el gradiente del desplazamiento inicial respecto a las coordenadas de ${}^t V$ se anula, lo que implica ${}^t u_{i,j} = 0$.

Considerando las ecuaciones (2.4.6) y (2.4.7a), los tensores Lagrangianos de incremento de deformación ${}^r e_{ij}$ y ${}^r \eta_{ij}$ pueden escribirse como

$${}^r e_{ij} = \frac{1}{2} \left({}^r \Delta u_{i,j} + {}^r \Delta u_{j,i} + \underbrace{{}^t u_{k,i} {}^r \Delta u_{k,j} + {}^r \Delta u_{k,i} {}^t u_{k,j}}_{= 0 \text{ para } {}^r V = {}^t V} \right) \quad (2.4.8a)$$

$${}^r \eta_{ij} = \frac{1}{2} {}^r \Delta u_{k,i} {}^r \Delta u_{k,j} \quad (2.4.8b)$$

con

$${}^r \Delta u_{i,j} = \frac{\partial(\Delta u_i)}{\partial {}^r x_j} \quad , \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.4.8c)$$

donde ${}^r \Delta u_{i,j}$ es el gradiente del incremento de desplazamiento.

Obsérvese que los tensores ${}^r e_{ij}$ y ${}^r \eta_{ij}$ son funciones lineal y cuadrática del gradiente del incremento de desplazamiento ${}^r \Delta u_{i,j}$, respectivamente. Por esta razón, al tensor ${}^r e_{ij}$ se le denomina tensor de incremento de *deformación de primer orden*, ya que mide los incrementos de deformación de manera lineal en ${}^r \Delta u_{i,j}$, ver (2.4.8a). El tensor ${}^r \eta_{ij}$ se denomina tensor de incremento de *deformación de segundo orden*, porque mide los incrementos de deformación de manera cuadrática en ${}^r \Delta u_{i,j}$, ver (2.4.8b). Las ecuaciones (2.4.8a) y (2.4.8b) son fácilmente particularizables para las formulaciones LT y LA, adoptándose como configuración de referencia ${}^r V = {}^0 V$ y ${}^r V = {}^t V$, respectivamente. Nótese que los términos subrayados en la ecuación (2.4.8a) son cero en la formulación LA (${}^r V = {}^t V$), al ser cero las derivadas ${}^t u_{k,i}$. Para la formulación LT el tensor ${}^r e_{ij}$ se ve afectado por el desplazamiento inicial a través de su gradiente ${}^t u_{k,i}$.

2.4.2 Variación virtual de los campos de desplazamiento y de deformaciones incrementales

Para aplicar el *principio de los trabajos virtuales* al sólido en la configuración ${}^{t+\Delta t} V$ es necesario aplicar una variación virtual al desplazamiento ${}^{t+\Delta t} u_i$ y, consecuentemente, evaluar la variación virtual del tensor de deformación ${}^{t+\Delta t} \varepsilon$.

La trayectoria de equilibrio de la partícula \mathcal{X} en el intervalo de tiempo $[0, t]$ es conocida, con lo que las configuraciones del cuerpo \mathcal{B} en este intervalo tienen sus posiciones fijadas respecto al sistema Cartesiano de referencia. Una

variación virtual del desplazamiento total $\delta({}^{t+\Delta t}u_i)$ de \mathcal{X} significa que se está aplicando una variación virtual al campo de desplazamientos en la vecindad de la configuración ${}^{t+\Delta t}V$, es decir, que se está aplicando una variación virtual en el incremento de desplazamientos $\delta(\Delta u_i)$ entre las configuraciones tV y ${}^{t+\Delta t}V$. La variación virtual de las variables cinemáticas pertenecientes al intervalo de tiempo $[0, t]$ es nula, ya que se las considera fijas. Por lo tanto, $\delta({}^t u_i) = 0$ y, por consiguiente, $\delta({}_r^t \varepsilon_{ij}) = 0$, ver Figura 2.2.

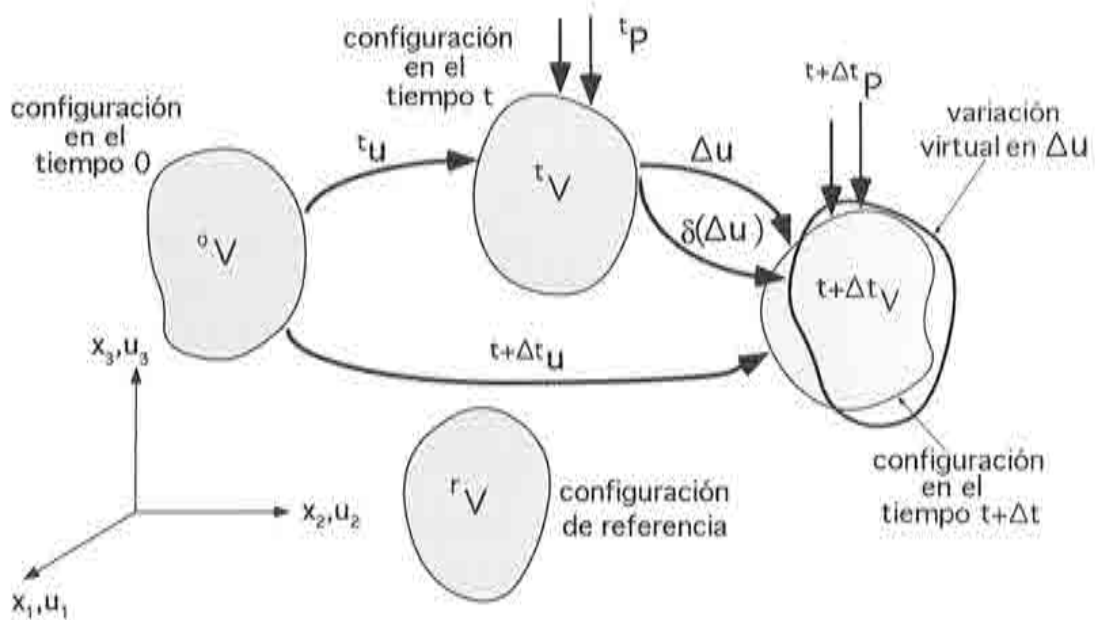


Figura 2.2 Variación virtual del campo de desplazamiento en la vecindad de la configuración $t + \Delta t$

Las variaciones virtuales del desplazamiento total ${}^{t+\Delta t}u_i$ y del tensor de deformación, ${}_{r}^{t+\Delta t}\varepsilon_{ij}$, de $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$ en las ecuaciones (2.4.4) y (2.4.6), respectivamente, se expresan según

$$\delta{}^{t+\Delta t}u_i = \underbrace{\delta{}^t u_i}_{= 0} + \delta\Delta u_i \tag{2.4.9a}$$

$$\delta{}_{r}^{t+\Delta t}\varepsilon_{ij} = \underbrace{\delta{}_{r}^t \varepsilon_{ij}}_{= 0} + \delta_r \Delta \varepsilon_{ij} \tag{2.4.9b}$$

La variación virtual del tensor de deformación en la configuración ${}^{t+\Delta t}V$, teniendo en cuenta las ecuaciones (2.4.6) y (2.4.9b), puede escribirse como

$$\delta {}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} = \delta_r \Delta \epsilon_{ij} = \delta_r e_{ij} + \delta_r \eta_{ij} \quad (2.4.10)$$

donde

$$\delta_r e_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_r \Delta u_{i,j} + \delta_r \Delta u_{j,i} + \underbrace{{}^t u_{k,i} \delta_r \Delta u_{k,j} + \delta_r \Delta u_{k,i} {}^t u_{k,j}}_{=0 \text{ para } {}^r V = {}^t V}) \quad (2.4.11a)$$

$$\delta_r \eta_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_r \Delta u_{k,i} {}^r \Delta u_{k,j} + {}^r \Delta u_{k,i} \delta_r \Delta u_{k,j}) \quad (2.4.11b)$$

con

$$\delta_r \Delta u_{i,j} = \frac{\partial (\delta \Delta u_i)}{\partial {}^r x_j} \quad , \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.4.11c)$$

donde $\delta_r \Delta u_{i,j}$ es la variación virtual del gradiente del incremento de desplazamiento.

Nótese que la variación virtual del tensor de *deformación de primer orden* $\delta_r e_{ij}$ es independiente del gradiente de incremento de desplazamiento ${}^r \Delta u_{i,j}$. Por otro lado, la variación virtual del tensor de *deformación de segundo orden* $\delta_r \eta_{ij}$ es función lineal de dicho gradiente. En la formulación LT (${}^r V = {}^0 V$) el tensor $\delta_r e_{ij}$ también se ve afectado por el desplazamiento inicial a través de su gradiente ${}^t u_{k,i}$.

2.4.3 Forma matricial de los tensores de incremento de deformaciones de primer y segundo orden y de sus variaciones virtuales

Ahora se escribe la representación matricial de los tensores de deformación definidos anteriormente, ya que se considera más adecuado trabajar con vectores y matrices al implementar las ecuaciones cinemáticas en un código numérico de elementos finitos. De aquí en adelante siempre se escribirá la representación matricial de los argumentos tensoriales.

De esta manera, los vectores de desplazamiento total, inicial y de incremento de desplazamiento de la partícula \mathcal{X} de \mathcal{B} , se definen como

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{u} = [{}^{t+\Delta t} u_1, {}^{t+\Delta t} u_2, {}^{t+\Delta t} u_3]^T \quad (2.4.12a)$$

$${}^t\mathbf{u} = [{}^t u_1, {}^t u_2, {}^t u_3]^T \quad (2.4.12b)$$

$$\Delta\mathbf{u} = [\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3]^T \quad (2.4.12c)$$

Entonces las ecuaciones (2.4.4) y (2.4.9a) se reescriben en forma vectorial como

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} = {}^t\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u} \quad (2.4.13a)$$

$$\delta^{t+\Delta t}\mathbf{u} = \delta(\Delta\mathbf{u}) \quad (2.4.13b)$$

Los tensores de orden dos en el espacio Euclideo tridimensional se representarán en matrices columna. De esta manera, la representación matricial de los tensores de incrementos de deformación de primer y segundo orden se define como

$${}^r\mathbf{e} = [{}^r e_{11}, {}^r e_{22}, {}^r e_{33}, 2{}^r e_{12}, 2{}^r e_{13}, 2{}^r e_{23}]^T \quad (2.4.14a)$$

$${}^r\boldsymbol{\eta} = [{}^r \eta_{11}, {}^r \eta_{22}, {}^r \eta_{33}, 2{}^r \eta_{12}, 2{}^r \eta_{13}, 2{}^r \eta_{23}]^T \quad (2.4.14b)$$

cuyas componentes se obtienen directamente de las ecuaciones (2.4.8a) y (2.4.8b), respectivamente y que expresadas en forma matricial se escriben como

$${}^r\mathbf{e} = [\mathbf{L}_0 + {}^t\mathbf{L}_1({}^t\mathbf{g})] {}^r\mathbf{g} \quad (2.4.15a)$$

$${}^r\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2} {}^r\mathbf{L}_1({}^r\mathbf{g}) {}^r\mathbf{g} \quad (2.4.15b)$$

donde ${}^t\mathbf{g}$ es el gradiente del desplazamiento inicial ${}^t\mathbf{u}$ de una partícula de \mathcal{B} , y ${}^r\mathbf{g}$ representa el gradiente del incremento de desplazamiento $\Delta\mathbf{u}$ de esta partícula. La forma matricial de estos gradientes se escribe como

$${}^t\mathbf{g} = \begin{Bmatrix} {}^t\mathbf{u}_{,1} \\ {}^t\mathbf{u}_{,2} \\ {}^t\mathbf{u}_{,3} \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad {}^r\mathbf{g} = \begin{Bmatrix} {}^r\Delta\mathbf{u}_{,1} \\ {}^r\Delta\mathbf{u}_{,2} \\ {}^r\Delta\mathbf{u}_{,3} \end{Bmatrix} \quad (2.4.16)$$

con

$${}^t_r \mathbf{u}_{,i} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial {}^t u_1}{\partial {}^r x_i} \\ \frac{\partial {}^t u_2}{\partial {}^r x_i} \\ \frac{\partial {}^t u_3}{\partial {}^r x_i} \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad {}_r \Delta \mathbf{u}_{,i} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial (\Delta u_1)}{\partial {}^r x_i} \\ \frac{\partial (\Delta u_2)}{\partial {}^r x_i} \\ \frac{\partial (\Delta u_3)}{\partial {}^r x_i} \end{Bmatrix} \quad (2.4.17)$$

\mathbf{L}_0 es una matriz rectangular (6×9) cuyas componentes son ceros y unos. Por otro lado, las matrices ${}^t_r \mathbf{L}_1$ y ${}_r \mathbf{L}_1$ son rectangulares (6×9) y sus componentes son función del gradiente de desplazamiento y del gradiente del incremento de desplazamiento de la partícula, respectivamente. Estas matrices se definen como

$${}^t_r \mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} {}^t_r \mathbf{g}^T \mathbf{H}_1 \\ {}^t_r \mathbf{g}^T \mathbf{H}_2 \\ \vdots \\ {}^t_r \mathbf{g}^T \mathbf{H}_6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad {}_r \mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} {}_r \mathbf{g}^T \mathbf{H}_1 \\ {}_r \mathbf{g}^T \mathbf{H}_2 \\ \vdots \\ {}_r \mathbf{g}^T \mathbf{H}_6 \end{bmatrix} \quad (2.4.18)$$

donde las matrices \mathbf{H}_i son cuadradas (9×9) y sus componentes son ceros y unos. Obsérvese que la matriz ${}^t_r \mathbf{L}_1$ se anula en la formulación LA (${}^r V = {}^t V \rightarrow {}^t_r \mathbf{L}_1 = 0$). La forma de los vectores y de las matrices definidas en las ecuaciones anteriores se encuentran detalladas en el Anexo A1 de esta monografía.

De manera análoga, se definen las matrices columna de las variaciones virtuales de los incrementos de deformación de primer y segundo orden como

$$\delta_r \mathbf{e} = [\delta_r e_{11}, \delta_r e_{22}, \delta_r e_{33}, 2\delta_r e_{12}, 2\delta_r e_{13}, 2\delta_r e_{23}]^T \quad (2.4.19a)$$

$$\delta_r \boldsymbol{\eta} = [\delta_r \eta_{11}, \delta_r \eta_{22}, \delta_r \eta_{33}, 2\delta_r \eta_{12}, 2\delta_r \eta_{13}, 2\delta_r \eta_{23}]^T \quad (2.4.19b)$$

cuyas componentes se obtienen a través de las ecuaciones (2.4.11a) y (2.4.11b), respectivamente y que expresadas en forma matricial se escriben como

$$\delta_r \mathbf{e} = [\mathbf{L}_0 + {}^t_r \mathbf{L}_1 ({}^t_r \mathbf{g})] \delta_r \mathbf{g} \quad (2.4.20a)$$

$$\delta_r \boldsymbol{\eta} = {}_r \mathbf{L}_1 ({}_r \mathbf{g}) \delta_r \mathbf{g} \quad (2.4.20b)$$

donde $\delta_r \mathbf{g}$ representa el gradiente de la variación virtual del incremento de desplazamiento $\delta(\Delta \mathbf{u})$ de una partícula de \mathcal{B} . La ecuación (2.4.20b) se obtiene

a partir de la igualdad $\delta_r \mathbf{L}_1({}_r \mathbf{g}) {}_r \mathbf{g} = {}_r \mathbf{L}_1({}_r \mathbf{g}) \delta_r \mathbf{g}$, que se puede demostrar fácilmente (ver ZIENKIEWICZ y TAYLOR [1994b], cap. 8).

Las ecuaciones (2.4.15) y (2.4.20) juegan un papel importante en la obtención de las matrices que forman parte de la expresión de la matriz de rigidez secante al discretizar por elementos finitos las ecuaciones no lineales de equilibrio.

Por último, de acuerdo con las definiciones dadas en las ecuaciones (2.4.14) y (2.4.19), la forma matricial de las ecuaciones (2.4.6) y (2.4.10) se expresa por

$${}_r \Delta \boldsymbol{\varepsilon} = {}_r \mathbf{e} + {}_r \boldsymbol{\eta} \quad (2.4.21a)$$

$$\delta^{t+\Delta t} \frac{\Delta}{r} \boldsymbol{\varepsilon} = \delta({}_r \Delta \boldsymbol{\varepsilon}) = \delta_r \mathbf{e} + \delta_r \boldsymbol{\eta} \quad (2.4.21b)$$

En este apartado se han establecido las relaciones cinemáticas básicas para una partícula arbitraria \mathcal{X} del sólido. También se han definido sus formas tensoriales y matriciales. En el próximo apartado se definirá la relación constitutiva de las partículas del sólido.

2.5 RELACIÓN CONSTITUTIVA INCREMENTAL

El tema expuesto en este apartado se puede encontrar con más detalle en los capítulos 3 y 7 del libro de KLEIBER [1989], en el capítulo 6 del libro de BATHE [1996] y en las referencias CESCOTTO [1978] y PERIĆ [1992].

Se supone que el movimiento de las partículas del sólido está sujeto a grandes desplazamientos, grandes giros y pequeñas deformaciones, es decir, deformaciones infinitesimales.

Sea ${}^r V$ la configuración de referencia del cuerpo $B \subset \mathbb{R}^N$ ($N = 1, 2, 3$) y ${}^r \mathcal{S}$ el espacio de tensores simétricos, tal que el incremento del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff ${}_r \Delta S_{ij}$ está relacionado con el incremento del tensor de Green-Lagrange ${}_r \Delta \varepsilon_{ij}$ por medio de una función de energía almacenada, ${}_r W : {}^r V \times {}^r \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$, según la relación hiperelástica

$${}_r \Delta S_{ij} = \frac{\partial_r W}{\partial_r \Delta \varepsilon_{ij}} \quad (2.5.1)$$

Se supondrá aquí que ${}_r W$ viene dada por una forma cuadrática en deformaciones elásticas, que puede escribirse como

$${}_r W = \frac{1}{2} {}_r D_{ijkl} {}_r \Delta \varepsilon_{ij} {}_r \Delta \varepsilon_{kl} \quad (2.5.2)$$

donde ${}_rD_{ijkl}$ es el tensor constitutivo elástico tangente definido de la siguiente manera

$${}_rD_{ijkl} = \frac{\partial^2 {}_rW}{\partial {}_r\Delta\varepsilon_{ij} \partial {}_r\Delta\varepsilon_{kl}} \quad (2.5.3)$$

Para un material isótropo, el tensor ${}_rD_{ijkl}$ se escribe de manera semejante al de la elasticidad infinitesimal dado por

$${}_rD_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.5.4)$$

donde λ y μ son las constantes de Lamé del material y δ_{ij} es la delta de Kronecker.

Sea tV la configuración de referencia del cuerpo \mathcal{B} en el instante t . El tensor constitutivo elástico tangente ${}^tD_{ijkl}$ se relaciona con el tensor constitutivo definido en rV a través de la siguiente expresión

$${}^tD_{ijkl} = [\det({}^tF_{mn})]^{-1} {}^tF_{ip} {}^tF_{jq} {}^tF_{kr} {}^tF_{ls} {}_rD_{pqrs} \quad (2.5.5)$$

donde ${}^tF_{ij} = \partial {}^t x_i / \partial {}^r x_j$ es el tensor gradiente de la deformación de una partícula de \mathcal{B} , respecto a las coordenadas ${}^r x_i$ de la configuración de referencia rV , y $\det({}^tF_{mn})$ es el determinante del tensor de deformación.

Para el caso de pequeñas deformaciones y grandes desplazamientos, ${}^tF_{ij} \rightarrow {}^tR_{ij}$, y, además, despreciando la deformación volumétrica, $\det({}^tF_{ij}) \rightarrow 1$, la relación entre los tensores de elasticidad tangente en la configuración tV y en la configuración rV dada por la ecuación (2.5.5), resulta

$${}^tD_{ijkl} = {}^tR_{ip} {}^tR_{jq} {}^tR_{kr} {}^tR_{ls} {}_rD_{pqrs} \quad (2.5.6)$$

donde ${}^tR_{ij}$ es un tensor ortogonal denominado tensor de rotación procedente de la descomposición polar de ${}^tF_{ij}$.

Para un material isótropo, cuya respuesta no depende de ${}^tR_{ij}$, resulta que

$${}^tD_{ijkl} = {}_rD_{ijkl} \quad (2.5.7)$$

De esta manera, si el sólido sufre deformaciones infinitesimales y si se desprecia su deformación volumétrica, se concluye que los tensores de elasticidad tangente definidos en las formulaciones LT y LA son iguales, es decir, ${}^tD_{ijkl} = {}_0D_{ijkl}$.

El segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff en la configuración ${}^{t+\Delta t}V$ se obtiene de manera incremental a través de

$${}^{t+\Delta t}{}_r S_{ij} = {}^t{}_r S_{ij} + {}_r \Delta S_{ij} \quad (2.5.8)$$

donde ${}^t{}_r S_{ij}$ denota el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff en la configuración tV . Nótese que para la formulación LA, ${}^rV = {}^tV \rightarrow {}^t{}_r S_{ij} = {}^t S_{ij} = {}^t \sigma_{ij}$, coincide con el tensor de tensiones de Cauchy definido en la configuración tV .

Teniendo en cuenta la definición dada por la ecuación (2.5.3), la ecuación (2.5.1) puede ser reescrita como

$${}_r \Delta S_{ij} = {}_r D_{ijkl} {}_r \Delta \varepsilon_{kl} \quad (2.5.9)$$

Sustituyendo la ecuación (2.4.6) en la ecuación (2.5.9) se obtiene

$${}_r \Delta S_{ij} = {}_r D_{ijkl} ({}_r e_{kl} + {}_r \eta_{kl}) \quad (2.5.10)$$

A partir de la ecuación (2.5.10) se puede definir el término ${}_r \Delta S_{ij}^{1ord} = {}_r D_{ijkl} {}_r e_{kl}$ que representa el incremento de tensiones de primer orden, y, por otro lado, el término ${}_r \Delta S_{ij}^{2ord} = {}_r D_{ijkl} {}_r \eta_{kl}$ que denota el incremento de tensiones de segundo orden. Estos términos tienen una participación importante a la hora de aclarar el significado físico de algunas matrices que forman parte de la expresión general de la matriz de rigidez secante.

Finalmente, haciendo uso de las ecuaciones (2.5.10) y (2.5.8) se puede reescribir la expresión del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff en la configuración ${}^{t+\Delta t}V$ como

$${}^{t+\Delta t}{}_r S_{ij} = {}^t{}_r S_{ij} + {}_r D_{ijkl} ({}_r e_{kl} + {}_r \eta_{kl}) \quad (2.5.11)$$

Los tensores definidos hasta ahora han sido siempre representados con respecto a la configuración de referencia rV , de acuerdo con la formulación *Lagrangiana Generalizada*.

2.5.1 Forma matricial de los tensores de tensiones y de incremento de tensiones

Para la implementación numérica es necesario expresar matricialmente los tensores definidos en el apartado anterior. Para representar los tensores de tensiones en las configuraciones tV y ${}^{t+\Delta t}V$ y el tensor de incremento de tensiones entre dichas configuraciones se definen las siguientes matrices columna

$${}^{t+\Delta t}{}_r\mathbf{S} = [{}^t{}_rS_{11}, {}^t{}_rS_{22}, {}^t{}_rS_{33}, {}^t{}_rS_{12}, {}^t{}_rS_{13}, {}^t{}_rS_{23}]^T \quad (2.5.12a)$$

$${}^t{}_r\mathbf{S} = [{}^t{}_rS_{11}, {}^t{}_rS_{22}, {}^t{}_rS_{33}, {}^t{}_rS_{12}, {}^t{}_rS_{13}, {}^t{}_rS_{23}]^T \quad (2.5.12b)$$

$${}_r\Delta\mathbf{S} = [{}_r\Delta S_{11}, {}_r\Delta S_{22}, {}_r\Delta S_{33}, {}_r\Delta S_{12}, {}_r\Delta S_{13}, {}_r\Delta S_{23}]^T \quad (2.5.12c)$$

Los tensores de cuarto orden se representan por matrices cuadradas. Por ejemplo, el tensor de elasticidad tangente ${}_rD_{ijkl}$, definido en la ecuación (2.5.4), tiene la siguiente representación matricial

$${}_r\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (2.5.13)$$

La contracción entre dos tensores de segundo orden se reemplaza por el producto interno, y la aplicación de un tensor de cuarto orden a uno de segundo orden se reduce a una transformación matricial, por ejemplo,

$$\left. \begin{aligned} {}^{t+\Delta t}{}_rS_{ij} \quad {}^{t+\Delta t}{}_r\varepsilon_{ij} &\iff {}^{t+\Delta t}{}_r\mathbf{S}^T \quad {}^{t+\Delta t}{}_r\boldsymbol{\varepsilon} \\ {}_r\Delta S_{ij} = {}_rD_{ijkl} \quad {}_r\Delta\varepsilon_{kl} &\iff {}_r\Delta\mathbf{S} = {}_r\mathbf{D} \quad {}_r\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \right\} \quad (2.5.14)$$

Utilizando estos criterios la ecuación (2.5.11) se reescribe como

$${}^{t+\Delta t}{}_r\mathbf{S} = {}^t{}_r\mathbf{S} + {}_r\mathbf{D} ({}_r\mathbf{e} + {}_r\boldsymbol{\eta}) \quad (2.5.15a)$$

con

$${}_r\Delta\mathbf{S} = {}_r\mathbf{D} ({}_r\mathbf{e} + {}_r\boldsymbol{\eta}) \quad (2.5.15b)$$

donde ${}^t_r\mathbf{S}$ expresa las tensiones correspondientes a la configuración tV y ${}_r\Delta\mathbf{S}$ el incremento de tensiones entre los instantes t y $t + \Delta t$. Nótese que el término ${}_r\Delta\mathbf{S}^{1ord} = {}_r\mathbf{D} {}_r\mathbf{e}$ corresponde al incremento de tensiones de primer orden, que coincide con el incremento de tensiones de la elasticidad infinitesimal. Por otro lado, el término ${}_r\Delta\mathbf{S}^{2ord} = {}_r\mathbf{D} {}_r\boldsymbol{\eta}$ representa el incremento de tensiones de segundo orden que aparece debido al término cuadrático en la medida de deformación del tensor de Green-Lagrange.

En el apartado 2.4 se han definido las relaciones cinemáticas básicas y en este apartado el modelo constitutivo necesario para describir el proceso de deformación incremental de $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$ en el intervalo de tiempo $[0, T]$.

En el próximo apartado se impone la condición de equilibrio sobre una partícula arbitraria \mathcal{X} del cuerpo \mathcal{B} en la configuración ${}^{t+\Delta t}V$ a través del principio de los trabajos virtuales.

2.6 ECUACIONES INCREMENTALES DE EQUILIBRIO

En la ecuación (2.3.3) se ha escrito la forma variacional de las ecuaciones no lineales de equilibrio, donde los tensores de deformación y de tensión son Eulerianos. En este apartado se escribe la forma variacional de las ecuaciones de equilibrio de manera incremental utilizando la descripción Lagrangiana Generalizada. Los tensores lagrangianos de deformación y tensión, las fuerzas de volumen y de superficie, definidos en la configuración ${}^{t+\Delta t}V$, se expresan en función de las coordenadas $({}^r x_1, {}^r x_2, {}^r x_3)$ de la configuración de referencia rV .

La condición de equilibrio de $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$ en la configuración ${}^{t+\Delta t}V$, expresada con respecto a la configuración de referencia rV , aplicando el principio de los trabajos virtuales, se escribe como

$$\int_{{}^rV} \delta^{t+\Delta t} {}_r\varepsilon_{ij} {}^{t+\Delta t} {}_rS_{ij} dV = {}^{t+\Delta t} \mathcal{R} \quad (2.6.1)$$

con

$${}^{t+\Delta t} \mathcal{R} = \int_{{}^rV} \delta^{t+\Delta t} u_i {}^{t+\Delta t} {}_r f_i^B dV + \int_{{}^rS_f} \delta^{t+\Delta t} u_i {}^{t+\Delta t} {}_r f_i^S dS \quad (2.6.2)$$

donde ${}^{t+\Delta t} \mathcal{R}$ es el trabajo virtual de las fuerzas externas en el instante $t + \Delta t$. La expresión ${}^{t+\Delta t} {}_r f_i^B = {}^r \rho {}^{t+\Delta t} \bar{f}_i^B$ representa las fuerzas de volumen que actúan sobre el sólido en el instante $t + \Delta t$, expresada en la configuración de referencia rV . \bar{f}_i^B está definida en la ecuación (2.3.1). Las fuerzas de superficie que actúan sobre el sólido en el instante $t + \Delta t$, expresadas en la configuración rV , se expresan por ${}^{t+\Delta t} {}_r f_i^S = \frac{{}^{t+\Delta t} dS}{{}^r dS} {}^{t+\Delta t} \bar{f}_i^S$.

Las fuerzas de volumen y de superficie de la ecuación (2.3.3) se refieren a su valor en el instante $t + \Delta t$, lo cual les confiere un carácter no-conservativo, en el sentido de que dependen del nivel de deformación en el estado de equilibrio. Sin embargo, en muchos casos del cálculo de estructuras, estas fuerzas son conservativas. Por ejemplo, si las fuerzas de volumen son debidas al peso propio, el peso por unidad de masa no varía con la deformación, y dichas fuerzas serán conservativas. También las fuerzas de superficie pueden serlo, en el caso de cargas repartidas en las que sea factible la hipótesis ${}^{t+\Delta t}f_i^s \, {}_r dS = {}^{t+\Delta t}f_i^s \, {}^{t+\Delta t}dS$. Una carga puntual será conservativa mientras no varíe de magnitud y dirección con la deformación. En este trabajo se supone que las fuerzas exteriores son conservativas y, por tanto, independientes de la deformación y que son conocidas al inicio de cada paso de carga.

Así pues, si las fuerzas exteriores son conservativas, la ecuación (2.6.2), tanto para la formulación LT (${}^r V = {}^0 V$) como para la formulación LA (${}^r V = {}^t V$), puede escribirse de la forma

$${}^{t+\Delta t}\mathcal{R} = \int_{{}^0 V} \delta^{t+\Delta t} u_i \, {}^{t+\Delta t}f_i^B \, dV + \int_{{}^0 S_f} \delta^{t+\Delta t} u_i \, {}^{t+\Delta t}f_i^S \, dS \quad (2.6.3)$$

donde ${}^{t+\Delta t}f_i^B = {}^0\rho \, {}^{t+\Delta t}\bar{f}_i^B$ son las fuerzas de volumen que actúan sobre el sólido en el instante $t + \Delta t$, expresadas en términos de las coordenadas iniciales $({}^0x_1, {}^0x_2, {}^0x_3)$ y ${}^{t+\Delta t}f_i^S$ las fuerzas de superficie que actúan sobre el sólido en el instante $t + \Delta t$, expresadas en términos de las coordenadas iniciales $({}^0x_1, {}^0x_2, {}^0x_3)$.

Sustituyendo las ecuaciones (2.4.10) y (2.5.11) en el primer miembro de la ecuación (2.6.1), ésta se reescribe como

$$\int_{{}^r V} [\delta_r e_{ij} \, {}_r D_{ijkl} \, {}_r e_{kl} + \underbrace{\delta_r e_{ij} \, {}_r D_{ijkl} \, {}_r \eta_{kl} + \delta_r \eta_{ij} \, {}_r D_{ijkl} \, {}_r e_{kl}}_{\text{términos no lineales en } {}_r \Delta u_{i,j}} + \underbrace{\delta_r \eta_{ij} \, {}_r D_{ijkl} \, {}_r \eta_{kl}}_{\text{cúbicos en } {}_r \Delta u_{i,j}} + \delta_r \eta_{ij} \, {}_r^t S_{ij}] \, dV = {}^{t+\Delta t}\mathcal{R} - \int_{{}^r V} \delta_r e_{ij} \, {}_r^t S_{ij} \, dV \quad (2.6.4)$$

En la ecuación (2.6.4) se expresa la *forma incremental completa* del principio de los trabajos virtuales aplicado a la partícula $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$. Esta ecuación es la base para la obtención de las ecuaciones de equilibrio incrementales al discretizarla por el método de elementos finitos. Nótese que el segundo miembro de (2.6.4) es independiente del gradiente del incremento de desplazamientos ${}_r \Delta u_{i,j}$ y expresa las fuerzas residuales o en desequilibrio después de la discretización

por elementos finitos. Por otro lado, en el primer miembro de (2.6.4) todos los términos son dependientes del gradiente del incremento de desplazamientos ${}^r\Delta u_{i,j}$. En particular, los términos subrayados son funciones cuadráticas y cúbicas en ${}^r\Delta u_{i,j}$ como se indica en (2.6.4). La consideración de los términos no lineales en ${}^r\Delta u_{i,j}$ es básica para la obtención de la matriz de rigidez secante. En la linealización de la ecuación (2.6.4) se desprecian estos términos, lo que conduce a la obtención de la expresión de la matriz de rigidez tangente. La obtención de estas dos matrices será el tema del próximo capítulo.

• Forma matricial de la ecuación incremental de equilibrio

La forma vectorial de las fuerzas de volumen y de superficie que actúan sobre $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$ en el instante $t + \Delta t$ y cuyas componentes están expresadas en función de las coordenadas $({}^r x_1, {}^r x_2, {}^r x_3)$ de la configuración de referencia rV , se definen como

$${}^{t+\Delta t}{}^r\mathbf{f}^B = [{}^{t+\Delta t}{}^r f_1^B, {}^{t+\Delta t}{}^r f_2^B, {}^{t+\Delta t}{}^r f_3^B]^T \quad (2.6.5a)$$

$${}^{t+\Delta t}{}^r\mathbf{f}^S = [{}^{t+\Delta t}{}^r f_1^S, {}^{t+\Delta t}{}^r f_2^S, {}^{t+\Delta t}{}^r f_3^S]^T \quad (2.6.5b)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (2.6.5) y (2.4.13b), la ecuación (2.6.2) se reescribe en forma vectorial como

$${}^{t+\Delta t}\mathcal{R} = \int_{{}^rV} \delta(\Delta \mathbf{u})^T {}^{t+\Delta t}{}^r\mathbf{f}^B dV + \int_{{}^rS_f} \delta(\Delta \mathbf{u})^T {}^{t+\Delta t}{}^r\mathbf{f}^S dV \quad (2.6.6)$$

Haciendo uso de las ecuaciones (2.4.21), (2.5.15) y las relaciones definidas en (2.5.14), la forma matricial de la ecuación (2.6.4) se escribe como

$$\begin{aligned} \int_{{}^rV} [\delta_r \mathbf{e}^T {}^r\mathbf{D} {}^r\mathbf{e} + \underbrace{(\delta_r \mathbf{e}^T {}^r\mathbf{D} {}^r\boldsymbol{\eta} + \delta_r \boldsymbol{\eta}^T {}^r\mathbf{D} {}^r\mathbf{e})}_{\text{términos no lineales en } {}^r\mathbf{g}} + \underbrace{\delta_r \boldsymbol{\eta}^T {}^r\mathbf{D} {}^r\boldsymbol{\eta}}_{\text{cúbicos en } {}^r\mathbf{g}} + \delta_r \boldsymbol{\eta}^T {}^r\mathbf{S}] dV = \\ = {}^{t+\Delta t}\mathcal{R} - \int_{{}^rV} \delta_r \mathbf{e}^T {}^r\mathbf{S} dV \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

Las consideraciones hechas respecto a la ecuación (2.6.4) son válidas para la ecuación (2.6.7).

Nótese que haciendo uso de las ecuaciones (2.4.15) y (2.4.20), la ecuación (2.6.7) puede expresarse también en función de los gradientes del desplazamiento

inicial ${}^t\mathbf{g}$, del incremento de desplazamiento ${}_r\mathbf{g}$ y de la variación virtual del incremento de desplazamiento $\delta_r\mathbf{g}$. En las referencias FELIPPA y CRIVELLI [1991] y FELIPPA, CRIVELLI y HAUGEN [1994] se presenta una forma bastante compacta para la ecuación (2.6.7) escrita en función de estos gradientes de desplazamientos utilizando la formulación LT.

En este capítulo se han planteado las relaciones cinemáticas y de equilibrio de una partícula arbitraria \mathcal{X} del cuerpo \mathcal{B} . En el próximo capítulo, estas relaciones serán definidas en función de incógnitas (desplazamientos nodales) en puntos discretos del sólido (desplazamientos nodales) a través de la discretización del dominio \mathcal{B} por elementos finitos.

2.7 COMPARACIÓN ENTRE LAS VARIABLES CINEMÁTICAS Y ESTÁTICAS OBTENIDAS EN LAS FORMULACIONES LA-GRANGIANA TOTAL Y ACTUALIZADA

En este apartado se particularizan las ecuaciones incrementales de equilibrio (2.6.4) para las formulaciones LT y LA. Se demuestra que las ecuaciones de equilibrio obtenidas en la configuración indeformada 0V con la formulación LT son idénticas a las obtenidas en la configuración deformada tV basadas en la formulación LA.

Con esta finalidad se definen los tensores de gradiente de deformaciones entre las configuraciones 0V , tV y ${}^{t+\Delta t}V$ (ver Figura 2.3).

Sea ${}^{t+\Delta t}{}_0F_{ij}$ el tensor gradiente de deformación de una partícula arbitraria \mathcal{X} del sólido \mathcal{B} entre las configuraciones 0V y ${}^{t+\Delta t}V$. Las coordenadas de $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$ en el instante $t + \Delta t$ vienen dadas por

$${}^{t+\Delta t}x_i = {}^0x_i + {}^t u_i + \Delta u_i \quad (2.7.1)$$

El tensor gradiente de deformación se puede escribir entonces como

$${}^{t+\Delta t}{}_0F_{ij} = \frac{\partial {}^{t+\Delta t}x_i}{\partial {}^0x_j} = \delta_{ij} + {}^t u_{i,j} + {}_0\Delta u_{i,j} \quad (2.7.2)$$

donde ${}^t u_{i,j} = \partial {}^t u_i / \partial {}^0x_j$ es el gradiente del desplazamiento inicial respecto a las coordenadas ${}^0x_i \in {}^0V$, ${}_0\Delta u_{i,j} = \partial \Delta u_i / \partial {}^0x_j$ es el gradiente del incremento de desplazamiento respecto a las mismas coordenadas y δ_{ij} es la delta de Kronecker.

Sea ${}^t{}_0F_{ij}$ el tensor gradiente de deformación de $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$ entre las configuraciones 0V y tV . Las coordenadas de $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$ en el instante t están definidas en (2.4.1). De esta manera, se puede escribir la expresión de este tensor como

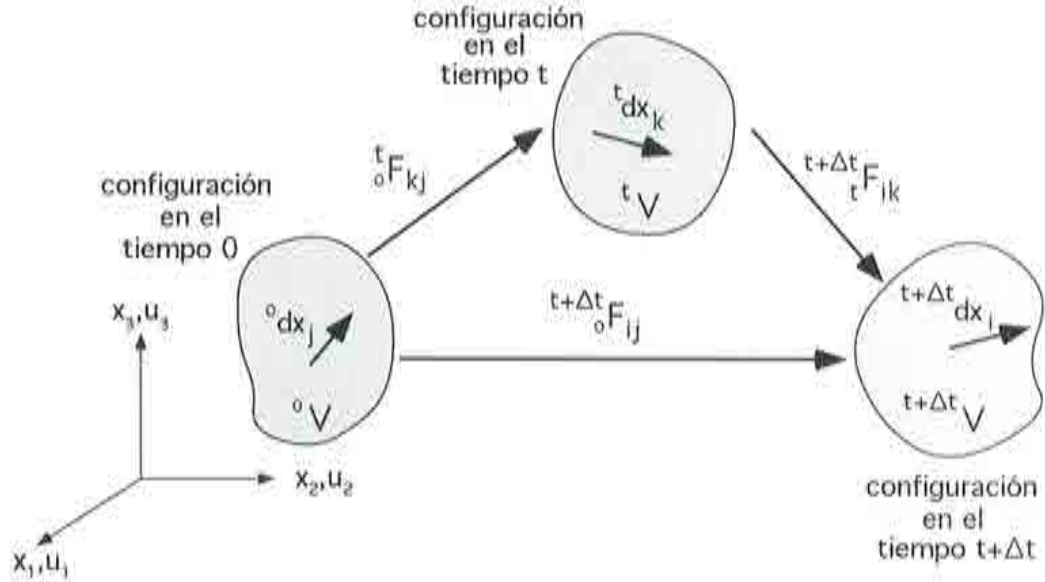


Figura 2.3 Tensores gradientes de deformación de una partícula del sólido durante su movimiento respecto a un sistema de coordenadas Cartesiano estacionario

$${}^tF_{ij} = \frac{\partial {}^tx_i}{\partial {}^0x_j} = \delta_{ij} + {}^tu_{i,j} \quad (2.7.3)$$

donde ${}^tu_{i,j}$ es el gradiente del desplazamiento inicial respecto a las coordenadas ${}^0x_i \in {}^0V$.

Por último, se define como ${}^{t+\Delta t}F_{ij}$ el tensor gradiente del incremento de deformación de $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$ entre las configuraciones tV y ${}^{t+\Delta t}V$. De acuerdo con la ecuación (2.4.3), la expresión de este tensor tiene la siguiente forma

$${}^{t+\Delta t}F_{ij} = \frac{\partial {}^{t+\Delta t}x_i}{\partial {}^tx_j} = \delta_{ij} + {}^t\Delta u_{i,j} \quad (2.7.4)$$

donde ${}^t\Delta u_{i,j} = \partial \Delta u_i / \partial {}^tx_j$ es el gradiente del incremento de desplazamiento respecto a las coordenadas ${}^tx_i \in {}^tV$.

2.7.1 Relación entre los tensores gradientes de la deformación

Debido al teorema de la descomposición polar el tensor gradiente de deformación puede describir el estiramiento y la rotación entre dos configuraciones de equilibrio cualquiera. Sea dx_i un vector infinitesimal perteneciente al cuerpo \mathcal{B} , $dx_i \in \mathcal{B}$. Este mismo vector en las configuraciones 0V , tV y ${}^{t+\Delta t}V$ se denota como 0dx_i , tdx_i y ${}^{t+\Delta t}dx_i$, respectivamente.

Teniendo en cuenta los tensores gradientes de deformación definidos en las ecuaciones (2.7.2), (2.7.3) y (2.7.4), se pueden escribir las siguientes relaciones entre estos vectores infinitesimales como

$$\left. \begin{aligned} {}^{t+\Delta t}dx_i &= {}^{t+\Delta t}{}_0F_{ij} {}^0dx_j \\ {}^tdx_i &= {}^t{}_0F_{ij} {}^0dx_j \\ {}^{t+\Delta t}dx_i &= {}^{t+\Delta t}{}_tF_{ij} {}^tdx_j \end{aligned} \right\} \quad (2.7.5)$$

Sustituyendo la ecuación (2.7.5b) en (2.7.5c), y permutando los índices de acuerdo con las reglas de la notación indicial, se obtiene la siguiente expresión

$${}^{t+\Delta t}dx_i = {}^{t+\Delta t}{}_tF_{ik} {}^t{}_0F_{kj} {}^0dx_j \quad (2.7.6a)$$

Comparando la ecuación (2.7.6a) con la definición dada por la ecuación (2.7.5a) se concluye que el tensor gradiente de deformación en el instante $t + \Delta t$ respecto a la configuración 0V se relaciona con los demás tensores gradientes de deformación de la siguiente forma

$$\boxed{{}^{t+\Delta t}{}_0F_{ij} = {}^{t+\Delta t}{}_tF_{ik} {}^t{}_0F_{kj}} \quad (2.7.6b)$$

2.7.2 Relación entre los gradientes de incremento de desplazamientos

Partiendo de las relaciones cinemáticas definidas en las ecuaciones (2.7.2), (2.7.3) y (2.7.4) se deduce la relación entre los gradientes de incremento de desplazamiento respecto a las coordenadas ${}^0x_i \in {}^0V$ y ${}^tx_i \in {}^tV$. De esta manera, sustituyendo la ecuación (2.7.3) en (2.7.2), el gradiente de incremento de desplazamiento respecto a las coordenadas ${}^0x_i \in {}^0V$ se escribe en función de los tensores gradientes de deformación, ${}^{t+\Delta t}{}_0F_{ij}$ y ${}^t{}_0F_{ij}$, como

$${}^0\Delta u_{i,j} = {}^{t+\Delta t}{}_0F_{ij} - {}^t{}_0F_{ij} \quad (2.7.7)$$

De la definición del gradiente de incremento de desplazamiento respecto a las coordenadas ${}^t x_i \in {}^t V$ en (2.7.4) y de la relación expresada en (2.7.6b) la ecuación (2.7.7) se reescribe como

$$\boxed{{}_0\Delta u_{i,j} = {}^t\Delta u_{i,k} {}^tF_{kj}} \quad (2.7.8)$$

A partir de esta relación se pueden definir las relaciones entre los tensores de incremento de deformación escritos en función de las coordenadas de las configuraciones 0V y tV .

2.7.3 Relación entre los tensores de incremento de deformaciones

Los tensores de incremento de deformación de primer y segundo orden en la descripción LT se escriben como

$${}_0e_{ij} = \frac{1}{2} ({}_0\Delta u_{i,j} + {}_0\Delta u_{j,i} + {}^t u_{k,i} {}_0\Delta u_{k,j} + {}_0\Delta u_{k,i} {}^t u_{k,j}) \quad (2.7.9a)$$

$${}_0\eta_{ij} = \frac{1}{2} {}_0\Delta u_{k,i} {}_0\Delta u_{k,j} \quad (2.7.9b)$$

Sustituyendo (2.7.8) en (2.7.9a) y observando las reglas con operaciones indiciales, la ecuación (2.7.9a) después de efectuar algunas operaciones algebraicas se puede escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} {}_0e_{ij} = \frac{1}{2} (& {}^t\Delta u_{i,m} {}^tF_{mj} + {}^t\Delta u_{j,m} {}^tF_{mi} + \\ & + {}^t u_{k,i} {}^t\Delta u_{k,m} {}^tF_{mj} + {}^t\Delta u_{k,m} {}^tF_{mi} {}^t u_{k,j}) \end{aligned} \quad (2.7.10)$$

En la ecuación (2.7.3) se puede despejar el término ${}^t u_{i,j}$ como ${}^t u_{i,j} = {}^tF_{ij} - \delta_{ij}$. Sustituyendo este término en (2.7.10) y operando nuevamente se llega a la siguiente expresión

$${}_0e_{ij} = {}^tF_{ki} {}^tF_{mj} \frac{1}{2} ({}^t\Delta u_{k,m} + {}^t\Delta u_{m,k}) \quad (2.7.11a)$$

con

$${}^t e_{km} = \frac{1}{2} ({}^t\Delta u_{k,m} + {}^t\Delta u_{m,k}) \quad (2.7.11b)$$

donde ${}^t e_{km}$ es el tensor de incremento de deformación de primer orden entre los instantes t y $t + \Delta t$ definido en términos de las coordenadas ${}^t x_i \in {}^t V$.

Por consiguiente, la relación entre los tensores de incremento de deformación de primer orden descritos en las formulaciones LT y LA se expresa como

$$\boxed{{}_0e_{ij} = {}^tF_{ki} {}^tF_{mj} {}^te_{km}} \quad (2.7.12)$$

Por otro lado, al sustituir la ecuación (2.7.8) en (2.7.9b) se llega a la siguiente expresión

$${}_0\eta_{ij} = {}^tF_{mi} {}^tF_{nj} \frac{1}{2} {}^t\Delta u_{k,m} {}^t\Delta u_{k,n} \quad (2.7.13a)$$

con

$${}^t\eta_{mn} = \frac{1}{2} {}^t\Delta u_{k,m} {}^t\Delta u_{k,n} \quad (2.7.13b)$$

donde ${}^t\eta_{mn}$ es el tensor de incremento de deformación de segundo orden entre los instantes t y $t + \Delta t$ definido en términos de las coordenadas ${}^tx_i \in {}^tV$. Por lo tanto, la relación entre los tensores de incremento de deformación de segundo orden descritos en las formulaciones LT y LA se escribe como

$$\boxed{{}_0\eta_{ij} = {}^tF_{mi} {}^tF_{nj} {}^t\eta_{mn}} \quad (2.7.14)$$

Al aplicarse una variación virtual en el campo de desplazamientos en el instante $t + \Delta t$ se consideran fijas todas las configuraciones de equilibrio previas hasta el instante t . De este modo, de las ecuaciones (2.4.9a) y (2.7.3) se concluye que la variación virtual del tensor gradiente de la deformación entre las configuraciones 0V y tV es nula; esto es, $\delta({}^tF_{ij}) = 0$.

Así, la variación virtual de las relaciones definidas en las ecuaciones (2.7.12) y (2.7.14) se escribe como

$$\left. \begin{aligned} \delta({}_0e_{ij}) &= {}^tF_{ki} {}^tF_{mj} \delta({}^te_{km}) \\ \delta({}_0\eta_{ij}) &= {}^tF_{mi} {}^tF_{nj} \delta({}^t\eta_{mn}) \end{aligned} \right\} \quad (2.7.15)$$

Hasta este punto se han establecido las relaciones cinématicas básicas entre las variables descritas en las formulaciones LT y LA. En el próximo apartado se definen las relaciones entre las variables estáticas.

2.7.4 Relación entre los tensores de incremento de tensiones

Sea ${}^{t+\Delta t}{}_0S_{ij}$ el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff en la configuración ${}^{t+\Delta t}V$, representado en términos de las coordenadas ${}^0x_i \in {}^0V$ y ${}^{t+\Delta t}{}_tS_{ij}$ el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff en la configuración ${}^{t+\Delta t}V$, escrito respecto a las coordenadas ${}^tx_i \in {}^tV$. El tensor ${}^{t+\Delta t}{}_0S_{ij}$ se utiliza en la formulación LT, mientras que el tensor ${}^{t+\Delta t}{}_tS_{ij}$ se adopta en la descripción LA:

Estos tensores pueden descomponerse en forma incremental como

$$\left. \begin{aligned} {}^{t+\Delta t}{}_0S_{ij} &= {}^t_0S_{ij} + {}_0\Delta S_{ij} && \text{en la LT} \\ {}^{t+\Delta t}{}_tS_{ij} &= {}^t\sigma_{ij} + {}_t\Delta S_{ij} \text{ nótese que } {}^t_0S_{ij} = {}^t\sigma_{ij} && \text{en la LA} \end{aligned} \right\} \quad (2.7.16)$$

El objetivo de este apartado es determinar la relación entre los tensores de incremento de tensiones ${}_0\Delta S_{ij}$ y ${}_t\Delta S_{ij}$ a partir de la relación entre el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff y el tensor de tensiones de Cauchy, (ver MALVERN [1969], cap.5).

De esta manera, los segundos tensores de tensiones de Piola-Kirchhoff en el instante $t + \Delta t$ descritos en las formulaciones LT y LA se relacionan con el tensor de tensiones de Cauchy definido en este instante como

$${}^{t+\Delta t}{}_0S_{ij} = \det({}^{t+\Delta t}{}_0F_{rs}) {}^{t+\Delta t}{}_0F_{im}^{-1} {}^{t+\Delta t}{}_0F_{jn}^{-1} {}^{t+\Delta t}\sigma_{mn} \quad (2.7.17a)$$

$${}^{t+\Delta t}{}_tS_{ij} = \det({}^{t+\Delta t}{}_tF_{rs}) {}^{t+\Delta t}{}_tF_{im}^{-1} {}^{t+\Delta t}{}_tF_{jn}^{-1} {}^{t+\Delta t}\sigma_{mn} \quad (2.7.17b)$$

Se puede eliminar fácilmente el tensor ${}^{t+\Delta t}\sigma_{mn}$ a partir de la ecuación (2.7.17a), y teniendo en cuenta (2.7.6b) y las reglas de las operaciones indiciales, la ecuación (2.7.17b) se reescribe como

$$\boxed{{}^{t+\Delta t}{}_tS_{ij} = [\det({}^t_0F_{mn})]^{-1} {}^t_0F_{ir} {}^t_0F_{js} {}^{t+\Delta t}{}_0S_{rs}} \quad (2.7.18)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.7.16) en (2.7.18), ésta se reescribe como

$${}^t\sigma_{ij} + {}_t\Delta S_{ij} = [\det({}^t_0F_{mn})]^{-1} {}^t_0F_{ir} {}^t_0F_{js} ({}^t_0S_{ij} + {}_0\Delta S_{ij}) \quad (2.7.19)$$

Utilizando la expresión ${}^t\sigma_{ij} = [\det({}^t_0F_{mn})]^{-1} {}^t_0F_{ir} {}^t_0F_{js} {}^t_0S_{rs}$ que relaciona el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff con el tensor de tensiones

de Cauchy en la configuración tV , se obtiene finalmente la relación entre los incrementos de tensiones utilizados en las formulaciones LT y LA. Esta relación tiene la siguiente expresión

$$\boxed{{}^t\Delta S_{ij} = [\det({}^t_0F_{mn})]^{-1} {}^t_0F_{ir} {}^t_0F_{js} {}_0\Delta S_{rs}} \quad (2.7.20)$$

2.7.5 Relación entre las ecuaciones incrementales de equilibrio

Una vez que las relaciones entre las variables cinemáticas, las variables estáticas y los tensores constitutivos descritas en las formulaciones LT y LA han sido definidas, se procede a continuación a demostrar la equivalencia entre las ecuaciones incrementales de equilibrio obtenidas en las formulaciones LT y LA.

Como punto de partida se escribe la forma material de la ecuación de conservación de masa en función de los tensores gradientes de la deformación definidos en las configuraciones 0V , tV y ${}^{t+\Delta t}V$. Así se obtienen las siguientes expresiones para la ecuación de conservación de masa entre las configuraciones 0V , tV y ${}^{t+\Delta t}V$

$$\left. \begin{aligned} {}^0dV &= \det({}^{t+\Delta t}_0F_{ij}) {}^{t+\Delta t}dV \\ {}^0dV &= \det({}^t_0F_{kj}) {}^tdV \\ {}^tdV &= \det({}^{t+\Delta t}_tF_{ik}) {}^{t+\Delta t}dV \end{aligned} \right\} \quad (2.7.21)$$

Se analizan ahora los términos que forman parte de la expresión de equilibrio en (2.6.4). Obsérvese que hay dos términos en los cuales aparece el tensor de tensiones ${}^t_rS_{ij}$ y los demás dependen del tensor constitutivo ${}^rD_{ijkl}$. Por otro lado, nótese que la expresión que relaciona los tensores ${}^0e_{ij}$ y ${}^te_{kl}$ en (2.7.12), los tensores ${}^0\eta_{ij}$ y ${}^t\eta_{kl}$ en (2.7.14) y sus variaciones virtuales en (2.7.15) es la misma. Por lo tanto, para demostrar que la ecuación incremental de equilibrio en (2.6.4) obtenida en la descripción LT es idéntica a la deducida para la formulación LA es suficiente demostrar tal igualdad solamente para dos términos de (2.6.4). De esta manera, se puede elegir uno cualquiera de los términos que dependen de ${}^rD_{ijkl}$ y otro de los que dependen de ${}^t_rS_{ij}$.

Los pasos para realizar dicha demostración se describen a continuación. Como primer paso, se escoge el primer término del miembro izquierdo de (2.6.4) que se describe en la configuración actualizada tV (LA). Seguidamente se reemplaza el tensor constitutivo ${}^tD_{ijkl}$ que aparece en este término por (2.5.5). Después se reordenan los términos de acuerdo con las reglas de la notación indicial. Finalmente, teniendo en cuenta las ecuaciones (2.7.12), (2.7.15a), juntamente con (2.7.21b), se llega a la expresión corres-

pendiente a este término expresada en la configuración 0V (LT). Las expresiones analíticas de este desarrollo algebraico se describen de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 \int_{{}^tV} \delta {}_t e_{ij} {}_t D_{ijkl} {}_t e_{kl} {}^t dV &= \\
 &= \int_{{}^tV} \delta {}_t e_{ij} \left([\det({}^t_0 F_{mn})]^{-1} {}^t_0 F_{ip} {}^t_0 F_{jq} {}^t_0 F_{kr} {}^t_0 F_{ls} {}_0 D_{pqrs} \right) {}_t e_{kl} {}^t dV \\
 &= \int_{{}^tV} \left({}^t_0 F_{ip} {}^t_0 F_{jq} \delta {}_t e_{ij} \right) {}_0 D_{pqrs} \left({}^t_0 F_{kr} {}^t_0 F_{ls} {}_t e_{kl} \right) [\det({}^t_0 F_{mn})]^{-1} {}^t dV \\
 &= \int_{{}^0V} \delta {}_0 e_{pq} {}_0 D_{pqrs} {}_0 e_{rs} {}^0 dV \tag{2.7.22}
 \end{aligned}$$

Ahora se escoge el último término del miembro izquierdo de (2.6.4), describiéndolo en la configuración actualizada tV (LA). La utilización de la relación ${}^t \sigma_{ij} = [\det({}^t_0 F_{mn})]^{-1} {}^t_0 F_{ir} {}^t_0 F_{js} {}^t_0 S_{rs}$, de la ecuación (2.7.15a), juntamente con (2.7.20b), permite formular la siguiente expresión para este término en la configuración material 0V

$$\begin{aligned}
 \int_{{}^tV} \delta {}_t \eta_{ij} {}^t \sigma_{ij} {}^t dV &= \int_{{}^tV} \delta {}_t \eta_{ij} \left([\det({}^t_0 F_{mn})]^{-1} {}^t_0 F_{ip} {}^t_0 F_{jq} {}^t_0 S_{pq} \right) {}^t dV \\
 &= \int_{{}^tV} \left({}^t_0 F_{ip} {}^t_0 F_{jq} \delta {}_t \eta_{ij} \right) {}^t_0 S_{pq} [\det({}^t_0 F_{mn})]^{-1} {}^t dV \\
 &= \int_{{}^0V} \delta {}_0 \eta_{pq} {}^t_0 S_{pq} {}^0 dV \tag{2.7.23}
 \end{aligned}$$

De este modo, se ha demostrado que cada término de la ecuación incremental de equilibrio en la formulación LA tiene su correspondencia en la formulación LT. Esto no quiere decir que se obtendrán los mismos resultados numéricos basados en estas formulaciones ya que de acuerdo con la ecuación (2.5.5) se trata con modelos constitutivos distintos. Sólo bajo las hipótesis de deformaciones infinitesimales, material isótropo y homogéneo se obtienen resultados numéricos idénticos utilizando ambas formulaciones.

2.8 REFERENCIAS

- BATHE, K.J.; RAMM, E. and WILSON, E.L. [1975], Inestability analysis of free form shells by finite elements, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 9, nº 2, pp. 353-386.
- BATHE, K.J. [1996], *Finite element procedures*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- CESSOTTO, S. [1978], Etude par elements finis des grands déplacements et grandes deformations. Application aux problemes specifiques des materiaux quasi incompressibles. Thèse de Doctorat, Faculte des Sciences Appliquees, Université de Liège.
- FELIPPA, C. and CRIVELLI, L.A. [1991], The core congruential formulation of geometrically non linear finite elements. in *Non Linear Computational Mechanics. The State of the Art.*, P. Wriggers and W. Wagner (eds.), Springer-Verlag, Berlin.
- FELIPPA, C.; CRIVELLI, L.A.; HAUGEN, B. [1994], A survey of the core-congruential formulation for geometrically nonlinear TL finite elements, *Archives of Comp. Meth. in Eng.*, Vol. 1, nº 1, pp. 1-48.
- FREY, F. [1978a], Analyse statique non linéaire des structures par la méthode des éléments finis et son application à la construction métallique. Thèse de Doctorat, Lab. Mécanique des Matériaux et Statique des Constructions, Université de Liège.
- FREY, F. and CESSOTTO, S. [1978b], Some new aspects of the incremental total lagrangian description in non linear analysis in *Finite Element in non linear Mechanics*, edited by P. Bergan et al., Tapir Publishers, Univ. of Trondheim.
- GARINO, G. y OLIVER, J. [1988], Estudio comparativo de la influencia de la ecuación constitutiva en la respuesta de sólidos elásticos sometidos a grandes deformaciones, MECOM 88, Córdoba, Argentina.
- HORRIGMOE, G. [1970], Non linear finite element models in solid mechanics, Report 76-2, Norwegian Inst. Tech., Univ. Trondheim.
- HUGHES, T.J.R. and PISTER, K.S. [1978], Consistent linearization in mechanics of solids and structures, *Computer & Structures*, Vol. 8, pp. 391-397.
- KLEIBER, M., [1989], *Incremental Finite Element Modelling in Non-Linear Solid Mechanics*, Ellis Horwood Limited, Chichester.
- LARSEN, P.K. [1971], Large displacement analysis of shells of revolution including creep, plasticity and viscoplasticity, Report UC SESM 71-22, Univ. of California, Berkeley.

MALVERN, L. [1969], *An Introduction to the Mechanics of a Continuous Media*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

MONDKAR, D.P. and POWELL, G.H. [1977], Finite element analysis of non linear static and dynamic response, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 11, nº 2, pp. 499–520.

PERIĆ, D. [1992], On consistent stress rates in solid mechanics: computational implications, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 33, pp. 799-817.

YAGHMAI, S. [1968], Incremental analysis of large deformations in mechanics of solids with applications to axisymmetric shells of revolution, Report Nº SESM 68–17, Univ. of California, Berkeley.

ZIENKIEWICZ, O. C; TAYLOR, R. L. [1994a], *El Método de los Elementos Finitos. Volumen 1: Formulación Básica y Problemas Lineales*, cuarta edición, McGraw-Hill, CIMNE, Barcelona, España.

ZIENKIEWICZ, O. C; TAYLOR, R. L. [1994b], *El Método de los Elementos Finitos. Volumen 2: Mecánica de Sólidos y Flúidos. Dinámica y no Linealidad*, cuarta edición, McGraw-Hill, CIMNE, Barcelona, España.

CAPÍTULO 3

OBTENCIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ SECANTE INCREMENTAL Y SUS APLICACIONES EN MECÁNICA NO LINEAL

3.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se discretiza la expresión incremental del *Principio de los Trabajos Virtuales* en su forma completa, es decir, manteniendo todos los términos que son función no lineal del gradiente de incremento de desplazamientos. La discretización de las ecuaciones no lineales de equilibrio por el método de los elementos finitos conduce a la obtención de una expresión paramétrica general de la matriz de *rigidez secante*. Con la expresión de dicha matriz se deduce, de forma directa, la clásica expresión de la matriz de *rigidez tangente* empleada en problemas no lineales.

En el apartado 3.2 se discretizan las ecuaciones no lineales de equilibrio por el método de los elementos finitos (MEF) en elasticidad tridimensional, aquí denominada *formulación de sólido 3D*. Se obtienen las variables cinemáticas y estáticas definidas en una partícula arbitraria del sólido interpolando las variables incógnitas definidas en puntos discretos del sólido. Se supone una formulación en desplazamientos del MEF y, por lo tanto, estas variables incógnitas son los desplazamientos nodales del sólido discretizado.

En el apartado 3.3 se obtiene la expresión paramétrica y general para la *matriz de rigidez secante incremental* utilizando la descripción *Lagrangiana Generalizada*. Además, se presenta una discusión detallada respecto al significado físico de cada una de las matrices que forman parte de la expresión de la matriz secante. Por último, se particulariza la expresión de dicha matriz para las formulaciones LT y LA.

En el apartado 3.4 se deduce la expresión de la *matriz de rigidez tangente* a partir de la expresión de la matriz secante.

En el apartado 3.5 se deduce una expresión paramétrica para la *matriz de rigidez secante total*, concepto éste que será utilizado en la monografía para el estudio de la inestabilidad estructural.

Por último, en el apartado 3.6 se comentan algunas aplicaciones de la matriz de rigidez secante en el contexto de solución de ecuaciones no lineales y en el análisis de inestabilidad estructural, temas que serán desarrollados con más profundidad en los capítulos siguientes.

3.2 DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN INCREMENTAL DEL MOVIMIENTO POR EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

En el Capítulo 2 se han planteado las relaciones cinemáticas y de equilibrio de una partícula arbitraria \mathcal{X} del cuerpo \mathcal{B} . En este apartado, dichas relaciones serán interpoladas en función de incógnitas en puntos discretos del sólido (desplazamientos nodales) a través de la discretización del dominio del sólido por elementos finitos.

Se utiliza una discretización estándar en elementos finitos isoparamétricos de sólido 3D con continuidad C^0 , n nodos y funciones de forma $N^k(\xi, \eta, \zeta)$ definidas en cada nodo k en función de las coordenadas naturales (ξ, η, ζ) .

3.2.1 Discretización de los campos de desplazamiento inicial y de incremento de desplazamiento

Sea \mathcal{E} un elemento finito arbitrario de n nodos y volumen $V^{(e)}$ perteneciente al sólido \mathcal{B} discretizado en ne elementos, tal que $V^{(e)} \subset \mathcal{B}$. Además, considérese una partícula arbitraria del cuerpo \mathcal{B} que pertenezca al elemento \mathcal{E} , $\mathcal{X} \in \mathcal{E}$. De esta manera, el desplazamiento de \mathcal{X} en el instante t y su incremento de desplazamiento entre los instantes t y $t + \Delta t$ se interpolan en función de los desplazamientos iniciales y de los incrementos de desplazamientos nodales del elemento \mathcal{E} , respectivamente, en la forma usual (ZIENKIEWICZ y TAYLOR [1994a] y BATHE [1996])

$${}^t u_i = \sum_{k=1}^n N^k {}^t a_i^k \quad \text{y} \quad \Delta u_i = \sum_{k=1}^n N^k \Delta a_i^k \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.2.1)$$

donde ${}^t a_i^k$ es el desplazamiento del nodo k en la configuración t y Δa_i^k denota el incremento de desplazamiento que sufre el nodo k al pasar de la configuración t a la $t + \Delta t$.

La forma matricial de la ecuación (3.2.1) se expresa como

$${}^t \mathbf{u} = \mathbf{N} {}^t \mathbf{a} \quad \text{y} \quad \Delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \Delta \mathbf{a} \quad (3.2.2)$$

con

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}^1, \mathbf{N}^2, \dots, \mathbf{N}^n] \quad ; \quad \mathbf{N}^k = N^k \mathbf{I}_3$$

$${}^t \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} {}^t a^1 \\ \vdots \\ {}^t a^n \end{Bmatrix} \quad ; \quad \Delta \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \Delta a^1 \\ \vdots \\ \Delta a^n \end{Bmatrix} \quad ; \quad \begin{aligned} {}^t \mathbf{a}^k &= [{}^t a_1^k, {}^t a_2^k, {}^t a_3^k]^T \\ \Delta \mathbf{a}^k &= [\Delta a_1^k, \Delta a_2^k, \Delta a_3^k]^T \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

donde \mathbf{N} , \mathbf{N}^k y N^k son la matriz de funciones de forma del elemento, la matriz de funciones de forma del nodo k y la función de forma del nodo k , respectivamente. \mathbf{I}_3 es la matriz identidad 3×3 , ${}^t \mathbf{a}$ es el vector de desplazamientos nodales del elemento en el instante t y ${}^t \mathbf{a}^k$ es el vector de desplazamientos del nodo k de \mathcal{E} en el instante t . Por último, $\Delta \mathbf{a}$ y $\Delta \mathbf{a}^k$ son los vectores de incremento de desplazamientos nodales del elemento y del nodo k entre los instantes t y $t + \Delta t$, respectivamente.

Una vez definidos los desplazamientos nodales del elemento en el instante t y los incrementos de desplazamientos nodales entre los instantes t y $t + \Delta t$, se aplica una variación virtual al campo de desplazamientos del elemento en el instante $t + \Delta t$. La hipótesis adoptada en el apartado 2.4.2 del Capítulo 2 implica suponer los desplazamientos fijos en el intervalo de tiempo $[0, t]$ y, por tanto, $\delta^t \mathbf{u} = 0 \implies \delta^t \mathbf{a} = 0$, de acuerdo con la ecuación (2.4.13b) y con la definición dada por (3.2.2). Así pues, la variación virtual del incremento de desplazamientos de la partícula \mathcal{X} entre los instantes t y $t + \Delta t$ se puede expresar en función de la variación virtual del incremento de desplazamientos nodales del elemento \mathcal{E} . Por lo tanto se puede escribir que

$$\delta(\Delta \mathbf{u}) = \mathbf{N} \delta(\Delta \mathbf{a}) \quad (3.2.4)$$

3.2.2 Discretización de los campos de incremento de deformación de primer y segundo orden

Sea ${}^r V^{(e)}$ el volumen del elemento \mathcal{E} cuando $\mathcal{B} \subset {}^r V$, tal que ${}^r V^{(e)} \subset {}^r V$. Las coordenadas de la partícula \mathcal{X} del elemento \mathcal{E} se interpolan en función de las coordenadas nodales de \mathcal{E} como

$${}^r x_i = \sum_{k=1}^n N^k {}^r x_i^k \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.2.5)$$

donde ${}^r x_i^k$ es la coordenada i del nodo k del elemento \mathcal{E} en la configuración ${}^r V$. La forma matricial de la ecuación (3.2.5) se expresa como

$${}^r \mathbf{x} = \mathbf{N} {}^r \mathbf{x}^{(e)} \quad (3.2.6a)$$

con

$${}^r \mathbf{x}^{(e)} = \begin{Bmatrix} {}^r \mathbf{x}^1 \\ \vdots \\ {}^r \mathbf{x}^n \end{Bmatrix} ; \quad {}^r \mathbf{x}^k = [{}^r x_1^k, {}^r x_2^k, {}^r x_3^k]^T \quad (3.2.6b)$$

donde la matriz de funciones de forma \mathbf{N} del elemento ha sido definida en la ecuación (3.2.3), ${}^r \mathbf{x}^{(e)}$ es el vector de coordenadas nodales en la configuración de referencia ${}^r V$ y ${}^r \mathbf{x}^k$ representa el vector de coordenadas del nodo k .

Una vez efectuada la discretización del cuerpo \mathcal{B} en la configuración de referencia ${}^r V$, y teniendo en cuenta que $\mathcal{X} \in \mathcal{E}$ y ${}^r V^{(e)} \subset {}^r V$, el gradiente de desplazamientos de la partícula \mathcal{X} en el instante t y el gradiente de incrementos de desplazamientos de \mathcal{X} entre los instantes t y $t + \Delta t$ se interpolan como

$${}^t u_{i,j} = \sum_{k=1}^n {}^r N_j^k {}^t a_i^k \quad \text{y} \quad {}^r \Delta u_{i,j} = \sum_{k=1}^n {}^r N_j^k \Delta a_i^k \quad (3.2.7a)$$

con

$${}^r N_{,j}^k = \frac{\partial N^k}{\partial {}^r x_j} \quad (3.2.7b)$$

donde ${}^r N_{,j}^k$ es el gradiente respecto de ${}^r x_j$ de la función de forma del nodo k del elemento \mathcal{E} .

La forma matricial de la ecuación (3.2.7a) se expresa como

$${}^t \mathbf{g} = {}^r \mathbf{G} {}^t \mathbf{a} \quad \text{y} \quad {}^r \mathbf{g} = {}^r \mathbf{G} \Delta \mathbf{a} \quad (3.2.8)$$

donde ${}^r \mathbf{G}$ es una matriz rectangular ($9 \times 3n$) cuyas componentes expresan el gradiente de las funciones de forma del elemento \mathcal{E} en términos de las coordenadas $({}^r x_1, {}^r x_2, {}^r x_3)$ de la configuración de referencia ${}^r V$. La matriz ${}^r \mathbf{G}$ tiene la siguiente forma

$${}^r \mathbf{G} = [{}^r \mathbf{G}^1, {}^r \mathbf{G}^2, \dots, {}^r \mathbf{G}^n] \quad (3.2.9a)$$

con

$${}^r \mathbf{G}^k = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^k}{\partial {}^r x_1} \mathbf{I}_3 \\ \frac{\partial N^k}{\partial {}^r x_2} \mathbf{I}_3 \\ \frac{\partial N^k}{\partial {}^r x_3} \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \quad (3.2.9b)$$

donde ${}^r\mathbf{G}^k$ es una matriz rectangular (9×3) cuyas componentes representan el gradiente de la función de forma del nodo k del elemento \mathcal{E} .

• Observación 3.1

Nótese que la transformación dada por la ecuación (3.2.8) es lineal y directa pues relaciona gradientes de desplazamientos traslacionales de una partícula arbitraria del sólido con gradientes de desplazamientos nodales, también traslacionales. Por lo tanto, la matriz de transformación ${}^r\mathbf{G}$ es función solamente del gradiente de las funciones de forma del elemento. Sin embargo, si se consideran como grados de libertad las rotaciones, como ocurre en elementos finitos de vigas, placas y láminas, esta transformación es no lineal, y tampoco es directa, dependiendo además del tipo de parametrización que se utilice para describir las rotaciones (CRIVELLI y FELIPPA [1993]). La relación (3.2.8), indirectamente, tiene un papel importante en la deducción de la expresión de la matriz de rigidez secante. Para los casos en los que se empleen grados de libertad traslacionales el problema queda bien definido. Por otro lado, según FELIPPA, CRIVELLI y HAUGEN [1994], la existencia del operador secante para los casos con grados de libertad rotacionales es cuestionable, además de considerarse un campo de investigación abierto. \square

Sustituyendo la ecuación (3.2.8) en las ecuaciones (2.3.15a) y (2.3.15b), los incrementos de deformación de primer y segundo orden de la partícula \mathcal{X} de \mathcal{E} entre los instantes t y $t + \Delta t$ se expresan por

$${}^r\mathbf{e} = \left[\mathbf{L}_0 + {}^t_r\mathbf{L}_1({}^t_r\mathbf{g}) \right] {}^r\mathbf{G} \Delta \mathbf{a} = {}^t_r\mathbf{B}_L({}^t\mathbf{a}) \Delta \mathbf{a} \quad (3.2.10a)$$

$${}^r\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2} {}^r\mathbf{L}_1({}^r\mathbf{g}) {}^r\mathbf{G} \Delta \mathbf{a} = \frac{1}{2} {}^r\mathbf{B}_1(\Delta \mathbf{a}) \Delta \mathbf{a} \quad (3.2.10b)$$

donde

$${}^t_r\mathbf{B}_L({}^t\mathbf{a}) = \left[\mathbf{L}_0 + {}^t_r\mathbf{L}_1({}^t_r\mathbf{g}) \right] {}^r\mathbf{G} = {}^r\mathbf{B}_{L_0} + {}^t_r\mathbf{B}_{L_1}({}^t\mathbf{a}) \quad (3.2.11a)$$

$${}^r\mathbf{B}_1(\Delta \mathbf{a}) = {}^r\mathbf{L}_1({}^r\mathbf{g}) {}^r\mathbf{G} \quad (3.2.11b)$$

son las matrices de incremento de deformación de primer y segundo orden para cada elemento \mathcal{E} del sólido \mathcal{B} discretizado. Estas matrices son rectangulares $(6 \times 3n)$. Nótese que las matrices ${}^t_r\mathbf{B}_L$ y ${}^r\mathbf{B}_1$ son función lineal del gradiente de desplazamientos iniciales ${}^t\mathbf{a}$ y del gradiente de incremento de desplazamientos $\Delta \mathbf{a}$ del elemento finito \mathcal{E} . La forma de estas matrices se detalla en el Cuadro 3.1.

$$\begin{aligned}
& \boxed{{}^r \mathbf{e} = {}^t {}_r \mathbf{B}_L \Delta \mathbf{a} \quad ; \quad {}^r \boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2} {}^r \mathbf{B}_1 \Delta \mathbf{a}} \\
& {}^t {}_r \mathbf{B}_L = \left[{}^t {}_r \mathbf{B}_L^1, {}^t {}_r \mathbf{B}_L^2, \dots, {}^t {}_r \mathbf{B}_L^n \right] \\
& {}^r \mathbf{B}_1 = \left[{}^r \mathbf{B}_1^1, {}^r \mathbf{B}_1^2, \dots, {}^r \mathbf{B}_1^n \right] \\
& {}^t {}_r \mathbf{B}_L^k = {}^r \mathbf{B}_{L_0}^k \left[\mathbf{I}_3 + {}^t {}_r \mathbf{L}^T \right] \\
& {}^r \mathbf{B}_1^k = {}^r \mathbf{B}_{L_0}^k {}^r \hat{\mathbf{L}}^T \\
& {}^r \mathbf{B}_{L_0}^k = \begin{bmatrix} {}^r N_{,1}^k & 0 & 0 \\ 0 & {}^r N_{,2}^k & 0 \\ 0 & 0 & {}^r N_{,3}^k \\ {}^r N_{,2}^k & {}^r N_{,1}^k & 0 \\ {}^r N_{,3}^k & 0 & {}^r N_{,1}^k \\ 0 & {}^r N_{,3}^k & {}^r N_{,2}^k \end{bmatrix} \quad ; \quad {}^t {}_r \mathbf{B}_{L_1}^k = {}^r \mathbf{B}_{L_0}^k {}^t {}_r \mathbf{L}^T \\
& {}^t {}_r \mathbf{L} = \begin{bmatrix} {}^t l_{11} & {}^t l_{12} & {}^t l_{13} \\ {}^t l_{21} & {}^t l_{22} & {}^t l_{23} \\ {}^t l_{31} & {}^t l_{32} & {}^t l_{33} \end{bmatrix} \quad ; \quad {}^r \hat{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} {}^r \hat{l}_{11} & {}^r \hat{l}_{12} & {}^r \hat{l}_{13} \\ {}^r \hat{l}_{21} & {}^r \hat{l}_{22} & {}^r \hat{l}_{23} \\ {}^r \hat{l}_{31} & {}^r \hat{l}_{32} & {}^r \hat{l}_{33} \end{bmatrix} \\
& {}^r N_{,i}^k = \frac{\partial N^k}{\partial {}^r x_i} \quad ; \quad {}^t l_{ij} = \frac{\partial {}^t u_i}{\partial {}^r x_j} = \sum_{k=1}^n {}^r N_j^k {}^t a_i^k \quad ; \quad {}^r \hat{l}_{ij} = \frac{\partial \Delta u_i}{\partial {}^r x_j} = \sum_{k=1}^n {}^r N_j^k \Delta a_i^k
\end{aligned}$$

Cuadro 3.1 Matrices de deformación de primer y segundo orden para elementos de sólido 3D

• **Observación 3.2**

Nótese que ${}^r \mathbf{B}_{L_0} = \mathbf{L}_0 {}^r \mathbf{G}$ es la matriz de deformación estándar de la teoría de elasticidad con deformaciones infinitesimales conocida como matriz de deformación infinitesimal (ZIENKIEWICZ y TAYLOR [1994a] y BATHE [1996]). Esta matriz es independiente del gradiente de los incrementos de desplazamientos del elemento. Por otro lado, ${}^t {}_r \mathbf{B}_{L_1} = {}^t {}_r \mathbf{L}_1 {}^r \mathbf{G}$ es la parte de la matriz de deformación de primer orden dependiente del gradiente de los desplazamientos iniciales ${}^t \mathbf{a}$. En la formulación LA (${}^r V = {}^t V$) esta matriz se anula (${}^t \mathbf{L}_1 = 0 \implies {}^t {}_r \mathbf{B}_{L_1} = 0$). Por otra parte, la matriz ${}^r \mathbf{B}_1$ es función lineal del gradiente de los incrementos de desplazamientos $\Delta \mathbf{a}$. \square

• Observación 3.3

Las matrices ${}^t\mathbf{B}_L$ y ${}_r\mathbf{B}_1$ pueden ser evaluadas en un nodo k del elemento \mathcal{E} en función de la matriz de deformación infinitesimal definida en este nodo de la siguiente manera

$${}^t\mathbf{B}_L^k({}^t\mathbf{a}) = {}_r\mathbf{B}_{L_0}^k [\mathbf{I}_3 + {}^t\mathbf{L}^T({}^t\mathbf{a})] = {}_r\mathbf{B}_{L_0}^k + {}^t\mathbf{B}_{L_1}^k({}^t\mathbf{a}) \quad (3.2.12a)$$

$${}_r\mathbf{B}_1^k(\Delta\mathbf{a}) = {}_r\mathbf{B}_{L_0}^k {}_r\hat{\mathbf{L}}^T(\Delta\mathbf{a}) \quad (3.2.12b)$$

donde ${}^t\mathbf{L}$ y ${}_r\hat{\mathbf{L}}$ son matrices (3×3) cuyas componentes son función lineal del gradiente de desplazamientos iniciales ${}^t\mathbf{a}$ y del gradiente de incrementos de desplazamientos $\Delta\mathbf{a}$ del elemento \mathcal{E} , respectivamente. Nótese que para la formulación LA (${}^rV = {}^tV$), ${}^t\mathbf{L} = 0 \implies {}^t\mathbf{B}_{L_1}^k = 0$. Estas ecuaciones presentan una forma adecuada para su implementación numérica. La forma de las matrices ${}^t\mathbf{L}$ y ${}_r\hat{\mathbf{L}}$ se detalla en el Cuadro 3.1. \square

La variación virtual de los incrementos de deformación de primer y segundo orden en el interior del elemento \mathcal{E} se expresa en función de la variación virtual de los desplazamientos nodales en el instante t y de los incrementos de desplazamientos nodales entre los instantes t y $t + \Delta t$. Teniendo en cuenta las ecuaciones (2.4.20), (3.2.4) y (3.2.10) las variaciones virtuales de los incrementos de deformación de primer y segundo orden se escriben como

$$\delta_r\mathbf{e} = {}^t\mathbf{B}_L \delta(\Delta\mathbf{a}) \quad \text{y} \quad \delta_r\boldsymbol{\eta} = {}_r\mathbf{B}_1 \delta(\Delta\mathbf{a}) \quad (3.2.13)$$

3.2.3 Discretización de la ecuación constitutiva incremental

Sea ${}_r\Delta\mathbf{S}$ el vector de incremento de tensiones en la partícula \mathcal{X} del cuerpo \mathcal{B} entre los instantes t y $t + \Delta t$ en el interior de un elemento finito \mathcal{E} del sólido discretizado. De esta manera, sustituyendo las ecuaciones (3.2.10) en (2.4.15b), se expresa tal estado de tensión en función del incremento de desplazamientos nodales de \mathcal{E} como

$${}_r\Delta\mathbf{S} = {}_r\mathbf{D} \left[{}^t\mathbf{B}_L + \frac{1}{2} {}_r\mathbf{B}_1 \right] \Delta\mathbf{a} \quad (3.2.14a)$$

Con la finalidad de comentar el significado físico de las matrices que se deducirán en el apartado 3.3, se desarrollará con más detalle la expresión matricial del incremento de tensiones. De esta manera, reemplazando la matriz de deformación ${}^t\mathbf{B}_L$ por la expresión (3.2.11a), la ecuación (3.2.14a) se reescribe como

$${}_r\Delta\mathbf{S} = {}_r\mathbf{D} \left[{}_r\mathbf{B}_{L_0} + {}^t{}_r\mathbf{B}_{L_1}({}^t\mathbf{a}) + \frac{1}{2} {}_r\mathbf{B}_1(\Delta\mathbf{a}) \right] \Delta\mathbf{a} \quad (3.2.14b)$$

donde el incremento de tensiones de primer orden se escribe como suma de los dos términos siguientes

$${}_r\Delta\mathbf{S}^{1ord}({}^t\mathbf{a}, \Delta\mathbf{a}) = {}_r\Delta\mathbf{S}_1^{1ord}(\Delta\mathbf{a}) + {}_r\Delta\mathbf{S}_2^{1ord}({}^t\mathbf{a}, \Delta\mathbf{a}) \quad (3.2.14c)$$

con

$${}_r\Delta\mathbf{S}_1^{1ord}(\Delta\mathbf{a}) = {}_r\mathbf{D} {}_r\mathbf{B}_{L_0} \Delta\mathbf{a} \quad (3.2.14d)$$

$${}_r\Delta\mathbf{S}_2^{1ord}({}^t\mathbf{a}, \Delta\mathbf{a}) = {}_r\mathbf{D} {}^t{}_r\mathbf{B}_{L_1}({}^t\mathbf{a}) \Delta\mathbf{a} \quad (3.2.14e)$$

donde el primer término depende solamente del incremento de desplazamientos a través de sus gradientes y el segundo tiene en cuenta la influencia del gradiente de los desplazamientos iniciales. Nótese que el vector ${}_r\Delta\mathbf{S}_2^{1ord}$ se anula para la formulación LA, es decir, que para ${}^rV = {}^tV \implies {}^t{}_r\mathbf{B}_{L_1} = 0 \implies {}_r\Delta\mathbf{S}_2^{1ord} = 0$.

Por último, el incremento de tensiones de segundo orden tiene la siguiente expresión

$${}_r\Delta\mathbf{S}^{2ord}(\Delta\mathbf{a}^2) = \frac{1}{2} {}_r\mathbf{D} {}_r\mathbf{B}_1(\Delta\mathbf{a}) \Delta\mathbf{a} \quad (3.2.14f)$$

Finalmente, se puede reescribir la ecuación (3.2.14a) en función de los incrementos de tensiones de primer y segundo orden como

$$\boxed{{}_r\Delta\mathbf{S}({}^t\mathbf{a}, \Delta\mathbf{a}) = {}_r\Delta\mathbf{S}_1^{1ord}(\Delta\mathbf{a}) + {}_r\Delta\mathbf{S}_2^{1ord}({}^t\mathbf{a}, \Delta\mathbf{a}) + {}_r\Delta\mathbf{S}^{2ord}(\Delta\mathbf{a}^2)} \quad (3.2.14g)$$

Así, el incremento de tensiones del elemento finito \mathcal{E} , entre los instantes t y $t + \Delta t$, experimenta la influencia de los desplazamientos anteriores acumulados hasta el instante t , y tiene términos que son función lineal y cuadrática del gradiente de los incrementos de desplazamientos iniciales. Obsérvese que los términos de (3.2.14g) que dependen del gradiente ${}^t\mathbf{a}$ se anulan para la formulación LA. Naturalmente, el desarrollo efectuado en las ecuaciones (3.2.14) tiene solamente importancia teórica ya que esta información se utilizará para aclarar el significado físico de las matrices que se obtienen en los próximos apartados.

Para implementar numéricamente la ecuación (3.2.14a) es preferible expresarla en función de la matriz de deformación infinitesimal definida en el nodo k del elemento finito \mathcal{E} . De este modo, partiendo de las definiciones

dadas por las ecuaciones (3.2.12) y sustituyéndolas en la ecuación (3.2.14a), se llega a la siguiente expresión

$$\begin{aligned} {}_r\Delta\mathbf{S} &= {}_r\mathbf{D} \sum_{k=1}^n {}_r\mathbf{B}_{L_0}^k \left[\mathbf{I}_3 + {}^t_r\mathbf{L}^T({}^t\mathbf{a}) + \frac{1}{2} {}_r\hat{\mathbf{L}}^T(\Delta\mathbf{a}) \right] \Delta\mathbf{a}^k = \\ &= {}_r\Delta\mathbf{S}^{inf} + {}_r\mathbf{D} \sum_{k=1}^n {}_r\mathbf{B}_{L_0}^k \left[{}^t_r\mathbf{L}^T({}^t\mathbf{a}) + \frac{1}{2} {}_r\hat{\mathbf{L}}^T(\Delta\mathbf{a}) \right] \Delta\mathbf{a}^k \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

donde ${}_r\Delta\mathbf{S}^{inf} = {}_r\Delta\mathbf{S}_1^{ord}$ es el incremento de tensiones obtenido por la teoría de elasticidad infinitesimal, como ya se ha definido antes en la ecuación (3.2.14d). Esta ecuación presenta una forma adecuada para su implementación numérica. Las formas de todas las matrices que aparecen en las ecuaciones (3.2.14) y (3.2.15) se encuentran detalladas en el Cuadro 3.1.

• Observación 3.4

Nótese que las tensiones en el instante $t + \Delta t$ dadas por la ecuación (2.4.15a) pueden ser calculadas de forma total (secante) a partir de las deformaciones totales en ${}^{t+\Delta t}V$. Ello se debe a que la representación del material, en cualquier configuración de equilibrio conocida, se ha expresado en función del tensor constitutivo de la elasticidad infinitesimal. Por lo tanto, el material es lineal elástico a lo largo de todo el proceso de carga en el intervalo de tiempo $[0, T]$. De esta manera el tensor constitutivo secante es igual al tensor constitutivo tangente, es decir, ${}^{t+\Delta t}_r\mathbf{D} = {}_r\mathbf{D}$. Supóngase que las configuraciones en el tiempo cero y en el tiempo t coincidan, lo que implica que los desplazamientos iniciales son nulos, ${}^0V = {}^tV \implies {}^t\mathbf{a} = \mathbf{0}$, y que el incremento de desplazamiento entre la configuración indeformada y la configuración en el instante $t + \Delta t$ sea ${}^{t+\Delta t}\mathbf{a} = \Delta\mathbf{a}$, tal que ${}_r\mathbf{B}_1(\Delta\mathbf{a}) = {}^{t+\Delta t}_r\mathbf{B}_1({}^{t+\Delta t}\mathbf{a})$. Por lo tanto, la ecuación (3.2.14b) se reescribe como

$${}^{t+\Delta t}_r\mathbf{S} = {}^{t+\Delta t}_r\mathbf{D} \left[{}_r\mathbf{B}_{L_0} + \frac{1}{2} {}^{t+\Delta t}_r\mathbf{B}_1({}^{t+\Delta t}\mathbf{a}) \right] {}^{t+\Delta t}\mathbf{a} \quad (3.2.16a)$$

donde ${}^{t+\Delta t}_r\mathbf{B}_1$ es la matriz de deformación total función lineal de ${}^{t+\Delta t}\mathbf{a}$ a través de su gradiente. Por otro lado, se puede redefinir la ecuación (3.2.16a) de la siguiente manera

$${}^{t+\Delta t}_r\mathbf{S} = {}^{t+\Delta t}_r\mathbf{D} \sum_{k=1}^n {}_r\mathbf{B}_{L_0}^k \left[\mathbf{I}_3 + \frac{1}{2} {}^{t+\Delta t}_r\hat{\mathbf{L}}^T({}^{t+\Delta t}\mathbf{a}) \right] {}^{t+\Delta t}\mathbf{a}^k \quad (3.2.16b)$$

donde ${}^{t+\Delta t}_r\hat{\mathbf{L}}^T({}^{t+\Delta t}\mathbf{a})$ es la matriz de gradientes de desplazamientos totales del elemento. Nótese que para ${}^{t+\Delta t}\mathbf{a} = \Delta\mathbf{a} \implies {}^{t+\Delta t}_r\hat{\mathbf{L}}^T({}^{t+\Delta t}\mathbf{a}) = {}_r\hat{\mathbf{L}}^T(\Delta\mathbf{a})$. \square

En este apartado se han descrito las interpolaciones del incremento de desplazamiento, del incremento de deformaciones y del incremento de tensiones de la partícula \mathcal{X} respecto a los incrementos de desplazamientos nodales del elemento \mathcal{E} entre los instantes t y $t + \Delta t$.

En el próximo apartado se extenderá esta interpolación a la expresión del *principio de los trabajos virtuales* aplicado a la partícula \mathcal{X} perteneciente al elemento finito \mathcal{E} .

3.3 EXPRESIÓN PARAMÉTRICA DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ SECANTE INCREMENTAL

La discretización del principio de los trabajos virtuales aplicado a la partícula \mathcal{X} perteneciente al elemento finito \mathcal{E} conduce a la obtención de una relación secante no simétrica de equilibrio entre las fuerzas nodales exteriores en el instante $t + \Delta t$ y el incremento de desplazamientos nodales del instante t al $t + \Delta t$. Se encuentra que dicha expresión tiene una forma paramétrica en función de dos parámetros y que puede considerarse una generalización de la forma paramétrica obtenida por FELIPPA y CRIVELLI [1991] utilizando una formulación LT.

• Observación 3.5

Como se apuntara en el Capítulo 1, en el ámbito del análisis de la no linealidad geométrica de sólidos elásticos lineales hay dos maneras de obtener la matriz de rigidez secante utilizando la formulación LT. La primera de ellas se basa en el principio de la energía potencial total, adoptando una forma especial para la expresión de la energía de deformación, con la que se obtiene una expresión simétrica para la matriz secante. Este procedimiento es debido a MALLETT y MARCAL [1968]. En la segunda se toma el principio de los trabajos virtuales como punto de partida, obteniéndose una expresión no simétrica para la matriz secante (OÑATE [1986]). WOOD y SCHREFLER [1978] han obtenido una expresión simétrica particular para la matriz secante a través de la correlación entre las matrices que forman parte de la matriz secante deducidas por el PTV con las matrices que aparecen en el procedimiento de MALLETT-MARCAL. □

En la expresión del PTV (2.5.7) los términos del primer miembro son función del incremento de desplazamiento $\Delta \mathbf{u}$ a través de su gradiente $\gamma \mathbf{g}$. Estos términos pueden expresarse en función de los incrementos de desplazamientos nodales $\Delta \mathbf{a}$ del elemento \mathcal{E} . Después de realizar algunas operaciones algebraicas y utilizar las ecuaciones (3.2.4), (3.2.10), (3.2.13) y (3.2.14a), los diversos términos del PTV se expresan en función de los incrementos de desplazamientos nodales del modo siguiente

$$\delta_r \mathbf{e}^T {}_r \mathbf{D} {}_r \mathbf{e} = \delta(\Delta \mathbf{a})^T \left[{}^t \mathbf{B}_L^T {}_r \mathbf{D} {}^t \mathbf{B}_L \right] \Delta \mathbf{a} \quad (3.3.1a)$$

$$\begin{aligned} \delta_r \boldsymbol{\eta}^T {}_r \mathbf{D} {}_r \mathbf{e} + \delta_r \mathbf{e}^T {}_r \mathbf{D} {}_r \boldsymbol{\eta} = \delta(\Delta \mathbf{a})^T \left[\frac{1}{2} {}^t \mathbf{B}_L^T {}_r \mathbf{D} {}_r \mathbf{B}_1 + \alpha {}_r \mathbf{B}_1^T {}_r \mathbf{D} {}^t \mathbf{B}_L + \right. \\ \left. + (1 - \alpha) {}_r \mathbf{G}^T {}_r \mathbf{E} {}_r \mathbf{G} \right] \Delta \mathbf{a} \end{aligned} \quad (3.3.1b)$$

$$\begin{aligned} \delta_r \boldsymbol{\eta}^T {}_r \mathbf{D} {}_r \boldsymbol{\eta} = \delta(\Delta \mathbf{a})^T \left[\frac{1}{4} (2 - \beta) {}_r \mathbf{B}_1^T {}_r \mathbf{D} {}_r \mathbf{B}_1 + \right. \\ \left. + \frac{\beta}{4} {}_r \mathbf{G}^T {}_r \mathbf{H} {}_r \mathbf{G} \right] \Delta \mathbf{a} \end{aligned} \quad (3.3.1c)$$

$$\delta_r \boldsymbol{\eta}^T {}^t \mathbf{S} = \delta(\Delta \mathbf{a})^T \left[{}_r \mathbf{G}^T {}^t \hat{\mathbf{S}} {}_r \mathbf{G} \right] \Delta \mathbf{a} \quad (3.3.1d)$$

En las ecuaciones (3.3.1) todas las matrices y vectores han sido definidos anteriormente, excepto las matrices ${}_r \mathbf{E}$, ${}_r \mathbf{H}$ y ${}^t \hat{\mathbf{S}}$ (rectangulares 9×9) que se detallan en el Cuadro 3.2 para elementos de sólido 3D. De acuerdo con las definiciones dadas en el Cuadro 3.2, la matriz ${}_r \mathbf{E}$ tiene como componentes los incrementos de tensiones de primer orden, las componentes de la matriz ${}_r \mathbf{H}$ representan incremento de tensiones de segundo orden y las componentes de la matriz ${}^t \hat{\mathbf{S}}$ definen las tensiones que actúan en el elemento finito \mathcal{E} del sólido discretizado en la configuración ${}^t V$.

Los parámetros α y β y las matrices ${}_r \mathbf{E}$ y ${}_r \mathbf{H}$ en (3.3.1) surgen de la sustitución de las ecuaciones (3.2.4), (3.2.10), (3.2.13) y (3.2.14a) en la expresión (2.5.7) del PTV. Dichos parámetros son números reales y pueden adoptar cualquier valor, obteniéndose una expresión simétrica o no para la matriz de rigidez secante incremental dependiendo de los valores que se les asignen. La obtención de las igualdades (3.3.1b) y (3.3.1c) se demuestra en el anexo A2 de esta monografía.

La relación secante entre las fuerzas residuales aplicadas en los nodos del elemento finito \mathcal{E} en el instante $t + \Delta t$ y los incrementos de desplazamientos nodales entre los instantes t y $t + \Delta t$ se obtiene sustituyendo las ecuaciones (3.3.1) en la ecuación (2.5.7), llegándose a la expresión

$${}^t \mathbf{K}_S^{(e)}(t, \Delta \mathbf{a}) \Delta \mathbf{a} = - {}^{t+\Delta t} \mathbf{r}^{(e)} \quad (3.3.2)$$

donde ${}^{t+\Delta t} \mathbf{r}^{(e)}$ es el vector estándar de fuerzas residuales nodales y ${}^t \mathbf{K}_S^{(e)}$ es la matriz de *rigidez secante incremental* del elemento finito \mathcal{E} .

$$\begin{aligned}
 {}_r\mathbf{E} &= \begin{bmatrix} a \mathbf{I}_3 & d \mathbf{I}_3 & e \mathbf{I}_3 \\ \text{sym.} & b \mathbf{I}_3 & f \mathbf{I}_3 \\ & & c \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} ; [a, b, c, d, e, f]^T = {}_r\mathbf{D} {}_r\mathbf{e} = {}_r\Delta\mathbf{S}^{1ord} \\
 {}_r\mathbf{E} &= \begin{bmatrix} {}_r\Delta S_{11}^{1ord} \mathbf{I}_3 & {}_r\Delta S_{12}^{1ord} \mathbf{I}_3 & {}_r\Delta S_{13}^{1ord} \mathbf{I}_3 \\ \text{sym.} & {}_r\Delta S_{22}^{1ord} \mathbf{I}_3 & {}_r\Delta S_{23}^{1ord} \mathbf{I}_3 \\ & & {}_r\Delta S_{33}^{1ord} \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \\
 {}_r\mathbf{H} &= \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 {}_r d_{ij} {}_r \eta_j \mathbf{H}_i ; {}_r \eta_j = {}_r \mathbf{g}^T \mathbf{H}_j {}_r \mathbf{g} \\
 {}_r d_{ij} &: \text{es el término } ij \text{ de la matriz constitutiva } {}_r\mathbf{D} \\
 \frac{1}{2} {}_r\mathbf{H} &= \begin{bmatrix} \bar{a} \mathbf{I}_3 & \bar{d} \mathbf{I}_3 & \bar{e} \mathbf{I}_3 \\ \text{sym.} & \bar{b} \mathbf{I}_3 & \bar{f} \mathbf{I}_3 \\ & & \bar{c} \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} ; [\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}, \bar{e}, \bar{f}]^T = {}_r\mathbf{D} {}_r\boldsymbol{\eta} = {}_r\Delta\mathbf{S}^{2ord} \\
 \frac{1}{2} {}_r\mathbf{H} &= \begin{bmatrix} {}_r\Delta S_{11}^{2ord} \mathbf{I}_3 & {}_r\Delta S_{12}^{2ord} \mathbf{I}_3 & {}_r\Delta S_{13}^{2ord} \mathbf{I}_3 \\ \text{sym.} & {}_r\Delta S_{22}^{2ord} \mathbf{I}_3 & {}_r\Delta S_{23}^{2ord} \mathbf{I}_3 \\ & & {}_r\Delta S_{33}^{2ord} \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \\
 {}_r\hat{\mathbf{S}} &= \begin{bmatrix} {}_r S_{11} \mathbf{I}_3 & {}_r S_{12} \mathbf{I}_3 & {}_r S_{13} \mathbf{I}_3 \\ \text{sym.} & {}_r S_{22} \mathbf{I}_3 & {}_r S_{23} \mathbf{I}_3 \\ & & {}_r S_{33} \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{I}_3 &: \text{matriz identidad } 3 \times 3
 \end{aligned}$$

Cuadro 3.2. Matrices ${}_r\mathbf{E}$, ${}_r\mathbf{H}$ y ${}_r\hat{\mathbf{S}}$ para elementos de sólido 3D

El vector de fuerzas residuales para un elemento finito \mathcal{E} con volumen ${}_rV^{(e)}$ se escribe como

$${}_{t+\Delta t} {}_r\mathbf{f}^{(e)} = \int_{{}_rV^{(e)}} {}_r\mathbf{B}_L^T {}_r\hat{\mathbf{S}} dV = {}_{t+\Delta t} {}_r\mathbf{f}^{(e)} \quad (3.3.3a)$$

con

$${}_{t+\Delta t} {}_r\mathbf{f}^{(e)} = \int_{{}_rV^{(e)}} \mathbf{N}^T {}_{t+\Delta t} {}_r\mathbf{f}^B dV + \int_{{}_rS_f^{(e)}} \mathbf{N}^T {}_{t+\Delta t} {}_r\mathbf{f}^S dS \quad (3.3.3b)$$

donde ${}^{t+\Delta t}{}^e\mathbf{f}^{(e)}$ es el vector de fuerzas nodales equivalentes. La primera integral en (3.3.3b) representa el vector de fuerzas de volumen y la segunda, el de fuerzas de superficie. Como se comentó con anterioridad, en la configuración inicial se considera el cuerpo \mathcal{B} libre de tensiones y de deformaciones iniciales, no considerándose, por lo tanto, los vectores de fuerzas debidas a deformaciones y tensiones iniciales.

La expresión paramétrica y general para la matriz de rigidez secante incremental se expresa de la siguiente manera

$$\boxed{{}^t\mathbf{K}_S^{(e)}({}^t\mathbf{a}, \Delta\mathbf{a}) = {}^t\mathbf{K}_L({}^t\mathbf{a}, {}^t\mathbf{a}^2) + {}^t\mathbf{K}_M({}^t\mathbf{a}, \Delta\mathbf{a}) + {}^t\mathbf{K}_N(\Delta\mathbf{a}^2) + {}^t\mathbf{K}_\sigma} \quad (3.3.4)$$

donde las diferentes matrices elementales son

$${}^t\mathbf{K}_L({}^t\mathbf{a}, {}^t\mathbf{a}^2) = \int_{rV^{(e)}} {}^t\mathbf{B}_L^T {}_r\mathbf{D} {}^t\mathbf{B}_L dV \quad (3.3.5a)$$

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{K}_M({}^t\mathbf{a}, \Delta\mathbf{a}) = \int_{rV^{(e)}} \left[\frac{1}{2} {}^t\mathbf{B}_L^T {}_r\mathbf{D} {}_r\mathbf{B}_1 + \alpha {}_r\mathbf{B}_1^T {}_r\mathbf{D} {}^t\mathbf{B}_L + \right. \\ \left. + (1 - \alpha) {}_r\mathbf{G}^T {}_r\mathbf{E} {}_r\mathbf{G} \right] dV \end{aligned} \quad (3.3.5b)$$

$${}^t\mathbf{K}_N(\Delta\mathbf{a}^2) = \int_{rV^{(e)}} \left[\frac{1}{4}(2 - \beta) {}_r\mathbf{B}_1^T {}_r\mathbf{D} {}_r\mathbf{B}_1 + \frac{\beta}{4} {}_r\mathbf{G}^T {}_r\mathbf{H} {}_r\mathbf{G} \right] dV \quad (3.3.5c)$$

$${}^t\mathbf{K}_\sigma = \int_{rV^{(e)}} {}_r\mathbf{G}^T {}^t\hat{\mathbf{S}} {}_r\mathbf{G} dV \quad (3.3.5d)$$

• Observación 3.6

La forma paramétrica (3.3.4) de la matriz secante fue obtenida por primera vez por ONATE en los inicios de 1994 y publicada en ONATE [1995a]. Dicha expresión fue analizada e implementada en ordenador por el autor de esta monografía quien ha realizado diversas aportaciones originales que ayudan a clarificar y ampliar algunas etapas de su obtención y que son esenciales para

el desarrollo del nuevo método de desplazamiento crítico que se propone en el próximo capítulo. Dicho método se aplica en el análisis de inestabilidad estructural para la predicción de puntos límite y de bifurcación. \square

• Observación 3.7

FELIPPA y CRIVELLI [1991] y FELIPPA, CRIVELLI y HAUGEN [1994] han obtenido una expresión paramétrica similar de la matriz de rigidez secante en función de dos parámetros, utilizando una formulación denominada por ellos como "core congruential formulation" y la descripción LT. En esa expresión, la matriz secante relaciona desplazamientos totales con las fuerzas exteriores totales. La expresión paramétrica aquí deducida puede considerarse como una extensión del trabajo realizado por estos autores utilizando la formulación Lagrangiana Generalizada. En este caso la expresión de la matriz secante relaciona los incrementos de desplazamientos con las fuerzas residuales. \square

• Observación 3.8

Nótese que la expresión de la matriz de rigidez secante incremental en (3.3.5) es no simétrica para valores de $\alpha = 1/2$. Pueden obtenerse una infinidad de formas simétricas tomando $\alpha = 1/2$ y valores arbitrarios para β . WOOD y SCHREFLER [1978] obtuvieron una expresión particular para la matriz secante dada por (3.3.5) con $\alpha = 1/2$ y $\beta = 0$ utilizando la descripción LT; ONATE [1991] dedujo la misma expresión simétrica utilizando la formulación Lagrangiana Generalizada. \square

Las matrices ${}^t_r\mathbf{K}_L$, ${}^t_r\mathbf{K}_M$, ${}^t_r\mathbf{K}_N$ y ${}^t_r\mathbf{K}_\sigma$ forman parte de la expresión general de la matriz de rigidez secante incremental y son matrices $(3n \times 3n)$ para elementos de sólido 3D. De acuerdo con las ecuaciones (3.2.11), las matrices de deformaciones de primer y segundo orden, ${}^t_r\mathbf{B}_L({}^t\mathbf{a})$ y ${}^t_r\mathbf{B}_1(\Delta\mathbf{a})$, son función lineal de los gradientes de desplazamientos iniciales y de incrementos de desplazamientos, respectivamente. Puede concluirse que la matriz ${}^t_r\mathbf{K}_L$ tiene términos lineales y cuadráticos en el gradiente de ${}^t\mathbf{a}$. Esta matriz tiene en cuenta los efectos de los desplazamientos iniciales. La matriz ${}^t_r\mathbf{K}_M$ posee términos lineales en los gradientes de ${}^t\mathbf{a}$ y $\Delta\mathbf{a}$; ${}^t_r\mathbf{K}_N$ contiene términos cuadráticos en el gradiente de $\Delta\mathbf{a}$ y ${}^t_r\mathbf{K}_\sigma$ incluye las tensiones que actúan en el elemento finito \mathcal{E} en el instante t . Se analiza a continuación cada una de estas matrices para aclarar el significado físico de sus componentes.

• La matriz ${}^t\mathbf{K}_L$

Sustituyendo la ecuación (3.2.8a) en la ecuación (3.3.5a), la expresión de la matriz ${}^t\mathbf{K}_L$ se reescribe como

$${}^t\mathbf{K}_L({}^t\mathbf{a}, {}^t\mathbf{a}^2) = {}^t\mathbf{K}_{L_0} + {}^t\mathbf{K}_{L_1}({}^t\mathbf{a}, {}^t\mathbf{a}^2) \quad (3.3.6a)$$

donde

$${}^t\mathbf{K}_{L_0} = \int_{{}^rV^{(e)}} {}^r\mathbf{B}_{L_0}^T {}^r\mathbf{D} {}^r\mathbf{B}_{L_0} dV \quad (3.3.6b)$$

es la matriz de rigidez lineal estándar de la teoría de la elasticidad infinitesimal y

$${}^t\mathbf{K}_{L_1}({}^t\mathbf{a}, {}^t\mathbf{a}^2) = \int_{{}^rV^{(e)}} \underbrace{({}^r\mathbf{B}_{L_0}^T {}^r\mathbf{D} {}^t\mathbf{B}_{L_1} + {}^t\mathbf{B}_{L_1}^T {}^r\mathbf{D} {}^r\mathbf{B}_{L_0})}_{\text{términos lineales en } {}^t\mathbf{a}} + \underbrace{{}^t\mathbf{B}_{L_1}^T {}^r\mathbf{D} {}^t\mathbf{B}_{L_1}}_{\text{cuadráticos en } {}^t\mathbf{a}} dV \quad (3.3.6c)$$

es la matriz conocida con el nombre de *matriz de rigidez de desplazamientos iniciales* que aparece típicamente en la formulación LT (BATHE [1996], cap. 6 y ZIENKIEWICZ y TAYLOR [1994b], cap. 8). Una expresión alternativa para esta matriz puede encontrarse en OÑATE [1995a]. Para la formulación LA (${}^rV = {}^tV$) esta matriz se anula, pues, como ya se comentó con anterioridad, el efecto de los desplazamientos iniciales se incorpora a la geometría del cuerpo \mathcal{B} en el instante t a través de la actualización de las coordenadas, ${}^t\mathbf{x}^{(e)} = {}^0\mathbf{x}^{(e)} + {}^t\mathbf{a}$; consecuentemente ${}^t\mathbf{L}_1 = 0 \implies {}^t\mathbf{B}_{L_1} = 0 \implies {}^t\mathbf{K}_{L_1} = 0$.

• La matriz ${}^t\mathbf{K}_M$

Esta matriz tiene en cuenta los efectos de los desplazamientos iniciales y de los incrementos de desplazamientos a través de sus respectivos gradientes, siendo función lineal de los mismos. Además se suman a estos efectos los de los incrementos de tensiones de primer orden ${}^r\Delta\mathbf{S}^{1ord}$. Nótese que esta matriz se anula al linealizar el PTV.

Sustituyendo la ecuación (3.2.11a) en la (3.3.5b), la expresión de la matriz ${}^t\mathbf{K}_M$ se reescribe como

$${}^t\mathbf{K}_M({}^t\mathbf{a}, \Delta\mathbf{a}) = {}^t\mathbf{K}_{M_1}({}^t\mathbf{a}, \Delta\mathbf{a}) + {}^t\mathbf{K}_{M_2}(\Delta\mathbf{a}) + {}^t\mathbf{K}_{M_{\Delta\sigma}}({}^t\mathbf{a}, \Delta\mathbf{a}) \quad (3.3.7a)$$

donde

$${}^t\mathbf{K}_{M_1}({}^t\mathbf{a}, \Delta\mathbf{a}) = \int_{rV(e)} \left[\frac{1}{2} {}^t\mathbf{B}_{L_1}^T {}_r\mathbf{D} {}_r\mathbf{B}_1 + \alpha {}_r\mathbf{B}_1^T {}_r\mathbf{D} {}^t\mathbf{B}_{L_1} \right] dV \quad (3.3.7b)$$

es una matriz función lineal de los desplazamientos iniciales y de los incrementos de desplazamientos a través de sus respectivos gradientes, afectada por los desplazamientos iniciales, por tanto, para la formulación LA (${}^rV = {}^tV$) la matriz de deformación ${}^t\mathbf{B}_{L_1}$ se anula, y como consecuencia, también dicha matriz de rigidez se anula, es decir, para ${}^rV = {}^tV \implies {}^t\mathbf{B}_{L_1} = 0 \implies {}^t\mathbf{K}_{M_1} = 0$. Por otro lado, la matriz ${}^t\mathbf{K}_{M_2}$ se expresa como

$${}^t\mathbf{K}_{M_2}(\Delta\mathbf{a}) = \int_{rV(e)} \left[\frac{1}{2} {}_r\mathbf{B}_{L_0}^T {}_r\mathbf{D} {}_r\mathbf{B}_1 + \alpha {}_r\mathbf{B}_1^T {}_r\mathbf{D} {}_r\mathbf{B}_{L_0} \right] dV \quad (3.3.7c)$$

y es función lineal de los incrementos de desplazamientos a través de sus gradientes, por consiguiente, se emplea tanto en la formulación LT como en la LA. Por último, la matriz ${}^t\mathbf{K}_{M_{\Delta\sigma}}$ surge debido al término simétrico en la expresión (3.3.1b). Esta matriz tiene la siguiente expresión

$${}^t\mathbf{K}_{M_{\Delta\sigma}}({}^t\mathbf{a}, \Delta\mathbf{a}) = \int_{rV(e)} (1 - \alpha) {}_r\mathbf{G}^T {}_r\mathbf{E} {}_r\mathbf{G} dV \quad (3.3.7d)$$

y se denomina matriz de *rigidez geométrica incremental de primer orden*, ya que la matriz ${}_r\mathbf{E}$ tiene como componentes las tensiones incrementales de primer orden. De acuerdo con la ecuación (3.2.14d), la matriz ${}_r\mathbf{E}$ puede escribirse como suma de dos matrices, ${}_r\mathbf{E} = {}_r\mathbf{E}_1({}_r\Delta\boldsymbol{\sigma}_1^{1ord}) + {}_r\mathbf{E}_2({}_r\Delta\boldsymbol{\sigma}_2^{1ord})$. En la primera de ellas, los incrementos de tensiones se calculan a partir del gradiente de incrementos de desplazamientos $\Delta\mathbf{a}$, mientras que en la segunda, los incrementos de tensiones se obtienen de los gradientes de los desplazamientos iniciales ${}^t\mathbf{a}$ y de los incrementos de desplazamientos. Obsérvese que para la formulación LA, la segunda matriz ${}_r\mathbf{E}_2$ se anula, es decir, para ${}^rV = {}^tV \implies {}^t\Delta\boldsymbol{\sigma}_2^{1ord} = 0 \implies {}^t\mathbf{E}_2 = 0$.

• **La matriz ${}^t\mathbf{K}_N$**

Esta matriz es función cuadrática del gradiente de los incrementos de desplazamientos, además de considerar el efecto debido al incremento de tensiones de segundo orden ${}^r\Delta\mathbf{S}^{2ord}$. De la misma manera que la matriz ${}^t\mathbf{K}_{M_i}$, la matriz ${}^t\mathbf{K}_N$ se anula al linealizar el principio de los trabajos virtuales. Dicha matriz se mantiene en la expresión de la matriz secante incremental tanto para la formulación LT (${}^rV = {}^0V$) como para la descripción LA (${}^rV = {}^tV$). Nótese que el segundo término en (3.3.5c) aparece debido a la simetrización de la expresión del PTV, y se denomina matriz de *rigidez geométrica incremental de segundo orden*.

• **La matriz ${}^t\mathbf{K}_\sigma$**

Esta matriz es función del nivel de tensiones en la configuración t y recibe el nombre usual de *matriz de tensiones iniciales* o de *matriz de rigidez geométrica* (BATHE [1996], cap.6 y ZIENKIEWICZ y TAYLOR [1994b], cap. 8). En la formulación LT (${}^rV = {}^0V$), las componentes de esta matriz son las componentes cartesianas del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff. Por otro lado, en la descripción LA (${}^rV = {}^tV$), las componentes de ${}^t\mathbf{K}_\sigma$ representan las componentes cartesianas del tensor de tensiones de Cauchy.

Una vez discutido el significado físico de cada matriz que forma parte de la expresión paramétrica de la matriz de rigidez secante incremental se procede a la particularización de esta expresión para las formulaciones LT y LA.

La expresión para la matriz secante incremental en la formulación LT (${}^rV = {}^0V$) se escribe como

$$\boxed{{}^t_0\mathbf{K}_S^{(e)}({}^t\mathbf{a}, \Delta\mathbf{a}) = {}^t_0\mathbf{K}_L({}^t\mathbf{a}, {}^t\mathbf{a}^2) + {}^t_0\mathbf{K}_M({}^t\mathbf{a}, \Delta\mathbf{a}) + {}^t_0\mathbf{K}_N(\Delta\mathbf{a}^2) + {}^t_0\mathbf{K}_\sigma({}^t\mathbf{S})} \quad (3.3.8a)$$

Para la descripción LA (${}^rV = {}^tV$) se puede escribir la expresión de la matriz secante incremental de la siguiente manera

$$\boxed{{}^t\mathbf{K}_S^{(e)}(\Delta\mathbf{a}) = {}^t\mathbf{K}_L + {}^t\mathbf{K}_M(\Delta\mathbf{a}) + {}^t\mathbf{K}_N(\Delta\mathbf{a}^2) + {}^t\mathbf{K}_\sigma({}^t\boldsymbol{\sigma})} \quad (3.3.8b)$$

3.4 OBTENCIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE

La manera estándar de obtener la expresión de la matriz de rigidez tangente es linealizar la expresión del PTV. Esto implica ignorar los términos subrayados en la ecuación (2.6.7), que son funciones cuadrática y cúbica del gradiente de incremento de desplazamiento de una partícula arbitraria del sólido. Un procedimiento alternativo que conduce a resultados idénticos consiste en determinar la expresión de la matriz tangente como límite de la expresión de la matriz secante incremental cuando el incremento de desplazamiento tiende a cero. Partiendo de la ecuación (3.3.4) se puede escribir que

$${}^t_r\mathbf{K}_T = \lim_{\Delta\mathbf{a} \rightarrow 0} {}^t_r\mathbf{K}_S = {}^t_r\mathbf{K}_L + {}^t_r\mathbf{K}_\sigma \quad (3.4.1)$$

donde ${}^t_r\mathbf{K}_T$ es la matriz de rigidez tangente estándar (BATHE [1996], cap. 6 y ZIENKIEWICZ y TAYLOR [1994b]).

Comparando las ecuaciones (3.3.4) y (3.4.1) se puede reescribir la expresión de la matriz de rigidez secante incremental como

$${}^t_r\mathbf{K}_S = {}^t_r\mathbf{K}_T + \underbrace{{}^t_r\mathbf{K}_M({}^t\mathbf{a}, \Delta\mathbf{a}) + {}^t_r\mathbf{K}_N(\Delta\mathbf{a}^2)}_{= 0 \text{ cuando } \Delta\mathbf{a} \rightarrow 0} \quad (3.4.2)$$

Las matrices ${}^t_r\mathbf{K}_M$ y ${}^t_r\mathbf{K}_N$ son las nuevas matrices que aparecen en la expresión discretizada del PTV cuando se considera de forma completa, anulándose dichas matrices cuando se linealiza el PTV.

3.5 EXPRESIÓN PARAMÉTRICA DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ SECANTE TOTAL

En este apartado se deduce una expresión para la matriz *secante total* que relaciona las fuerzas aplicadas al sólido en el instante $t + \Delta t$ con los desplazamientos totales en este instante. Como punto de partida, se adoptan algunas hipótesis básicas que se describen a continuación.

Se adopta como configuración de referencia la configuración indeformada, ${}^rV = {}^0V$. Se considera que las configuraciones en el tiempo cero y en el tiempo t coinciden, ${}^rV = {}^0V = {}^tV$. Por tanto, como consecuencia de esta hipótesis y teniendo en cuenta la definición dada en (3.2.11a), se puede escribir que

$${}^rV = {}^0V = {}^tV \implies {}^t\mathbf{a} = \mathbf{0} \implies {}^t_r\mathbf{B}_L({}^t\mathbf{a}) = {}^r\mathbf{B}_{L_0} \quad (3.5.1)$$

Además, sea $\Delta \mathbf{a}$ el incremento de desplazamiento de la configuración indeformada a la configuración en el instante $t + \Delta t$. Esto implica que

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{a} = \Delta \mathbf{a} \implies {}_r \mathbf{B}_1(\Delta \mathbf{a}) = {}^{t+\Delta t} {}_r \mathbf{B}_1({}^{t+\Delta t} \mathbf{a}) \tag{3.5.2}$$

de acuerdo con las ecuaciones (2.4.13a) y (3.2.11b).

Por otro lado, la configuración indeformada (ver el Capítulo 2 de esta monografía) está libre de deformaciones y tensiones iniciales. Considerando la ecuación (2.5.15a) se concluye que

$${}^t \mathbf{S} = \mathbf{0} \implies {}^{t+\Delta t} {}_r \mathbf{S} = {}_r \Delta \mathbf{S} \tag{3.5.3}$$

lo que implica ${}^t {}_r \mathbf{K}_\sigma({}^t \mathbf{S}) = \mathbf{0}$.

Las ecuaciones (3.5.1), (3.5.2), (3.5.3) y (3.2.14a) permiten escribir los incrementos de tensiones en el intervalo de tiempo $[0, t + \Delta t]$ como

$$\left. \begin{aligned} {}^{t+\Delta t} {}_r \Delta \mathbf{S}^{1ord}({}^{t+\Delta t} \mathbf{a}) &= {}^{t+\Delta t} {}_r \mathbf{D} {}_r \mathbf{B}_{L_0} {}^{t+\Delta t} \mathbf{a} \\ {}^{t+\Delta t} {}_r \Delta \mathbf{S}^{2ord}({}^{t+\Delta t} \mathbf{a}^2) &= {}^{t+\Delta t} {}_r \mathbf{D} {}^{t+\Delta t} {}_r \mathbf{B}_1({}^{t+\Delta t} \mathbf{a}) {}^{t+\Delta t} \mathbf{a} \end{aligned} \right\} \tag{3.5.4}$$

Finalmente, sustituyendo las ecuaciones (3.5.1), (3.5.2), (3.5.3) y (3.5.4) en (3.3.5), se obtiene la relación secante entre las fuerzas y desplazamientos totales que actúan en un elemento finito \mathcal{E} del sólido en el intervalo de tiempo $[0, t + \Delta t]$ como

$$\boxed{{}^{t+\Delta t} {}_0 \mathbf{K}_{ST}^{(e)}({}^{t+\Delta t} \mathbf{a}) = {}^{t+\Delta t} {}_0 \mathbf{K}_L({}^0 \mathbf{x}^{(e)}) + {}^{t+\Delta t} {}_0 \mathbf{K}_M({}^{t+\Delta t} \mathbf{a}) + {}^{t+\Delta t} {}_0 \mathbf{K}_N({}^{t+\Delta t} \mathbf{a}^2)} \tag{3.5.5}$$

donde para cada elemento

$${}^{t+\Delta t} {}_0 \mathbf{K}_L({}^0 \mathbf{x}^{(e)}) = \int_{{}_0 V^{(e)}} {}_0 \mathbf{B}_{L_0}^T {}^{t+\Delta t} {}_0 \mathbf{D} {}_0 \mathbf{B}_{L_0} dV \tag{3.5.6a}$$

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} {}_0 \mathbf{K}_M({}^{t+\Delta t} \mathbf{a}) &= \int_{{}_0 V^{(e)}} \left[\frac{1}{2} {}_0 \mathbf{B}_{L_0}^T {}^{t+\Delta t} {}_0 \mathbf{D} {}^{t+\Delta t} {}_0 \mathbf{B}_1 + \alpha {}^{t+\Delta t} {}_0 \mathbf{B}_1^T {}^{t+\Delta t} {}_0 \mathbf{D} {}_0 \mathbf{B}_{L_0} + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \alpha) {}_0 \mathbf{G}^T {}^{t+\Delta t} {}_0 \mathbf{E} {}_0 \mathbf{G} \right] dV \end{aligned} \tag{3.5.6b}$$

$$\begin{aligned}
{}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_N({}^{t+\Delta t} \mathbf{a}^2) = \int_{0V(e)} \left[\frac{1}{4}(2-\beta) {}^{t+\Delta t} \mathbf{B}_1^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{D} {}^{t+\Delta t} \mathbf{B}_1 + \right. \\
\left. + \frac{\beta}{4} {}_0 \mathbf{G}^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{H} {}_0 \mathbf{G} \right] dV \quad (3.5.6c)
\end{aligned}$$

Las componentes de las matrices ${}^{t+\Delta t} \mathbf{E}$ y ${}^{t+\Delta t} \mathbf{H}$ son funciones de los incrementos de tensiones de primer y segundo orden, respectivamente, dados por las ecuaciones (3.5.4). La forma de estas matrices es idéntica a la de las matrices ${}_r \mathbf{E}$ y ${}_r \mathbf{H}$ que se detallan en el Cuadro 3.2.

3.6 APLICACIONES DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ SECANTE A PROBLEMAS DE NO LINEALIDAD GEOMÉTRICA

Para obtener la forma discreta de las ecuaciones incrementales de equilibrio del sólido es necesario ensamblar las matrices de rigidez secante y los vectores de fuerzas residuales de los elementos.

El vector de fuerzas residuales global ${}^{t+\Delta t} \mathbf{r}$ y la matriz de rigidez secante global ${}^t \mathbf{K}_S$ del sólido \mathcal{B} se obtienen del modo siguiente

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{r} = \mathbb{E} \sum_{e=1}^{n_{el}} {}^{t+\Delta t} \mathbf{r}^{(e)} \quad \text{y} \quad {}^t \mathbf{K}_S = \mathbb{E} \sum_{e=1}^{n_{el}} {}^t \mathbf{K}_S^{(e)} \quad (3.6.1)$$

donde \mathbb{E} es el operador de ensamblaje estándar de elementos finitos (ZIENKIEWICZ y TAYLOR [1994a]).

Por consiguiente, la forma discreta de la ecuación incremental de equilibrio del sólido se expresa de acuerdo con las ecuaciones (3.6.1) y (3.3.2) como

$${}^t \mathbf{K}_S({}^t \mathbf{v}, \Delta \mathbf{v}) \Delta \mathbf{v} = -{}^{t+\Delta t} \mathbf{r} \quad (3.6.2)$$

donde ${}^t \mathbf{v}$ es el vector global de desplazamientos iniciales correspondientes al intervalo de tiempo $[0, t]$ y $\Delta \mathbf{v}$ es el vector global de incremento de desplazamientos nodales del sólido entre los instantes t y $t + \Delta t$. Se suponen aplicadas las condiciones de contorno en (3.6.2).

3.6.1 Algoritmos de solución de la ecuación incremental de equilibrio utilizando la matriz secante

Entre los diversos métodos empleados en la resolución de un sistema de ecuaciones no lineales basados en una expresión aproximada de la matriz secante se pueden citar los métodos cuasi-Newton y secante-Newton. En estos métodos se deduce una expresión numérica de la matriz secante utilizando algoritmos de Broyden y los derivados del BFGS. Se trata de métodos potentes para la solución de ecuaciones no lineales. En este apartado se propondrán algunos métodos de resolución basados en la expresión exacta de la matriz secante incremental y total deducidas en los apartados anteriores.

Un procedimiento para encontrar la solución de equilibrio en la configuración $t + \Delta t$ en (3.6.2) es, por ejemplo, utilizar la matriz secante total definida en (3.5.5). Partiendo de la configuración indeformada, y suponiendo que ${}^t\mathbf{v} = \mathbf{0} \implies {}^t_r\mathbf{S} = \mathbf{0}$, ${}^{t+\Delta t}\mathbf{v} = \Delta\mathbf{v}$ y que la fuerza total se aplica en un solo paso de carga, ${}^{t+\Delta t}\mathbf{r} = -{}^{t+\Delta t}\mathbf{f}$, se obtiene la solución a través de un algoritmo iterativo directo como

$$\begin{cases} {}^{t+\Delta t}\mathbf{v}^i = [{}^{t+\Delta t}_0\mathbf{K}_{ST}({}^{t+\Delta t}\mathbf{v}^{i-1})]^{-1} {}^{t+\Delta t}\mathbf{f} \\ \text{con } {}^{t+\Delta t}\mathbf{v}^0 = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad i = 1, 2, \dots, {}^{t+\Delta t}n_i \end{cases} \quad (3.6.3)$$

donde i es la i -ésima iteración en el intervalo de tiempo $[0, t + \Delta t]$ y ${}^{t+\Delta t}n_i$ es el número de iteraciones necesarias para alcanzar la convergencia en este intervalo.

El proceso iterativo de la ecuación (3.6.3) se detiene cuando la diferencia entre dos valores consecutivos, ${}^{t+\Delta t}\mathbf{v}^{i-1}$ y ${}^{t+\Delta t}\mathbf{v}^i$, satisface una norma prefijada de error en desplazamientos. Es usual tomar

$$\frac{\sqrt{\sum_j ({}^{t+\Delta t}v_j^i - {}^{t+\Delta t}v_j^{i-1})^2}}{\sqrt{\sum_j ({}^{t+\Delta t}v_j^i)^2}} \leq \epsilon \quad (3.6.4)$$

donde ϵ es un valor que establece el error de convergencia deseado, generalmente $\epsilon = 10^{-3}$. La interpretación geométrica de este proceso para un grado de libertad se representa en la Figura 3.1.

También se puede utilizar la matriz secante incremental para encontrar una configuración de equilibrio en el instante $t + \Delta t$, partiendo de la configuración de equilibrio conocida en el instante t . La solución incremental iterativa se basa en la actualización sucesiva del vector de fuerzas residuales, resolviendo

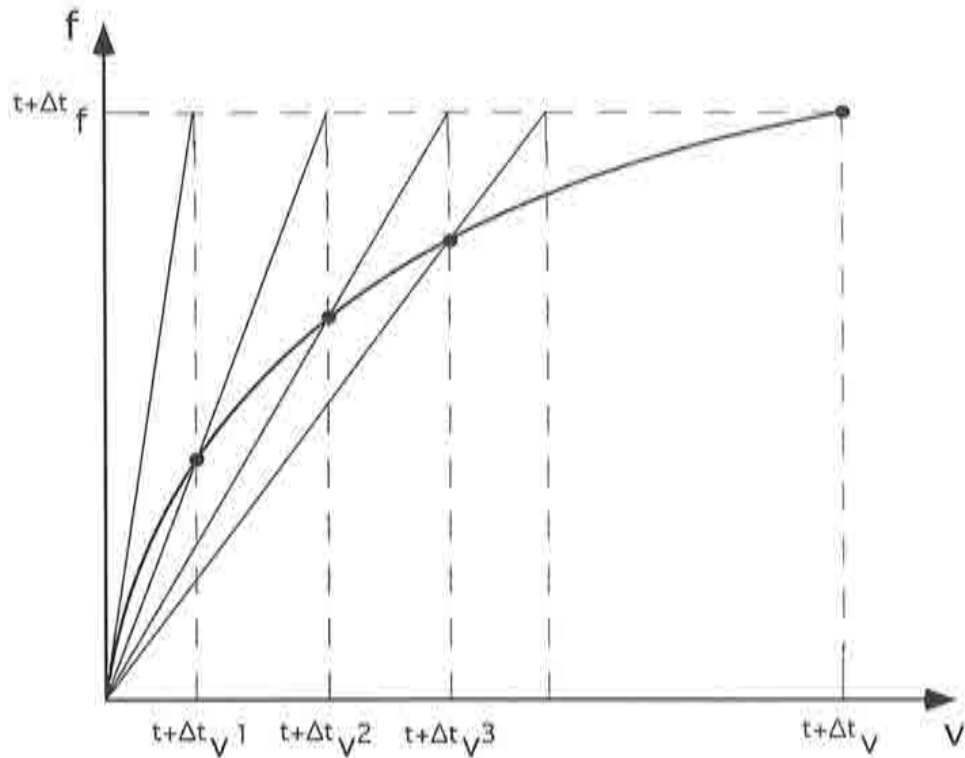


Figura 3.1 Algoritmo de iteración directa utilizando la matriz secante total

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathbf{v}^i = - \left[{}^t_r \mathbf{K}_S ({}^{t+\Delta t} \mathbf{v}^{i-2}, \Delta \mathbf{v}^{i-1}) \right]^{-1} {}^{t+\Delta t} \mathbf{r}^i \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{v}^i = {}^{t+\Delta t} \mathbf{v}^{i-1} + \Delta \mathbf{v}^i \\ \text{con } {}^{t+\Delta t} \mathbf{v}^{-1} = {}^t \mathbf{v}^{t n_i - 1}, {}^{t+\Delta t} \mathbf{v}^0 = {}^t \mathbf{v}^{t n_i} \text{ y } \Delta \mathbf{v}^0 = \mathbf{0} \\ \text{donde } i = 1, 2, \dots, {}^{t+\Delta t} n_i \end{array} \right. \quad (3.6.5)$$

donde ${}^t n_i$ es el número de iteraciones necesarias para alcanzar la convergencia en el paso de carga anterior correspondiente al intervalo de tiempo $[0, t]$. La representación geométrica de este algoritmo para un grado de libertad se muestra en la Figura 3.2.

El proceso iterativo representado por las ecuaciones (3.6.5) se detiene cuando se satisface un criterio de convergencia en desplazamientos prefijado, como el dado por (3.6.4), o en fuerzas residuales. Un criterio generalmente aceptado es evaluar la norma cuadrática de las fuerzas residuales, deteniendo el proceso si se satisface

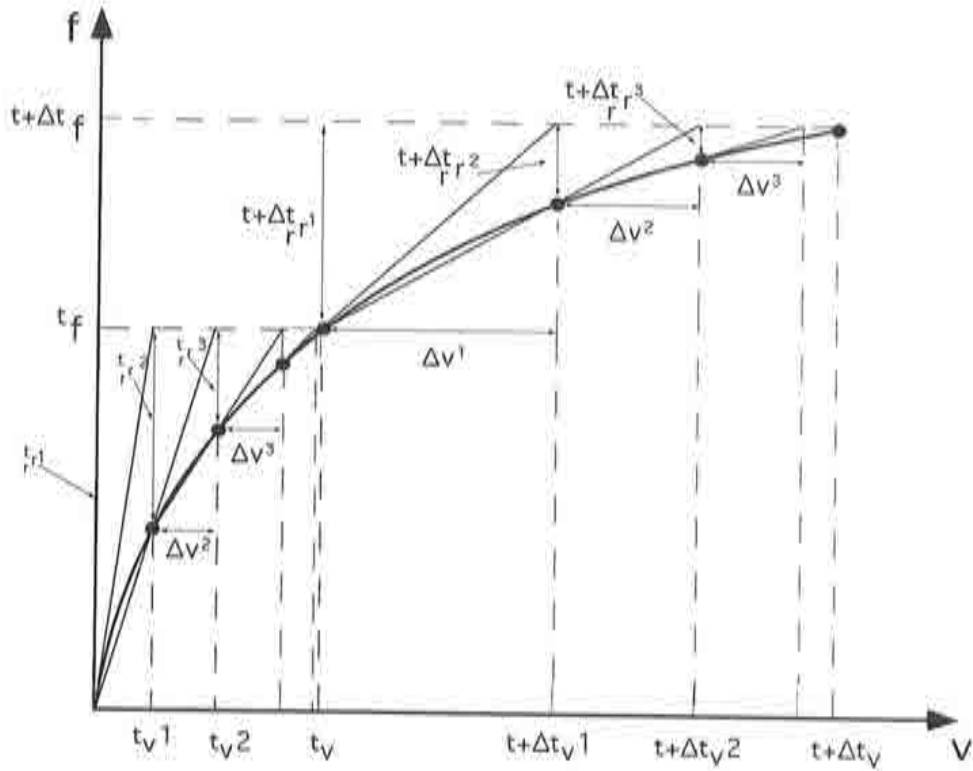


Figura 3.2 Algoritmo incremental-iterativo utilizando la matriz secante incremental

$$\frac{\sqrt{\sum_j (t+\Delta t_r^i)^2}}{\sqrt{\sum_j (t+\Delta t_f_j)^2}} \leq \epsilon \quad (3.6.6)$$

siendo usual tomar valores de ϵ entre 10^{-2} y 10^{-3} . Una discusión más detallada respecto a los criterios de convergencia se puede encontrar, por ejemplo, en HINTON [1992], cap. 5.

Hay que señalar que este algoritmo coincide precisamente con el método iterativo de Newton-Raphson, pero utilizando la matriz secante incremental ${}^t\mathbf{K}_S$ en lugar de la clásica matriz tangente ${}^t\mathbf{K}_T$ (BATHE [1996], cap. 6 y ZIENKIEWICZ y TAYLOR [1994b], cap. 7 y 8). Por tanto, se puede utilizar este algoritmo conjuntamente con cualquiera de los métodos de control de la respuesta (métodos de longitud de arco) descritos en CRISFIELD [1991], capítulo 9.

La facilidad con que se puede pasar de la expresión de la matriz secante a la de la matriz tangente, ver la ecuación (3.4.2), es de gran interés práctico, pues permite hacer uso de las ventajas de ambas matrices para optimizar el proceso de resolución. Así, sería de gran interés aprovechar la mayor versatilidad de la matriz secante para garantizar su definición positiva, lo que permitiría superar con mayor facilidad puntos de inestabilidad por cambio de forma, así como obtener una convergencia más rápida en puntos próximos a la carga máxima, donde la utilización de la matriz tangente suele ser desfavorable. Por otra parte, la matriz tangente es de gran utilidad para el cálculo de cargas de inestabilidad inicial así como para la detección de puntos de bifurcación, a partir del estudio de los valores y signos de algunos de sus parámetros, como el determinante, el menor autovalor y el menor pivote de esta matriz factorizada. Parece claro por tanto que la utilización conjunta de ambas matrices (de fácil implementación en ordenador), puede proporcionar un algoritmo de solución más eficiente y versátil. Estos aspectos serán tratados en el capítulo 5.

3.7 REFERENCIAS

- BADAWI, M. and CUSENS, A.R. [1992], Symmetry of the stiffness matrices for geometrically non-linear analysis, *Communications in Appl. Num. Meth.*, Vol. 8, pp. 135-140.
- BATHE, K.J. [1996], *Finite element procedures*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- CARRERA, E. [1992], Sull'uso dell'operatore secante in analisi non lineare di strutture multistrato con il metodo degli elementi finiti, XI Congresso Nazionale AIMETA, Trento, 28 Sept-2 Oct.
- CRISFIELD, M.A. [1991], *Non-linear finite element analysis of solids and structures. Volume 1: Essentials*, John Wiley & Sons.
- CRIVELLI, L.A. and FELIPPA, C. [1993], A three-dimensional non-linear Timoshenko beam based on the core-congruential formulation, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 36, pp. 3647-3673.
- FELIPPA, C. [1974], Discussions on the paper by Rajasekaran and Murray (1973), *J. Struct. Div.*, ASCE, **100**, pp. 2521-2523.
- FELIPPA, C. and CRIVELLI, L.A. [1991], The core congruential formulation of geometrically non linear finite elements. in *Non Linear Computational Mechanics. The State of the Art.*, P. Wriggers and W. Wagner (eds.), Springer-Verlag, Berlin.
- FELIPPA, C.; CRIVELLI, L.A.; HAUGEN, B. [1994], A survey of the core-congruential formulation for geometrically nonlinear TL finite elements, *Archives of Comp. Meth. in Eng.*, Vol. 1, n° 1, pp. 1-48.

- HINTON, E. [1992], *NAFEMS Introduction to nonlinear finite element analysis*, Bell and Bain Ltd, Glasgow.
- MALLET, R. and MARCAL, P. [1968], Finite element analysis of non-linear structures, *J. Struct. Div.*, ASCE, **94**, pp. 2081-2105.
- OÑATE, E., OLIVER, J., MIQUEL, J. and SUÁREZ, B., [1986], Finite element formulation for geometrically non linear problems using a secant matrix", in *Computational Plasticity'86*, S. Atluri and G. Yagawa (eds.), Springer-Verlag.
- OÑATE, E. [1991], Possibilities of the secant stiffness matrix for non linear finite element analysis, in *Non Linear Engineering Computations*, N. Bicanic et al. (eds), Pineridge Press.
- OÑATE, E. [1994], Derivation of the secant stiffness matrix for non linear finite element analysis of solids and trusses, Research Report N° 49, CIMNE, Barcelona.
- OÑATE, E. [1995a], On the derivation and possibilities of the secant stiffness matrix for non linear finite element analysis, *Computational Mechanics*, Vol. 15, pp. 572-593.
- OÑATE, E. and MATIAS, W.T. [1995b], A critical displacement approach for predicting structural instability, Research Report N° 62, CIMNE, Barcelona.
- RAJASEKARAN, S. and MURRAY, D.W. [1973], On incremental finite element matrices, *J. Struct. Div.*, ASCE, **99**, pp. 2423-2438.
- WOOD, R.D. [1973], The application of finite element methods to geometrically non-linear structural analysis, Univ. of Wales, Swansea, C/PH/20/73.
- WOOD, R.D. and SCHREFLER, B. [1978], Geometrically non-linear analysis - A correlation of finite element notations, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 12, pp. 635-642.
- ZIENKIEWICZ, O. C; TAYLOR, R. L. [1994a], *El Método de los Elementos Finitos. Volumen 1: Formulación Básica y Problemas Lineales*, cuarta edición, McGraw-Hill, CIMNE, Barcelona, España.
- ZIENKIEWICZ, O. C; TAYLOR, R. L. [1994b], *El Método de los Elementos Finitos. Volumen 2: Mecánica de Sólidos y Fluidos. Dinámica y no Linealidad*, cuarta edición, McGraw-Hill, CIMNE, Barcelona, España.

CAPÍTULO 4

EL MÉTODO DE DESPLAZAMIENTO CRÍTICO PARA LA PREDICCIÓN DE PUNTOS LÍMITE Y DE BIFURCACIÓN

4.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta un nuevo método de predicción de puntos críticos para el análisis de inestabilidad estructural. El método se basa en la determinación de un campo de desplazamiento crítico que aproxima al modo de bifurcación (modo de pandeo) o al modo de deformación crítico del sistema estructural. Se determinan estos desplazamientos críticos imponiendo la condición de singularidad en una expresión aproximada de la matriz de rigidez tangente en el punto crítico. Este procedimiento implica un problema generalizado y no lineal de autovalores. La carga crítica se calcula a posteriori, de manera directa, utilizando la relación secante entre carga y desplazamiento.

La predicción y localización de puntos de bifurcación y de puntos límite, denominados en el presente contexto *puntos críticos* o *puntos singulares*, ha recibido una atención especial en el área de la mecánica computacional. La pérdida de estabilidad del equilibrio y el consecuente cambio de geometría o bifurcación de la trayectoria de equilibrio son fenómenos usuales en algunos de los sistemas físicos tratados en la mecánica no lineal del sólido.

En la mecánica no lineal de sistemas estructurales, la mayor parte de los trabajos publicados en la literatura científica se centran en el estudio de estabilidad, bifurcación (pandeo) y comportamiento poscrítico de vigas, placas y láminas con material elástico, (PIGNATARO, RIZZI y LUONGO [1991], COMO y GRIMALDI [1995] y TRAHAIR [1993]). En elasticidad no lineal, la bifurcación se presenta, incluso, en problemas aparentemente simples que involucren modelos constitutivos estándar. Se puede citar, a título de ejemplo, el problema de bifurcación múltiple en un cubo de material Neo-Hookeano de Mooney-Rivlin sometido a un estado de tensión hidrostático, (MARSDEN y HUGHES, cap. 7).

La pérdida de la estabilidad juega un papel importante, también, en la teoría de los modelos constitutivos inelásticos, es decir, en sistemas disipativos. Como ejemplo clásico se puede citar la bifurcación difusa en el estiramiento de una barra circular con material elastoplástico sometida a un estado homogéneo de

tensión proveniente de un ensayo de tracción simple. La bifurcación ocurre debido a la pérdida de elipticidad de las ecuaciones de gobierno del problema, localizándose las deformaciones y formándose bandas de corte, (WRIGGERS y SIMO [1990]).

Los métodos numéricos para la detección de puntos críticos pueden clasificarse en *directos* o *indirectos*, (CHOONG y HANGAI [1993]). En los métodos indirectos, el parámetro para detectar el punto crítico se calcula a medida que se resuelve el sistema de ecuaciones no lineales de equilibrio de forma incremental. Estos parámetros dependen de datos que se obtienen de los algoritmos de solución de dicho sistema de ecuaciones.

Se suelen elegir como parámetros el *determinante*, el *menor autovalor* o el *pivote mínimo* de la matriz de rigidez tangente. El punto crítico, y la correspondiente carga crítica, se obtiene cuando estos parámetros se anulan, es decir, cuando la matriz de rigidez tangente es singular.

En los métodos directos, la condición de existencia de punto crítico se expresa por un conjunto de restricciones que caracteriza dicho punto, que se añade al sistema de ecuaciones de equilibrio en un punto. Se forma así un sistema de ecuaciones *aumentado*, de cuya resolución se obtiene el punto crítico y el valor de la carga crítica.

Obtenido el punto crítico, es necesario analizar el comportamiento postcrítico, activando, para ello, un algoritmo de búsqueda de ramas de equilibrio secundarias. En la referencia CHOONG y HANGAI [1993] se presenta un resumen de los métodos directos e indirectos más usuales en el marco del método de los elementos finitos, así como el de algoritmos de búsqueda de ramas secundarias de equilibrio cuando se trata de puntos de bifurcación.

Según KOUHIA y MIKKOLA [1995], un método capaz de tratar puntos críticos debe satisfacer los siguientes requisitos:

1. Estimar y detectar una configuración inestable de equilibrio (estado crítico). (RIKS [1974], SEYDEL [1991], SHI y CRISFIELD [1992, 1994], SKEIE y FELIPPA [1991] y WRIGGERS y SIMO [1990]).
2. Hacer la distinción de manera fiable y a un coste razonable entre punto límite y punto de bifurcación. (KOUHIA [1992], RIKS [1974, 1984] y WASZCZYSZYN [1983]).
3. En el caso de punto de bifurcación, tener habilidad para detectar la rama secundaria de equilibrio. (KOUHIA y MIKKOLA [1989], RHEINBOLDT [1978], RIKS [1974], THURSTON [1969], WAGNER y WRIGGERS [1988] y WASZCZYSZYN [1983]).
4. Poseer la capacidad de verificar la existencia de todas las posibles ramas secundarias de equilibrio que puedan existir en un punto de bifurcación, *bifurcación múltiple*.

5. Tener la capacidad de verificar la existencia de puntos de bifurcación aglutinados en un tramo de la trayectoria fundamental de equilibrio y poseer la robustez necesaria que le permita buscar ramas secundarias de equilibrio en cada uno de estos puntos de bifurcación aglutinados. (RIKS [1984], HANGAI y LIN [1989], CHOONG y HANGAI [1994] y FUJII y CHOONG [1991]).

Es importante destacar que el tema de la bifurcación múltiple, en opinión de KOUHIA y MIKKOLA [1995], se trata aún de un campo abierto a la investigación. Se puede constatar que la literatura técnica preferentemente aborda la teoría de bifurcación y estabilidad para puntos singulares simples en problemas estacionarios y no disipativos.

Por las características arriba mencionadas se puede clasificar el método de desplazamiento crítico como un método *semi-directo*, ya que primero resuelve las ecuaciones incrementales de equilibrio, impone la condición de singularidad en una expresión aproximada de la matriz de rigidez tangente en el punto singular para evaluar el desplazamiento crítico y finalmente calcula la carga crítica en función de dicho desplazamiento crítico utilizando la matriz secante.

Respecto a los requisitos mencionados por KOUHIA y MIKKOLA, este método sólo cumple con los dos primeros. La búsqueda de ramas secundarias en la proximidad de un punto de bifurcación, utilizando el concepto de la matriz de rigidez secante incremental son objeto de líneas futuras de investigación que abren los desarrollos de esta monografía.

En el apartado 4.2 se presenta de manera sucinta algunas ideas respecto a la predicción de puntos críticos y a la búsqueda de ramas secundarias de equilibrio empleando el concepto de matriz secante incremental. Dichas ideas se configuran como punto de partida para el desarrollo del método de desplazamiento crítico, que se presenta en los apartados 4.3 y 4.4. En el apartado 4.4 se describen, de manera detallada, los pasos necesarios para la deducción de la matriz de rigidez tangente crítica, para la definición del problema no lineal de valores propios y para el cálculo de la carga crítica.

En el apartado 4.5 se discuten las distintas estrategias de aplicación del método de desplazamiento crítico en el análisis de inestabilidad de sistemas estructurales.

En el apartado 4.6 se desarrollan técnicas iterativas en la solución del problema no lineal de autovalores. Estas técnicas transforman dicho problema en una secuencia de sistemas lineales. Además, se presentan técnicas de transformación directa para obtener la solución exacta del problema no lineal de autovalores.

Por último, en el apartado 4.7 se describe el algoritmo del método de iteración inversa para la resolución del problema lineal de valores propios.

4.2 ANTECEDENTES DEL MÉTODO DE DESPLAZAMIENTO CRÍTICO

En este apartado se introducen algunos antecedentes respecto a la predicción de puntos críticos y de ramas secundarias de equilibrio en las proximidades de un punto de equilibrio conocido del sólido utilizando la matriz secante.

La solución fundamental de la ecuación no lineal de equilibrio en el intervalo de tiempo $[0, T]$ representa una trayectoria de equilibrio primaria. Se supone que en este intervalo de tiempo puedan existir otras trayectorias secundarias de equilibrio, por lo que, según KRÖPLIN y DINKLER [1985], se puede evaluar para cada punto de la rama primaria precrítica de equilibrio (por ejemplo, punto A en las curvas de la Figura 4.1) una perturbación externa que sea capaz de producir un cambio de forma o un modo de bifurcación en el sólido hacia un punto de la rama secundaria postcrítica de equilibrio (punto B). A esta perturbación se la denomina perturbación crítica. Normalmente se considera como perturbación algún autovector que se extrae de la matriz de rigidez tangente o secante. Por ejemplo, teniendo en cuenta la ecuación (3.4.1), según KRÖPLIN, WILHELM y HERRMANN [1991] la dirección de la perturbación ϕ puede calcularse a través del siguiente problema lineal de valores propios

$$\left[{}^t_r\mathbf{K}_L({}^t\mathbf{v}, {}^t\mathbf{v}^2) + \bar{\lambda} {}^t_r\mathbf{K}_\sigma({}^t_r\mathbf{S}) \right] \phi = \mathbf{0} \quad (4.2.1)$$

donde $\bar{\lambda}$ es el menor autovalor no nulo y ϕ su correspondiente autovector.

Una vez definida la dirección de la perturbación se puede calcular un parámetro arbitrario ϱ que escala la magnitud de ϕ . Para determinar este parámetro, KRÖPLIN y DINKLER [1985] han propuesto la siguiente restricción a la ecuación incremental de equilibrio

$${}^t_r\mathbf{K}_S({}^t\mathbf{v}, \Delta\mathbf{v}) \Delta\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (4.2.2)$$

donde ${}^t_r\mathbf{K}_S$ es la matriz de rigidez secante incremental definida en (3.6.2).

La restricción que expresa (4.2.2) puede ser interpretada como un problema de minimización de la energía de perturbación introducida en el sistema (KRÖPLIN y DINKLER [1985]), por consiguiente, la distancia entre los puntos A y B es mínima, (ver Figura 4.1). Se supone que la dirección de avance es $\Delta\mathbf{v} = \varrho \phi$, donde ϕ es un modo de bifurcación estimado correspondiente al punto crítico de la trayectoria primaria de equilibrio como, por ejemplo, el autovector calculado en (4.2.1), pudiendo ser, también, el propio vector desplazamiento de la partícula \mathcal{X} del sólido en tV , esto es, ${}^t\mathbf{v}$ y ϱ un número real arbitrario que escala la magnitud de la perturbación. La restricción (4.2.2) se

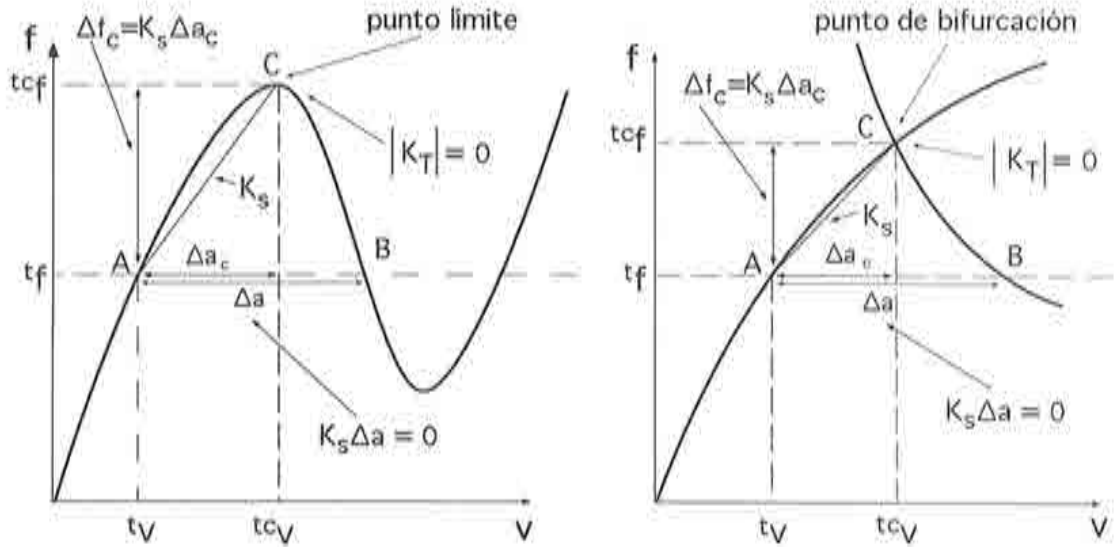


Figura 4.1 Ejemplos de puntos límite y de bifurcación

convierte en un problema generalizado de autovalores a partir del cual se puede calcular el valor de ϱ . Dicho problema se expresa como

$$\left[{}^t_r \mathbf{K}_L({}^t \mathbf{v}, {}^t \mathbf{v}^2) + {}^t_r \mathbf{K}_\sigma({}^t_r \mathbf{S}) + \varrho {}^t_r \mathbf{K}_M({}^t \mathbf{v}, \phi) + \varrho^2 {}^t_r \mathbf{K}_N(\phi^2) \right] \psi = 0 \quad (4.2.3)$$

Esta ecuación representa un problema cuadrático de valores propios en ϱ , que puede ser resuelto con técnicas iterativas. Nótese que en esta ecuación se ha utilizado el concepto de la matriz secante incremental.

KRÖPLIN y DINKLER [1985] utilizan el valor de $\Delta \mathbf{v}$ deducido de (4.2.2) para realizar una aproximación del desplazamiento crítico, $\Delta \mathbf{v}_c$ (ver Figura 4.1), como

$$\Delta \mathbf{v}_c = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{v} = \frac{1}{2} \varrho \phi \quad (4.2.4a)$$

Dicho valor puede utilizarse para obtener el valor aproximado de la carga crítica como

$$\mathbf{f}_c \approx {}^t \mathbf{f} + \Delta \mathbf{f}_c \quad (4.2.4b)$$

con

$$\Delta \mathbf{f}_c \approx {}^t_r \mathbf{K}_S \left(\frac{1}{2} \varrho \phi \right) \frac{1}{2} \varrho \phi \quad (4.2.4c)$$

donde ${}^t_r\mathbf{K}_S$ es la matriz secante incremental.

Estas ideas son la base del método de desplazamiento crítico que se desarrolla en el apartado siguiente y posterior.

Otro parámetro definido por KRÖPLIN, DINKLER y HILLMAN [1985] y KRÖPLIN y DINKLER [1988] es el *grado de estabilidad* de la estructura. Dicho parámetro mide la capacidad resistente del sólido y su sensibilidad frente a una perturbación externa alrededor de un punto arbitrario de la trayectoria precrítica de equilibrio. Estos autores definen el grado de estabilidad de la siguiente manera

$$\bar{\gamma} = \frac{U_{\text{crit}} - W_{\text{ext}}}{U_{\text{crit}}} \begin{array}{l} > 0 & \text{estable} \\ = 0 & \text{indiferente} \\ < 0 & \text{inestable} \end{array} \quad (4.2.5)$$

donde U_{crit} es la energía de deformación necesaria que se añade a la energía de deformación precrítica para que el sólido se desplace a un estado postcrítico próximo, esto es, que pase del punto A al punto B en la Figura 4.1, y W_{ext} es el incremento del trabajo externo debido a una perturbación. Nótese que a medida que se aproxima a un punto crítico, el parámetro $\bar{\gamma}$ tiende a cero, consecuentemente, se necesita una perturbación muy pequeña para que el sólido se mueva hacia una trayectoria postcrítica. Este parámetro valora de manera escalar cuán estable, o no, es una trayectoria fundamental de equilibrio. Los valores de U_{crit} y W_{ext} pueden calcularse como

$$\begin{cases} U_{\text{crit}} = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{v}^T {}^t_r\mathbf{K}_U(\mathbf{v}, \Delta \mathbf{v}) \Delta \mathbf{v} & \text{y} & W_{\text{ext}} = \Delta \mathbf{v}^T \mathbf{f}_p \\ \text{con } \Delta \mathbf{v} = \rho \boldsymbol{\phi} & \text{y} & \mathbf{f}_p = {}^t_r\mathbf{K}_S \boldsymbol{\phi} \end{cases} \quad (4.2.6)$$

La matriz de rigidez global ${}^t_r\mathbf{K}_U$ está asociada al incremento de energía de deformación debido a la perturbación externa. Esta matriz se obtiene a través del operador de ensamblaje que suma, en las direcciones de los grados de libertad de cada nodo del sólido discretizado, la contribución de cada elemento que concurre en este nodo. De esta manera, se define la matriz ${}^t_r\mathbf{K}_U$ como

$${}^t_r\mathbf{K}_U = \mathbb{E} \sum_{e=1}^{n_{el}} {}^t_r\mathbf{K}_U^{(e)} \quad (4.2.7)$$

donde ${}^t_r\mathbf{K}_U^{(e)}$ es la matriz de rigidez asociada al incremento de energía de deformación evaluada en un elemento finito arbitrario del sólido discretizado. La expresión general de esta matriz tiene la siguiente forma

$$\boxed{{}^t\mathbf{K}_U^{(e)}({}^t\mathbf{a}, \Delta\mathbf{a}) = {}^t\mathbf{K}_L({}^t\mathbf{a}^2, {}^t\mathbf{a}) + {}^t\mathbf{K}_\sigma({}^t\mathbf{S}) + {}^t\bar{\mathbf{K}}_M({}^t\mathbf{a}, \Delta\mathbf{a}) + {}^t\bar{\mathbf{K}}_N(\Delta\mathbf{a}^2)} \quad (4.2.8)$$

donde las matrices ${}^t\mathbf{K}_L$ y ${}^t\mathbf{K}_\sigma$ son las mismas que han sido definidas en (3.3.5a) y (3.3.5d) y

$$\begin{aligned} {}^t\bar{\mathbf{K}}_M({}^t\mathbf{a}, \Delta\mathbf{a}) = \int_{rV^{(e)}} & \left[\frac{\phi}{2} ({}^t\mathbf{B}_L^T r\mathbf{D} r\mathbf{B}_1 + r\mathbf{B}_1^T r\mathbf{D} {}^t\mathbf{B}_L) + \right. \\ & \left. + (1 - \phi) r\mathbf{G}^T r\mathbf{E} r\mathbf{G} \right] dV \end{aligned} \quad (4.2.9a)$$

$${}^t\bar{\mathbf{K}}_N(\Delta\mathbf{a}^2) = \int_{rV^{(e)}} \left[\frac{\gamma}{4} r\mathbf{B}_1^T r\mathbf{D} r\mathbf{B}_1 + \frac{1}{4}(1 - \gamma) r\mathbf{G}^T r\mathbf{H} r\mathbf{G} \right] dV \quad (4.2.9b)$$

donde ϕ y γ son parámetros arbitrarios resultantes de una expresión paramétrica del funcional de la energía potencial total. Nótese que la matriz ${}^t\mathbf{K}_U^{(e)}$ es simétrica. La obtención de ${}^t\mathbf{K}_U^{(e)}$ sigue los mismos desarrollos algebraicos que fueron necesarios para la deducción de la matriz secante incremental en el apartado 3.3 del Capítulo 3, sólo que, trabajando a nivel del funcional de la energía potencial total. Las ideas utilizadas por el autor de la monografía para la deducción de la ecuación (4.2.8), se tomaron de los trabajos de FELIPPA y CRIVELLI [1991] y FELIPPA, CRIVELLI y HAUGEN [1994].

Como resumen, a través de las ecuaciones (4.2.1) y (4.2.2) se deduce la dirección y la magnitud de la perturbación capaz de llevar el sólido de un punto de la rama precrítica de equilibrio a un punto perteneciente a una rama postcrítica o bifurcada de equilibrio. La predicción de la carga crítica se hace empleando las ecuaciones (4.2.4). Con las ecuaciones (4.2.5) y (4.2.6) se evalúa la condición de equilibrio de un punto de la rama primaria de equilibrio, es decir, si el equilibrio en este punto es estable o no.

En este apartado se han repasado de manera sucinta algunas ideas respecto a la predicción de puntos críticos y la existencia de ramas postcríticas en la vecindad de un punto de la rama primaria de equilibrio empleando el concepto de la matriz secante incremental. Estos conceptos son el punto de partida para obtener un método para la predicción de cargas críticas a través de la adopción de un campo de desplazamientos críticos. En el próximo apartado se desarrollará con detalle este método que configura la aportación fundamental de esta monografía.

4.3 IDEAS BÁSICAS DEL MÉTODO DE DESPLAZAMIENTO CRÍTICO

En este apartado se introducen las ideas básicas respecto a la predicción de puntos críticos a través del método de desplazamiento crítico. Los temas principales, necesarios para desarrollar este método, se enumeran a continuación:

1. La adopción de un campo de desplazamientos que se aproxime al modo de deformación crítico del sólido, o al modo de pandeo si se trata de un punto de bifurcación.
2. La deducción de una expresión aproximada para la matriz de rigidez tangente en el punto crítico, utilizando el campo de desplazamientos adoptado en el punto 1.
3. La condición de restricción para determinar el campo de desplazamientos crítico a través de la imposición de singularidad en la matriz de rigidez tangente aproximada.
4. La definición de una relación secante total o incremental entre fuerzas y desplazamientos, que se aplica en el campo de desplazamientos crítico para obtener la carga crítica.

El método aquí propuesto se basa en la hipótesis básica de la existencia de un campo de desplazamientos crítico \mathbf{v}_c que se expresa como

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{v}_0 + \Delta \mathbf{v}_c \quad (4.3.1)$$

donde \mathbf{v}_0 es el vector de desplazamientos en una configuración de equilibrio conocida y $\Delta \mathbf{v}_c$ es el incremento de desplazamientos necesario para alcanzar la configuración de equilibrio crítico. Se supone que dicho vector tiene la siguiente forma

$$\Delta \mathbf{v}_c = \varrho \boldsymbol{\phi} \quad (4.3.2)$$

donde ϱ es un parámetro arbitrario y $\boldsymbol{\phi}$ es una predicción del incremento de desplazamientos crítico. Se puede adoptar $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{v}_0$ como una predicción sencilla.

Se emplea el campo de desplazamientos (4.3.1) para deducir una expresión aproximada de la matriz de rigidez tangente en el punto crítico. La condición de singularidad de dicha matriz constituye un problema generalizado de autovalores no lineal que puede expresarse como

$$\left[\mathbf{K}_T + \varrho \mathbf{K}_1(\boldsymbol{\phi}) + \varrho^2 \mathbf{K}_2(\boldsymbol{\phi}^2) \right] \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0} \quad (4.3.3)$$

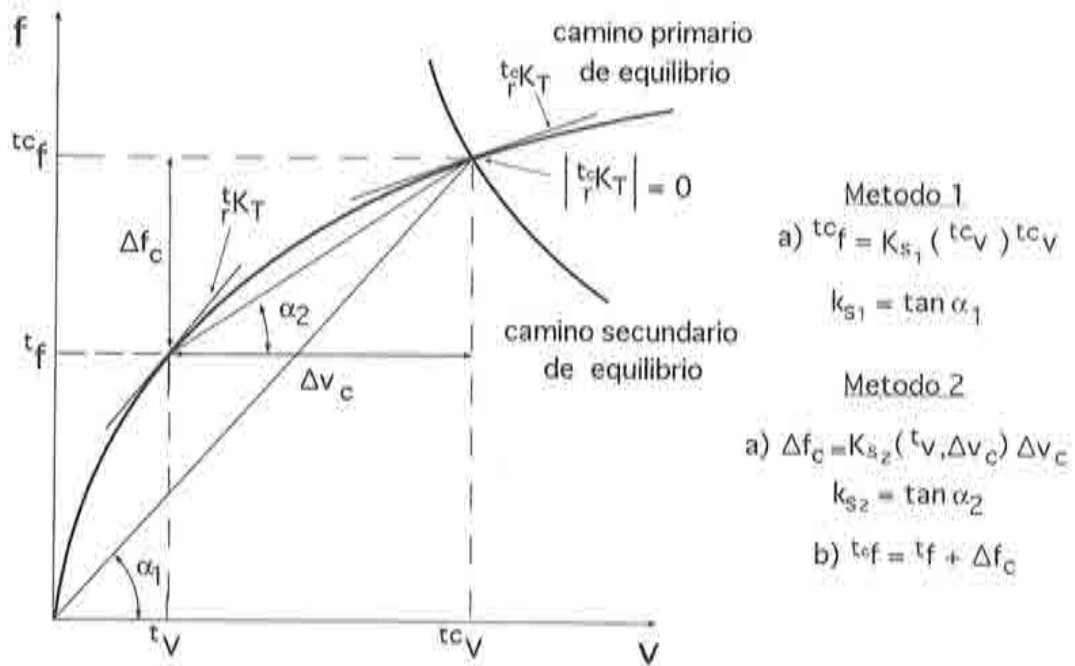


Figura 4.2 Representación esquemática del método de desplazamiento crítico

donde \mathbf{K}_T es la matriz de rigidez tangente en la configuración de equilibrio conocida. \mathbf{K}_1 y \mathbf{K}_2 son las matrices que surgen a causa de la perturbación añadida al campo de desplazamientos inicial. \mathbf{K}_1 y \mathbf{K}_2 , respectivamente, son funciones lineal y cuadrática del incremento de desplazamientos crítico estimado. La ecuación (4.3.3) puede simplificarse ignorando los términos cuadráticos. Obtenido el menor autovalor en valor absoluto ϱ , el campo de desplazamientos crítico se expresa como

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{v}_0 + \varrho \boldsymbol{\phi} \tag{4.3.4}$$

El valor de la carga crítica \mathbf{f}_c se calcula a posteriori mediante la relación *secante total* entre carga y desplazamiento, es decir

$$\mathbf{f}_c = \mathbf{K}_{ST}(\mathbf{v}_c^2) \mathbf{v}_c \tag{4.3.5}$$

donde \mathbf{K}_{ST} es la matriz de rigidez secante total, que es una función cuadrática de \mathbf{v}_c . También, se puede evaluar la carga crítica a través de la relación *secante incremental* entre carga y desplazamiento de la siguiente manera

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{f}_c = \mathbf{K}_S(\Delta \mathbf{v}_c^2) \Delta \mathbf{v}_c \\ \mathbf{f}_c = \mathbf{f}_0 + \Delta \mathbf{f}_c \end{cases} \quad (4.3.6)$$

donde \mathbf{f}_0 corresponde a las fuerzas que actúan en el sólido en la configuración de partida; $\Delta \mathbf{f}_c$ denota el incremento de fuerzas que se aplica al sólido al moverlo de la configuración de partida a la de equilibrio crítico y \mathbf{K}_S es la matriz de rigidez secante incremental. En la Figura 4.2 se muestra la interpretación geométrica del procedimiento descrito en las ecuaciones (4.3.1-4.3.6) para un problema con un grado de libertad.

4.4 EL MÉTODO DE DESPLAZAMIENTO CRÍTICO

La utilidad de la matriz de rigidez secante radica aquí en la capacidad de estimar el nivel de carga que origina la inestabilidad estructural a partir de la definición de un campo de desplazamiento crítico aproximado, correspondiente a puntos límite o puntos de bifurcación. Estos puntos se caracterizan por la singularidad de la matriz de rigidez tangente ${}^t_r \mathbf{K}_T$. El método propuesto aquí está basado en la predicción del campo de *desplazamientos crítico* imponiendo la singularidad en la *matriz de rigidez tangente aproximada* ${}^t_c \mathbf{K}_T$. La carga crítica se obtiene de modo directo, en función del desplazamiento crítico, utilizando la matriz de rigidez secante total o incremental.

4.4.1 Campo de desplazamiento crítico

Se supone que el campo de las variables cinemáticas (desplazamientos) está definido en los puntos nodales del sólido discretizado. El vector de desplazamientos en el estado crítico puede predecirse como

$${}^{t+\Delta t_c} \mathbf{v} = {}^t \mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}_c \quad (4.4.1)$$

donde ${}^t \mathbf{v}$ es el vector de desplazamientos en la configuración de equilibrio ${}^t V$ y $\Delta \mathbf{v}_c$ es el incremento de desplazamientos estimado que se añade al vector de desplazamiento en t para alcanzar la configuración de equilibrio inestable en $t_c = t + \Delta t_c$. Por tanto, la ecuación (4.4.1) expresa una relación entre variables cinemáticas definidas en los puntos nodales del sólido discretizado. Se adopta como predicción del incremento de desplazamiento crítico la siguiente expresión

$$\Delta \mathbf{v}_c = \rho \phi \quad (4.4.2)$$

donde ρ es un número real arbitrario que escala la magnitud de la perturbación ϕ . El parámetro ρ indica la distancia entre las configuraciones de equilibrio tV y de equilibrio inestable ${}^{t+\Delta t_c}V$. Si el valor de ρ es grande, esto significa que la configuración tV se encuentra lejos del estado crítico. Por otro lado, si el valor de ρ es pequeño esto implica que la configuración tV se encuentra cerca del estado crítico.

Se puede elegir como perturbación las siguientes direcciones de avance hacia la configuración de equilibrio inestable, ${}^{t+\Delta t_c}V$, del sólido:

1. Una predicción del modo de inestabilidad fundamental proveniente del *análisis de pandeo inicial* a través del problema de autovalores dado por

$$[{}^t_0\mathbf{K}_{L_0} + \bar{\lambda} {}^t_0\mathbf{K}_\sigma] \phi = 0 \quad (4.4.3)$$

donde $\bar{\lambda}$ es el menor autovalor no nulo y ϕ su correspondiente autovector; ${}^t_0\mathbf{K}_{L_0}$ es la matriz de rigidez lineal y ${}^t_0\mathbf{K}_\sigma$ la matriz de rigidez geométrica descritas en la configuración indeformada.

2. Una estima del modo de inestabilidad fundamental utilizando la matriz de rigidez tangente definida en tV . Se hace el *análisis de pandeo inicial* a través del siguiente problema de autovalores

$$[{}^t_r\mathbf{K}_L + \bar{\lambda} {}^t_r\mathbf{K}_\sigma] \phi = 0 \quad (4.4.4)$$

donde $\bar{\lambda}$ es el menor autovalor en valor absoluto y ϕ su autovector asociado; ${}^t_r\mathbf{K}_L$ es la matriz de rigidez que tiene en cuenta el desplazamiento ${}^t\mathbf{v}$ y ${}^t_r\mathbf{K}_\sigma$ la matriz de rigidez geométrica descritas en la configuración de referencia rV .

3. El incremento de desplazamiento entre las configuraciones ${}^{t-\Delta t}V$ y tV , es decir, $\phi = {}^t\mathbf{v} - {}^{t-\Delta t}\mathbf{v}$.
4. El desplazamiento correspondiente a la configuración tV , esto es, $\phi = {}^t\mathbf{v}$.

En este trabajo sólo se ha utilizado en las simulaciones numéricas como predicción de la perturbación las opciones 3 y 4, obteniéndose buenos resultados. En general se ha obtenido una mejor aproximación a la dirección de estado crítico con ${}^t\mathbf{v}$ que con el incremento $\Delta\mathbf{v}$, una vez que el desplazamiento total convergido, por sí solo, es una buena predicción de la dirección de avance. Se evita utilizar como punto de partida del análisis la resolución de un problema generalizado de valores propios, como los correspondientes a las opciones 1 y 2, porque este método requiere en cada paso la solución de un problema adicional de valores propios.

4.4.2 Discretización del campo de deformación crítica

En este apartado se define el campo de desplazamiento crítico en los nodos de un elemento finito arbitrario \mathcal{E} del sólido \mathcal{B} discretizado en la configuración de referencia rV . Por lo tanto, se utiliza ahora la relación cinemática (4.4.1) a nivel de un elemento finito. Se supone que el campo de desplazamiento en el instante crítico $t_c = t + \Delta t_c$, definido en los nodos de un elemento finito arbitrario, se expresa como

$${}^{t+\Delta t_c}\mathbf{a} = {}^t\mathbf{a} + \varrho \boldsymbol{\varphi} \quad (4.4.5)$$

donde $\boldsymbol{\varphi}$ son las componentes de la perturbación global $\boldsymbol{\phi}$ que actúan en los nodos del elemento \mathcal{E} y ϱ es un escalar.

Se puede calcular el campo de deformación crítica en una partícula arbitraria \mathcal{X} del elemento \mathcal{E} a través de las matrices de deformaciones definidas en las ecuaciones (3.2.11). Utilizando las ecuaciones (3.2.11) y (4.3.3), la matriz de deformación de primer orden *estimada* en el punto crítico se escribe como

$${}^{t_c}\mathbf{B}_L({}^{t+\Delta t_c}\mathbf{a}) = {}_r\mathbf{B}_{L_0} + {}^t\mathbf{B}_{L_1}({}^t\mathbf{a}) + \varrho {}_r\bar{\mathbf{B}}_1(\boldsymbol{\varphi}) = {}^t\mathbf{B}_L({}^t\mathbf{a}) + \varrho {}_r\bar{\mathbf{B}}_1(\boldsymbol{\varphi}) \quad (4.4.6)$$

En la ecuación (4.4.6), ${}_r\bar{\mathbf{B}}_1(\boldsymbol{\varphi})$ se denomina *matriz de deformación crítica de primer orden*. Dicha matriz se obtiene de la expresión de ${}_r\mathbf{B}_1$ del Cuadro 3.1, al sustituir $\Delta\mathbf{a}$ por la predicción de un campo de desplazamiento crítico conocido $\boldsymbol{\varphi}$. Nótese que cuando $\boldsymbol{\varphi} = \Delta\mathbf{a}$, entonces ${}_r\bar{\mathbf{B}}_1 = {}_r\mathbf{B}_1$, o que si $\boldsymbol{\varphi} = {}^t\mathbf{a}$, entonces ${}_r\bar{\mathbf{B}}_1 = {}^t\mathbf{B}_{L_1}$.

4.4.3 Discretización del campo de tensión crítica

De acuerdo con la definición dada en (2.5.15a), se supone que el campo de tensión crítica, en el instante $t + \Delta t_c$, en un punto arbitrario \mathcal{X} del elemento finito \mathcal{E} , se expresa como

$${}^{t+\Delta t_c}{}_r\mathbf{S} = {}^t{}_r\mathbf{S} + {}_r\Delta\mathbf{S}_c \quad (4.4.7)$$

donde ${}^t{}_r\mathbf{S}$ son las tensiones que actúan en el sólido en el instante t y ${}_r\Delta\mathbf{S}_c$ son los incrementos de tensiones críticas que surgen debido a la perturbación $\boldsymbol{\varphi}$. Teniendo en cuenta la matriz de deformación crítica de primer orden, ${}_r\bar{\mathbf{B}}_1$, y la definición dada en (3.2.14a), se expresan los incrementos de tensiones críticas en función de las perturbaciones nodales $\boldsymbol{\varphi}$ como

$${}_r\Delta\mathbf{S}_c = {}_r\mathbf{D} \left[{}^t\mathbf{B}_L({}^t\mathbf{a}) + \frac{\varrho}{2} {}_r\bar{\mathbf{B}}_1(\boldsymbol{\varphi}) \right] \varrho \boldsymbol{\varphi} = \varrho {}_r\Delta\mathbf{S}_1 + \varrho^2 {}_r\Delta\mathbf{S}_2 \quad (4.4.8a)$$

donde

$${}_r\Delta\mathbf{S}_1 = {}_r\mathbf{D} {}_r^t\mathbf{B}_L({}^t\mathbf{a}) \boldsymbol{\varphi} \quad \text{y} \quad {}_r\Delta\mathbf{S}_2 = \frac{1}{2} {}_r\mathbf{D} {}_r\tilde{\mathbf{B}}_1(\boldsymbol{\varphi}) \boldsymbol{\varphi} \quad (4.4.8b)$$

A partir de (4.4.8a) y (4.4.7), se reescribe el campo de tensión crítica en el instante $t + \Delta t_c$ como

$${}^{t+\Delta t_c}{}_r\mathbf{S} = {}^t{}_r\mathbf{S} + \varrho {}_r\Delta\mathbf{S}_1 + \varrho^2 {}_r\Delta\mathbf{S}_2 \quad (4.4.9)$$

Nótese que ${}_r\Delta\mathbf{S}_1$ es función lineal de $\boldsymbol{\varphi}$, denominándose *incrementos de tensiones críticas de primer orden*. Por otro lado, ${}_r\Delta\mathbf{S}_2$ depende cuadráticamente de $\boldsymbol{\varphi}$ y se denominan *incrementos de tensiones críticas de segundo orden*.

4.4.4 Obtención de la matriz de rigidez tangente crítica

Una vez definidos los campos de deformaciones y tensiones críticas en el instante $t + \Delta t_c$ en función de los desplazamientos críticos nodales, se puede deducir la expresión de la matriz de rigidez tangente del elemento \mathcal{E} en dicho instante de tiempo.

Mediante las definiciones dadas en (3.3.5a), (3.3.5d) y (3.4.1) se puede escribir la expresión de la matriz de *rigidez tangente crítica* en la configuración de equilibrio inestable ${}^{t+\Delta t_c}V$ como

$${}^t{}_r\mathbf{K}_T^{(e)} = {}^t{}_r\mathbf{K}_L + {}^t{}_r\mathbf{K}_\sigma \quad (4.4.10a)$$

donde

$${}^t{}_r\mathbf{K}_L = \int_{{}_rV^{(e)}} {}^t{}_r\mathbf{B}_L^T {}_r\mathbf{D} {}^t{}_r\mathbf{B}_L dV \quad (4.4.10b)$$

$${}^t{}_r\mathbf{K}_\sigma = \int_{{}_rV^{(e)}} {}_r\mathbf{G}^T {}^t{}_r\hat{\mathbf{S}} {}_r\mathbf{G} dV \quad (4.4.10c)$$

En las expresiones anteriores la matriz de rigidez ${}^t{}_r\mathbf{K}_L$ tiene en cuenta los desplazamientos críticos ${}^{t+\Delta t_c}\mathbf{a}$ y la matriz de rigidez geométrica ${}^t{}_r\mathbf{K}_\sigma$ las tensiones críticas ${}^{t+\Delta t_c}{}_r\mathbf{S}$. ${}^t{}_r\mathbf{B}_L$ es la matriz de deformación estimada en el punto crítico definida en (4.4.6). La matriz ${}^t{}_r\hat{\mathbf{S}}$ contiene las tensiones críticas dadas en (4.4.9). Se obtiene dicha matriz sustituyendo las componentes ${}^t{}_rS_{ij}$ de la matriz ${}^t{}_r\hat{\mathbf{S}}$, definida en el Cuadro 3.2, por las componentes ${}^t{}_rS_{ij}$ de ${}^t{}_r\mathbf{S}$.

Por último, a través del desarrollo algebraico de (4.4.10a), considerando las ecuaciones (4.4.6) y (4.4.9) se llega a la siguiente expresión de la matriz de rigidez tangente crítica

$$\boxed{{}^t_c \mathbf{K}_T^{(e)} = {}_r \mathbf{K}_T + \varrho \left({}^t_r \mathbf{K}_{L_2} + {}^t_r \mathbf{K}_{\sigma_1} \right) + \varrho^2 \left({}^t_r \mathbf{K}_{L_3} + {}^t_r \mathbf{K}_{\sigma_2} \right)} \quad (4.4.11)$$

donde ${}^t_r \mathbf{K}_T$ es la matriz de rigidez tangente en la configuración de equilibrio tV ; el resto de las matrices que tienen en cuenta los incrementos de deformaciones y de tensiones debido a la perturbación φ se expresan como

$${}^t_r \mathbf{K}_{L_2}({}^t \mathbf{a}, \varphi) = \int_{rV^{(e)}} \left[{}^t_r \mathbf{B}_L^T {}_r \mathbf{D} {}_r \bar{\mathbf{B}}_1 + {}_r \bar{\mathbf{B}}_1^T {}_r \mathbf{D} {}^t_r \mathbf{B}_L \right] dV \quad (4.4.12a)$$

$${}^t_r \mathbf{K}_{L_3}(\varphi^2) = \int_{rV^{(e)}} {}_r \bar{\mathbf{B}}_1^T {}_r \mathbf{D} {}_r \bar{\mathbf{B}}_1 dV \quad (4.4.12b)$$

$${}^t_r \mathbf{K}_{\sigma_1}({}_r \Delta \mathbf{S}_1) = \int_{rV^{(e)}} {}_r \mathbf{G}^T {}_r \hat{\mathbf{S}}_1 {}_r \mathbf{G} dV \quad (4.4.12c)$$

$${}^t_r \mathbf{K}_{\sigma_2}({}_r \Delta \mathbf{S}_2) = \int_{rV^{(e)}} {}_r \mathbf{G}^T {}_r \hat{\mathbf{S}}_2 {}_r \mathbf{G} dV \quad (4.4.12d)$$

donde las matrices ${}_r \hat{\mathbf{S}}_1$ y ${}_r \hat{\mathbf{S}}_2$ tienen como componentes los incrementos de tensiones ${}_r \Delta \mathbf{S}_1$ y ${}_r \Delta \mathbf{S}_2$ definidas en (4.4.8b). La forma de dichas matrices es idéntica a la de la matriz ${}^t_r \hat{\mathbf{S}}$ definida en el Cuadro 3.2. ${}_r \bar{\mathbf{B}}_1$ es la matriz de deformación crítica de primer orden definida en (4.4.6) y las matrices ${}^t_r \mathbf{B}_L$, ${}_r \mathbf{D}$ y ${}_r \mathbf{G}$ han sido definidas en las ecuaciones (3.2.11a), (2.5.13) y (3.2.9a), respectivamente. Obsérvese que las matrices ${}^t_r \mathbf{K}_2$ y \mathbf{K}_{σ_1} son función lineal de la perturbación φ , mientras que ${}^t_r \mathbf{K}_3$ y \mathbf{K}_{σ_2} dependen cuadráticamente de φ .

Se obtiene la matriz de rigidez tangente crítica global por medio del operador de ensamblaje de la siguiente manera

$${}^t_c \mathbf{K}_T = \mathbb{E}_{e=1}^{n_e} {}^t_c \mathbf{K}_T^{(e)} \quad (4.4.13)$$

Una vez escogido el incremento de desplazamiento crítico (la perturbación) se tiene definida la dirección de avance hacia ${}^{t+\Delta t_c}V$. Para determinar el parámetro ϱ que escala la magnitud de dicha perturbación, se impone la condición de singularidad de la matriz de rigidez tangente en ${}^{t+\Delta t_c}V$, es decir

$$\det [{}^t_c \mathbf{K}_T] = 0 \quad (4.4.14)$$

Esta condición se convierte en un problema generalizado no lineal de valores propios que se expresa como

$$\left[{}^t_r\mathbf{K}_T + \varrho \left({}^t_r\mathbf{K}_{L_2} + {}^t_r\mathbf{K}_{\sigma_1} \right) + \varrho^2 \left({}^t_r\mathbf{K}_{L_3} + {}^t_r\mathbf{K}_{\sigma_2} \right) \right] \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0} \quad (4.4.15)$$

donde el par $(\varrho_i, \boldsymbol{\psi}_i)$ es la i -ésima solución de (4.3.13), siendo ϱ_i el autovalor y $\boldsymbol{\psi}_i$ su correspondiente autovector. Se toma el menor autovalor en valor absoluto, es decir, $\varrho = \min_{1 \leq i \leq N} |\varrho_i|$. De este modo, se obtiene una aproximación al campo de desplazamiento crítico dada por ${}^t_c\mathbf{v} = {}^t\mathbf{v} + \varrho \boldsymbol{\phi}$.

Se puede simplificar la ecuación (4.4.15) ignorando el término cuadrático en ϱ . De esta manera, se obtiene el siguiente problema lineal estándar de autovalores

$$\left[{}^t_r\mathbf{K}_T + \varrho \left({}^t_r\mathbf{K}_{L_2} + {}^t_r\mathbf{K}_{\sigma_1} \right) \right] \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0} \quad (4.4.16)$$

Por lo tanto, se puede determinar el valor de ϱ a través de la ecuación (4.4.15) o de (4.4.16). Con este parámetro, y una vez elegida la dirección de avance $\boldsymbol{\phi}$, se calcula el campo de desplazamiento crítico utilizando (4.4.1). Una vez encontrada la configuración de equilibrio inestable se puede evaluar la carga crítica utilizando el operador secante incremental o total.

4.4.5 Predicción de la carga crítica

A continuación se obtiene el incremento de la carga crítica utilizando el operador secante incremental. En primer lugar, se ensambla la matriz de rigidez secante incremental, definida en (3.3.4), de los elementos del sólido discretizado en la configuración de referencia tV , como sigue

$${}^t_r\mathbf{K}_S = \mathbb{E} \sum_{e=1}^{n_{el}} {}^t_r\mathbf{K}_S^{(e)} \quad (4.4.17)$$

donde ${}^t_r\mathbf{K}_S$ es la matriz de rigidez secante incremental del sólido entre las configuraciones tV y ${}^{t+\Delta t_e}V$ descrita en la configuración de referencia.

Se calcula el incremento de carga crítica a partir de dicha matriz como

$$\Delta f_c = {}^t_r\mathbf{K}_S({}^t\mathbf{v}, \varrho\boldsymbol{\phi}) \varrho\boldsymbol{\phi} \quad (4.4.18a)$$

donde ${}^t_r\mathbf{K}_S$ se expresa como

$${}^t_r\mathbf{K}_S({}^t\mathbf{v}, \varrho\boldsymbol{\phi}) = {}^t_r\mathbf{K}_L({}^t\mathbf{v}) + {}^t_r\mathbf{K}_M({}^t\mathbf{v}, \varrho\boldsymbol{\phi}) + {}^t_r\mathbf{K}_N(\varrho^2\boldsymbol{\phi}^2) + {}^t_r\mathbf{K}_\sigma({}^t\mathbf{S}) \quad (4.4.18b)$$

Por fin, la carga crítica total se obtiene por

$${}^t c \mathbf{f} = {}^t \mathbf{f} + \Delta \mathbf{f}_c \quad (4.4.19)$$

Por otro lado, se puede obtener la carga crítica utilizando el operador secante total. De esta manera se ensambla la matriz de rigidez secante total, definida en (3.5.5), de los elementos del sólido discretizado en la configuración indeformada ${}^0 V$, como sigue

$${}^{t+\Delta t_c} {}^0 \mathbf{K}_{ST} = \mathbb{E} \sum_{e=1}^{n_{el}} {}^{t+\Delta t_c} {}^0 \mathbf{K}_{ST}^{(e)} \quad (4.4.20)$$

donde ${}^{t+\Delta t_c} {}^0 \mathbf{K}_{ST}$ es la matriz de rigidez secante total del sólido entre las configuraciones ${}^0 V$ y ${}^{t+\Delta t_c} V$ descrita en la configuración indeformada.

La carga crítica se obtiene utilizando dicha matriz del siguiente modo

$${}^t c \mathbf{f} = {}^{t+\Delta t_c} {}^0 \mathbf{K}_{ST} {}^{t+\Delta t_c} \mathbf{v} \quad (4.4.21a)$$

donde ${}^{t+\Delta t_c} {}^0 \mathbf{K}_{ST}$ se escribe como

$${}^{t+\Delta t_c} {}^0 \mathbf{K}_{ST} = {}^{t+\Delta t_c} {}^0 \mathbf{K}_L({}^0 \mathbf{X}) + {}^{t+\Delta t_c} {}^0 \mathbf{K}_M({}^{t+\Delta t_c} \mathbf{v}) + {}^{t+\Delta t_c} {}^0 \mathbf{K}_N({}^{t+\Delta t_c} \mathbf{v}^2) \quad (4.4.21b)$$

Nótese que el campo de desplazamiento crítico ${}^t c \mathbf{v} = {}^t \mathbf{v} + \varrho \boldsymbol{\phi}$ genera un campo de tensiones críticas no equilibradas, ya que la configuración del sólido obtenida en el instante t_c es una aproximación a la configuración de equilibrio inestable. Por tanto, la carga crítica evaluada por la ecuación (4.4.19) o por la (4.4.21a) contiene términos espúreos. Para superar este obstáculo, se eliminan simplemente los términos espúreos que aparecen en las componentes nulas del vector de cargas nodales ${}^t \mathbf{f}$. Suponiéndose que el vector ${}^t \mathbf{f}$ posee dos componentes distintas de cero, el procedimiento descrito arriba se realiza a través de la siguiente operación

$${}^t c \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} {}^t c f^{(1)} \\ \vdots \\ {}^t c f^{(i-1)} \\ {}^t c f^{(i)} \\ \vdots \\ {}^t c f^{(N)} \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad {}^t \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ f^{(i-1)} \\ f^{(i)} \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad {}^t c \bar{\mathbf{f}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ {}^t c f^{(i-1)} \\ {}^t c f^{(i)} \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.4.22)$$

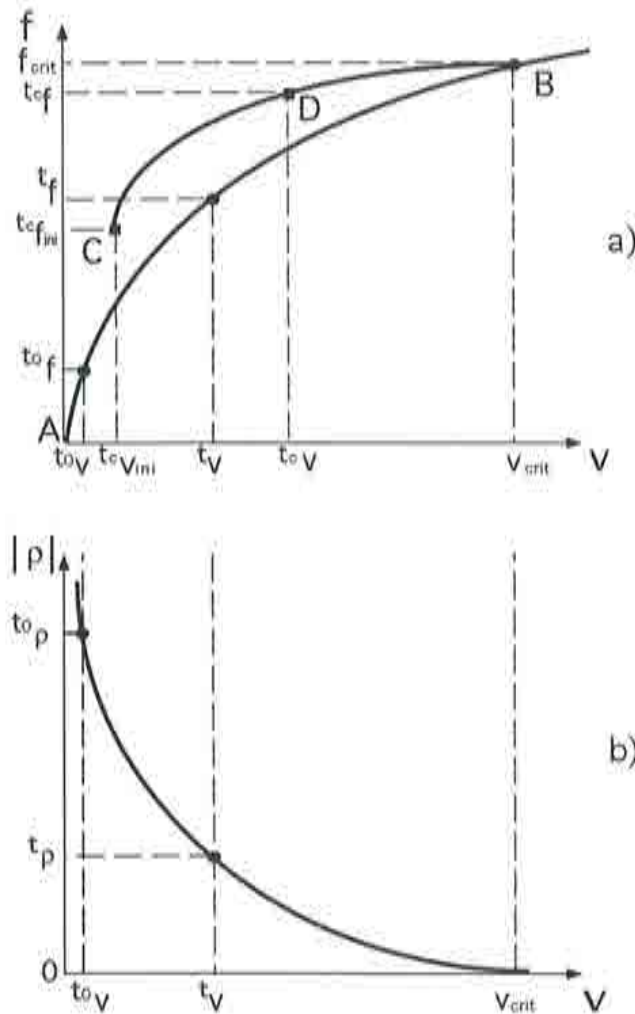


Figura 4.3 a) Predicción de carga y desplazamiento críticos a lo largo de la trayectoria de equilibrio. b) Variación del parámetro de la perturbación con el desplazamiento

Para la predicción de la carga crítica se elige la componente de menor valor absoluto del vector ${}^t e \bar{f}$. Se puede decir que el vector ${}^t e \bar{f}$ es casi paralelo al vector ${}^t f$, ya que se espera que se cumpla la relación ${}^t e f^{(i-1)} / {}^t e f^{(i)} \approx {}^t f^{(i-1)} / {}^t f^{(i)}$. De esta manera, la operación que se realiza en (4.4.22) se puede interpretar como la proyección del vector ${}^t e f$ en la dirección del vector ${}^t f$.

La interpretación geométrica del procedimiento desarrollado en los subapartados 4.4.1–4.4.5 se detalla en la Figura 4.3. En la Figura 4.3a se muestran la trayectoria de equilibrio, representada por la curva AB, y la predicción de la carga y el desplazamiento críticos que se representa en la curva CB. Los puntos de la curva CB se obtienen a medida que se determinan los puntos de la trayectoria

de equilibrio para cada paso de tiempo. En la Figura 4.3b se muestra la variación del parámetro de perturbación con el desplazamiento. Dicho parámetro representa el menor autovalor en valor absoluto del sistema (4.4.15) que se calcula en cada paso de tiempo. Nótese que este parámetro tiende a cero a medida que se acerca al campo de desplazamiento crítico \mathbf{v}_{crit} (${}^t_0 q > {}^t q > q_{crit} \approx 0$) como era de esperar. El punto C corresponde a la predicción inicial para la carga y desplazamientos críticos. Se hace este análisis tomando una configuración de equilibrio en el instante t_0 muy cercana a la configuración indeformada. El punto D corresponde a la predicción para la carga y desplazamiento críticos en el instante t . Si se realiza este procedimiento para cada paso de tiempo discreto se obtiene la curva CB, que se denomina curva de *carga crítica versus desplazamiento crítico*.

En el próximo apartado se proponen algunas estrategias numéricas para la obtención de la predicción de la carga crítica utilizando los procedimientos propuestos en este apartado.

4.5 ESTRATEGIAS NUMÉRICAS PARA LA OBTENCIÓN DEL DESPLAZAMIENTO CRÍTICO

El método aquí propuesto necesita como datos de entrada la matriz de rigidez tangente, el campo de desplazamientos y la carga externa correspondiente a la configuración de equilibrio en el instante t , (${}^t_r \mathbf{K}_T, {}^t \mathbf{v}, {}^t \mathbf{f}$).

En primer lugar se resuelve el sistema de ecuaciones no lineal de equilibrio utilizando el método Newton Raphson o el algoritmo definido en (3.6.5). El próximo capítulo se centrará sobre las técnicas de solución de sistemas de ecuaciones no lineales.

Una vez conocida la configuración de equilibrio en el instante t al resolver la ecuación (3.6.2), se puede aplicar de distintos modos el método de desplazamiento crítico, obteniéndose, de esta manera, diferentes aproximaciones del valor de la carga crítica. En este apartado se proponen distintas estrategias de aplicación de dicho método que se desarrollan a continuación.

4.5.1 Estrategia I. Predicción en un solo paso de carga

1. Se calcula el vector de desplazamientos ${}^{t_0}\mathbf{v}$ para pequeños valores de las fuerzas externas ${}^{t_0}\mathbf{f}$, de tal modo que la configuración de equilibrio en el instante t_0 se encuentre muy cerca de la configuración indeformada 0V . Por tanto, se hace un análisis casi lineal.
2. Se toma $\boldsymbol{\phi} = {}^{t_0}\mathbf{v}$ como predicción del campo de desplazamiento crítico.
3. Se resuelve el problema no lineal de autovalores (4.4.15) o el problema lineal (4.4.16), para obtener el menor autovalor en valor absoluto y su autovector asociado.
4. Se obtiene la predicción de la carga crítica con la matriz secante incremental a través de las ecuaciones (4.4.18a) y (4.4.19). Si se utiliza la matriz secante total, el cálculo de la carga crítica se hace por medio de la ecuación (4.4.21).

Si se resuelve el problema lineal de autovalores (4.4.16), este proceso es comparable en coste computacional al problema clásico de autovalores en el análisis de *estabilidad inicial* de estructuras, que se expresa como

$$[{}^t_0\mathbf{K}_{t_0} + \bar{\lambda} {}^t_0\mathbf{K}_\sigma] \boldsymbol{\chi} = \mathbf{0} \quad (4.5.1)$$

donde $\bar{\lambda}$ es el menor autovalor no nulo y $\boldsymbol{\chi}$ es su autovector asociado. Este autovalor define el incremento en el factor de carga inicial ${}^{t_0}\mathbf{f}$ obteniéndose la *carga de pandeo* como $\mathbf{p}_{est} = \bar{\lambda} {}^{t_0}\mathbf{f}$. Por otro lado, se sabe que para sistemas estructurales con comportamiento precrítico fuertemente no lineal, el problema de *estabilidad inicial* sobrevalora la carga crítica. Una discusión sobre la aplicación práctica y las limitaciones del análisis de *pandeo inicial* se encuentra en las referencias BATHE [1996], cap. 6 y ZIENKIEWICZ y TAYLOR [1994b], cap. 8.

Nótese que si se adopta el autovector asociado al menor autovalor del análisis de estabilidad inicial como una estimación del desplazamiento crítico, $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\chi}$, se tiene que resolver la ecuación (4.5.1) en la etapa 2 anterior. Esta opción es demasiado costosa ya que implica resolver dos veces un sistema de valores propios para completar el análisis. Así pues, esta alternativa no es aconsejable desde un punto de vista de coste computacional.

En el análisis con un solo paso de carga utilizando el método de desplazamiento crítico se ha obtenido aproximaciones razonables para la carga crítica aun tratándose de sistemas estructurales con comportamiento inicial fuertemente no lineal. En el Capítulo 6 se mostrará, a través de ejemplos numéricos, el comportamiento de la estrategia aquí propuesta.

4.5.2 Estrategia II. Predicción paso a paso

1. Se calcula el vector de desplazamientos ${}^t\mathbf{v}$ para cada paso de carga ${}^t\mathbf{f}$.
2. Se elige $\phi = {}^t\mathbf{a}$ como predicción del campo de desplazamientos críticos. Aquí, nuevamente, se puede adoptar para ϕ el vector χ obtenido de la ecuación (4.5.1), sin embargo, por los motivos anteriormente comentados, no se tiene en consideración esta opción.
3. Se resuelve el problema no lineal de autovalores (4.4.15), o el problema lineal (4.4.16), para obtener el menor autovalor en valor absoluto y su autovector asociado.
4. Se hace la predicción de la carga crítica a través de las ecuaciones (4.4.18a) y (4.4.19) si se utiliza la matriz secante incremental, o por medio de la ecuación (4.4.21a) si se usa la matriz secante total.

Esta metodología difiere de la anterior, porque la carga crítica es evaluada a cada paso de tiempo, es decir, se evalúa siempre a partir de un nuevo campo de desplazamientos convergido ${}^t\mathbf{v}$. El problema de *estabilidad inicial* también puede plantearse en cada configuración de equilibrio tV . Esto implica resolver el siguiente problema lineal de autovalores

$$[{}^t\mathbf{K}_L + \bar{\lambda} {}^t\mathbf{K}_\sigma] \chi = \mathbf{0} \quad (4.5.2)$$

calculandose la carga crítica como $\mathbf{p}_{est} = \bar{\lambda} {}^t\mathbf{f}$. Nótese que la matriz ${}^t\mathbf{K}_L$ tiene en cuenta los desplazamientos acumulados hasta el instante t , y que se considera el nivel de tensión correspondiente a este instante a través de la matriz geométrica ${}^t\mathbf{K}_\sigma$. En la Figura 4.4a se muestra la evolución de la carga crítica obtenida a partir de una sucesión de análisis de *estabilidad inicial* a lo largo de la trayectoria fundamental de equilibrio.

En la Figura 4.4b se puede observar que el valor de $\bar{\lambda}$ decrece a medida que se realiza el análisis de estabilidad inicial a lo largo de la trayectoria fundamental de equilibrio, ${}^t_0\bar{\lambda} > {}^t\bar{\lambda} > \bar{\lambda}_{crit} \approx 1$. Este valor tiende a la unidad cuando la configuración de equilibrio tV se acerca a la configuración de equilibrio inestable t_cV , $\mathbf{p}_{est} \rightarrow \mathbf{p}_{crit} \implies \bar{\lambda} \rightarrow 1$.

Los dos procedimientos deberán convergir al valor “exacto” de la carga crítica cuando la solución en la trayectoria fundamental de equilibrio se aproxime a la configuración de equilibrio inestable, (ver las Figuras 4.3a y 4.4a).

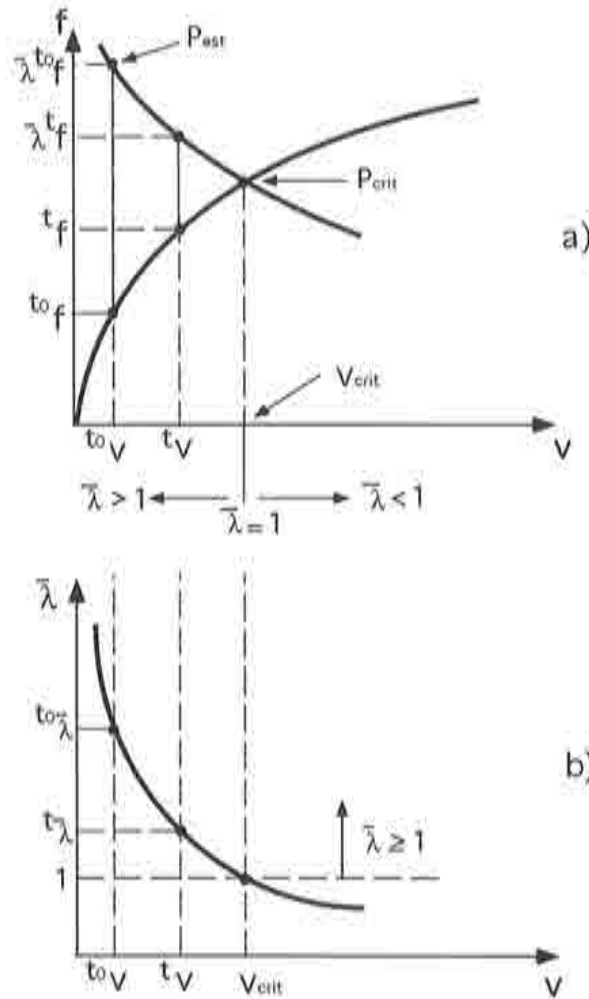


Figura 4.4 a) Predicción de carga crítica a través de una sucesión de análisis de estabilidad inicial. b) Variación del autovalor con el desplazamiento

4.5.3 Estrategia III. Predicción paso a paso mejorada

1. Se calcula el vector de desplazamientos ${}^t_0\mathbf{v}$ correspondiente a una carga inicial ${}^t_0\mathbf{f}$ (aquí se toma ${}^t_0\mathbf{f}$ lo suficientemente pequeño para que los desplazamientos sean infinitesimales). Es decir, se hace un análisis lineal.
2. Se toma $\phi = {}^t_0\mathbf{v}$ como predicción del campo de desplazamientos críticos.
3. y 4. Son idénticos a las etapas 3 y 4 de las estrategias I y II.
5. Se evalúa el vector de fuerzas residuales ${}^t_f\mathbf{r}$ como

$${}^t_c\mathbf{r} = {}^t_c\bar{\mathbf{f}} - {}^t\mathbf{f} \tag{4.5.3}$$

donde ${}^t c \bar{\mathbf{f}}$ es la predicción del vector de carga crítica "proyectado" en la dirección de ${}^t \mathbf{f}$ a través de (4.4.22).

Naturalmente, el campo de desplazamiento crítico, ${}^t c \mathbf{v} = (1 + \rho) {}^t \theta \mathbf{v}$, corresponde a una configuración no equilibrada. Por ello es necesario aplicar un proceso iterativo para alcanzar la configuración de equilibrio correspondiente al nivel de carga ${}^t c \mathbf{f}$.

6. Se utiliza un proceso iterativo para encontrar los valores correctos de los desplazamientos críticos ${}^t c \mathbf{v}$ en equilibrio con las fuerzas externas ${}^t c \mathbf{f}$. Para este fin, puede aplicarse el método de Newton-Raphson como

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathbf{v}^{(k)} = - [{}^t c \mathbf{K}_T^{(k-1)}]^{-1} {}^t c \mathbf{r}^{(k)} \\ {}^t c \mathbf{v}^{(k)} = {}^t c \mathbf{v}^{(k-1)} + \Delta \mathbf{v}^{(k)} \\ \text{con } {}^t c \mathbf{v}^{(0)} = {}^t c \mathbf{v} \text{ y } k = 1, 2, \dots, n_k \end{array} \right. \quad (4.5.4)$$

7. Se reinicia el proceso a partir del punto 2 tomando $\phi = {}^t c \mathbf{v}$, donde ${}^t c \mathbf{v}$ es el vector de desplazamientos convergido del punto 6.

Esta estrategia ha proporcionado muy buenas aproximaciones para la carga crítica en dos o tres pasos como se mostrará en los ejemplos numéricos del Capítulo 6.

4.6 ESTRATEGIAS NUMÉRICAS EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS NO LINEALES DE VALORES PROPIOS

En este apartado se estudian técnicas iterativas de solución, en las que el problema no lineal de valores propios se reduce a uno lineal modificando la matriz de rigidez tangente del sistema o las matrices de rigideces incrementales. También se discute una técnica de transformación directa que permite obtener la solución exacta del problema no lineal de valores propios sin necesidad de aplicar métodos iterativos.

4.6.1 Técnicas iterativas

Se reescribe el problema no lineal de valores propios (4.4.15) como

$$\left[{}^t_r\mathbf{K}_T + \varrho {}^t_r\mathbf{K}_1 + \varrho^2 {}^t_r\mathbf{K}_2 \right] \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0} \quad (4.6.1)$$

con

$${}^t_r\mathbf{K}_1(\boldsymbol{\phi}) = {}^t_r\mathbf{K}_{L_2} + {}^t_r\mathbf{K}_{\sigma_1} \quad (4.6.2)$$

$${}^t_r\mathbf{K}_2(\boldsymbol{\phi}^2) = {}^t_r\mathbf{K}_{L_3} + {}^t_r\mathbf{K}_{\sigma_2}$$

donde ${}^t_r\mathbf{K}_1$ tiene en cuenta las matrices de rigideces incrementales que son función lineal de la perturbación $\boldsymbol{\phi}$ y ${}^t_r\mathbf{K}_2$ las matrices incrementales cuadráticas en $\boldsymbol{\phi}$.

Nótese que en la rama de equilibrio precrítica la matriz de rigidez tangente es definida positiva y que, generalmente, las matrices de rigideces incrementales anteriores son no definidas.

Se presentan a continuación dos técnicas iterativas para resolver el sistema (4.6.1). Ambas resuelven directamente el problema no lineal, como una sucesión de problemas lineales.

4.6.2 Técnica de iteración sobre la matriz de rigidez tangente

En la técnica de *iteración sobre la matriz tangente* ${}^t_r\mathbf{K}_T$, se linealiza el sistema (4.6.1) proponiendo un valor inicial del parámetro ϱ , con lo que es posible evaluar el término $\varrho^2 {}^t_r\mathbf{K}_2$ y así modificar la matriz de rigidez tangente del sistema original. Se obtiene de esta forma un problema lineal con la rigidez tangente modificada, cuya solución servirá como valor inicial de la próxima iteración. El sistema lineal a resolver en la etapa k -ésima es

$$\left\{ \left[{}^t_r\mathbf{K}_T + (\varrho^{(k-1)})^2 {}^t_r\mathbf{K}_2 \right] + \varrho^{(k)} {}^t_r\mathbf{K}_1 \right\} \boldsymbol{\psi}^{(k)} = \mathbf{0} \quad (4.6.3)$$

Se inicia el proceso iterativo suponiendo $\varrho^{(0)} = 0$, lo que implica la resolución del problema lineal definido en (4.4.16). Se finaliza dicho proceso cuando el error relativo entre dos iteraciones consecutivas sea menor que el error relativo fijado ϵ , siendo usual tomar valores de ϵ entre 10^{-3} y 10^{-4} .

Este error relativo se mide mediante la diferencia entre la norma Euclídea de los autovectores de dos etapas consecutivas de la siguiente manera

$$\epsilon_{\psi} = \frac{\sqrt{\sum_j (\psi_j^{(k)} - \psi_j^{(k-1)})^2}}{\sqrt{\sum_j (\psi_j^{(k)})^2}} \leq \epsilon \quad (4.6.4)$$

Por otro lado, se puede calcular dicho error a través de la diferencia entre los valores absolutos de dos autovalores consecutivos como

$$\epsilon_{\varrho} = \frac{|\varrho^{(k)} - \varrho^{(k-1)}|}{|\varrho^{(k)}|} \leq \epsilon \quad (4.6.5)$$

En este trabajo se ha adoptado como control de convergencia ambos errores relativos, es decir, el proceso iterativo de la ecuación (4.6.3) se detiene cuando se cumple $\epsilon_{\psi} \leq \epsilon$ y $\epsilon_{\varrho} \leq \epsilon$.

4.6.3 Técnica de iteración sobre la matriz de rigidez incremental

Si se escribe el sistema original (4.6.1) de la forma

$$\left\{ {}^t_r \mathbf{K}_T + \varrho \left[{}^t_r \mathbf{K}_1 + \varrho {}^t_r \mathbf{K}_2 \right] \right\} \psi = \mathbf{0} \quad (4.6.6)$$

es posible plantear un algoritmo iterativo que actualiza en cada etapa las matrices incrementales.

Se propone un autovalor inicial, con lo que quedan definidos los coeficientes de $\varrho {}^t_r \mathbf{K}_2$, y se actualiza la matriz incremental ${}^t_r \mathbf{K}_1$ del problema lineal así obtenido. En la k -ésima iteración, el problema lineal a resolver es

$$\left\{ {}^t_r \mathbf{K}_T + \varrho^{(k)} \left[{}^t_r \mathbf{K}_1 + \varrho^{(k-1)} {}^t_r \mathbf{K}_2 \right] \right\} \phi^{(k)} = \mathbf{0} \quad (4.6.7)$$

Se logra la convergencia cuando el error relativo es menor que la tolerancia fijada ϵ , pudiéndose definir el error relativo ϵ_{ψ} o ϵ_{ϱ} de la misma forma que en la *iteración sobre la matriz de rigidez tangente*. Aquí, nuevamente, se controla la convergencia del proceso iterativo (4.6.7) utilizando simultáneamente las ecuaciones (4.6.4) y (4.6.5).

Nótese que se ha transformado el problema no lineal (4.6.1) en tantos problemas lineales (4.6.7) como iteraciones sean necesarias para obtener la convergencia en (4.6.4) y (4.6.5).

Estos problemas lineales mantienen todas las características de la formulación clásica del equilibrio crítico en un punto de bifurcación.

4.6.4 Método de transformación directa

Cuando en el problema no lineal de autovalores sólo aparecen potencias enteras del autovalor, se puede encontrar un sistema lineal de valores propios cuya solución es la solución del problema no lineal.

Como se demuestra en WILKINSON [1967], es posible disminuir el máximo exponente E del autovalor a un exponente unitario, aumentando E veces el número de incógnitas del sistema.

Sea el sistema no lineal

$$\left[\mathbf{K} + \varrho \mathbf{K}_1 + \varrho^2 \mathbf{K}_2 + \cdots + \varrho^E \mathbf{K}_E \right] \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0} \quad (4.6.8)$$

donde E es el máximo exponente entero de ϱ . No se utiliza, en este apartado, los índices a la izquierda de las matrices por simplicidad en los desarrollos algebraicos a continuación.

Si se realizan en la ecuación anterior las sucesivas sustituciones

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}_1 &= \varrho \boldsymbol{\psi} \\ \boldsymbol{\psi}_2 &= \varrho \boldsymbol{\psi}_1 = \varrho^2 \boldsymbol{\psi} \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \boldsymbol{\psi}_{E-2} &= \varrho \boldsymbol{\psi}_{E-3} = \varrho^{E-2} \boldsymbol{\psi} \\ \boldsymbol{\psi}_{E-1} &= \varrho \boldsymbol{\psi}_{E-2} = \varrho^{E-1} \boldsymbol{\psi} \\ \boldsymbol{\psi}_E &= \varrho \boldsymbol{\psi}_{E-1} = \varrho^E \boldsymbol{\psi} \end{aligned} \quad (4.6.9)$$

resulta que

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\psi} + \mathbf{K}_1\boldsymbol{\psi}_1 + \mathbf{K}_2\boldsymbol{\psi}_2 + \cdots + \mathbf{K}_{E-2}\boldsymbol{\psi}_{E-2} + \mathbf{K}_{E-1}\boldsymbol{\psi}_{E-1} + \varrho \mathbf{K}_E\boldsymbol{\psi}_{E-1} = \mathbf{0} \quad (4.6.10)$$

Entonces se deben resolver simultáneamente las ecuaciones (4.6.9) y (4.6.10), lo que implica resolver el siguiente sistema lineal de valores propios

$$\left[\mathbf{A} + \varrho \mathbf{B} \right] \mathbb{Z} = \mathbf{0} \quad (4.6.11)$$

con

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{E-1} & \mathbf{K}_{E-2} & \cdots & \mathbf{K}_2 & \mathbf{K}_1 & \mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \hat{\mathbf{0}} & \cdots & \hat{\mathbf{0}} & \hat{\mathbf{0}} & \hat{\mathbf{0}} \\ \hat{\mathbf{0}} & \mathbf{I} & \cdots & \hat{\mathbf{0}} & \hat{\mathbf{0}} & \hat{\mathbf{0}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{\mathbf{0}} & \hat{\mathbf{0}} & \cdots & \mathbf{I} & \hat{\mathbf{0}} & \hat{\mathbf{0}} \\ \hat{\mathbf{0}} & \hat{\mathbf{0}} & \cdots & \hat{\mathbf{0}} & \mathbf{I} & \hat{\mathbf{0}} \end{bmatrix} \quad (4.6.12)$$

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_E & \hat{\mathbf{0}} & \cdots & \hat{\mathbf{0}} & \hat{\mathbf{0}} & \hat{\mathbf{0}} \\ \hat{\mathbf{0}} & \mathbf{I} & \cdots & \hat{\mathbf{0}} & \hat{\mathbf{0}} & \hat{\mathbf{0}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{\mathbf{0}} & \hat{\mathbf{0}} & \cdots & \mathbf{I} & \hat{\mathbf{0}} & \hat{\mathbf{0}} \\ \hat{\mathbf{0}} & \hat{\mathbf{0}} & \cdots & \hat{\mathbf{0}} & \mathbf{I} & \hat{\mathbf{0}} \\ \hat{\mathbf{0}} & \hat{\mathbf{0}} & \cdots & \hat{\mathbf{0}} & \hat{\mathbf{0}} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbb{Z} = \begin{Bmatrix} \psi_{E-1} \\ \psi_{E-2} \\ \vdots \\ \psi_2 \\ \psi_1 \\ \psi \end{Bmatrix} \quad (4.6.13)$$

donde $\hat{\mathbf{0}}$ es una matriz nula $N \times N$ y \mathbf{I} es la matriz identidad $N \times N$. Nótese que la matriz \mathbb{A} es no simétrica, posee muchos elementos nulos y, además, presenta una disposición muy dispersa, respecto a la diagonal, de los elementos no nulos. Su forma rompe los esquemas tradicionales de almacenamiento en banda o por altura efectiva de columna, por lo tanto, hay que almacenarla de forma completa. Según MIRASSO [1988] en muchos casos la matriz \mathbb{A} resulta singular. Estas características pueden originar un sistema mal condicionado, siendo su solución muy sensible a pequeños cambios en los coeficientes del mismo. Por otro lado, la matriz \mathbb{B} es simétrica y, generalmente, es no definida. Esta matriz conserva la forma en banda de la matriz \mathbf{K}_E . Este sistema es muy costoso porque para resolverlo se necesita de un gran esfuerzo computacional debido a las características de las matrices \mathbb{A} y \mathbb{B} .

Sin embargo, el problema no lineal de autovalores que aquí se ha planteado presenta el autovalor elevado a un exponente entero igual a 2, lo que simplifica el sistema (4.6.11) y, además, se evita la no simetría de la matriz \mathbb{A} , pero la desventaja del sistema de ser mal condicionado continúa existiendo.

Aplicándose la transformación directa en el problema cuadrático de valores propios en (4.6.1), las matrices \mathbb{A} y \mathbb{B} y el vector \mathbb{Z} se expresan como

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} ({}^t_r\mathbf{K}_{L2} + {}^t_r\mathbf{K}_{\sigma1}) & {}^t_r\mathbf{K}_T \\ {}^t_r\mathbf{K}_T & \hat{\mathbf{0}} \end{bmatrix} \quad (4.6.14)$$

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} ({}^t_r\mathbf{K}_{L3} + {}^t_r\mathbf{K}_{\sigma2}) & \hat{\mathbf{0}} \\ \hat{\mathbf{0}} & -{}^t_r\mathbf{K}_T \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbb{Z} = \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi \end{Bmatrix} \quad (4.6.15)$$

La aplicación de este procedimiento en los ejemplos numéricos presentados en el Capítulo 6 ha encontrado severas dificultades para converger en la casi totalidad de dichos ejemplos. Las matrices \mathbb{A} y \mathbb{B} que resultan de este procedimiento son mal condicionadas dificultando, al máximo el rendimiento del método de iteración inversa en la búsqueda del menor autovalor y su correspondiente autovector. Naturalmente, ello implica en la necesidad de estudiar técnicas que permitan reordenar dichas matrices para minimizar el mal condicionamiento de este procedimiento.

4.7 EL MÉTODO DE ITERACIÓN INVERSA

En este trabajo se han adoptado, para resolver el problema lineal de valores propios, los siguientes métodos:

1. Para calcular el menor autovalor en valor absoluto y el autovector asociado se utiliza el *método de iteración inversa*.
2. Para determinar los p autovalores menores en valor absoluto y sus correspondientes autovectores se adopta el *método de iteración por subespacios*.
3. Para evaluar todos los autovalores y sus autovectores asociados se utiliza el *método generalizado de Jacobi*.

Una discusión teórica detallada de estos métodos se encuentra en el capítulo 10 del libro de BATHE [1996], mientras que en el capítulo 11 se describe de manera meticulosa la implementación computacional de dichos métodos.

El objetivo de este apartado es describir cómo se ha hecho la implementación computacional del *método de iteración inversa*, ya que este método se ha empleado en todos los ejemplos numéricos que se describirán en el Capítulo 6. Los demás métodos han sido utilizados de manera eventual para averiguar el comportamiento de los menores (o de todos) autovalores provenientes de los sistemas de valores propios descritos en los apartados anteriores a lo largo de la trayectoria fundamental de equilibrio antes de alcanzar un punto crítico, (ver las Figuras 4.3b y 4.4b). Como punto de partida se describen brevemente las propiedades básicas de cada uno de estos métodos. El problema generalizado de valores propios a resolver es

$$\mathbf{K}\Phi = -\mathbf{K}_1\Phi\Lambda \quad (4.7.1)$$

donde $\Lambda = \text{diag}(\bar{\lambda}_i)$, $i = 1, \dots, N$ es la matriz diagonal cuyos pivotes son los N autovalores del sistema (4.7.1) y $\Phi = [\phi_1, \dots, \phi_N]$ es una matriz cuyas columnas son los autovectores asociados a los valores propios de dicho sistema.

En el método de iteración inversa se calcula el menor autovalor en valor absoluto y su correspondiente autovector en base al cumplimiento de la siguiente propiedad

$$\mathbf{K}\phi_i = -\bar{\lambda}_i \mathbf{K}_1 \phi_i \quad (4.7.2)$$

mientras que los métodos de transformación, el método de iteración por subespacios, el método generalizado de Jacobi, etc, utilizan la siguiente propiedad

$$\begin{aligned} \Phi^T \mathbf{K} \Phi &= -\Lambda \\ \Phi^T \mathbf{K}_1 \Phi &= \mathbf{I} \end{aligned} \quad (4.7.3)$$

Nótese que la propiedad (4.7.3b) se refiere a la ortogonalidad de los autovectores ϕ_i con la imagen de la matriz \mathbf{K}_1 .

Teniendo en cuenta la propiedad descrita en (4.7.2), se estructura el algoritmo de resolución del problema generalizado de autovalores utilizando el método de iteración inversa. Se supone que \mathbf{K} es definida positiva y simétrica, y que \mathbf{K}_1 y \mathbf{K}_2 son simétricas y no definidas.

Se inicia la solución escogiendo un autovector de partida del proceso de iteración $\mathbf{x}^{(1)}$ y que $\bar{\lambda}_1^{(1)} = 1$, de tal modo que $\mathbf{x}^{(1)}$ no sea ortogonal a la imagen de \mathbf{K}_1 , es decir, $(\mathbf{x}^{(1)})^T \mathbf{K}_1 \phi_1 \neq 0$. En este trabajo se adopta $\mathbf{x}^{(1)} = [1, 1, \dots, 1]^T$, de acuerdo con la sugerencia dada en BATHE[1996], cap. 11. A continuación se efectúa el producto $\mathbf{y}^{(1)} = \mathbf{K}_1 \mathbf{x}^{(1)}$. Con el fin de mejorar la predicción inicial del autovalor y autovector, se evalúa para cada paso iterativo el menor autovalor a través del cociente de Rayleigh. Entonces, se calcula para $k = 1, 2, \dots, n_k$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}\bar{\mathbf{x}}^{(k+1)} &= \mathbf{y}^{(k)} \\ \bar{\mathbf{y}}^{(k+1)} &= -\mathbf{K}_1 \bar{\mathbf{x}}^{(k+1)} \\ \bar{\lambda}_1^{(k+1)} &= \frac{(\bar{\mathbf{x}}^{(k+1)})^T \mathbf{y}^{(k)}}{(\bar{\mathbf{x}}^{(k+1)})^T \bar{\mathbf{y}}^{(k+1)}} \\ \mathbf{y}^{(k+1)} &= \frac{\bar{\mathbf{y}}^{(k+1)}}{\sqrt{|(\bar{\mathbf{x}}^{(k+1)})^T \bar{\mathbf{y}}^{(k+1)}|}} \end{aligned} \right\} \quad (4.7.4)$$

Este proceso iterativo se interrumpe cuando la diferencia entre dos autovalores consecutivos cumple

$$\frac{|\bar{\lambda}_i^{(k+1)} - \bar{\lambda}_i^{(k)}|}{|\bar{\lambda}_i^{(k+1)}|} \leq \text{TOL} = 10^{-10} \quad (4.7.5)$$

Una vez lograda la convergencia se determina el autovector correspondiente al autovalor en (4.7.4c) de la siguiente manera

$$\phi_i^{(k+1)} = \frac{\bar{\mathbf{x}}^{(k+1)}}{\sqrt{|(\bar{\mathbf{x}}^{(k+1)})^T \bar{\mathbf{y}}^{(k+1)}|}} \quad (4.7.6)$$

Para averiguar la exactitud de la solución obtenida en el proceso iterativo (4.7.5), es conveniente tomar una medida del error utilizando la propiedad (4.7.2). Esta medida se define como

$$\frac{\|\mathbf{K}\phi_i^{(k+1)} + \bar{\lambda}_i^{(k+1)}\mathbf{K}_1\phi_i^{(k+1)}\|}{\|\mathbf{K}\phi_i^{(k+1)}\|} \leq \text{TOL} = 10^{-5} \quad (4.7.7)$$

Se puede obtener la convergencia para el autovalor sin que se alcance una aproximación razonable para el autovector asociado. Para evitar términos espúreos en el autovector se ha adoptado una tolerancia muy pequeña para ambas medidas de error de las ecuaciones (4.7.5) y (4.7.7). Además, para acelerar la convergencia se adopta la técnica de desplazar la solución del sistema (4.7.1) un factor μ .

Si ϕ_i es un autovector del problema generalizado de autovalores en (4.7.1), se sabe que ϕ_i también es un autovector del mismo problema desplazado μ , que se escribe como

$$[\hat{\mathbf{K}} + \hat{\lambda}_i\mathbf{K}_1] \phi_i = \mathbf{0} \quad (4.7.8)$$

con

$$\hat{\lambda}_i = \bar{\lambda}_i - \mu \quad \text{y} \quad \hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \mu\mathbf{K}_1 \quad (4.7.9)$$

Se inicia el proceso iterativo en (4.7.4) con el coeficiente de desplazamiento nulo, $\mu_{ini} = 0$. Se adopta un número entero l que denota el número de iteraciones deseadas para lograr la convergencia en (4.7.4), tal que $l = n_k/4$, donde n_k es el número máximo de iteraciones permitido. Entonces, si después de l iteraciones el proceso en (4.7.4) no logra converger o la tasa de convergencia es muy baja, se adopta como coeficiente de desplazamiento del sistema (4.7.8) el autovalor calculado en la $(k+1)$ -ésima iteración, es decir, $\mu = \bar{\lambda}^{(k+1)}$.

Consecuentemente, se modifica la matriz de rigidez tangente de acuerdo con (4.7.9b). Se introduce esta modificación en (4.7.3a) reiniciándose el proceso iterativo. Naturalmente, la modificación en el autovalor se escribe como

$$\bar{\lambda}_1^{(k+1)} = \bar{\lambda}_1^{(k)} + \mu \quad (4.7.10)$$

Cada l iteraciones se desplaza el sistema a través de la ecuación (4.7.9a) hasta que se cumplan las ecuaciones (4.7.5) y (4.7.6). Por la definición de l , dada en este trabajo, se permiten cuatro desplazamientos del sistema de valores propios durante el proceso iterativo en (4.7.4).

Se comentó en el inicio de este apartado que en la referencia BATHE [1996], cap. 11, se discute de manera detallada aspectos de la aplicación práctica de las expresiones aquí descritas. Como las matrices incrementales deducidas en (4.4.12) no son definidas positivas, se ha adaptado el método de iteración inversa para trabajar con dichas matrices, ya que en la referencia mencionada se describe el método de iteración inversa considerando las matrices del problema generalizado de valores propios definidas positivas. Por lo tanto, se han efectuado modificaciones en el denominador de las ecuaciones (4.7.4a) y (4.7.6), simplemente tomando el valor absoluto de dichos denominadores.

4.8 REFERENCIAS

- BATHE, K.J. [1996], *Finite element procedures*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- CHOONG, K.K. and HANGAI, Y. [1993], Review on methods of bifurcation analysis for geometrically nonlinear structures, *Bulletin of IASS*, Vol. 34, n^o 112, pp. 133–149.
- COMO, M. and GRIMALDI, A. [1995], *Theory of Stability of Continuous Elastic Structures*, CRC Press, New York.
- FELIPPA, C. and CRIVELLI, L.A. [1991], The core congruential formulation of geometrically non linear finite elements. in *Non Linear Computational Mechanics. The State of the Art.*, P. Wriggers and W. Wagner (eds.), Springer-Verlag, Berlin.
- FELIPPA, C.; CRIVELLI, L.A.; HAUGEN, B. [1994], A survey of the core-congruential formulation for geometrically nonlinear TL finite elements. *Archives of Comp. Meth. in Eng.*, Vol. 1, n^o 1, pp. 1-48.
- FUJII, F. and CHOONG, K.K. [1991], Branch-switching in symmetric/asymmetric bifurcation problems of elastic structures, *J. Struct. Engrg., Japanese Association of Civil Engineering*, Vol. 37A, pp. 343-352.

- HANGAI, Y. and LIN, X.G. [1989], Geometrically nonlinear analysis in the vicinity of critical points by generalized inverse, *Int. J. of Space Structures*, Vol. 4, nº 4, pp. 181-191.
- KOUHIA, R. [1992], On the solution of nonlinear finite element equations, *Comp. & Struct.*, Vol. 44, pp. 243-254.
- KOUHIA, R. and MIKKOLA, M. [1989], Tracing the equilibrium path beyond simple critical points, *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, Vol. 28, pp. 2923-2941.
- KOUHIA, R. and MIKKOLA, M. [1995], Estrategies for structural stability analysis, in: *Advances in finite element technology*, Edited by: Nils - Erik Wiberg, CIMNE, Barcelona, Spain.
- KRÖPLIN, B., DINKLER, D. and HILLMANN, J. [1985], An energy perturbation method applied to non linear structural analysis, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, VOL. 52, 885-897.
- KRÖPLIN, B. and DINKLER, D. [1988], A material law for coupled load yielding and geometric instability, *Engineering Computations*, Vol. 5, Nº3, 210-216.
- KRÖPLIN, B., WILHELM, M. and HERRMANN, M. [1991], Unstable phenomena in sheet metal forming processes and their simulation, **VDI BERICHTE NR. 894**, pp. 137-152.
- KRÖPLIN, B. [1992], Instability prediction by energy perturbation, in *Numerical Methods in Applied Sciences and Engineering*, H. Alder, J.C. Heinrich, S. Lavanchy, E. Oñate and B. Suarez (eds), CIMNE, Barcelona.
- MARSDEN, J.E. and HUGHES, T.J.R. [1983], *Mathematical Foundations of Elasticity*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- MIRASSO, A.E. y GODOY, L.A. [1988], Solución numérica de problemas no lineales de autovalores en inestabilidad bajo cargas dependientes de desplazamientos, en *Mecánica Computacional*, Vol. 7 (Ed. L. Godoy, F. Flores, C. Prato), AMCA, Córdoba, pp. 111-126.
- PIGNATARO, M., RIZZI, N., LUONGO, A. [1991], *Stability, Bifurcation and Postcritical Behaviour of Elastic Structures*, Elsevier, Amsterdam.
- RIKS, E. [1974], The incremental solution of some basic problems in elastic stability, NLR TR 74005 U, National Aerospace Laboratory NLR, The Netherlands.
- RHEINBOLDT, W.C. [1978], Numerical methods for a class of finite dimensional bifurcation problems, *SIAM J. on Num. Anal.*, Vol. 15, pp. 1-11.
- RIKS, E. [1984], Some computational aspects of the stability analysis of nonlinear structures, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 47, pp. 219-259.

- SEYDEL, R. [1991], On detecting stationary bifurcations, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, Vol. 1, pp. 335-337.
- SHI, J. and CRISFIELD, M.A. [1992], A simple indicator and branch switching technique for hidden unstable equilibrium paths, *Finite Elem. Anal. Des.*, Vol. 12, pp. 303-312.
- SHI, J. and CRISFIELD, M.A. [1994], A semi-direct approach for the computation of singular points, *Comp. & Struct.*, Vol. 51, pp. 107-115.
- SKEIE, G. and FELIPPA, C.A. [1991], Detecting and traversing bifurcation points in nonlinear structural analysis, *Int. J. Space Struct.*, Vol. 6, pp. 77-98.
- THURSTON, G.A. [1969], Continuation of Newton's method thorough bifurcation points, *J. Appl. Mech. ASME*, Vol. 9, pp. 425-430.
- TRAHAIR, N.S. [1993], *Flexural-Torsional Buckling of Structures*, Chapman & Hall, Melbourne.
- WILKINSON, J.H. [1965], *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Clarendon Press, Oxford, England.
- WAGNER, W. and WRIGGERS, P. [1988], A simple method for the calculation of postcritical branches, *Engrg. Comp.*, Vol. 17, pp. 103-109.
- WASZCZYSZYN, Z. [1983], Numerical problems of nonlinear stability analysis of elastic structures, *Comp. & Struct.*, Vol. 17, pp. 13-24.
- WRIGGERS, P. and SIMO, J.C. [1990], A general procedure for the direct computation of turning and bifurcation points, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 30, pp. 155-176.
- ZIENKIEWICZ, O. C; TAYLOR, R. L. [1994a], *El Método de los Elementos Finitos. Volumen 1: Formulaci3n B3sica y Problemas Lineales*, cuarta edici3n, McGraw-Hill, CIMNE, Barcelona, Espa1a.
- ZIENKIEWICZ, O. C; TAYLOR, R. L. [1994b], *El M3todo de los Elementos Finitos. Volumen 2: Mec3nica de S3lidos y Flu3idos. Din3mica y no Linealidad*, cuarta edici3n, McGraw-Hill, CIMNE, Barcelona, Espa1a.

CAPÍTULO 5

RESOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES DE EQUILIBRIO NO LINEAL

5.1 INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores se ha tratado la formulación de la ecuación de equilibrio incremental para el modelo de sólido tridimensional elástico. La discretización de dicha ecuación, a través del método de los elementos finitos, conduce a un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales. En este capítulo se abordan los métodos de resolución de dicho sistema de ecuaciones algunos de los cuales se han implementado en esta monografía.

Los temas tratados en este capítulo se describen a continuación. En el apartado 5.2 se discute la naturaleza de la no linealidad geométrica del problema en cuestión. Además, se describen distintos comportamientos de los sistemas estructurales que pueden ser estudiados teniendo en cuenta dicha no linealidad y de esta manera, se pretende justificar el estudio de métodos incrementales iterativos con control de la respuesta para obtener la solución de dichos problemas.

En el apartado 5.3 se hace una breve descripción de las ecuaciones de gobierno que simulan la no linealidad geométrica en estructuras y se introducen los conceptos de parámetros de control y de matriz de control.

En el apartado 5.4 se hace una revisión sobre las representaciones paramétricas del vector de estado y del parámetro de control. Estas representaciones son la base teórica sobre las cuales se desarrollan los métodos de continuación de la respuesta. Las ecuaciones diferenciales respecto al parámetro de control y su reducción a sólo un parámetro de control se introducen a continuación.

En el apartado 5.5 se define la trayectoria fundamental no lineal que expresa la relación entre una variable del vector de estado y el parámetro de control. Además, se define el vector de *flujo incremental de fuerzas residuales* y el vector de *velocidad incremental*, conceptos importantes a la hora de desarrollar los procedimientos de solución en los métodos de continuación.

En el apartado 5.6 se presentan las definiciones algebraicas que caracterizan los tipos de puntos críticos (punto de bifurcación y punto límite).

En el apartado 5.7 se presenta el resumen de las principales ecuaciones de restricción que controlan la respuesta del sistema de ecuaciones, mientras que en el apartado 5.8 se describen los procedimientos necesarios para avanzar en la solución. Se analizan los algoritmos que corresponden a las fases de predicción y corrección. Adicionalmente, se discute la introducción de la matriz secante en dichas fases. Se puede considerar este punto como una aportación original de esta monografía al desarrollo de nuevos algoritmos de resolución de ecuaciones no lineales.

El apartado 5.9 se centra en la detección de puntos críticos a través de los métodos indirectos. Por último, en el apartado 5.10 se hacen algunas consideraciones respecto a la implementación computacional de los algoritmos propuestos en este capítulo y que han sido utilizados en esta monografía.

5.2 CARACTERIZACIÓN DE LA NO LINEALIDAD DEL PROBLEMA

La no linealidad de las relaciones cinemáticas (deformación–desplazamiento) se considera suave. Estas no linealidades presentan relaciones continuas y suaves a nivel local, es decir, en un punto arbitrario del sólido. Los problemas de no linealidad geométrica (grandes desplazamientos, grandes deformaciones elásticas y grandes giros) encajan en esta categoría porque los efectos no lineales provienen de la relación deformación–desplazamiento que, a su vez, se define a través de funciones continuas y derivables. Además, todas las medidas de deformación de uso práctico en la ingeniería son definidas por medio de relaciones continuas. Por lo tanto, se conocen bien las fuentes de no linealidad en las distintas definiciones de medidas de deformaciones. La característica que destaca en esta clase de problemas es que las no linealidades son reversibles y las relaciones que las definen son continuas en todos los puntos del sólido. La expresión *no linealidad suave* se refiere a nivel local, lo que no quiere decir que a nivel global el proceso de deformación del sólido también sea suave. Hay comportamientos globales que presentan fuertes no linealidades, por ejemplo, el pandeo en sistemas estructurales y el cambio de forma debido a la pérdida de rigidez de dichos sistemas (BOLOTIN [1963], ZIEGLER [1968] y THOMPSON y HUNT [1973]).

Los métodos de solución de estos problemas han recibido una gran atención por parte de la comunidad científica en métodos numéricos (CRISFIELD y SHI [1991]) y en matemática aplicada (RHEINBOLDT [1986]). Estos problemas, originalmente, fueron tratados en el marco de los elementos finitos con técnicas de solución puramente incrementales con el control de la carga. Estos métodos, por sus dificultades inherentes, presentan errores que se acumulan durante el proceso de cálculo; además, no son capaces de obtener la respuesta en

presencia de pérdida de la rigidez de la estructura. Estos problemas incitaron la investigación de técnicas de solución basadas en formulaciones tangenciales consistentes, lo que permitió incorporar en el incremento del parámetro de control un proceso iterativo de corrección. Se puede encontrar en el libro de ODEN [1972] una revisión completa sobre el tema de solución de ecuaciones discretas no lineales a través de algoritmos incremental-iterativos. Actualmente, en los métodos incremental-iterativos el incremento del parámetro de control (carga, desplazamiento) es utilizado como un *predictor* para la siguiente fase de corrección, la cual puede ser realizada con los métodos de Newton Raphson, cuasi-Newton, secante-Newton o con un algoritmo utilizando la matriz secante incremental, etc. Un estudio amplio sobre distintos predictores y correctores se encuentra en el capítulo 4 del libro de SEYDEL [1994].

La detección de puntos críticos en la respuesta del sólido deformado tiene un papel importante en el análisis de la estabilidad y de colapso de sistemas estructurales. La mayoría de las soluciones analíticas que evalúan el punto de bifurcación (carga de pandeo) no tienen en cuenta el efecto de la deformación inicial (THOMPSON y HUNT [1984] y TIMOSHENKO [1961]). Este análisis se denomina *análisis de pandeo linealizado*. Estos métodos se aplican a estructuras con comportamiento precrítico cuasilineal. Sin embargo, para ciertos problemas la carga crítica resulta afectada por las deformaciones iniciales del sistema estructural. Éste es el caso de estructuras que sufren grandes desplazamientos en el trecho precrítico de la trayectoria de equilibrio. Este fenómeno es particularmente relevante en el caso de estructuras ligeras que se encuentran en las aplicaciones aeronáuticas y espaciales, pues la condición de bifurcación puede surgir después que dichos sistemas estructurales han experimentado cambios significativos en su geometría. Para este tipo de problemas es necesario comprobar la existencia de puntos críticos a medida que se obtiene la solución en los puntos de la trayectoria de equilibrio.

Para estudiar el comportamiento postcrítico es necesario obtener la respuesta de la estructura después de alcanzar el punto crítico. Se hace este análisis con el objetivo de conocer la capacidad resistente postcrítica de la estructura para evaluar mejor los criterios de seguridad en el proyecto de las mismas. Esta necesidad ha llevado al desarrollo de diversos tipos de estrategias de control de la respuesta (carga-desplazamiento), tales como el control de la carga, el control del desplazamiento y los métodos de longitud de arco. Sin embargo, la búsqueda de estrategias fiables capaces de detectar puntos singulares y elegir una rama secundaria de equilibrio que sea físicamente relevante es aún tema de investigación. En el capítulo 5 del libro de SEYDEL [1994] se presenta una interesante discusión sobre los métodos indirectos y directos para la detección de puntos singulares en sistema de ecuaciones diferenciales, mientras que en el capítulo 6 se desarrollan distintos métodos capaces de encontrar una rama secundaria de equilibrio a través de ecuaciones de restricciones adicionales que orientan el predictor en la dirección de mínima energía potencial total.

5.3 ECUACIONES DE GOBIERNO

El conjunto de procedimientos utilizados para obtener la solución en una secuencia de puntos que forman una trayectoria o un camino de equilibrio se denomina *métodos de continuación*. El objetivo de cualquier método de continuación es generar una secuencia de soluciones. Cada solución sirve como punto de partida para la próxima. Los elementos básicos de un método de continuación son: sistema de ecuación no lineal (algebraico, de ecuaciones diferenciales); su forma incremental (serie de Taylor, etc) a partir de la cual es posible elegir un predictor y una estrategia de avance hacia la próxima solución a través de una ecuación de restricción. Seguidamente se describe de forma breve la estructura básica de la ecuación de fuerzas residuales para el análisis no lineal. Algunos de los temas presentados en este apartado ya fueron introducidos en los capítulos anteriores, no obstante, se repetirán aquí con el objetivo de hacer este capítulo independiente de los demás. Además, en este capítulo no se adoptará la notación con índices a la izquierda por cuestión de simplicidad.

El sistema discreto de ecuaciones no lineal que gobierna los problemas cuasiestáticos con no linealidad geométrica se escribe como

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{p}) = \mathbf{0} \quad (5.3.1)$$

donde \mathbf{u} es el vector de estado con N componentes que caracterizan la configuración deformada del sólido, \mathbf{r} es el vector de fuerzas residuales que contiene las fuerzas no equilibradas conjugadas con \mathbf{u} , y \mathbf{p} es el vector que contiene los parámetros de control. Se supone la dependencia de \mathbf{r} en \mathbf{u} y \mathbf{p} independiente del camino, continua y que sus derivadas primeras y segundas existen excepto, posiblemente, en puntos críticos aislados. Se obtiene la matriz de rigidez tangente tomando las derivadas de las fuerzas residuales respecto a la variable de estado \mathbf{u} , mientras que la derivada de \mathbf{r} (con el signo menos) respecto a los parámetros de control constituye la *matriz de control* \mathbf{Q} ; estas matrices se expresan de la siguiente manera

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} \quad \text{y} \quad \mathbf{Q} = -\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}} \quad (5.3.2)$$

Las derivadas primeras del vector de fuerzas residuales en (5.3.2) permiten clasificar los puntos que se obtienen de la solución de (5.3.1) de acuerdo con las características de \mathbf{K} y \mathbf{Q} . Hay dos tipos posibles de puntos; aquéllos para los cuales la inversa de la matriz de rigidez tangente \mathbf{K}^{-1} existe se denominan *puntos regulares* y aquéllos donde la matriz tangente es singular se denominan *puntos singulares* o *puntos críticos*. A través de la matriz de control \mathbf{Q} es posible clasificar los puntos críticos en *puntos límite* o *puntos de bifurcación*.

5.4 REPRESENTACIONES PARAMÉTRICAS

En los puntos regulares de la solución de (5.3.1) se pueden expresar las variables de estado representadas por el vector \mathbf{u} en términos de las componentes del vector de parámetros de control \mathbf{p} . Esto equivale a parametrizar la respuesta en función de las componentes de \mathbf{p} , es decir, $\mathbf{u}(\alpha, \beta, \gamma, \text{etc})$. Sin embargo, esta representación no siempre es posible. Este es el caso de los puntos singulares, puesto que en las proximidades de estos puntos pueden existir más de una solución para un valor dado de \mathbf{p} . Como consecuencia, se necesita de una parametrización *local* (SEYDEL [1994], cap. 4). La inconveniencia de la existencia de distintas parametrizaciones en diferentes puntos de la curva de solución se puede evitar, al menos teóricamente, considerando la respuesta en un sentido más general. Es decir, la solución de (5.3.1) puede representarse por una superficie en el espacio de dimensión $N + K$ correspondiente a las N variables de estado de \mathbf{u} y a los K parámetros de control de \mathbf{p} . Para describir esta superficie se considera una representación paramétrica para los vectores \mathbf{u} y \mathbf{p} del modo siguiente

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) \quad \text{y} \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}(t) \quad (5.4.1)$$

donde t es una variable que representa el nivel de progreso del vector de estado y de los parámetros de control. Las derivadas primera y segunda del vector de fuerzas residuales respecto a la variable t se expresan, en notación indicial, como

$$\dot{r}_i = \frac{\partial r_i}{\partial u_j} \dot{u}_j + \frac{\partial r_i}{\partial p_j} \dot{p}_j \quad (5.4.2a)$$

$$\begin{aligned} \ddot{r}_i = & \frac{\partial r_i}{\partial u_j} \ddot{u}_j + \left[\frac{\partial^2 r_i}{\partial u_j \partial u_k} \dot{u}_k + \frac{\partial^2 r_i}{\partial u_j \partial p_k} \dot{p}_k \right] \dot{u}_j + \frac{\partial r_i}{\partial p_j} \ddot{p}_j + \\ & + \left[\frac{\partial^2 r_i}{\partial p_j \partial u_k} \dot{u}_k + \frac{\partial^2 r_i}{\partial p_j \partial p_k} \dot{p}_k \right] \dot{p}_j \end{aligned} \quad (5.4.2b)$$

y en forma matricial, de acuerdo con las siguientes expresiones

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{K}\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{Q}\dot{\mathbf{p}} \quad (5.4.3a)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{K}\ddot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{K}}\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{Q}\ddot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{Q}}\dot{\mathbf{p}} \quad (5.4.3b)$$

donde \mathbf{K} y \mathbf{Q} son matrices. Sus componentes (i, j) se definen a través de las expresiones entre corchetes en (5.4.2b). Los términos $\partial^2 r_i / \partial u_j \partial u_k$, por

otro lado, son vectores tridimensionales (“matrices cúbicas”); $\dot{\mathbf{K}}$ y $\dot{\mathbf{Q}}$ son proyecciones de estos vectores en el subespacio que contiene las direcciones $\dot{\mathbf{u}}$ y $\dot{\mathbf{p}}$, FELIPPA [1984a]. Los puntos sobre matrices y vectores en (5.4.3) representan la diferenciación de las componentes de dichas matrices y vectores respecto a t . Las expresiones de las ecuaciones de arriba representan un sistema de ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden de las fuerzas residuales respecto al parámetro t , respectivamente.

• **Reducción a un simple parámetro de control**

Como se ha definido en (5.3.1), el vector \mathbf{p} contiene un conjunto de parámetros. Cada parámetro puede estar asociado a un cierto modelo de carga. Existirán tantos parámetros como modelos de carga a representar. La historia completa de una sollicitación externa consiste en un conjunto de secuencias de cargas aplicadas en un intervalo de tiempo $[0, T]$. Estas secuencias especifican cómo y cuándo distintos tipos de cargas son aplicadas al sólido. Por ejemplo, considérese el sólido indeformado. En primer lugar, se aplican las fuerzas de volumen; a continuación, se somete a un descenso de temperatura y en un instante dado se aplica una carga dinámica. Cada secuencia de carga empieza en un estado inicial A, donde se conoce la solución \mathbf{u}_A , avanzando hacia un estado B donde no se conoce la solución \mathbf{u}_B , o puede no existir para el nivel de carga definido en el estado B. Si se supone que las componentes de \mathbf{p} varían proporcionalmente entre los estados A y B, se puede modelar el proceso de carga en cada etapa en función de un solo parámetro de control λ que varía de 0 a 1 de acuerdo con la interpolación lineal

$$\mathbf{p} = (1 - \lambda) \mathbf{p}_A + \lambda \mathbf{p}_B \quad (5.4.4)$$

De esta manera, el sistema de ecuaciones no lineal a resolver en la etapa (A \rightarrow B) es

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{0} \quad (5.4.5)$$

con la condición inicial $\mathbf{u} = \mathbf{u}_A$ para $\lambda = 0$.

Si cada etapa de carga puede ser representada con un simple parámetro de control, la matriz de control \mathbf{Q} se transforma en un vector \mathbf{q} , denominado en la literatura técnica vector incremental, FELIPPA [1984a]. Así, las derivadas primeras y segundas del vector de fuerzas residuales respecto al parámetro t se reescriben como

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{K}\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{q}\dot{\lambda} \quad (5.4.6a)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{K}\ddot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{K}}\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{q}\ddot{\lambda} - \dot{\mathbf{q}}\dot{\lambda} \quad (5.4.6b)$$

Éstas son las formas simplificadas de los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden de las ecuaciones (5.4.3), respectivamente.

De esta manera, haciéndose la diferenciación de la ecuación (5.4.5) respecto a la variable t , se obtiene que

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{K}\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{q}\dot{\lambda} = 0 \quad (5.4.7)$$

Esta ecuación define una superficie en el espacio de dimensión $N + 1$, correspondiente a las N componentes del vector \mathbf{u} y al parámetro de control λ . Esta superficie se denomina *flujo incremental de fuerzas residuales*, FELIPPA [1991].

5.5 TRAYECTORIA FUNDAMENTAL NO LINEAL

La solución general del sistema de ecuaciones (5.4.7) es

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{r}_c \quad (5.5.1)$$

donde \mathbf{r}_c es un vector de fuerzas residuales arbitrario. La solución $\mathbf{u}(t)$, $\lambda(t)$ de la ecuación (5.5.1) para un valor fijo de \mathbf{r}_c representa una superficie en el espacio de dimensión $N + 1$. La proyección de esta superficie en un plano definido por la k -ésima componente del vector \mathbf{u} y por el parámetro de control λ , es decir, (u_k, λ) , define una trayectoria en dicho plano. La curva definida en el plano (u_k, λ) para el valor de $\mathbf{r}_c = 0$, se denomina *trayectoria fundamental no lineal de equilibrio o camino primario de equilibrio*. De esta manera, el flujo incremental de las fuerzas residuales contiene la trayectoria fundamental (primaria) no lineal de equilibrio cuando $\mathbf{r}_c = 0$.

En los puntos regulares del flujo incremental de las fuerzas residuales la matriz de rigidez tangente es no singular, por tanto, la ecuación (5.4.7) se reescribe como

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{q}\dot{\lambda} = \mathbf{v}\dot{\lambda} \quad (5.5.2a)$$

donde

$$\mathbf{v} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{q} \quad (5.5.2b)$$

se denomina *vector de velocidad incremental*. Este vector juega un importante papel en la mayoría de los procedimientos de solución, como se verá en los

apartados siguientes. Si se elige como parámetro $t \equiv \lambda$, esto implica que $\dot{\lambda} = 1$ y la ecuación (5.4.6a) se reduce a

$$\begin{cases} \mathbf{r}' = \mathbf{K}\mathbf{u}' - \mathbf{q} \\ \text{con } \mathbf{r}' = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} \text{ y } \mathbf{u}' = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \lambda} \end{cases} \quad (5.5.3)$$

el sistema de ecuaciones no lineal (5.5.3) representa la *forma incremental de primer orden* del sistema de ecuaciones (5.4.6a).

En cada punto arbitrario $P(\mathbf{u}, \lambda)$ del flujo incremental de las fuerzas residuales se puede definir un vector tangente \mathbf{t} a la trayectoria que pasa por P como

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}' \\ \lambda' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (5.5.4)$$

donde el vector de incremento de velocidad \mathbf{v} es la proyección del vector tangente \mathbf{t} en el espacio de las variables de estado \mathbf{u} . En la Figura 5.1 se muestra la interpretación geométrica de \mathbf{t} . El vector tangente puede normalizarse de la siguiente manera

$$\bar{\mathbf{t}} = \frac{1}{f} \mathbf{t} \quad \text{con} \quad f = \sqrt{1 + \mathbf{v}^T \mathbf{v}} \quad (5.5.5)$$

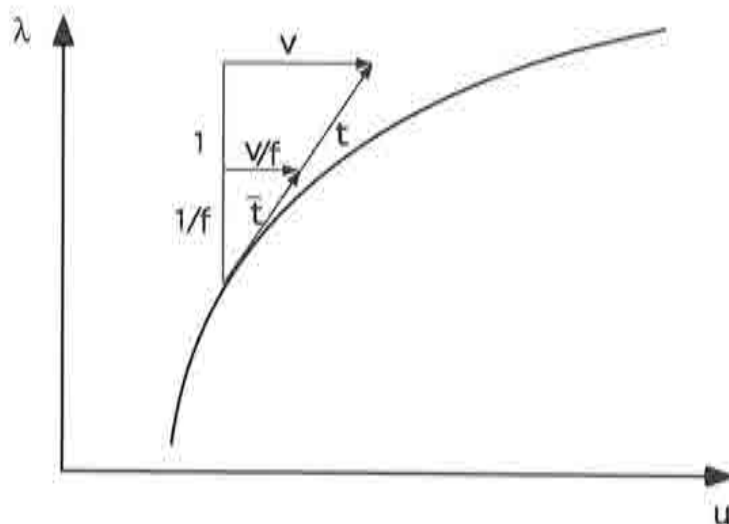


Figura 5.1 Vector tangente a la trayectoria fundamental de equilibrio

La normal al vector \mathbf{t} en un punto regular P se expresa a través de la siguiente ecuación

$$\mathbf{v}^T \Delta \mathbf{u} + \Delta \lambda = 0 \quad (5.5.6)$$

donde $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_P$ y $\Delta \lambda = \lambda - \lambda_P$ son los incrementos de desplazamientos y de carga, respectivamente, a partir del punto P . Dividiendo estos incrementos por Δt y aplicando el límite $\Delta t \rightarrow 0$ se obtiene la forma diferencial de (5.5.6) como

$$\mathbf{v}^T \dot{\mathbf{u}} + \dot{\lambda} = 0 \quad (5.5.7)$$

esta ecuación se reduce a $\mathbf{v}^T \dot{\mathbf{u}} = -1$ si $t \equiv \lambda$. Para problemas con un grado de libertad ($N = 1$), la ecuación anterior representa una curva ortogonal al flujo incremental de fuerzas residuales. Si $N > 1$, la ecuación (5.5.7) describe las ecuaciones diferenciales de una familia de hiperplanos ortogonales al espacio de dimensión $N + 1$ que contiene el vector \mathbf{u} y el parámetro de control λ .

5.6 CARACTERIZACIÓN DE PUNTOS CRÍTICOS

Puntos críticos o *no regulares* son puntos en los cuales la matriz de rigidez tangente \mathbf{K} se torna singular. Estos puntos están íntimamente relacionados con la pérdida de la estabilidad estructural. En estos puntos, el vector de velocidad \mathbf{v} definido por la ecuación (5.5.2b) no existe o no está únicamente determinado. Desde un punto de vista físico esto significa que la respuesta estructural no puede ser parametrizada por el parámetro de control λ .

Para aclarar estas ideas, se adoptarán algunos resultados del álgebra lineal (GOLUB y VAN LOAN [1989]). Se sabe que los vectores pertenecientes a la imagen $\mathbf{R}(\mathbf{K})$ de la matriz \mathbf{K} de dimensión $N \times N$ son ortogonales a los vectores del *espacio nulo* de la traspuesta de dicha matriz $\mathbf{N}(\mathbf{K}^T)$. De esta manera, la suma directa $\mathbf{R}(\mathbf{K}) \oplus \mathbf{N}(\mathbf{K}^T)$ amplía la dimensión del espacio, es decir, $\mathbf{R}(\mathbf{K}) \cap \mathbf{N}(\mathbf{K}^T) = \emptyset$. Si \mathbf{K} es simétrica, el *espacio nulo* de \mathbf{K} es igual al *espacio nulo* de \mathbf{K}^T . Con estas observaciones es fácil demostrar los siguientes teoremas (CRIVELLI [1991]):

◊ **Teorema.** El problema $\mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{q}$, donde \mathbf{K} es una matriz singular, simétrica y de dimensión $N \times N$, es consistente –admite por lo menos una solución no trivial– si, y solamente si, $\mathbf{q} \perp \mathbf{N}(\mathbf{K})$.

Demostración. Una vez que $\mathbf{R}(\mathbf{K})$ y $\mathbf{N}(\mathbf{K})$ se relacionan a través de una suma directa, el vector de carga incremental \mathbf{q} puede descomponerse en

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 \quad \text{tal que} \quad \mathbf{q}_1 \in \mathbf{R}(\mathbf{K}) \quad \text{y} \quad \mathbf{q}_2 \in \mathbf{N}(\mathbf{K}^T) \quad (5.6.1)$$

Sea \mathbf{z} un autovector del espacio nulo de \mathbf{K} ($\mathbf{z} \in \mathbf{N}(\mathbf{K})$), esto es, $\mathbf{K}\mathbf{z} = \mathbf{0}$, o una vez que \mathbf{K} es simétrica

$$\mathbf{z}^T \mathbf{K} = \mathbf{0}^T \quad (5.6.2)$$

Así, todos los autovectores \mathbf{z} que son linealmente independientes y, a la vez, satisfacen la ecuación (5.6.2), amplían el espacio nulo $\mathbf{N}(\mathbf{K}^T)$.

Si existe una solución para este problema, ésta debe cumplir la siguiente relación

$$\mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 \quad (5.6.3)$$

Cualquier vector \mathbf{w} que pertenezca al espacio nulo de \mathbf{K} que se exprese como una combinación lineal de los autovectores \mathbf{z} satisface

$$\mathbf{0} = \mathbf{w}^T \mathbf{K}\mathbf{v} = \underbrace{\mathbf{w}^T \mathbf{q}_1}_{=0} + \mathbf{w}^T \mathbf{q}_2 \quad (5.6.4)$$

una vez que \mathbf{w} y \mathbf{q}_1 son ortogonales. Como el segundo miembro de (5.6.4) es idénticamente igual a cero para todos los vectores de $\mathbf{N}(\mathbf{K})$, se concluye que el vector \mathbf{q}_2 se anula. De esta manera, se completa la demostración. \square

La demostración en la otra dirección es sencilla, una vez que $\mathbf{q}_2 = \mathbf{0}$; esto implica que \mathbf{q} pertenece a la imagen de la matriz \mathbf{K} , $\mathbf{q} \in \mathbf{R}(\mathbf{K})$, y, por definición, existe al menos un vector \mathbf{v} , tal que $\mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{q}$.

A propósito, obsérvese que si \mathbf{y} es otra solución cualquiera de (5.6.3), se obtiene que

$$\mathbf{K}(\mathbf{y} - \mathbf{v}) = \mathbf{0} \implies \mathbf{y} - \mathbf{v} \in \mathbf{N}(\mathbf{K}^T) \quad (5.6.5)$$

De (5.6.5) se concluye que dos soluciones cualesquiera de (5.6.3) difieren en una cantidad que pertenece al espacio nulo de \mathbf{K} . Así, para un sistema de ecuaciones singular existen infinitas soluciones o ninguna.

Ahora se utilizan estas observaciones para caracterizar los puntos críticos. De una manera aproximada, se puede decir que un punto crítico para el cual no existe solución de (5.6.3) se denomina *punto límite*. Por otro lado, un punto crítico para el cual existen infinitas soluciones de (5.6.3) se denomina *punto de*

bifurcación. En el caso unidimensional se representa este fenómeno a través de la siguiente observación: la tangente a la curva del plano (u_k, λ) en un punto límite tiene inclinación nula, esto es, es paralela al eje u_k , mientras que en un punto de bifurcación hay otras tangentes correspondientes a las ramas secundarias de equilibrio. Como el vector de velocidades incrementales \mathbf{v} no está unívocamente definido en los puntos de bifurcación, los métodos puramente incrementales no convergen en dichos puntos.

Con las herramientas introducidas en los párrafos anteriores se define de modo más preciso los puntos críticos en problemas estacionarios o cuasiestáticos. Se supone que existe solamente un autovector nulo de \mathbf{K} en el punto crítico. Las definiciones aquí descritas son las comentadas en el capítulo 2 del libro de SEYDEL [1994].

Definición 1. El punto $P(\mathbf{u}_c, \lambda_c)$ en la trayectoria fundamental no lineal es un punto límite si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $\mathbf{r}(\mathbf{u}_c, \lambda_c) = 0$;
2. $\mathbf{K}(\mathbf{u}_c)$ posee un solo valor propio nulo, esto es, la dimensión de la imagen de $\mathbf{K}(\mathbf{u}_c)$ es $N - 1$;
3. $\mathbf{q} \notin \mathbf{R}(\mathbf{K}(\mathbf{u}_c))$, es decir, la dimensión del conjunto $[\mathbf{K}(\mathbf{u}_c)|\mathbf{q}]$ es N ;
4. Existe una parametrización $\mathbf{u}(\sigma), \lambda(\sigma)$, tal que $\mathbf{u}(\sigma_c) = \mathbf{u}_c, \lambda(\sigma_c) = \lambda_c$ y $d^2\lambda/d\sigma^2|_{\sigma_c} \neq 0$.

Las condiciones (1-3) garantizan que la tangente a la rama en $(\mathbf{u}_c, \lambda_c)$ es perpendicular al eje- λ en el espacio (\mathbf{u}, λ) de dimensión $N + 1$. La condición (4) evita que el punto $(\mathbf{u}_c, \lambda_c)$ sea un *punto de histéresis*, esto es, que no sea un punto de inflexión en la rama de equilibrio.

Definición 2. El punto $P(\mathbf{u}_c, \lambda_c)$ en la rama primaria de equilibrio es un punto de bifurcación simple si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\mathbf{r}(\mathbf{u}_c, \lambda_c) = 0$;
2. $\mathbf{K}(\mathbf{u}_c)$ posee un solo valor propio nulo: la dimensión de la imagen de $\mathbf{K}(\mathbf{u}_c)$ es $N - 1$;
3. $\mathbf{q} \in \mathbf{R}(\mathbf{K}(\mathbf{u}_c))$, esto es, la dimensión del conjunto $[\mathbf{K}(\mathbf{u}_c)|\mathbf{q}]$ es $N - 1$;
4. Dos ramas de equilibrio se cruzan con dos tangentes distintas.

La condición (4) será aclarada más adelante utilizando el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden (5.4.6b).

Para explicar el significado físico de las definiciones anteriores se reescribe la ecuación (5.4.7) como

$$\mathbf{K}\Delta\mathbf{u} = \mathbf{q}\Delta\lambda \quad (5.6.6)$$

Sea \mathbf{z} el autovector nulo de \mathbf{K} . Premultiplicándose ambos lados de la ecuación (5.6.6) por \mathbf{z}^T , se obtiene las siguientes condiciones:

1. Si $\mathbf{z}^T\mathbf{q} \neq 0$, entonces $\Delta\lambda$ debe anularse para que la ecuación (5.6.6) sea consistente. Esta condición caracteriza un punto límite. En este caso, todas las soluciones de (5.6.6) pertenecen al espacio nulo de \mathbf{K} .
2. Si $\mathbf{z}^T\mathbf{q} = 0$, entonces se trata de un punto de bifurcación. La característica principal de un punto de bifurcación es la transición abrupta de un modo de deformación a otro modo distinto. Siendo este último un modo de deformación previamente oculto en virtud de que es ortogonal al vector incremental de cargas.

5.7 PROCEDIMIENTOS DE SOLUCIÓN. MÉTODOS DE CONTINUACIÓN

Como se ha comentado en el apartado 5.2, la metodología de resolución de un sistema de ecuaciones no lineal se basa, fundamentalmente, en algoritmos incremental-iterativos. Naturalmente, los métodos de continuación incorporan dichos algoritmos.

Sea $(\mathbf{u}_n, \lambda_n)$ la solución de la ecuación (5.4.5) correspondiente al n -ésimo paso del método de continuación. Ahora, se intenta encontrar la solución $(\mathbf{u}_{n+1}, \lambda_{n+1})$ para un incremento arbitrario del parámetro de control $\Delta\lambda_n$; es decir

$$(\mathbf{u}_n, \lambda_n) \longrightarrow (\mathbf{u}_{n+1}, \lambda_{n+1}) \quad (5.7.1)$$

Con el método *predictor-corrector*, el paso $n \rightarrow n + 1$ se divide en dos

$$(\mathbf{u}_n, \lambda_n) \xrightarrow{\text{predictor}} (\bar{\mathbf{u}}_{n+1}, \bar{\lambda}_{n+1}) \xrightarrow{\text{corrector}} (\mathbf{u}_{n+1}, \lambda_{n+1}) \quad (5.7.2)$$

En general, la predicción $(\bar{\mathbf{u}}_{n+1}, \bar{\lambda}_{n+1})$ no es la solución de (5.4.5). El predictor solamente proporciona un valor inicial para la posterior corrección a través de un proceso iterativo; en la Figura 5.2 las iteraciones correspondientes a la fase correctora se indican con el símbolo (\bullet) . La distancia entre dos soluciones consecutivas, $(\mathbf{u}_n, \lambda_n)$ y $(\mathbf{u}_{n+1}, \lambda_{n+1})$, se denomina *longitud del paso* o *tamaño del paso*. Por ahora se abordan estos conceptos a nivel más general, pues la medida de dicha distancia no es fácil de calcular, en particular cuando aún no se conoce \mathbf{u}_{n+1} . Por ejemplo, la longitud del predictor se denomina *tamaño del*

paso. Además de la ecuación (5.4.5) se necesita una relación que identifique la localización de la solución en la rama de equilibrio. Como se verá más adelante, esta identificación depende de la estrategia de parametrización que se elige para trazar la rama.

Los métodos de continuación se diferencian, entre otras cosas, en los siguientes temas:

1. predictor;
2. estrategia de parametrización;
3. corrector;
4. control del tamaño del paso.

Los tres primeros temas pueden elegirse independientemente uno del otro, mientras que el control de la longitud del paso debe corresponderse al tipo de predictor, de corrector y de la parametrización que se utiliza (ver SEYDEL [1994], cap. 4).

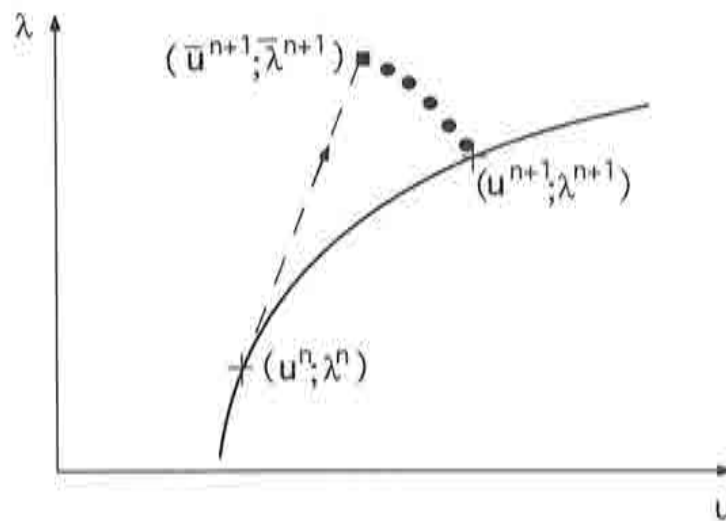


Figura 5.2 Solución obtenida por un método predictor-corrector

En este apartado se trata solamente del tipo de predicción y de la parametrización que se utilizan en los métodos de continuación. En el próximo apartado se desarrollarán los demás temas. Se supone que la predicción del paso $n + 1$ obtiene la solución $(\mathbf{u}_{n+1}, \lambda_{n+1})$ sin la necesidad de hacer correcciones. Por tanto, los incrementos de las variables de control y del parámetro de control en el paso $n \rightarrow n + 1$ se expresan como

$$\Delta \mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n \quad \text{y} \quad \Delta \lambda_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n \quad (5.7.3)$$

Para determinar estos incrementos se debe verificar la ecuación (5.4.5). Sin embargo, dicho sistema de ecuaciones posee $N+1$ incógnitas para N ecuaciones, consecuentemente, el problema no queda bien definido. De este modo, para resolver este sistema se añade una ecuación más para compensar la incógnita adicional. Este procedimiento se denomina *estrategia de control incremental*, es decir, que se establece una condición de coacción sobre las incógnitas $(\Delta \mathbf{u}_n, \Delta \lambda_n)$ del problema. Esta condición de coacción se expresa de la siguiente manera

$$c(\Delta \mathbf{u}, \Delta \lambda) = 0 \quad (5.7.4)$$

Una condición de coacción tal como en (5.7.4) puede interpretarse como un tipo de norma del espacio de solución de dimensión $(N+1)$. De esta manera, dicha condición especifica una cierta distancia entre la solución anterior del paso n y la nueva en el paso $n+1$. Además, la condición de coacción contiene inherentemente la parametrización aludida en las ecuaciones (5.4.1). Diferenciándose la ecuación de restricción respecto al parámetro t se obtiene que

$$\mathbf{a}^T \dot{\mathbf{u}} + g \dot{\lambda} = 0 \quad (5.7.5a)$$

donde

$$\mathbf{a}^T = \frac{\partial c}{\partial \mathbf{u}} \quad \text{y} \quad g = \frac{\partial c}{\partial \lambda} \quad (5.7.5b)$$

Por lo tanto, la ecuación (5.7.4) representa la forma algebraica de la condición de restricción, mientras que (5.7.5a) denota la forma diferencial de dicha restricción. Es posible definir la condición de coacción en la forma diferencial sin que haya una integración explícita de la misma (FELLIPA y SKEIE [1991]).

A continuación se presenta una lista, aproximadamente en orden creciente de complejidad, de ecuaciones de coacción que son importantes en las aplicaciones prácticas o que tienen interés histórico. En la referencia FELLIPA y SKEIE [1991] se encuentra un estudio detallado de las ecuaciones de restricción aquí presentadas. Se ilustra en la Figura 5.3 la representación geométrica de dichas ecuaciones para un problema con un grado de libertad, donde $c = 0$ denota la curva de restricción, S el punto de la rama de equilibrio correspondiente a la solución del paso anterior, P la predicción de la respuesta y C representa la solución convergida del paso actual.

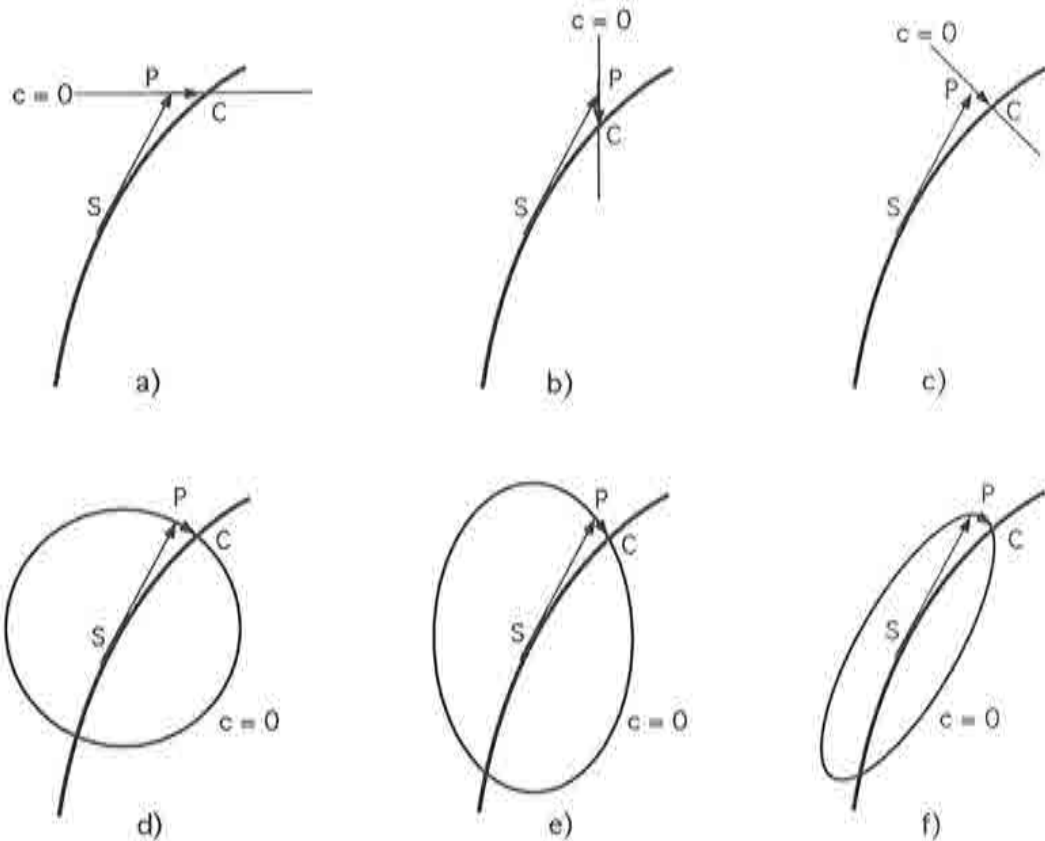


Figura 5.3 Representación geométrica de las diversas ecuaciones de coacción. a) Control de la Carga, b) Control de las variables de Estado, c) Control a través de un Hiperplano, d) Control a través de una Hiperesfera, e) Control a través de una Hiperelipse Global, f) Control a través de una Hiperelipse Local

1. Control de la Carga

El incremento $\Delta\lambda_n$ se define como

$$c(\Delta\mathbf{u}, \Delta\lambda) = \Delta\lambda_n - l = 0 \quad (5.7.6)$$

donde l es un valor prescrito. Como λ es frecuentemente asociado con la amplitud de la carga, esta estrategia es conocida como *Control de la Carga*. Se sabe que la ecuación (5.7.6) no converge en los puntos críticos, ya que en estos puntos la respuesta no puede ser controlada sólo por λ . Nótese que c es independiente de las variables de estado \mathbf{u} .

2. Control de las Variables de Estado

En este caso se define la norma de $\Delta \mathbf{u}_n$ a través de la ecuación

$$c(\Delta \mathbf{u}, \Delta \lambda) = \|\Delta \mathbf{u}_n\| - lu = \sqrt{\Delta \mathbf{u}_n^T \Delta \mathbf{u}_n} - lu = 0 \quad (5.7.7)$$

donde u es un valor de referencia con dimensión de desplazamiento. Nótese que c no depende del parámetro de control λ . Geométricamente, esta ecuación de restricción representa una superficie *hipercilíndrica* en el espacio (\mathbf{u}, λ) de dimensión $N + 1$. Este criterio ha sido introducido por CRISFIELD [1981]. Esta estrategia puede considerarse como una generalización del método de *control de desplazamiento*, que en el contexto de los métodos de los elementos finitos ha sido tradicionalmente asociado al caso en el que se controla la magnitud de sólo una de las componentes de \mathbf{u} , por ejemplo, u_i . Esta técnica ha sido utilizada por FELIPPA [1984b] en los años sesenta. Existe otra variación del método de control de desplazamiento en la cual se controla la magnitud de varias componentes del vector de desplazamientos generando un hiperplano multidimensional de control. Este método ha sido investigado por POWELL y SIMONS [1981] y BERGAN y SIMONS [1984].

3. Control a través de un Hiperplano

En este tipo de coacción se controla una longitud que pertenece a un hiperplano definido por la siguiente ecuación

$$\frac{1}{u^2} \mathbf{v}^T \Delta \mathbf{u}_n + \Delta \lambda_n = l \quad (5.7.8)$$

donde u es un parámetro que escala los términos en desplazamientos y l es la longitud del paso. En la referencia CRISFIELD y SHI [1991] se encuentra un resumen de las estrategias más usuales para efectuar el control del tamaño de l automáticamente durante el proceso de continuación. La ecuación (5.7.8) representa un hiperplano normal al vector tangente definido en (5.5.4). Cuando $u = 1$, este método se denomina *control de la longitud de arco*, o, simplemente, método de *longitud de arco*. Dicho método ha sido propuesto independientemente por RIKS [1972] y WEMPNER [1971].

4. Coacción con una superficie Hiperelíptica Global

Esta superficie se obtiene a través de una combinación de $\Delta \lambda_n$ y de la norma de $\Delta \mathbf{u}_n$, de la siguiente manera

$$\frac{a^2}{v^2} \Delta \mathbf{u}_n^T \mathbf{S} \Delta \mathbf{u}_n + b^2 (\Delta \lambda_n)^2 = l^2 \quad (5.7.9)$$

donde a y b son números reales, no simultáneamente iguales a cero, \mathbf{S} es una matriz simétrica definida positiva que escala el vector de estado y v un valor de referencia con las unidades del término $\sqrt{\Delta \mathbf{u}_n^T \mathbf{S} \Delta \mathbf{u}_n}$. Geométricamente, esta condición de coacción corresponde a una hipere-*l*ipse cuyo centro es la última solución convergida del paso anterior. Los casos de coacción anteriormente definidos en las ecuaciones (5.7.6-8) son degeneraciones de este criterio. Los parámetros a y b fueron introducidos por PADOVAN [1981] y PARK [1982]. Posteriormente, FELIPPA [1984b] ha obtenido la expresión adimensional (5.7.9) al introducir el parámetro v y la matriz \mathbf{S} . Cuando $a = b = v = 1$ y $\mathbf{S} = \mathbf{I}$ se recupera la condición de coacción a través de una hiperesfera propuesta por CRISFIELD [1981] y, posteriormente, analizada por WATSON y HOLZER [1983].

5. Coacción con una superficie Hiperelíptica Local

Este criterio es una variante de (5.7.9) propuesto por FELIPPA y SKEIE [1991]. La idea básica es escribir la ecuación de la hipere-*l*ipse en ejes locales. Una ventaja de esta proposición es que la forma de esta superficie de coacción es localmente invariante, permitiendo obtener una tasa de convergencia más uniforme. Es posible definir una infinidad de ejes locales. En particular, estos autores han elegido un conjunto con un eje en la dirección normal al vector tangente \mathbf{t} del flujo incremental de fuerzas residuales. El eje restante es paralelo a \mathbf{t} . Más concretamente, el primer eje tiene la dirección dada por el vector $\langle \mathbf{v}^T; \mathbf{v}^T \mathbf{v} \rangle$ que es normal a \mathbf{t} . Un subespacio ortogonal a este eje viene dado por la imagen del operador lineal $[\mathbf{v} \mathbf{v}^T | \mathbf{v}]$. Se puede ver que el vector $\langle \mathbf{v}^T; \mathbf{v}^T \mathbf{v} \rangle$ es un autovector nulo de este operador. De esta manera, el cambio de variables se define como

$$\begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}' \\ \Delta \lambda' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \mathbf{v}^T & \mathbf{v} \\ \mathbf{v}^T & -\mathbf{v}^T \mathbf{v} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix} \quad (5.7.10)$$

Obsérvese que la matriz de transformación en (5.7.9) es ortogonal. La transformación definida por (5.7.9) es singular ya que el rango de la matriz de transformación es dos. Así, el conjunto de ejes definido por esta transformación no amplía el conjunto del espacio de solución. Ahora, se aplica esta transformación de variables a la ecuación de coacción (5.7.9). Resulta de esta transformación una hipere-*l*ipse esviada y con el eje normal a \mathbf{t} más pequeño respecto al mismo eje de la hipere-*l*ipse global. Sin embargo, esta transformación no es consistente respecto a la magnitud de las variables de la solución, pudiendo haber diferencias discrepantes entre las magnitudes de estas variables. Una transformación

más equilibrada viene definida según

$$\begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}' \\ \Delta \lambda' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{v^2} \mathbf{v} \mathbf{v}^T & \frac{1}{v} \mathbf{v} \\ \frac{1}{v} \mathbf{v}^T & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{S} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix} \quad (5.7.11)$$

Nótese que el parámetro l que aparece en las ecuaciones (5.7.6–5.7.9) puede considerarse como medida de una *distancia* que *va desplazándose* a lo largo de la rama de equilibrio. De una manera poco precisa y general, se puede decir que después de n pasos se ha recorrido una distancia igual a nl a lo largo de la trayectoria fundamental de equilibrio.

5.8 EL AVANCE EN LA RESPUESTA

En este apartado se considera la solución de las ecuaciones residuales desde una perspectiva iterativa, descartándose los métodos puramente incrementales. Los ingredientes básicos de un plan iterativo de solución son un predictor, que facilita una aproximación inicial de la solución; un corrector que mejora esta predicción; una parametrización y una estrategia capaz de evaluar el tamaño del incremento, además de controlar automáticamente dicho tamaño a lo largo del proceso de continuación de la respuesta. Una vez elegida la estrategia de control del tamaño del incremento caracterizado por el parámetro l y la condición de coacción sobre las incógnitas $(\Delta \mathbf{u}_n, \Delta \lambda_n)$, se puede proceder al avance en la solución para el próximo incremento o paso. Se supone que $(\mathbf{u}_n, \lambda_n)$ es la solución convergida en el paso incremental n . Se desea encontrar la solución $(\mathbf{u}_{n+1}, \lambda_{n+1})$ que satisfaga la ecuación de equilibrio (5.4.5) y una de las ecuaciones de coacción en (5.7.6–5.7.9).

• Paso predictor

Para iniciar el paso incremental $n + 1$ se utiliza un predictor para obtener una aproximación inicial a la solución en $n + 1$. Se calcula la predicción de los incrementos $(\Delta \mathbf{u}_n^{(0)}, \Delta \lambda_n^{(0)})$ a través de la integración numérica de la ecuación diferencial de primer orden (5.4.7). En los puntos regulares donde \mathbf{v} existe (la matriz \mathbf{K} es no singular), los gradientes de \mathbf{u} y λ pueden aproximarse por medio de *diferencias hacia adelante* como

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u}_n^{(0)} = \mathbf{u}_{n+1}^{(0)} - \mathbf{u}_n \approx h \mathbf{v}_n \dot{\lambda}_n \\ \Delta \lambda_n^{(0)} = \lambda_{n+1}^{(0)} - \lambda_n \approx h \dot{\lambda}_n \end{cases} \quad (5.8.1)$$

donde $h = \Delta t$ es la forma parametrizada del paso de integración. Los cálculos restantes dependen de si se utilizan las ecuaciones de coacción en su forma

algebraica (5.7.4) o en su forma diferencial (5.7.5a). De la aplicación del algoritmo de integración hacia adelante de Euler en (5.4.7) se obtiene una predicción para las variables de estado de acuerdo con

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u}_n^{(0)} = \mathbf{K}_n^{-1} \mathbf{q}_n \Delta \lambda_n^{(0)} = \mathbf{v}_n \Delta \lambda_n^{(0)} \\ \mathbf{u}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{u}_n^{(0)} \quad \text{y} \quad \lambda_{n+1}^{(0)} = \lambda_n + \Delta \lambda_n^{(0)} \end{cases} \quad (5.8.2)$$

De la condición de coacción elegida se puede obtener un valor adecuado para el parámetro de control $\Delta \lambda_n^{(0)}$ para ser utilizado en (5.8.2). Si se adopta una de las formas algebraicas de la ecuación de coacción, por ejemplo, la ecuación hiperéptica global, se obtiene

$$\Delta \lambda_n^{(0)} = \frac{l_n}{\pm \sqrt{\frac{a^2}{v^2} \mathbf{v}_n^T \mathbf{S} \mathbf{v}_n + b^2}} \quad (5.8.3)$$

En los puntos críticos donde \mathbf{K} es singular y, consecuentemente, \mathbf{v} no existe, esta técnica de predicción no se aplica. Una manera sencilla de superar este obstáculo es empezar el proceso correctivo a partir de la solución del paso anterior; procedimiento que se denomina *predicción trivial* (BERGAN y SIMONS [1984]).

En el paso predictor es necesario determinar en que sentido avanza la solución. En cada punto de la trayectoria, el vector tangente \mathbf{v}_n determina dos sentidos distintos. En un proceso de carga, el sentido correcto se determina al asegurarse que el trabajo externo sea positivo, lo que implica

$$\mathbf{q}_n^T \Delta \mathbf{u}_n^{(0)} = \mathbf{q}_n^T \mathbf{v}_n \Delta \lambda_n^{(0)} \geq 0 \quad (5.8.4)$$

Se concluye de (5.8.4) que $\Delta \lambda_n^{(0)}$ debe tener el mismo signo que el término $\mathbf{q}_n^T \mathbf{v}_n$. Esta condición es válida sólo si la norma de las variables de estado $\|\mathbf{u}_n\|$ se incrementa monótonamente. En otras palabras, si la respuesta del sistema estructural no presenta puntos límite. Se deduce una condición más general para determinar el signo de $\Delta \lambda_n^{(0)}$ imponiendo la siguiente condición

$$\Delta \mathbf{u}_{n-1}^T \Delta \mathbf{u}_n^{(0)} > 0 \implies \Delta \lambda_n^{(0)} \Delta \mathbf{u}_{n-1}^T \mathbf{v}_n > 0 \quad (5.8.5)$$

$$\text{con } \Delta \mathbf{u}_{n-1} = \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}$$

donde $\Delta \mathbf{u}_{n-1}$ es el incremento de las variables de estado del paso $n-1$ al paso n . Por tanto, el signo de $\Delta \lambda_n^{(0)}$ queda determinado a través del signo del término $\Delta \mathbf{u}_{n-1}^T \mathbf{v}_n$.

En problemas sencillos, los procedimientos arriba definidos trabajan con eficacia sin un control de la longitud del paso. Se puede trabajar con longitud constante a lo largo de todo el procedimiento de continuación, por ejemplo, con $l = 0.1$, en caso de que se utilice el método de longitud de arco como ecuación de restricción. Se adopta la siguiente estrategia de control automático del tamaño del paso

$$l_n = l_{n-1} \sqrt{\frac{I_d}{I_{n-1}}} \quad \text{con} \quad l_{\min} \leq l_n \leq l_{\max} \quad (5.8.6)$$

donde l_{n-1} es la longitud del paso anterior, I_{n-1} es el número de iteraciones necesarias para lograr la convergencia en el paso anterior y I_d es un dato del problema que se refiere a un número ideal de iteraciones para lograr la convergencia en la solución de las ecuaciones de equilibrio. l_{\min} y l_{\max} son datos del problema y fijan un valor mínimo y máximo para la longitud del paso. En la referencia CRISFIELD [1981] se encuentra una discusión detallada respecto a los posibles valores que pueden adoptar estos parámetros (I_d, l_{\min}, l_{\max}). Nótese que en los tramos de la trayectoria con fuertes no linealidades se disminuye el tamaño del paso en (5.8.6), porque se espera que $I_{n-1} > I_d \implies l_n < l_{n-1}$; por otro lado, en los tramos que presentan no linealidades suaves se aumenta el tamaño del paso, pues $I_{n-1} < I_d \implies l_n > l_{n-1}$.

• Paso corrector

Una vez que se dispone de la aproximación inicial de las variables de estado y de control se pasa a la fase correctiva. Los valores predichos, en general, no eliminan las fuerzas residuales. El proceso correctivo intenta reducir este residuo dentro de un nivel de tolerancia aceptable. En este trabajo, se adopta para esta fase el método convencional de Newton (la matriz de rigidez tangente) o el algoritmo de iteración empleando la matriz secante incremental desarrollado en (3.5.5). A partir de los valores predichos en (5.8.2) y (5.8.3), el método convencional de Newton genera una secuencia de iteraciones $(\mathbf{u}^{(k)}, \lambda^{(k)})$, donde $k = 1, 2, \dots, I_k$ es el índice del paso iterativo. Definiéndose las correcciones de las variables de estado y de control como

$$\mathbf{d} = \mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{u}^{(k)} \quad \text{y} \quad \eta = \lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)} \quad (5.8.7)$$

y considerándose las formas diferenciales del residuo (5.4.7) y de la condición de restricción en (5.7.5a), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones aumentado

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{q} \\ \mathbf{a}^T & g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \eta \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathbf{r} \\ c \end{Bmatrix} \quad (5.8.8a)$$

donde

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}}, \quad \mathbf{q} = -\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda}, \quad \mathbf{a}^T = \frac{\partial c}{\partial \mathbf{u}}, \quad g = \frac{\partial c}{\partial \lambda} \quad (5.8.8b)$$

y todas las cantidades conocidas son evaluadas en $(\mathbf{u}^{(k)}, \lambda^{(k)})$. La ecuación (5.8.8a) se denomina *sistema aumentado* de Newton, mientras que la matriz de coeficientes se denomina matriz de *rigidez aumentada*. A diferencia de \mathbf{K} , la matriz de rigidez aumentada es no simétrica y menos esparcida (menos diagonal dominante). Técnicas de solución que preservan las ventajas de las características de las matrices simétricas y esparcidas se discuten en detalles por FELIPPA [1987].

El tratamiento numérico de este sistema en los puntos regulares, donde la matriz de rigidez es no singular, es sencillo. Se despeja \mathbf{d} en el primer sistema de ecuaciones de (5.8.8a) a través de la eliminación Gaussiana hacia adelante (factorización) de \mathbf{K} , ya que \mathbf{K}^{-1} existe. Se sustituye el valor obtenido para \mathbf{d} en la segunda ecuación de (5.8.8a), deduciéndose así la siguiente ecuación escalar en η

$$(g + \mathbf{a}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{q}) \eta = -(c - \mathbf{a}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{r}) \quad (5.8.9)$$

Sean \mathbf{d}_r y \mathbf{d}_q soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones simétricos

$$\mathbf{K} \mathbf{d}_r = -\mathbf{r} \quad \text{y} \quad \mathbf{K} \mathbf{d}_q = \mathbf{q} \quad (5.8.10a)$$

En (5.8.10a) se puede utilizar la matriz de rigidez secante incremental como

$$\mathbf{K}_S \mathbf{d}_r = -\mathbf{r} \quad \text{y} \quad \mathbf{K}_S \mathbf{d}_q = \mathbf{q} \quad (5.8.10b)$$

En la segunda expresión en (5.8.10b) se trata de una *predicción secante* sin la necesidad de hacer una extrapolación en función de las soluciones en los pasos anteriores $(\mathbf{u}_{n-1}, \lambda_{n-1})$ y $(\mathbf{u}_n, \lambda_n)$, ya que estos dos puntos pertenecen a un hiperplano definido por la matriz de rigidez secante incremental.

Entonces, la solución de (5.8.8a) se expresa como

$$\eta = -\frac{c + \mathbf{a}^T \mathbf{d}_r}{g + \mathbf{a}^T \mathbf{d}_q} \quad \text{y} \quad \mathbf{d} = \mathbf{d}_r + \eta \mathbf{d}_q \quad (5.8.11)$$

La corrección de los incrementos de las variables de estado y del parámetro de control en el paso $n + 1$ se expresan como

$$\Delta \mathbf{u}^{(k+1)} = \Delta \mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{d} \quad \text{y} \quad \Delta \lambda^{(k+1)} = \Delta \lambda^{(k)} + \eta \quad (5.8.12)$$

En este trabajo se adopta la ecuación (5.8.7) como condición de restricción. Por tanto, se puede escribir que

$$(\Delta \mathbf{u}^{(k+1)})^T \Delta \mathbf{u}^{(k+1)} = l^2 \quad (5.8.13)$$

Sustituyendo la ecuación (5.8.11b) en (5.8.12a) y, posteriormente en (5.8.13), se llega a la siguiente ecuación escalar en η

$$a_1 \eta^2 + a_2 \eta + a_3 = 0 \quad (5.8.14a)$$

donde

$$\begin{aligned} a_1 &= \mathbf{d}_q^T \mathbf{q}_q \\ a_2 &= 2 \mathbf{d}_q^T (\Delta \mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{d}_r) \\ a_3 &= 2 \mathbf{d}_r^T \Delta \mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{d}_r^T \mathbf{d}_r \end{aligned} \quad (5.8.14b)$$

son los coeficientes de la ecuación de segundo grado en (5.8.14a). Esta ecuación podrá tener raíces reales o complejas. Si se trata de raíces complejas significa que las superficies de equilibrio y de coacción no se interceptan. En este caso hay que disminuir la longitud l del paso $n + 1$ y reiniciar el proceso a partir del paso anterior. Si las raíces son reales, hay que elegir una de ellas imponiendo la siguiente condición

$$(\Delta \mathbf{u}_{1,2}^{(k+1)})^T \Delta \mathbf{u}^{(k)} > 0 \quad (5.8.15a)$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_1^{(k+1)} &= \Delta \mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{d}_r + \eta_1 \mathbf{d}_q \\ \Delta \mathbf{u}_2^{(k+1)} &= \Delta \mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{d}_r + \eta_2 \mathbf{d}_q \end{aligned} \quad (5.8.15b)$$

En el caso de que ambas raíces reales cumplan (5.8.15a), se adopta aquélla que más se aproxima a la solución lineal $\eta_i = -a_3/a_2$. El procedimiento descrito en las ecuaciones (5.8.12–5.8.15) es una versión actualizada del propuesto por CRISFIELD [1981].

Cuando \mathbf{K} es singular o la solución se encuentra en las proximidades de puntos singulares el procedimiento definido en (5.8.8a) no logra converger. A pesar de que, desde un punto de vista numérico, \mathbf{K} no sea exactamente singular, para puntos de la trayectoria muy cercanos a puntos singulares el sistema de ecuaciones está mal condicionado. Este mal condicionamiento puede hacer que el proceso iterativo sea inestable y no se logre la convergencia.

Los métodos de Newton para la solución del sistema de ecuaciones cerca de puntos singulares han recibido una atención especial de muchos investigadores en métodos numéricos (SEYDEL [1994]). Se han propuesto distintas tasas de convergencia y aceleradores de algún modo bajo hipótesis restrictivas. En análisis estructural, el tratamiento dado a la ecuación (5.8.6) depende de si el punto singular es punto límite o punto de bifurcación. En un punto límite la meta es superar la singularidad. En un punto de bifurcación es necesario elegir a lo largo de qué rama de equilibrio se debe proceder con el método de continuación. Varias modificaciones del método de Newton cerca de puntos singulares han sido propuestas por FELIPPA [1987]. En este trabajo, se ha utilizado, cerca de puntos singulares, la matriz de rigidez secante incremental en sustitución de la matriz \mathbf{K} , obteniéndose buenos resultados como se verá en el próximo capítulo. En el próximo apartado se desarrollan algunas herramientas capaces de detectar la presencia de puntos singulares en la rama de equilibrio.

5.9 DETECCIÓN DE PUNTOS CRÍTICOS

El tratamiento numérico de puntos *críticos* o *singulares* es completamente distinto al de puntos regulares. Para realizar un análisis numérico de puntos singulares con éxito es necesario enfocar esta tarea en dos frentes: en la primera fase se trata de la *detección* y en la segunda, de la *travesía* sobre puntos singulares. Los algoritmos utilizados para pasar puntos singulares dependen del tipo de dichos puntos. Para puntos de bifurcación, la segunda fase del análisis corresponde a la elección de la rama secundaria y, para puntos límite, se trata simplemente de pasarlos.

Hay dos métodos clásicos para detectar puntos singulares. Se puede *encontrar* el punto singular a través de la solución de un sistema de ecuaciones algebraico aumentado donde una de las raíces es el punto singular. El otro método consiste en *detectar* el punto singular a medida que se avanza sobre el camino de solución. El primer método, denominado *método directo*, consiste en la formulación de un sistema de ecuaciones que tiene como solución el punto singular. Este sistema de ecuaciones debe contener el sistema de ecuaciones de equilibrio. Así, esta formulación deduce un sistema aumentado de ecuaciones que incorpora un conjunto de restricciones que caracteriza el punto singular. En el segundo método, denominado *método indirecto*, la detección de puntos singulares está íntimamente relacionada con el procedimiento de continuación

de la respuesta, es decir, que depende de la trayectoria de solución. Una discusión detallada sobre la aplicación práctica de los métodos directos e indirectos se encuentra en el capítulo 5 del libro de SEYDEL [1994].

Como se ha comentado anteriormente, el método de desplazamiento crítico propuesto en esta monografía puede clasificarse como intermedio entre los directos e indirectos. Con objeto de comparar los resultados obtenidos con el nuevo método con procedimientos clásicos, se detalla a continuación el proceso de detección de puntos críticos por métodos indirectos que se ha implementado en este trabajo.

• Determinación de puntos singulares por métodos indirectos

La idea fundamental de este método es reconocer la existencia de un punto crítico mientras se traza la rama de equilibrio con el método de continuación de la respuesta. La clave del éxito de estos métodos se basa en la elección de una buena función de prueba τ . La discusión sobre cómo calcular la función de prueba se verá posteriormente. Por ahora, se supone una función de prueba capaz de detectar la existencia de un punto crítico. Estos métodos se benefician de datos obtenidos del procedimiento de continuación de la respuesta. Un punto crítico se caracteriza por ser la raíz de la función de prueba. Puesto que encontrar numéricamente la raíz exacta de una función es poco probable, se puede comprobar la existencia de un punto singular a través de la siguiente condición

$$\tau(\mathbf{u}^{(n+1)}, \lambda^{(n+1)}) \tau(\mathbf{u}^{(n)}, \lambda^{(n)}) < 0 \quad (5.9.1)$$

La interpretación geométrica del criterio (5.9.1) para un grado de libertad se encuentra en la Figura 5.4. Se supone que el cambio de signo de la función de prueba detecta la existencia de un punto crítico. Además, suponemos que esta función es continua en λ y que tiene sólo una raíz en el intervalo de interés. Esta hipótesis requiere el uso de un tamaño de paso incremental adecuado, no conocido *a priori*. Sin embargo, la determinación de un paso incremental apropiado puede resolverse a través de una combinación de experiencia y de una estrategia de control adaptativa que permitan controlar la convergencia de la solución.

Una vez el algoritmo detecta la raíz que se encuentra en el intervalo correspondiente a dos soluciones de la rama de equilibrio, se obtiene como primera aproximación a dicha raíz el valor obtenido interpolando linealmente como

$$\lambda_c \simeq \lambda^{(n)} + \frac{\lambda^{(n+1)} - \lambda^{(n)}}{\tau^{(n)} - \tau^{(n+1)}} \tau^{(n)} \quad (5.9.2)$$

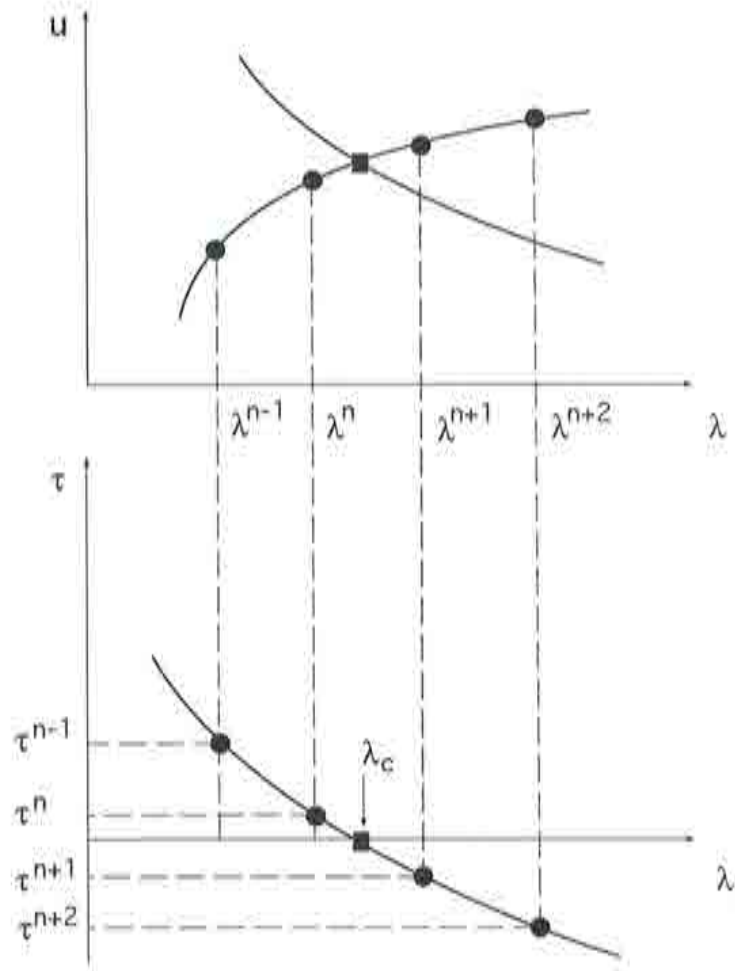


Figura 5.4 Valores de la función de prueba τ conteniendo la raíz

En la Figura 5.5 se encuentra la interpretación geométrica de (5.9.2). Se puede adoptar un método adaptativo para mejorar la aproximación inicial en (5.9.2). Para ello, por ejemplo, se utiliza la *interpolación inversa iterativa* y las *diferencias divididas* (DAHLQUIST [1974]). Sea un conjunto con m valores de la función de prueba en m valores no equidistantes del parámetro de control λ . La interpolación de τ a través de un polinomio en λ se expresa como

$$\tau(\lambda) = c_0 + c_1(\lambda - \lambda_0) + \dots + c_m(\lambda - \lambda_0) \dots (\lambda - \lambda_{m-1}) \tag{5.9.3}$$

Definiéndose la siguiente secuencia de *diferencias divididas*

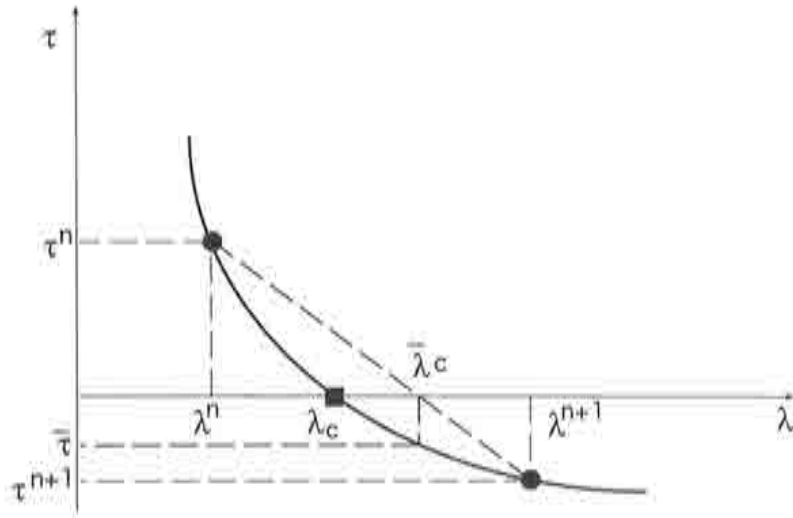


Figura 5.5 Aproximación lineal al cero de τ

$$\begin{aligned}
 \tau[\lambda_0; \lambda] &= \frac{\tau(\lambda) - \tau(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} \\
 &\vdots \\
 \tau[\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1}; \lambda] &= \frac{\tau[\lambda_0, \dots, \lambda_{k-2}; \lambda] - \tau[\lambda_0, \dots, \lambda_{k-2}; \lambda_{k-1}]}{\lambda - \lambda_{k-1}}
 \end{aligned} \tag{5.9.4}$$

Entonces, los coeficientes en la ecuación (5.9.3) se calculan como

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \tau(\lambda_0) \\
 c_1 &= \tau[\lambda_0; \lambda_1] \\
 &\vdots \\
 c_k &= \tau[\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1}; \lambda_k]
 \end{aligned} \tag{5.9.5}$$

Nótese que esta fórmula es recurrente, por lo que añadirle un nuevo punto es tarea sencilla. Ahora, el problema de localizar el punto singular se reduce al cálculo de la raíz del polinomio en (5.9.3). Este procedimiento recibe el nombre de *interpolación inversa* (DAHLQUIST [1974]). También se puede utilizar la inversa de la función $\tau(\lambda)$, es decir, $\lambda(\tau)$. De esta manera, se puede utilizar la ecuación (5.9.3) para interpolar λ en función de τ y obtenerse λ_c imponiendo $\tau = 0$. Sin embargo, ambos procedimientos son fundamentalmente distintos y pueden conducir a resultados diferentes. Por ejemplo, se observa que en algunos ejemplos de esta monografía, la función de prueba se comporta de modo casi constante para la mayor parte del método de continuación y sufre un cambio

brusco en la primera derivada, $d\tau/d\lambda$ (presenta una inclinación muy fuerte) cuando se aproxima al punto singular. Este tipo de comportamiento puede considerarse como una relación exponencial entre τ y λ . Se puede aproximar una exponencial con un polinomio de manera razonable, mientras que aproximar su inversa (una función logarítmica) con un polinomio puede plantear severas dificultades (CRIVELLI [1991]). Así se espera una convergencia más rápida, utilizando la interpolación inversa, para interpolar la función $\tau(\lambda)$ que para interpolar la inversa de dicha función, es decir, $\lambda(\tau)$. CRIVELLI [1991] ha utilizado la interpolación inversa para interpolar $\tau(\lambda)$ obteniendo buenos resultados.

El próximo paso es encontrar la raíz de (5.9.3). Para este fin, se reescribe (5.9.3) en la forma

$$\lambda_c = \psi(\lambda_c) \quad (5.9.6a)$$

donde $\psi(\lambda_c)$ se expresa como

$$\lambda_c = \lambda_0 - \frac{1}{c_1} (c_0 + \dots + c_m(\lambda_c - \lambda_0) \dots (\lambda_c - \lambda_{m-1})) \quad (5.9.6b)$$

La ecuación (5.9.6b) se resuelve a través de un proceso iterativo. Se toma como valor inicial $\lambda_c^{(0)}$, el valor de λ_c de la última interpolación, y se adopta como valor de partida el obtenido con la interpolación lineal definida en (5.9.2). Se espera que la convergencia sea rápida, porque el error es inversamente proporcional a la derivada primera de la función de prueba $d\tau/d\lambda$, cuya magnitud puede ser grande cerca de puntos singulares. Además, si la magnitud de $d\tau/d\lambda$ es pequeña, la predicción a partir de la interpolación lineal será buena.

La ventaja de este procedimiento consiste en que es autoadaptativo y fácilmente programable, pudiéndose incrementar el número de puntos usados en la ecuación de interpolación (5.9.3) con un pequeño esfuerzo computacional extra, así como establecer un número máximo de puntos m_{max} del intervalo a interpolar y, a partir de este número, incorporar o descartar puntos obtenidos de la rama de equilibrio. De esta manera se consigue un procedimiento flexible y que abre la posibilidad de diversas alternativas para su implementación. Además, requiere poca memoria de almacenamiento y se puede esperar una buena convergencia para cualquier tolerancia razonable.

• Funciones de prueba τ

El propósito del presente apartado es investigar las posibles alternativas para la función de prueba. Una función de prueba es una función que permite el seguimiento del procedimiento de continuación para la existencia de puntos singulares en la trayectoria de equilibrio. Por definición, un punto singular es la raíz de dicha función. Como se comentó anteriormente, los puntos singulares se caracterizan por la singularidad de la matriz de rigidez tangente \mathbf{K} . Por tanto, la función de prueba controla esencialmente la matriz \mathbf{K} para obtener una estimación de su proximidad a puntos críticos.

La mejor estimación de la singularidad de \mathbf{K} se hace a través del menor autovalor de dicha matriz. Una vez que \mathbf{K} es real y simétrica, sus valores propios son reales. Además, si \mathbf{K} varía continuamente, sus valores propios también lo hacen. La singularidad se detecta simplemente averiguando la existencia de autovalores nulos. De esta manera, se define el siguiente problema estándar de valores propios

$$[\mathbf{K} - \varpi_i \mathbf{I}] \Phi_i = \mathbf{0} \quad (5.9.7a)$$

donde la función de prueba se escribe como

$$\tau = \min_{1 \leq i \leq N} |\varpi_i| \quad (5.9.7b)$$

El menor autovalor de \mathbf{K} es una elección atractiva para la función de prueba. Sin embargo, el análisis de valores propios en cada paso incremental es muy costoso.

Otra posible función de prueba es el determinante de \mathbf{K} . La singularidad se caracteriza por $\det[\mathbf{K}] = 0$. El rasgo más atractivo de esta elección es que el determinante de \mathbf{K} es un subproducto del método de solución de ecuaciones. Usualmente, en los métodos directos de solución de un sistema lineal de ecuaciones se utiliza la siguiente descomposición de la matriz de rigidez

$$\begin{cases} \mathbf{K} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T \\ \text{donde } \mathbf{L} \text{ es una matriz triangular inferior} \\ \text{con } L_{ii} = 1 \text{ y } \mathbf{L}^T = \mathbf{L}^{-1} \end{cases} \quad (5.9.8a)$$

y \mathbf{D} es una matriz diagonal

$$\mathbf{D} = \text{diag} [D_{ii}] = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_{NN} \end{bmatrix} \quad (5.9.8b)$$

De esta manera, la función de prueba se escribe como

$$\tau = \det[\mathbf{D}] = \prod_{i=1}^N D_{ii} \quad (5.9.9)$$

Hay algunas desventajas en (5.9.9). La magnitud del determinante puede ser computacionalmente inconveniente, especialmente para problemas con gran número de grados de libertad. Por ejemplo, multiplicando todos los componentes D_{ii} por un factor ζ , esto conduce a un factor ζ^N en el determinante de \mathbf{K} . De esta manera, resulta difícil decir si un valor particular de la función de prueba τ es "grande" o "pequeño". Otra desventaja es que si el autovalor nulo de \mathbf{K} posee multiplicidad par, no hay cambio de signo en el determinante y, por tanto, la ecuación (5.9.1) no detecta la existencia del punto crítico.

Para superar estas dificultades, varios investigadores han propuesto modificaciones en (5.9.9). Por ejemplo, KOUHIA y MIKKOLA [1995] han propuesto una expresión normalizada en la cual se evalúa el logaritmo natural del determinante de la matriz de rigidez tangente. Dicha expresión se escribe como

$$\tau = \pm \frac{\ln (|\det[\mathbf{K}_n]|)}{\ln (|\det[\mathbf{K}_0]|)} \quad (5.9.10)$$

donde el signo de (5.9.10) se toma como + cuando el número de valores propios positivos de \mathbf{K} es el mismo en el paso anterior $n - 1$ y en el paso n . Se define con el signo - cuando el número de autovalores positivos cambia entre dos pasos consecutivos. Nótese que la función logarítmica escala las componentes de \mathbf{K} , de tal modo que la magnitud del determinante es computacionalmente aceptable. El denominador en (5.9.10) delimita el valor de τ entre cero y uno.

Sustituyendo (5.9.8a) en (5.9.10) se llega a

$$\tau = \pm \frac{\ln (|\det[\mathbf{D}_n]|)}{\ln (|\det[\mathbf{D}_0]|)} = \pm \frac{\ln |D_{11}^n| + \cdots + \ln |D_{NN}^n|}{\ln |D_{11}^0| + \cdots + \ln |D_{NN}^0|} \quad (5.9.11)$$

teniendo en cuenta la definición del determinante de la matriz diagonal y las propiedades de la función logarítmica. Nótese que la expresión (5.9.11) es fácilmente programable.

Otra alternativa para la función de prueba se basa en el conocimiento de que se puede controlar el menor autovalor de \mathbf{K} a través del control del menor pivot, (FELIPPA y SKEIE [1991]). Por tanto, se puede definir la siguiente expresión para la función de prueba

$$\tau = \min_{1 \leq i \leq N} |D_{ii}| \quad (5.9.12)$$

Si \mathbf{K} es definida positiva, implica que todos los pivotes de \mathbf{D} son mayores que cero, consecuentemente, $\tau > 0$. Si \mathbf{K} es singular, existirá entonces por lo menos un pivote nulo en \mathbf{D} y, por tanto, $\tau = 0$. Si \mathbf{K} es indefinida, existirá por lo menos un pivote negativo en \mathbf{D} , lo que implica que $\tau < 0$. De esta manera, el menor pivote en valor absoluto, $|D_{ii}|$, puede ser una función de prueba. Además, extraer información sobre pivotes de los métodos de resolución directos es inmediato. La mayoría de estos métodos de solución proporcionan esta información como un subproducto del proceso de reducción de la matriz. De las funciones de prueba aquí presentadas, ésta es la más sencilla. FELIPPA y SKEIE [1991] y CRIVELLI [1991], por ejemplo, han utilizado esta función. Una vez que se ha determinado la existencia de un punto singular entre las soluciones correspondientes a los pasos n y $n+1$, $\lambda_c \in [n, n+1]$, el próximo paso es elegir una dirección de avance de la respuesta en una rama secundaria de equilibrio.

En esta monografía se utilizan las ecuaciones (5.9.7b), (5.9.11) y (5.9.12) para detectar puntos críticos una vez que las simulaciones numéricas se han realizado en problemas con pocos grados de libertad. Se compara el resultado obtenido por estas funciones con el obtenido por el método de *desplazamiento crítico* desarrollado en el Capítulo 4 de la monografía.

5.10 CONSIDERACIONES SOBRE LA IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

En este apartado se discuten algunos aspectos prácticos de la implementación numérica de los algoritmos propuestos en los apartados anteriores. En primer lugar, se presenta en el Cuadro 5.1 el esquema general del método de continuación adoptado en la monografía para la resolución del sistema de ecuaciones no lineal. Una buena ejecución de un algoritmo predictor-corrector en un método de continuación depende de la combinación de los siguientes puntos:

- La longitud inicial del paso incremental l_{ini} ;
- La longitud mínima del paso incremental l_{min} ;
- La longitud máxima del paso incremental l_{max} ;
- El número máximo de iteraciones por paso I_{max} ;
- El número de iteraciones deseadas por paso I_d ;
- La tolerancia para la convergencia TOL.

Naturalmente, estos puntos son datos de entrada del problema. Los valores de l_{ini} , l_{min} , l_{max} , I_{max} y I_d dependen de las características de la respuesta de la estructura, lo que no se conoce a priori. Por tanto, son datos empíricos fruto de la experiencia que se adquiere al manejar los métodos de continuación en problemas de no linealidad geométrica. Se puede definir el valor de l_{ini} suponiendo, en el primer paso incremental, el análisis con el control de la carga para un

- $n = 0$
- ⇒ FASE INCREMENTAL
- paso $\rightarrow n = n + 1$
- a) si $n > 1$ calcúlese la longitud del paso : $l_n = l_{n-1} \sqrt{I_d/I_{n-1}}$
- $k = 0$
- ⇒ FASE ITERATIVA
- iteración $\rightarrow k = k + 1$
- b) resuélvase : $\mathbf{d}_{qn}^{(k)} = [\mathbf{K}_n^{(k-1)}]^{-1} \mathbf{q}$ o $\mathbf{d}_{qn}^{(k)} = [\mathbf{K}_{sn}^{(k-1)}]^{-1} \mathbf{q}$ ($\mathbf{d}_{qn}^{(k)} \equiv \mathbf{v}_n^{(k)}$)
- si $k = 1$: PASO PREDICTOR
- c) evalúese la predicción del parámetro de control :
- $$\Delta \lambda_n^{(k)} = s l_n / \sqrt{(\mathbf{d}_{qn}^{(k)})^T \mathbf{d}_{qn}^{(k)}} \quad \text{con } s = \text{sign}(\Delta \mathbf{u}_{n-1}^T \mathbf{d}_{qn}^{(k)})$$
- d) calcúlese la predicción de la variable de estado : $\Delta \mathbf{u}_n^{(k)} = \Delta \lambda_n^{(k)} \mathbf{d}_{qn}^{(k)}$
- FIN DEL PASO PREDICTOR
 - si $k > 1$: PASO CORRECTOR
- e) resuélvase : $\mathbf{d}_{rn}^{(k)} = [\mathbf{K}_n^{(k-1)}]^{-1} \mathbf{r}_n^{(k)}$ o $\mathbf{d}_{rn}^{(k)} = [\mathbf{K}_{sn}^{(k-1)}]^{-1} \mathbf{r}_n^{(k)}$
- f) evalúese el corrector del parámetro de control $\eta_n^{(k)}$:
- $$a_1 (\eta_n^{(k)})^2 + a_2 \eta_n^{(k)} + a_3 = 0 \quad ; \quad \text{utilizandose (5.8.14b) y (5.8.15a)}$$
- g) calcúlese el corrector de la variable de estado : $\mathbf{d}_n^{(k)} = \mathbf{d}_{rn}^{(k)} + \eta_n^{(k)} \mathbf{d}_{qn}^{(k)}$
- FIN DEL PASO CORRECTOR
- h) actualícense las variables de estado y el parámetro de control :
- si $k = 1$: $\mathbf{u}_n^{(k)} = \mathbf{u}_{n-1} + \Delta \mathbf{u}_n^{(k)}$; $\lambda_n^{(k)} = \lambda_{n-1} + \Delta \lambda_n^{(k)}$
 - si $k > 1$: $\Delta \mathbf{u}_n^{(k+1)} = \Delta \mathbf{u}_n^{(k)} + \mathbf{d}_n^{(k)}$; $\mathbf{u}_n^{(k+1)} = \mathbf{u}_n^{(k)} + \mathbf{d}_n^{(k)}$
 $\lambda_n^{(k+1)} = \lambda_n^{(k)} + \eta_n^{(k)}$
- i) evalúese el residuo : $\mathbf{r}_n^{(k+1)} = \lambda_n^{(k+1)} \mathbf{q} - \mathbf{f}_{intn}^{(k+1)}$
- j) calcúlese la norma del error : $\| \mathbf{r}_n^{(k+1)} \| / \| \lambda_n^{(k+1)} \mathbf{q} \|$
- ⇐ RETÓRNESE A LA FASE ITERATIVA si el error $>$ TOL
- ⇐ RETÓRNESE A LA FASE INCREMENTAL

Cuadro 5.1 Esquema predictor-corrector de algoritmos incrementales-iterativos con control de la respuesta basado en la matriz tangente y secante

valor pequeño del parámetro de control $\Delta\lambda_1$. Con la respuesta obtenida se evalúa la longitud inicial del paso a través de la ecuación de restricción, $l_{ini} = \sqrt{\Delta\mathbf{u}_1^T \Delta\mathbf{u}_1}$. En los pasos siguientes se realiza el análisis con el control de las variables de estado. Sin embargo, en este trabajo se adopta el valor inicial de la longitud del paso como dato de entrada.

Nótese que el paso predictor-corrector se encuentra dentro de la fase iterativa del algoritmo. En la primera iteración se hace la predicción de los incrementos de las variables de estado y del parámetro de control correspondientes al paso n . Después, se suman a estas variables sus valores totales acumulados hasta el paso anterior. A partir de la segunda iteración se hace la corrección sobre los incrementos predichos a los cuales se suma la actualización correspondiente a la primera iteración. Por fin, dentro de la fase iterativa siempre se averigua el residuo y la norma del error en fuerzas y desplazamientos.

Además, los métodos de continuación deben contar con algoritmos de control de la longitud del paso incremental y de corte automático del paso. El corte automático del paso incremental se refiere a la posibilidad de manejar la velocidad de convergencia. El problema puede no converger por las siguientes razones: las superficies de coacción y de equilibrio no se interceptan o porque no se alcanza la convergencia dentro del límite máximo de iteraciones establecido. Este obstáculo puede ser superado a través del algoritmo de corte automático del paso. El objetivo de este algoritmo es recuperar la solución convergida del paso anterior $(\mathbf{u}_{n-1}, \lambda_{n-1})$, disminuir el tamaño del paso l_n respetando el límite mínimo definido para esta variable y reiniciar el análisis. Este procedimiento se ejecutará hasta lograr la convergencia en un número de pasos I_c . Superado este número, el algoritmo interrumpirá el análisis.

La función de prueba debe ser examinada en cada paso incremental para averiguar la existencia de puntos críticos en la trayectoria fundamental de equilibrio. Se hace esta prueba solamente después de finalizada la fase correctiva, con el objetivo de evitar valores espúreos para la función de prueba durante el proceso iterativo.

La función de prueba definida en (5.9.12) es la más simple, ya que sólo requiere el examen de los términos de la diagonal de \mathbf{LDL}^T después de la factorización de la matriz de rigidez tangente. Este procedimiento se realiza en la matriz de rigidez tangente correspondiente a la solución convergida, lo que implica efectuar el ensamblaje y la reducción de dicha matriz después de obtenida la solución convergida. Esta reducción no introduce un esfuerzo extra ya que se necesita esta descomposición en la predicción del próximo paso incremental. Además, el mínimo pivote se obtiene como un subproducto del proceso de factorización. Este es el caso de la mayoría de los métodos de resolución directos que hacen la comprobación del pivote en la fase de reducción de \mathbf{K} .

Por fin, se hace necesario mencionar algunos detalles respecto a la implementación del algoritmo para el cálculo de puntos singulares. Se ha dicho que las ecuaciones (5.9.3-5.9.6) son recurrentes. Esto simplifica la tarea de añadir un nuevo punto al intervalo de interpolación polinomial. Aunque se puede tomar un número arbitrario de puntos en el intervalo de interpolación es conveniente utilizar los puntos calculados más recientemente. La razón de ello es que la interpolación con polinomios de alto grado presenta grandes oscilaciones. Estas oscilaciones pueden introducir ceros espúreos en el intervalo de interés, obteniendo resultados sin sentido. Empíricamente, CRIVELLI [1991] ha obtenido buenas tasas de convergencia con este algoritmo utilizando un máximo de cuatro puntos de interpolación.

5.11 REFERENCIAS

- BERGAN, P.G. and SIMONS, J. [1984], Hyperplane displacement control methods in nonlinear analysis, in: *Innovative Methods for Nonlinear Problems*, ed. by W.K. Liu, T. Belytschko and K.C. Park, Pineridge Press, Swansea, U.K., pp. 345-364.
- BOLOTIN, V.V. [1963], *Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability*, Pergamon Press, New York.
- CRISFIELD, M.A. [1981], An incremental-iterative algorithm that handles snap-through, *Computer & Structures*, Vol. 13, pp. 55-62.
- CRISFIELD, M.A. and SHI, J. [1991], A review of solution procedures and path-following techniques in relation to the non-linear finite element analysis of structures, in: *Nonlinear Computational Mechanics: State of the Art*, edited by P. Wriggers and W. Wagner, Springer-Verlag, Berlin, pp. 47-68.
- CRIVELLI, L.A. [1991], A total-lagrangian beam element for analysis of nonlinear space structures, Ph.D Thesis, College of Engineering, University of Colorado, Boulder.
- DAHLQUIST, G. and BJÖRCK [1974], *Numerical Methods*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- FELIPPA, C.A. [1984a], Dynamic relaxation under general increment control, in: *Innovative Methods for Nonlinear Problems*, ed. by W.K. Liu, T. Belytschko and K.C. Park, Pineridge Press, Swansea, U.K., pp. 103-133.
- FELIPPA, C.A. [1984b], Dynamic relaxation and quasi-Newton methods, in: *Numerical Methods for Nonlinear Problems 2*, ed. by C. Taylor, E. Hinton, D.R.J. Owen and E. Oñate, Pineridge Press, Swansea, U.K., pp. 27-38.
- FELIPPA, C.A. [1987], Traversing critical points by penalty springs. Contrib. C2/1, Proc. NUMETA'87 Conf., M. Nijhoff Pubs., Dordrecht.

- FELIPPA, C.A. and SKEIE, G. [1991], Detecting and traversing bifurcation points in nonlinear structural analysis, *Int. J. of Space Structures*, Vol. 6, N^o 2, pp. 77-98.
- GOLUB, G.H. and VAN LOAN, C.F. [1989], *Matrix Computations*, Second Edition, The Johns Hopkins University Press, Baltimore.
- KOUHIA, R. and MIKKOLA, M. [1995], Estrategies for structural stability analysis, in: *Advances in finite element technology*, Edited by: Nils - Erik Wiberg, CIMNE, Barcelona, Spain.
- ODEN, J.T. [1972], *Finite Elements of Nonlinear Continua*, McGraw Hill, New York.
- PADOVAN, J. [1981], Self-adaptive predictor-corrector algorithm for static nonlinear structural analysis, Report NASA CR-165410 to Lewis Research Center, the University of Akron, Akron, Ohio.
- PARK, K.C. [1982], A family of solution algorithms for nonlinear structural analysis based on the relaxation equations, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 18, pp. 1337-1347.
- POWELL, G. and SIMONS, J. [1981], Improved iteration strategy for nonlinear structures, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 17, pp. 1455-1467.
- RHEINBOLDT, W.C. [1986], *Numerical Analysis of Parametrized Nonlinear Equations*, John Wiley & Sons, New York.
- RIKS, E. [1972], The application of Newton's method to the problem of elastic stability, *J. Applied Mechanics*, Vol. 39, pp. 1060-1065.
- SEYDEL, R. [1994], *Practical Bifurcation and Stability Analysis: From Equilibrium to Chaos*, Second Edition, Springer-Verlag.
- THOMPSON, J.M.T. and HUNT, G.W. [1973], *A General Theory of Elastic Stability*, John Wiley, New York.
- THOMPSON, J.M.T. and HUNT, G.W. [1984], *Elastic Instability Phenomena*, John Wiley, New York.
- TIMOSHENKO, S.P. and GERE, J.M. [1961], *Theory of Elastic Stability*, McGraw Hill, Toronto.
- WATSON, L.T. and HOLZER, S.M. [1983], Quadratic convergence of Crisfield's method, *Computer & Structures*, Vol. 17, pp. 69-72.
- WEMPNER, G.A. [1971], Discrete approximations related to nonlinear theories of solids, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 7, pp. 1581-1599.
- ZIEGLER, H. [1968], *Principles of Structural Stability*, Blaisdell, Massachusetts.

CAPÍTULO 6

EJEMPLOS NUMÉRICOS

6.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta el análisis de inestabilidad del equilibrio de varias tipologías estructurales a través del método de desplazamiento crítico desarrollado en el Capítulo 4. Como estrategia de solución de dicho método se utiliza la *predicción paso a paso* y la *predicción paso a paso mejorada*. Estas estrategias han sido desarrolladas y discutidas en detalle en dicho capítulo.

Se realiza la predicción para la carga límite al final de cada paso incremental, una vez terminada la fase correctiva del algoritmo de resolución del sistema de ecuaciones de equilibrio no lineal. La parte de la respuesta del sistema estructural, dada por la curva carga-desplazamiento, anterior al punto crítico se denomina *trayectoria precrítica*. Por otro lado, la parte de la respuesta posterior al punto crítico se denomina *trayectoria postcrítica*. Se estudian estas trayectorias con el fin de predecir la carga límite o de bifurcación de sistemas estructurales. Para realizar el análisis del comportamiento precrítico y postcrítico de cada modelo, se presentan las siguientes curvas:

- La curva de equilibrio fundamental no lineal que se obtiene con el método de control de la respuesta. Se utiliza el algoritmo desarrollado en el Cuadro 5.1. En el esquema predictor-corrector de este algoritmo se puede utilizar con idénticos resultados la matriz de rigidez tangente o la matriz de rigidez secante incremental. Esta curva expresa la relación entre la k -ésima componente de la variable de estado ${}^t\mathbf{v}$ y el parámetro de control ${}^t\lambda$, en el plano definido por (v_k, λ) .
- La curva de predicción de la carga límite, a lo largo de la trayectoria de equilibrio precrítica, que se calcula con el método de *estabilidad inicial clásico* (método EI) resolviendo la ecuación (4.5.2). Esta curva relaciona la k -ésima componente de la variable de estado ${}^t\mathbf{v}$ con la predicción del parámetro de control crítico ${}^t\lambda_c$, $({}^t v_k, {}^t \lambda_{cEI})$. Dicha curva se proyecta en el plano (v_k, λ) .
- La curva de predicción de la carga y desplazamiento críticos, a lo largo de la trayectoria de equilibrio precrítica, que se evalúa con el método de *desplazamiento crítico* (método DC). Esta curva relaciona la predicción

- de la k -ésima componente de la variable de estado crítico ${}^t\mathbf{v}$ con la predicción del parámetro de control crítico ${}^t\lambda$, $({}^t v_{kDC}, {}^t\lambda_{DC})$. Se proyecta dicha curva en el plano (v_k, λ) .
- La curva de evolución de la carga aplicada con la predicción del desplazamiento crítico, a lo largo de la trayectoria de equilibrio precrítica, que se determina por el *método DC*. Esta curva relaciona la k -ésima componente de la variable de estado crítica ${}^t\mathbf{v}$ con el parámetro de control ${}^t\lambda$, $({}^t v_{kDC}, {}^t\lambda)$. Se proyecta dicha curva en el plano (v_k, λ) .
 - La curva de predicción de la carga límite y el desplazamiento, a lo largo de la trayectoria de equilibrio precrítica, que se obtiene a través del *método DC*. Esta curva relaciona la k -ésima componente de la variable de estado ${}^t\mathbf{v}$ con la predicción del parámetro de control crítico ${}^t\lambda$, $({}^t v_k, {}^t\lambda_{DC})$. Se proyecta dicha curva en el plano (v_k, λ) .
 - La curva de evolución del menor autovalor y del menor pivote de la matriz de rigidez tangente de la estructura con a la carga aplicada. Se calcula el menor autovalor a través del problema estándar de valores propios definido en (5.9.7a). Se determina el menor pivote por medio de la descomposición $\mathbf{K} = \mathbf{LDL}^T$. De esta manera se definen las siguientes curvas normalizadas en el eje de las ordenadas: $({}^t\lambda, \frac{{}^t\varpi_{min}}{\varpi_{min}^0})$ y $({}^t\lambda, \frac{{}^tD_{i,min}}{D_{i,min}^0})$. Se presentan estas relaciones a lo largo de toda la trayectoria de equilibrio. Los valores ϖ_{min}^0 y $D_{i,min}^0$ se refieren a la matriz de rigidez lineal estándar de la estructura.
 - La curva de evolución de los menores autovalores de los problemas generalizados de valores propios definidos en (4.4.16) y (4.5.2) con la carga aplicada. Estos sistemas resultan de los métodos DC y EI, respectivamente. Se definen las siguientes curvas: $({}^t\lambda, {}^t\varrho_{min})$ y $({}^t\lambda, {}^t\tilde{\lambda}_{min})$. Se expresan estas relaciones a lo largo de la trayectoria de equilibrio precrítica.

Se comparan los resultados obtenidos con el *método DC* y el *método EI*, con los obtenidos con el método indirecto para la detección de puntos críticos. Se ha elegido el método indirecto por cuestión de sencillez, ya que se puede obtener el menor autovalor, el menor pivote y el determinante de la matriz de rigidez tangente factorizada como un subproducto del proceso de solución de las ecuaciones. Para determinar la carga y desplazamiento críticos con este método se utiliza la interpolación lineal definida en (5.9.2). Se toman dos valores de la función de prueba, el primer punto inmediatamente anterior al punto crítico, y el siguiente inmediatamente posterior.

En los apartados 6.2 y 6.3 se presentan ejemplos de estructuras articuladas planas y espaciales que fueron modeladas con elementos de barra articulados 2D y 3D, respectivamente. La forma explícita de las matrices de rigidez secante incremental y total de estos elementos se encuentran detalladas en el Anexo A3.

En el apartado 6.4 se presentan modelos de vigas, arcos y pórticos planos que se analizan con elementos de sólidos 2D. Se supone estado de tensión plana. Se obtienen las matrices secantes y tangentes a través de la integración de Gauss para elementos isoparamétricos de 8 nodos con una cuadratura de Gauss 2×2 . La forma de estas matrices se encuentran detallada en el AnexoA4.

En el apartado 6.5 se analizan placas y láminas con elementos de sólidos 3D. Se utilizan elementos isoparamétricos hexaédros de 20 nodos con una cuadratura $3 \times 3 \times 3$.

6.2 ESTRUCTURAS ARTICULADAS PLANAS

En este apartado se han elegido algunas estructuras que se caracterizan por la pérdida de rigidez con el incremento de la carga. En todos los ejemplos el comportamiento precrítico presenta una moderada o fuerte no linealidad geométrica en la rama de equilibrio. El comportamiento postcrítico se caracteriza por un cambio brusco de geometría a través de un *rebote hacia delante* y en algunos casos por medio de un *rebote hacia atrás*. Además, se presentan ejemplos donde se produce una bifurcación en la rama de equilibrio primaria antes que se alcance el punto límite. Es importante destacar que el comportamiento de estos modelos está íntimamente relacionado con la forma geométrica de los mismos.

6.2.1 Modelo de un grado de libertad con comportamiento precrítico no lineal

Una de las razones por la cual se empieza el capítulo con este ejemplo se debe a que las características fundamentales de la teoría de inestabilidad pueden encontrarse en modelos muy sencillos. Además, cualquier sistema estructural, por muy complejo que sea, puede suponerse equivalente, de algún modo, a un sistema más simple, al menos en la vecindad del estado crítico (CROLL y WALKER [1975] y POTIER-FERRY [1987]).

El ejemplo se trata de una estructura plana, constituida por dos barras articuladas que forman un ángulo ${}^0\theta$ con la horizontal en la configuración indeformada, sometida a una carga vertical en su vértice. Se considera que la carga varía monótonamente respecto a la variable t . En la Figura 6.1 se presentan las características geométricas del modelo y sus configuraciones, inicial 0V y las deformadas tV y ${}^{t+\Delta t}V$. Se definen las siguientes propiedades mecánicas del modelo en la configuración indeformada:

- el módulo de rigidez axial ${}^0(EA) = 10000$ N.
- la longitud inicial de las barras ${}^0l = 10$ cm.
- el ángulo inicial ${}^0\theta = 15^\circ$.

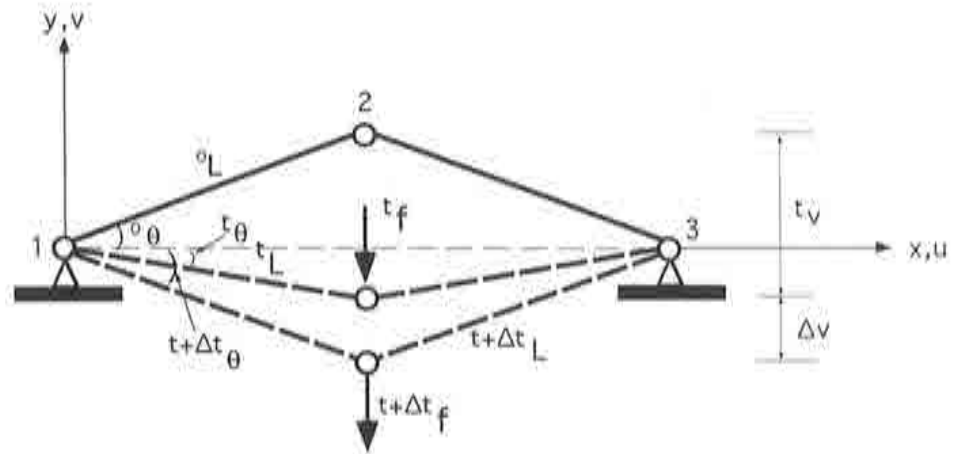


Figura 6.1 Estructura articulada con un grado de libertad

Debido a la simetría del modelo sólo interviene un grado de libertad correspondiente al desplazamiento vertical ${}^t v$ del vértice, o al ángulo ${}^t \theta$.

Esta estructura presenta pérdida de rigidez a medida que se aumenta la carga externa. El proceso de pérdida de rigidez continua hasta que la trayectoria de equilibrio alcanza un valor máximo. En este punto se produce una pérdida del equilibrio estable, de manera que un ligero incremento de carga origina un notable cambio de forma. Este cambio de geometría ocurre de manera brusca, es decir, ocurre con un *rebote hacia delante*. A la carga correspondiente a este fenómeno se la denomina *carga de pandeo brusco*, o más usualmente *carga límite*.

• Solución analítica

La solución analítica que se describe a continuación se dedujo a partir de las ideas de la referencia (PIGNATARO [1991], cap. 2), donde se ha adoptado como coordenada generalizada el ángulo θ . La relación entre la carga externa ${}^{t+\Delta t} f$ y el ángulo ${}^{t+\Delta t} \theta$ en el instante $t + \Delta t$ se expresa de forma exacta como

$${}^{t+\Delta t} f = 2 {}^{t+\Delta t} (EA) [\sin({}^{t+\Delta t} \theta) - \cos({}^0 \theta) \tan({}^{t+\Delta t} \theta)] \quad (6.2.1)$$

donde ${}^{t+\Delta t} \theta$ es el ángulo que las barras articuladas forman con la horizontal en la configuración deformada. ${}^{t+\Delta t} EA$ es la rigidez axial de las barras en el instante $t + \Delta t$. Se supone que el modelo experimenta pequeñas deformaciones, esto implica que ${}^0(EA) = {}^t(EA) = {}^{t+\Delta t}(EA)$.

Los valores de la carga y ángulo críticos se obtienen, simplemente, aplicando la condición $\frac{d^{t+\Delta t}f}{d^{t+\Delta t}\theta} = 0$ en (6.2.1), resultando

$${}^t c\theta = \arcsin[\cos({}^0\theta)]^{\frac{1}{3}} = \pm 8.6937^\circ \quad (6.2.2)$$

$${}^t c f = 2 {}^{t+\Delta t}(EA) \cos({}^0\theta)[\tan({}^t c\theta)]^3 = \pm 69.068 \text{ N}$$

El valor exacto del desplazamiento vertical del modelo en la configuración de equilibrio inestable ${}^t c V$ se expresa como

$${}^t c v = {}^0 l \cos({}^0\theta)\tan({}^t c\theta) - {}^0 l \sin({}^0\theta) = \begin{cases} -1.1112 \text{ cm} \\ -4.0652 \text{ cm} \end{cases} \quad (6.2.3)$$

• Solución por el método de los elementos finitos

Se escribe la forma discretizada de la ecuación incremental de equilibrio en el instante $t + \Delta t$, respecto a la configuración ${}^t V$, utilizando las expresiones del Cuadro A3.3 del Anexo A3, como

$$\underbrace{\left[{}^t k {}^t s^2 + \frac{3}{2} \frac{{}^t k}{{}^t l} {}^t s \Delta v + \frac{{}^t k}{2 {}^t l^2} \Delta v^2 + \frac{{}^t N}{{}^t l} \right]}_{\text{matriz de rigidez secante incremental}} \Delta v = \underbrace{-\frac{{}^{t+\Delta t}f}{2} + {}^t N {}^t s}_{\text{fuerza residual}} \quad (6.2.4)$$

donde Δv es el incremento del desplazamiento vertical del nodo 2, entre las configuraciones ${}^t V$ y ${}^{t+\Delta t}V$, debido al incremento de la carga externa Δf aplicada en dicho nodo, ${}^{t+\Delta t}f$ es la carga total aplicada en el instante $t + \Delta t$, y ${}^t N$ es el esfuerzo axial que actúa en las barras en el instante t . Además, en (6.2.4) se define

$${}^t k = \frac{{}^t(EA)}{{}^t l} \quad \text{y} \quad {}^t s = \sin({}^t\theta) = \frac{{}^t y_{12}}{{}^t l} \quad (6.2.5)$$

La ecuación (6.2.4) representa un polinomio cúbico en Δv . Esta ecuación expresa una relación entre los incrementos finitos de carga externa Δf y del desplazamiento vertical Δv . Nótese que dicha ecuación se escribe en coordenadas Lagrangianas Actualizadas,

Por otro lado, se puede escribir la ecuación incremental de equilibrio en el instante $t + \Delta t$ respecto a la configuración indeformada ${}^0 V$, es decir, a través de las coordenadas Lagrangianas Totales. Por tanto, utilizando las expresiones

del Cuadro A3.4 del Anexo A3 y teniendo en cuenta sólo el grado de libertad en la dirección vertical, esta ecuación se expresa como

$$\left[{}^0k {}^0s^2 + 2 \frac{{}^0k}{{}^0l} {}^0s {}^tv + \frac{{}^0k}{{}^0l^2} {}^tv^2 + \frac{3}{2} \frac{{}^0k}{{}^0l^2} {}^tv \Delta v + \frac{3}{2} \frac{{}^0k}{{}^0l} {}^0s \Delta v + \frac{1}{2} \frac{{}^0k}{{}^0l^2} \Delta v^2 + \frac{{}^tN}{{}^0l} \right] \Delta v = -\frac{{}^{t+\Delta t}f}{2} + {}^tN {}^0s \quad (6.2.6a)$$

con

$${}^0k = \frac{{}^0(EA)}{{}^0l} \quad \text{y} \quad {}^0s = \sin({}^0\theta) = \frac{{}^0y_{12}}{{}^0l} \quad (6.2.6b)$$

donde tv es el desplazamiento vertical del nodo 2 entre las configuraciones 0V y tV . Si se adopta la matriz secante en el esquema predictor-corrector de los algoritmos incrementales-iterativos para la resolución del sistema de ecuaciones de equilibrio no lineal, se utilizan las ecuaciones (6.2.4) y (6.2.6a), en las formulaciones Lagrangiana Actualizada y Total, respectivamente. Nótese, que solo se obtiene el mismo desplazamiento vertical del nodo 2, utilizando ambas formulaciones lagrangianas si se acepta la hipótesis de pequeñas deformaciones.

Para obtener una relación entre la carga total y el desplazamiento vertical total del nodo 2 en el instante $t + \Delta t$ se utiliza el concepto de la matriz secante total dado en (3.5.5). Para ello se supone que ${}^tv = 0$, lo que implica ${}^tN = 0$ y además $\Delta v = {}^{t+\Delta t}v$. Teniendo en cuenta estas hipótesis en la ecuación (6.2.6a) la expresión de dicha relación se escribe como

$$\underbrace{\left[{}^0k {}^0s^2 + \frac{3}{2} \frac{{}^0k}{{}^0l} {}^0s {}^{t+\Delta t}v + \frac{{}^0k}{{}^0l^2} {}^{t+\Delta t}v^2 \right]}_{\text{matriz de rigidez secante total}} {}^{t+\Delta t}v = - \underbrace{\frac{{}^{t+\Delta t}f}{2}}_{\text{fuerza total}} \quad (6.2.7)$$

La ecuación anterior representa la forma discretizada, en coordenadas Lagrangianas Totales, de la ecuación de equilibrio no lineal (6.2.1). Esta ecuación puede resolverse a través del algoritmo de iteración directa desarrollado en (3.6.3) para el tramo correspondiente a la rama de equilibrio precrítica. Para el comportamiento postcrítico se necesita un método de longitud de arco o el control de desplazamiento para obtener la respuesta no lineal del modelo.

En particular, la solución de (6.2.7) para ${}^{t+\Delta t}f = 0$, es

$$\begin{aligned} v &= 0 \\ v &= - {}^0l {}^0s = -2.5882 \text{ cm} \\ v &= - 2 {}^0l {}^0s = -5.1764 \text{ cm} \end{aligned} \quad (6.2.8)$$

que corresponde exactamente a las raíces de la ecuación (6.2.1).

• Relación entre el esfuerzo axial y el desplazamiento vertical

La relación entre el esfuerzo axial y el desplazamiento vertical del nodo 2 en el instante $t + \Delta t$ se obtiene a través de la relación constitutiva secante dada en (3.2.16a) y de las expresiones del Cuadro A3.2 del anexo A3. Después de algunos desarrollos algebraicos dicha expresión se escribe como

$${}^{t+\Delta t}N = \frac{{}^0(EA)}{{}^0l} \left[{}^0s + \frac{{}^{t+\Delta t}v}{2 \cdot {}^0l} \right] {}^{t+\Delta t}v \quad (6.2.9)$$

De la condición $\frac{d({}^{t+\Delta t}N)}{d({}^{t+\Delta t}v)} = 0$ se obtiene el desplazamiento ${}^{t+\Delta t}v = -2 \cdot {}^0l \cdot {}^0s$, para el cual el esfuerzo axial de compresión en las barras del modelo alcanza un valor máximo

$${}^{t+\Delta t}N_{max} = -\frac{1}{2} \cdot {}^0(EA) \cdot {}^0s^2 = -334.9365 \text{ N} \quad (6.2.10)$$

Nótese que para ${}^{t+\Delta t}v = -2 \cdot {}^0l \cdot {}^0s$ el esfuerzo axial es cero y para valores de ${}^{t+\Delta t}v < -2 \cdot {}^0l \cdot {}^0s$ el esfuerzo axial se incrementa positivamente, es decir, las dos barras pasan a sufrir una tracción.

• Cálculo de la carga límite

Para determinar puntos críticos en la trayectoria fundamental de equilibrio dada en (6.2.7) se impone la condición $\frac{d({}^{t+\Delta t}f)}{d({}^{t+\Delta t}v)} = 0$ en dicha ecuación. De esta manera, se deduce

$${}^0s^2 + 3 \frac{{}^0s}{{}^0l} t_{cv} + \frac{3}{2 \cdot {}^0l^2} t_{cv}^2 = 0 \quad (6.2.11)$$

de cuya solución resulta el siguiente desplazamiento vertical crítico del nodo 2 en dos configuraciones de equilibrio inestable

$$t_{cv} = {}^0s \cdot {}^0l \left[-1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \right] = \begin{cases} -1.0939 \text{ cm (error de 1.56\%)} \\ -4.0825 \text{ cm (error de 0.43\%)} \end{cases} \quad (6.2.12)$$

Los números entre paréntesis en las ecuaciones (6.2.12) son porcentajes del error respecto a los valores exactos calculados en (6.2.3). Sustituyendo estos

valores del desplazamiento crítico en la expresión (6.2.7) se obtienen los valores para la carga crítica

$$t_{cf} = \pm \frac{2 \text{}^0k \text{}^0s^3 \text{}^0l}{9} \sqrt{3} = \pm 66.7324 \text{ (error de 3.38\%)} \quad (6.2.13)$$

donde se expresa el error relativo respecto al valor exacto para la carga crítica dada por la solución analítica de (6.2.2b).

• Cálculo aproximado de la carga límite

Como se ha visto, la ecuación (6.2.7) posee tres raíces. Naturalmente, existirá un extremo local entre $t+\Delta t_v = 0$ y $t+\Delta t_v = -\text{}^0l \text{}^0s$ y otro entre $t+\Delta t_v = -\text{}^0l \text{}^0s$ y $t+\Delta t_v = -2 \text{}^0l \text{}^0s$. Se puede adoptar como desplazamiento crítico para el primer intervalo el valor

$$t_{cv} = -\frac{\text{}^0l \text{}^0s}{2} = -1.2941 \text{ (error de 16.46\%)} \quad (6.2.14)$$

Sustituyendo dicho valor en la ecuación (6.2.7), se obtiene el siguiente valor aproximado para la carga crítica

$$t_{cf} = \frac{3}{8} \text{}^0k \text{}^0s^3 \text{}^0l = 65.0160 \text{ (error de 5.87\%)} \quad (6.2.15)$$

Otro procedimiento se basa en la imposición de la condición de singularidad en una expresión aproximada de la matriz de rigidez tangente de la configuración de equilibrio inestable tV . De esta manera, teniendo en cuenta la definición dada en (3.4.1) y la ecuación (6.2.4), la matriz de rigidez tangente exacta en el instante $t + \Delta t_c$ se expresa como

$${}^{t+\Delta t_c}K_T = \left[\begin{array}{c} t_c k \text{}^t c_s^2 + \frac{t_c N}{t_c l} \end{array} \right] \quad (6.2.16)$$

De la geometría del modelo presentada en la Figura 6.2 y suponiendo que $t_c l \approx \text{}^0l$, se escribe la siguiente relación geométrica

$$t_c s = \frac{\text{}^0s \text{}^0l + t_{cv}}{\text{}^0l} \quad (6.2.17)$$

Sustituyendo dicha relación en (6.2.16) y despreciando los términos cuadráticos en t_{cv} , se obtiene una expresión aproximada de la matriz de rigidez tangente en el instante $t + \Delta t_c$, que se escribe como

$${}^{t+\Delta t}{}_0K_T \approx {}^0k \left[{}^0s^2 + \frac{3}{{}^0l} {}^0s t_{cv} \right] \quad (6.2.18)$$

Imponiendo la condición de singularidad en (6.2.18), ${}^{t+\Delta t}{}_0K_T = 0$, resulta que

$$t_{cv} = -\frac{{}^0l}{{}^0s} {}^0s = -0.8627 \text{ (error de 22.36\%)} \quad (6.2.19)$$

A partir de este valor y de la ecuación (6.2.7) se obtiene la siguiente predicción de la carga crítica

$$t_{cf} = \frac{10}{{}^0l} {}^0k {}^0s^3 {}^0l = 64.2133 \text{ (error de 7.03\%)} \quad (6.2.20)$$

Nótese que el error en la estimación de los valores de carga y desplazamiento críticos es ligeramente superior al error del primer procedimiento. Sin embargo, en el primer procedimiento se requiere el conocimiento de dos puntos de la curva de equilibrio, mientras que en el segundo, se resuelve una simple ecuación lineal para obtener el valor del desplazamiento crítico. Cabe destacar que la predicción para la carga y el desplazamiento críticos se ha hecho desde una configuración de equilibrio cercana a la configuración inicial. Se puede mejorar esta predicción si se adopta como punto de partida un nuevo punto de la curva de equilibrio.

• Observación 6.1

Se puede observar la exactitud de las predicciones realizadas con los procedimientos anteriores con la estimación dada por el análisis de estabilidad inicial. Imponiendo la condición de singularidad en la matriz de rigidez tangente se obtiene el valor del esfuerzo axial crítico por

$${}^0k {}^0s^2 + \frac{{}^t_{cN}}{{}^0l} = 0 \implies {}^t_{cN} = -{}^0k {}^0s^2 {}^0l \quad (6.2.21)$$

El valor de la carga crítica se calcula a través de la relación de equilibrio entre el esfuerzo axial crítico de las barras y la carga aplicada en el nodo central como

$$t_{cf} = -2 {}^0k {}^0s^3 {}^0l = 346.7518 \text{ (error de 402.04\%)} \quad (6.2.22)$$

□

A continuación se hace un estudio numérico de este ejemplo.

• Simulación numérica

Para trazar la curva de equilibrio del modelo se ha utilizado el método de continuación de la respuesta con las siguientes características:

- ecuación de coacción: cilíndrica; definida en (5.7.7)
- longitud de arco constante: 0.1
- tolerancia para la convergencia: 10^{-10}
- número total de incrementos: 60
- esquema predictor-corrector: Newton Raphson (matriz de rigidez tangente)
- descripción Lagrangiana Total
- modelo constitutivo hiperelástico lineal material

En la Figura 6.2a se presenta la curva de equilibrio primario y las curvas de evolución de la predicción de la carga límite a lo largo de la trayectoria precrítica de equilibrio, utilizando el método de desplazamiento crítico. Para resolver dicho método se ha utilizado la estrategia de *predicción paso a paso* desarrollada en el Apartado 4.5.2 del Capítulo 4. En esta estrategia se ha adoptado el problema lineal de autovalores definido en (4.4.16). La curva CA relaciona el desplazamiento crítico y la carga aplicada. La curva DA expresa la relación entre la carga crítica y el desplazamiento y la curva FA presenta la relación entre la carga crítica y el desplazamiento crítico.

Por otro lado, en la misma figura, para obtener la curva EA se ha utilizado el análisis de estabilidad inicial a través del problema generalizado de valores propios definido en (4.5.2). Esta curva relaciona la predicción de la carga límite y el desplazamiento durante la trayectoria precrítica de equilibrio.

En la Figura 6.2a se observa que la predicción a través del *método DC* proporciona valores inferiores para la carga crítica, obteniéndose un límite inferior para dicha carga (curva DA). Mientras que la estimación con el *método EI* obtiene valores superiores para la carga crítica, obteniéndose un límite superior para dicha carga (curva EA). Ambos métodos convergen para el punto crítico cuando se encuentran en la vecindad de dicho punto, esto es, convergen al punto A.

También se puede observar la buena estimación, del desplazamiento crítico, que se obtiene con el *método DC* (curva CA). Dicho método converge al modo de deformación crítico del modelo cuando el punto en la curva de equilibrio se encuentra en las proximidades del punto crítico (punto A).

En la Figura 6.2b se muestra la evolución del menor autovalor y el menor pivote de la matriz de rigidez tangente factorizada al inicio de cada paso de tiempo, a lo largo de la trayectoria de equilibrio. Se puede notar que estas

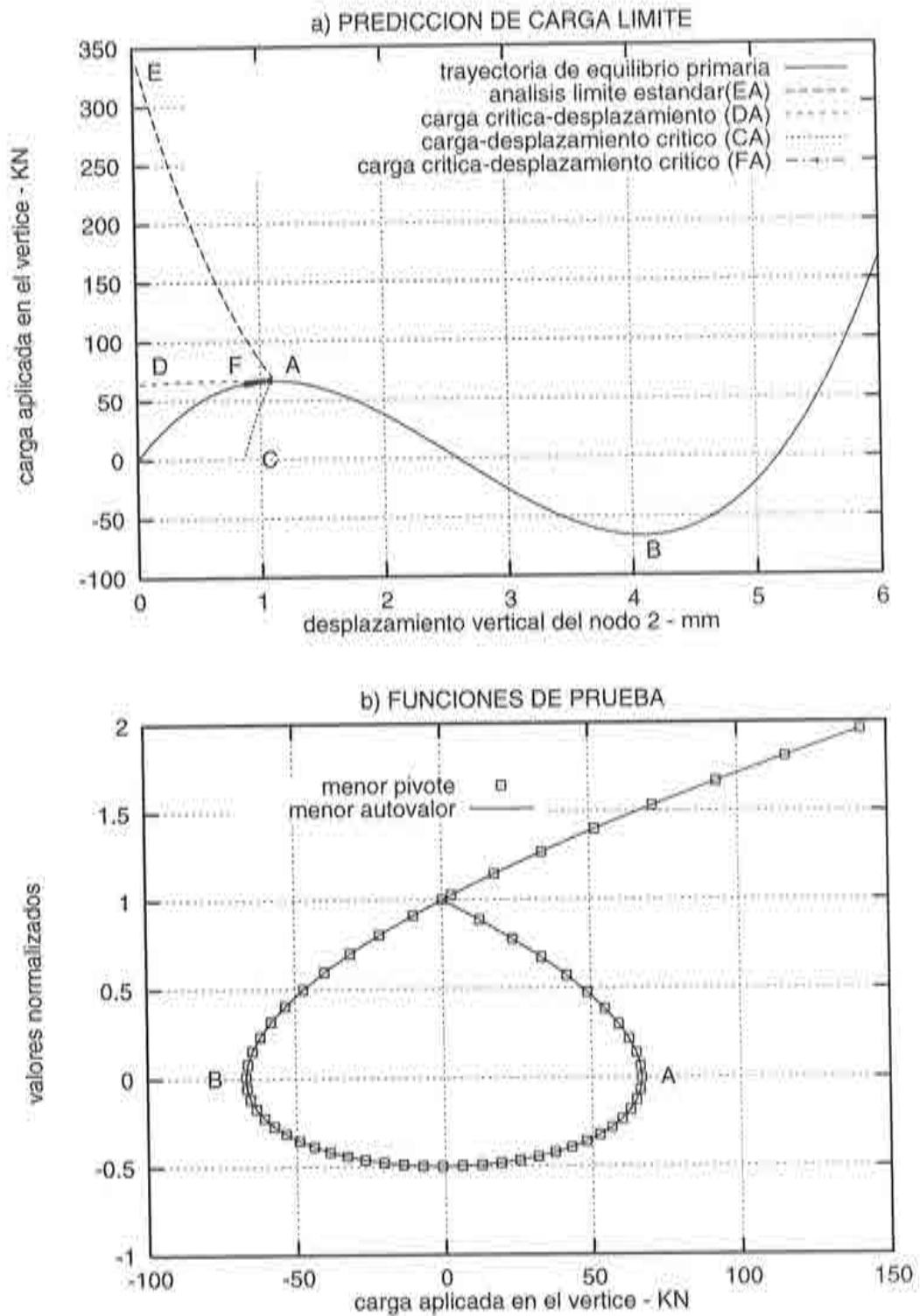


Figura 6.2 Estructura articulada con un grado de libertad. a) Predicción paso a paso de la carga límite. b) Detección de puntos críticos a través de funciones de prueba

funciones de prueba detectan los puntos límite A y B en la curva de equilibrio. En estos puntos, dichos parámetros se anulan. Como se trata de sólo un grado de libertad, estos parámetros coinciden.

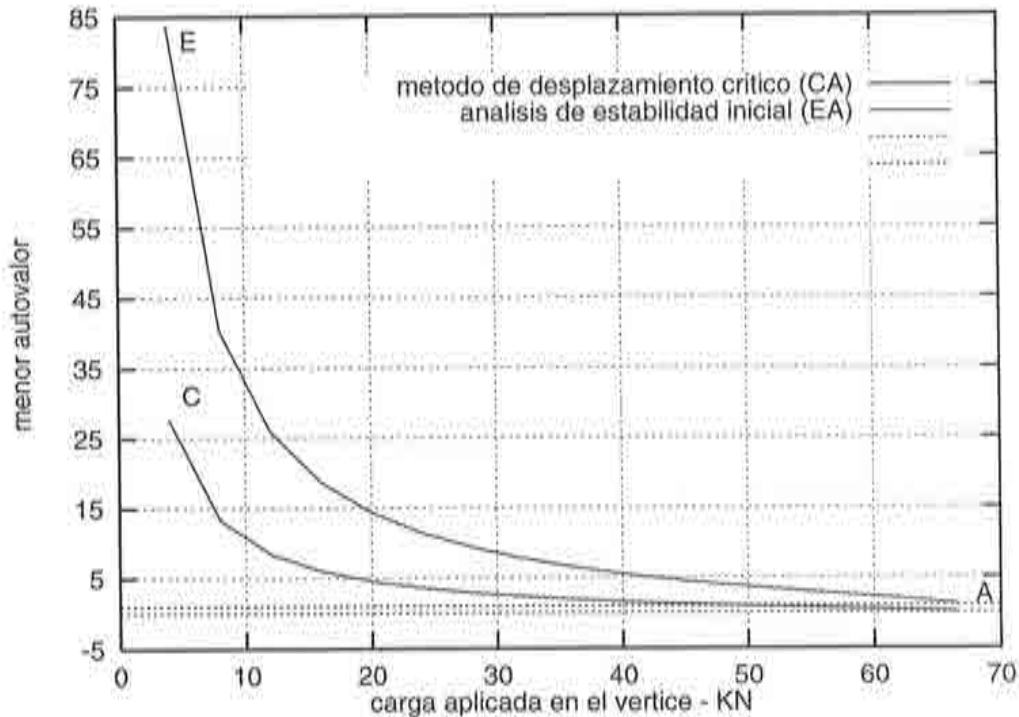


Figura 6.3 Evolución del menor autovalor de los sistemas (4.4.16) y (4.5.2) a lo largo de la trayectoria precrítica de equilibrio

En la Figura 6.3 se muestra la evolución, a lo largo de la trayectoria precrítica de equilibrio, de los menores autovalores de los sistemas (4.4.16) y (4.5.2) correspondientes a los métodos *DC* y *EI*, respectivamente. La curva *CA* relaciona el menor autovalor del sistema (4.4.16) con la carga aplicada en el nodo 2. Se observa que cuando la carga aplicada se aproxima a su valor crítico, dicho autovalor tiende a cero (punto A). Por otro lado, la curva *EA* relaciona el menor autovalor del sistema (4.5.2) con la carga aplicada. Dicho valor tiende a uno cuando la carga aplicada se aproxima a su valor crítico (punto A).

Predicción	Método de Desplazamiento Crítico Estrategia de solución: II		Análisis de Estabilidad Inicial (4.5.2)
	${}^t v_2$	${}^t f_{y2}$	${}^t f_{y2}$
Inicial	-0.873 (20.64%)	64.43 (3.44%)	335.20 (402.32%)
En la vecindad del punto crítico	-1.094 (0.55%)	66.73 (0.00%)	69.92 (4.78%)

Tabla 6.1a Estructura articulada con un grado de libertad sometida a una carga puntual vertical en el nodo 2. Modelo constitutivo hiperelástico material y descripción Lagrangiana Total. Los números entre paréntesis son porcentajes del error respecto al valor obtenido a través del Método Indirecto: ${}^t v_2 = -1.1$ y ${}^t f_{y2} = 66.731$

En la Tabla 6.1a se muestran los resultados numéricos obtenidos para la predicción inicial y para la predicción en la vecindad del punto crítico utilizando los métodos *DC* y *EI*. En esta tabla se muestra la comparación de dichos resultados con los obtenidos con el método indirecto para la detección del punto singular en la rama de equilibrio. Se ha utilizado la interpolación lineal definida en (5.2.2) para calcular el valor de la carga y desplazamiento críticos con dicho método. Además, se han utilizado como parámetros para la función de prueba el menor autovalor y el menor pivote de la matriz de rigidez tangente. La predicción inicial a través del método *DC* es bastante mejor que la predicción realizada con el método *EI*. Esto se debe al comportamiento no lineal del modelo a medida que pierde rigidez axial, ya que el análisis de estabilidad inicial no tiene en cuenta los cambios de geometría del modelo. Los resultados para la predicción inicial de la carga límite con el método *DC* pueden considerarse aceptables comparándolos con los valores "exactos" obtenidos con el método indirecto. En la vecindad del punto singular ambos métodos (*DC* y *EI*) obtienen buenas aproximaciones. Sin embargo, los valores obtenidos con el método *DC* se muestran con una precisión superior a los resultados obtenidos con el método *EI*.

6.2.2 Modelo con pérdida de rigidez y comportamiento postcrítico con rebote hacia atrás

Se trata de una estructura con 9 nodos y 8 elementos de barra articulada 2D. Posee 7 grados de libertad libres y 11 restringidos. Las características geométricas y propiedades mecánicas de este modelo se presentan en la Figura 6.4a. Este modelo presenta un comportamiento postcrítico fuertemente no lineal debido a la pérdida brusca de rigidez. Al alcanzar la carga crítica, en esta posición cualquier perturbación por mínima que sea, produce un cambio de geometría caracterizado por un *rebote hacia atrás*. En este proceso, las barras articuladas del modelo experimentan deformaciones axiales finitas. Como se ha comentado en el Apartado 2.7 del Capítulo 2, las formulaciones Lagrangiana Total (LT) y Lagrangiana Actualizada (LA) proporcionan resultados distintos en este caso debido al tratamiento diferente de la ecuación constitutiva (ver ecuación (2.5.5)).

En las simulaciones numéricas con el modelo de la Figura 6.4a se adoptan los siguientes modelos constitutivos:

- modelo hiperelástico lineal material: módulo de Young definido en la configuración indeformada, esto es, ${}^0E \Rightarrow {}^0(EA)$.
- modelo hiperelástico lineal espacial: módulo de Young definido en la configuración deformada, es decir, ${}^tE \Rightarrow {}^t(EA)$.

Nótese que si se utiliza la formulación Lagrangiana Actualizada con el modelo constitutivo hiperelástico material, de acuerdo con la expresión definida en (A3.20) del Anexo A3, el módulo de Young en la configuración deformada se escribe como ${}^tE = \left(\frac{{}^t l}{{}^0 l}\right)^3 {}^0E$. Por tanto, si las deformaciones son finitas, el módulo de Young en tV se ve afectado por dichas deformaciones.

Este modelo ha sido analizado por POWELL y SIMONS [1981] y posteriormente por BATHE [1983]. Estos autores han obtenido la respuesta del modelo a través de la curva de equilibrio utilizando una descripción Lagrangiana Actualizada y adoptando un modelo hiperelástico lineal espacial.

Para obtener la respuesta del sistema a través de la curva de equilibrio se ha utilizado el método de control de la respuesta con las siguientes características:

- ecuación de coacción: cilíndrica; definida en (5.7.7)
- longitud de arco constante: 0.75
- tolerancia para la convergencia: 10^{-5}
- número total de incrementos: 50
- esquema predictor-corrector: Newton Raphson (matriz de rigidez tangente)
- descripción Lagrangiana Total y Actualizada

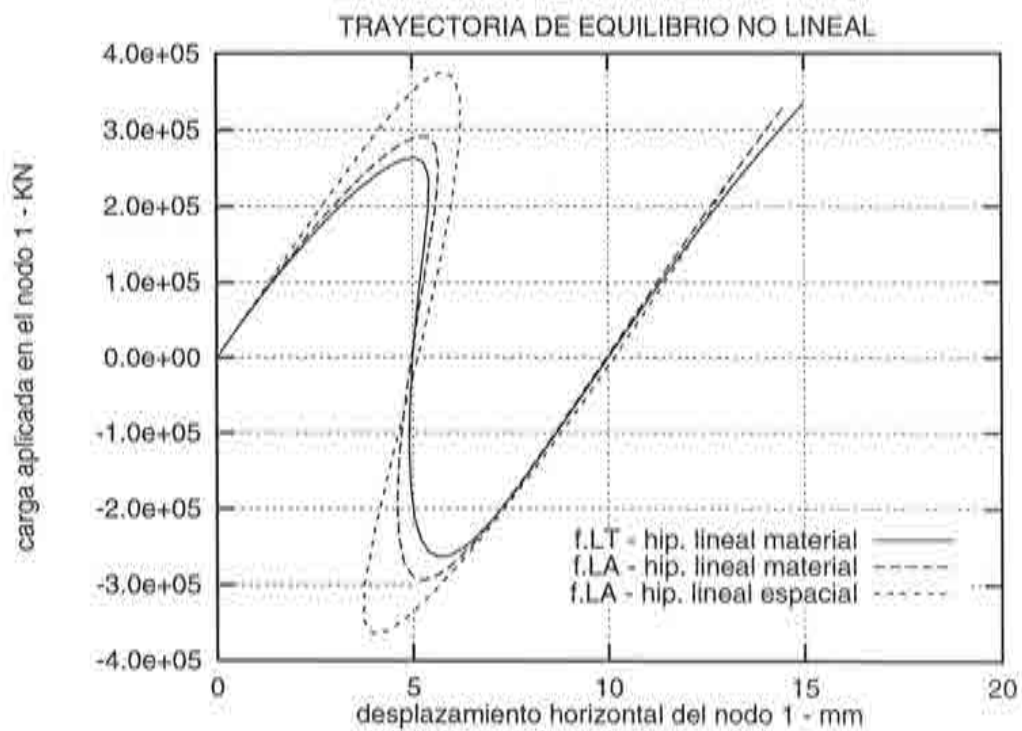
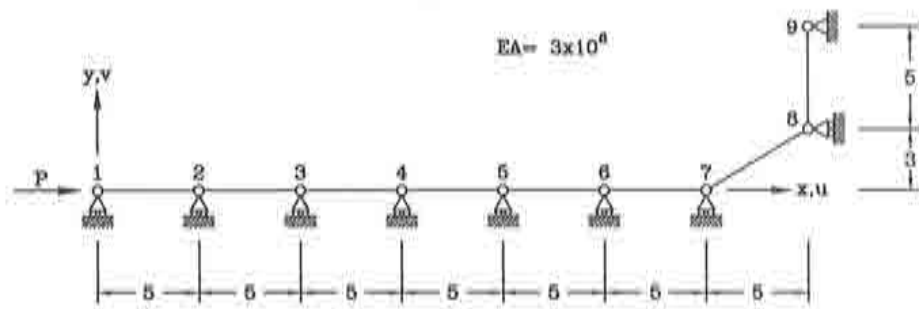


Figura 6.4 Estructura articulada plana con 9 nodos y 8 elementos. Características geométricas y propiedades mecánicas. Curvas carga-desplazamiento para distintos modelos constitutivos

- modelo constitutivo hiperelástico lineal material e hiperelástico lineal espacial

En la Figura 6.4b se presentan curvas las carga-desplazamiento correspondientes a los distintos modelos constitutivos adoptados. Se ha utilizado el modelo hiperelástico lineal material en las formulaciones LT y LA, y además, el modelo hiperelástico lineal espacial en la formulación LA. Como se puede ver en dicha figura, se obtienen tres trayectorias de equilibrio distintas. Nótese que la carga límite para el modelo hiperelástico lineal espacial es mayor que la carga límite para el modelo hiperelástico material. Además, la carga límite obtenida con el modelo hiperelástico material en la descripción LA es mayor que la carga límite con el mismo modelo constitutivo utilizando la descripción LT. La trayectoria de equilibrio correspondiente al modelo hiperelástico lineal espacial es idéntica a la obtenida por BATHE [1983] y POWELL [1981].

A continuación se han utilizado los *métodos DC y EI* en la *predicción paso a paso* de la carga límite para los distintos modelos constitutivos. Las curvas de predicción características de ambos métodos se presentan en las Figuras 6.5a, 6.7a y 6.9a. En dichas figuras se puede notar que la predicción obtenida con el *método DC* (curvas DA) frente al *método EI* (curvas EA) es mejor. Por otro lado, ambos métodos convergen al valor crítico de la carga cuando en la curva de equilibrio el punto a partir del cual se hace la predicción se encuentra en la vecindad del punto crítico.

En las Figuras 6.5b, 6.7b y 6.9b, se presentan las curvas normalizadas del menor autovalor y el menor pivote de la matriz de rigidez tangente en función de la carga aplicada. Para el rango de desplazamientos entre los valores 0 y 15, el modelo presenta dos puntos singulares, puntos A y B. Se puede observar que la función de prueba se anula en estos puntos y que la variación del menor autovalor en el rango de desplazamientos entre 0 y 15 es continua mientras que la variación del menor pivote presenta discontinuidades en la vecindad de los puntos singulares.

En las Figuras 6.6, 6.8 y 6.10 se muestran las curvas de evolución del menor autovalor de los sistemas (4.4.16) (curva CA) y (4.5.2) (curva EA) respecto a la carga aplicada en el nodo 1. En la vecindad del punto crítico, el menor autovalor del sistema (4.4.16) tiende a cero mientras que el menor autovalor del sistema (4.5.2) converge a uno. Se observa que las curvas CA y EA presentan un comportamiento asintótico que confirma las discusiones teóricas sobre el comportamiento del menor autovalor de los problemas de valores propios propuesto en el Capítulo 4.

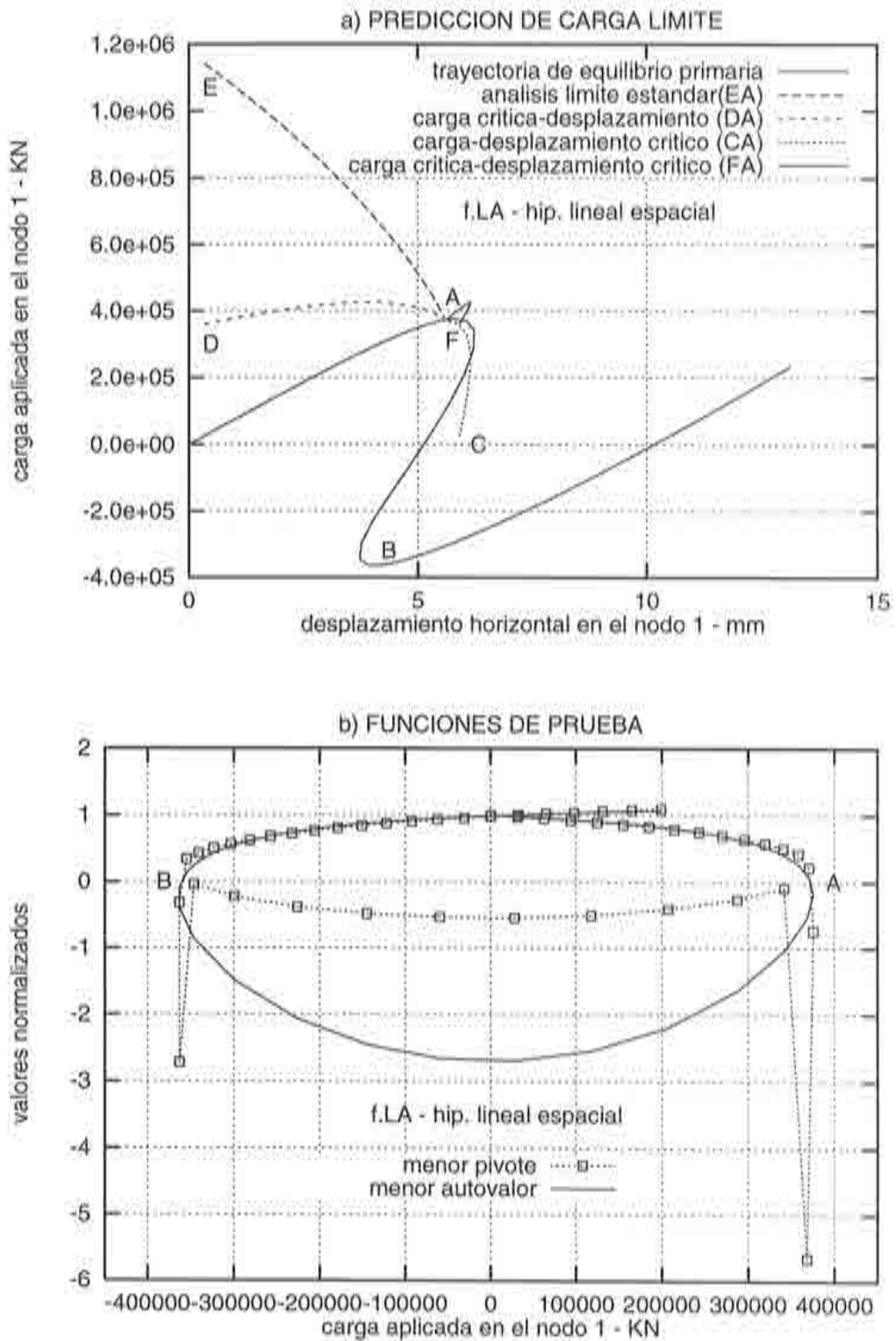


Figura 6.5 a) Predicción paso a paso de la carga límite. b) Detección de puntos críticos a través de funciones de prueba

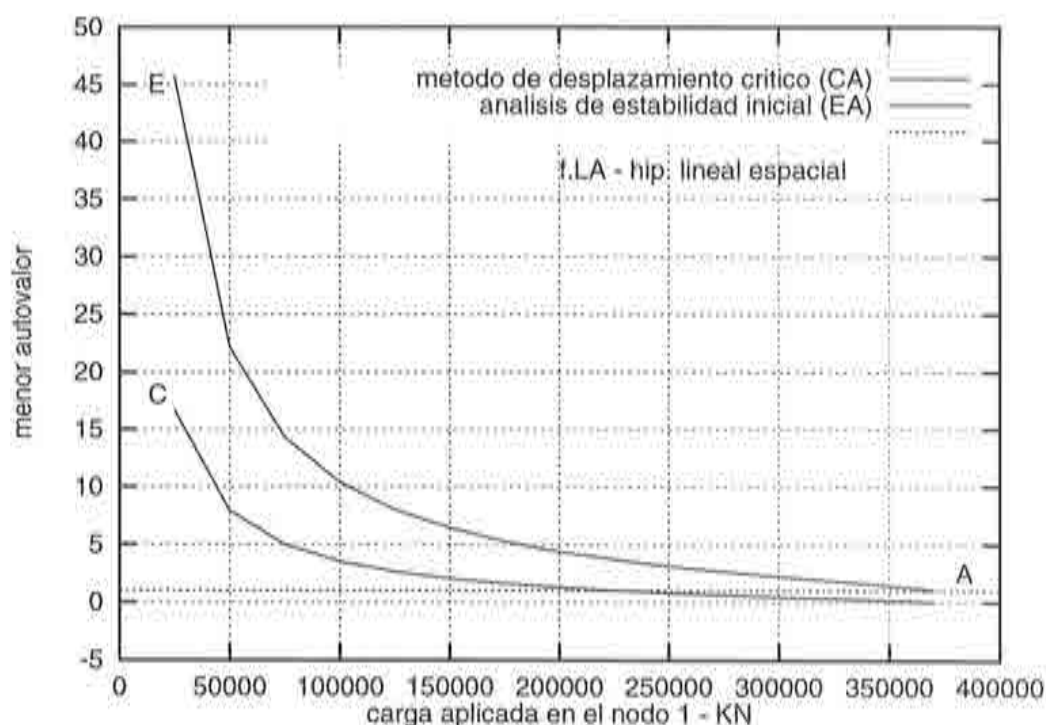


Figura 6.6 Evolución del menor autovalor de los sistemas (4.4.16) y (4.5.2) a lo largo de la trayectoria precrítica de equilibrio

Predicción	Método de Desplazamiento Crítico Estrategia de solución: II		Análisis de Estabilidad Inicial (4.5.2)
	t_{u_1}	$t_{f_{s_1}}$	$t_{f_{s_1}}$
Inicial	5.911 (5.18%)	359263. (3.47%)	1142600. (207.0%)
En la vecindad del punto crítico	5.640 (0.36%)	374053. (0.50%)	379450. (1.95%)

Tabla 6.2a Estructura articulada plana con 9 nodos sometida a una carga puntual horizontal en el nodo 1. Modelo constitutivo hiperelástico espacial y descripción Lagrangiana Actualizada. Los números entre paréntesis son porcentajes del error respecto al valor obtenido a través del Método Indirecto: $t_{u_1} = 5.62$ y $t_{f_{s_1}} = 372181.1$

En las Tablas 6.2a, 6.2b y 6.2c se comparan los resultados obtenidos con los métodos *DC* y *EI* para la predicción de la carga límite en una configuración vecina a la configuración indeformada y en la vecindad de la configuración inestable. Para la predicción de la carga límite en la vecindad del punto crítico se comparan los resultados obtenidos por ambos métodos con el resultado obtenido con el método indirecto a través del análisis del menor autovalor y del menor pivote de la matriz de rigidez tangente. Se puede observar que los resultados obtenidos en la predicción inicial con el método *DC* son bastantes mejores que

los obtenidos con el *método EI* respecto a los valores obtenidos con el *método indirecto*. También se puede notar la buena aproximación inicial para la carga límite obtenida con el *método DC*. Por otro lado, ambos métodos convergen al valor de la carga límite en la vecindad del punto crítico. Sin embargo, el *método DC* obtiene resultados más precisos que el *método EI*.

En la Tabla 6.2d se muestran las aproximaciones para la carga límite obtenidas con los *métodos DC y EI* utilizando la estrategia de solución desarrollada en el Apartado 4.5.3 del Capítulo 4. Se ha utilizado el modelo constitutivo hiperelástico lineal material en la formulación Lagrangiana Total. Se comparan los resultados obtenidos con ambos métodos con los obtenidos con el *método indirecto*. Se puede observar que con el *método DC* se obtienen buenos resultados con sólo tres incrementos de carga utilizando la *predicción paso a paso mejorada*. Naturalmente, con más incrementos de carga se puede minimizar el error respecto al valor exacto.

Predicción	Método de Desplazamiento Crítico Estrategia de solución: II		Análisis de Estabilidad Inicial (4.5.2)
	${}^t\epsilon u_1$	${}^t\epsilon f_{x_1}$	${}^t\epsilon f_{x_1}$
Inicial	5.913 (6.33%)	331151. (16.94%)	1139430. (302.4%)
En la vecindad del punto crítico	5.578 (0.87%)	284991. (0.64%)	280178. (1.06%)

Tabla 6.2b Estructura articulada plana con 9 nodos sometida a una carga puntual horizontal en el nodo 1. Modelo constitutivo hiperelástico material y descripción Lagrangiana Actualizada. Los números entre paréntesis son porcentajes del error respecto al valor obtenido a través del Método Indirecto: ${}^t\epsilon u_1 = 5.53$ y ${}^t\epsilon f_{x_1} = 283182.41$

Predicción	Método de Desplazamiento Crítico Estrategia de solución: II		Análisis de Estabilidad Inicial (4.5.2)
	${}^t\epsilon u_1$	${}^t\epsilon f_{x_1}$	${}^t\epsilon f_{x_1}$
Inicial	5.911 (17.80%)	351413. (33.55%)	1120640. (325.87%)
En la vecindad del punto crítico	5.148 (2.59%)	267340. (1.60%)	256984. (2.34%)

Tabla 6.2c Estructura articulada plana con 9 nodos sometida a una carga puntual horizontal en el nodo 1. Modelo constitutivo hiperelástico material y descripción Lagrangiana Total. Los números entre paréntesis son porcentajes del error respecto al valor obtenido a través del Método Indirecto: ${}^t\epsilon u_1 = 5.018$ y ${}^t\epsilon f_{x_1} = 263139.4$

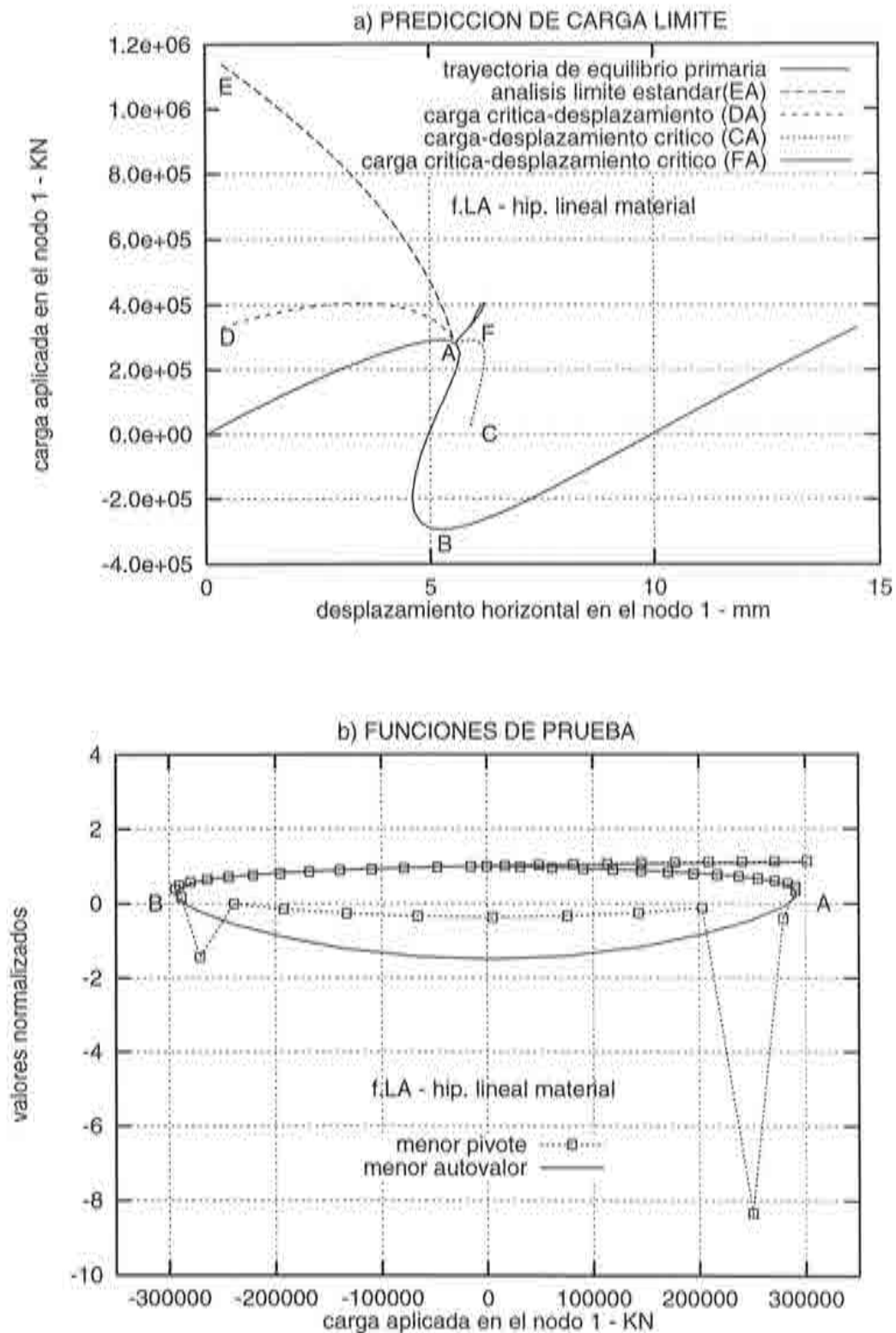


Figura 6.7 a) Predicción paso a paso de la carga límite. b) Detección de puntos críticos a través de funciones de prueba

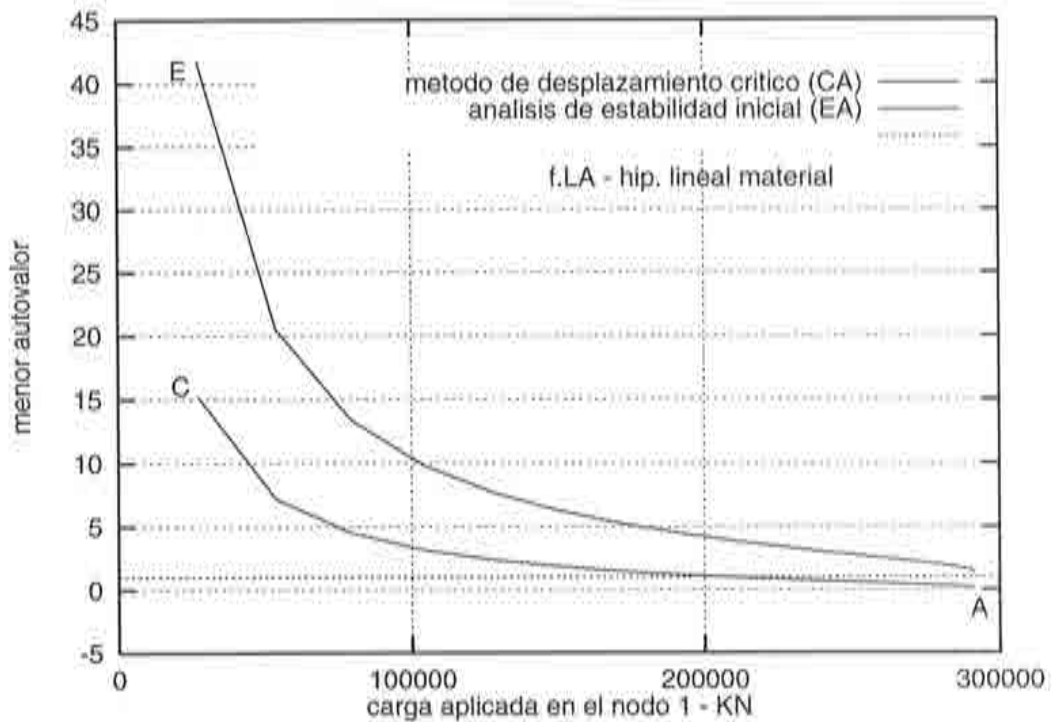


Figura 6.8 Evolución del menor autovalor de los sistemas (4.4.16) y (4.5.2) a lo largo de la trayectoria precrítica de equilibrio

Incr. de Carga	Método de Desplazamiento Crítico Estrategia de solución: III		Análisis de Estabilidad Inicial (4.5.2)
	${}^t e u_1$	${}^t e f_{s_1}$	${}^t e f_{s_1}$
1	6.05 (20.57%)	352600. (34.00%)	985700. (274.59%)
2	5.83 (16.18%)	323000. (22.75%)	588500. (123.65%)
3	5.00 (0.36%)	261700. (0.55%)	352000. (33.77%)

Tabla 6.2d Estructura articulada plana con 9 nodos sometida a una carga puntual horizontal en el nodo 1. Modelo constitutivo hiperelástico material y descripción Lagrangiana Total. Los números entre paréntesis son porcentajes del error respecto al valor obtenido a través del Método Indirecto: ${}^t e u_1 = 5.018$ y ${}^t e f_{s_1} = 263139.4$

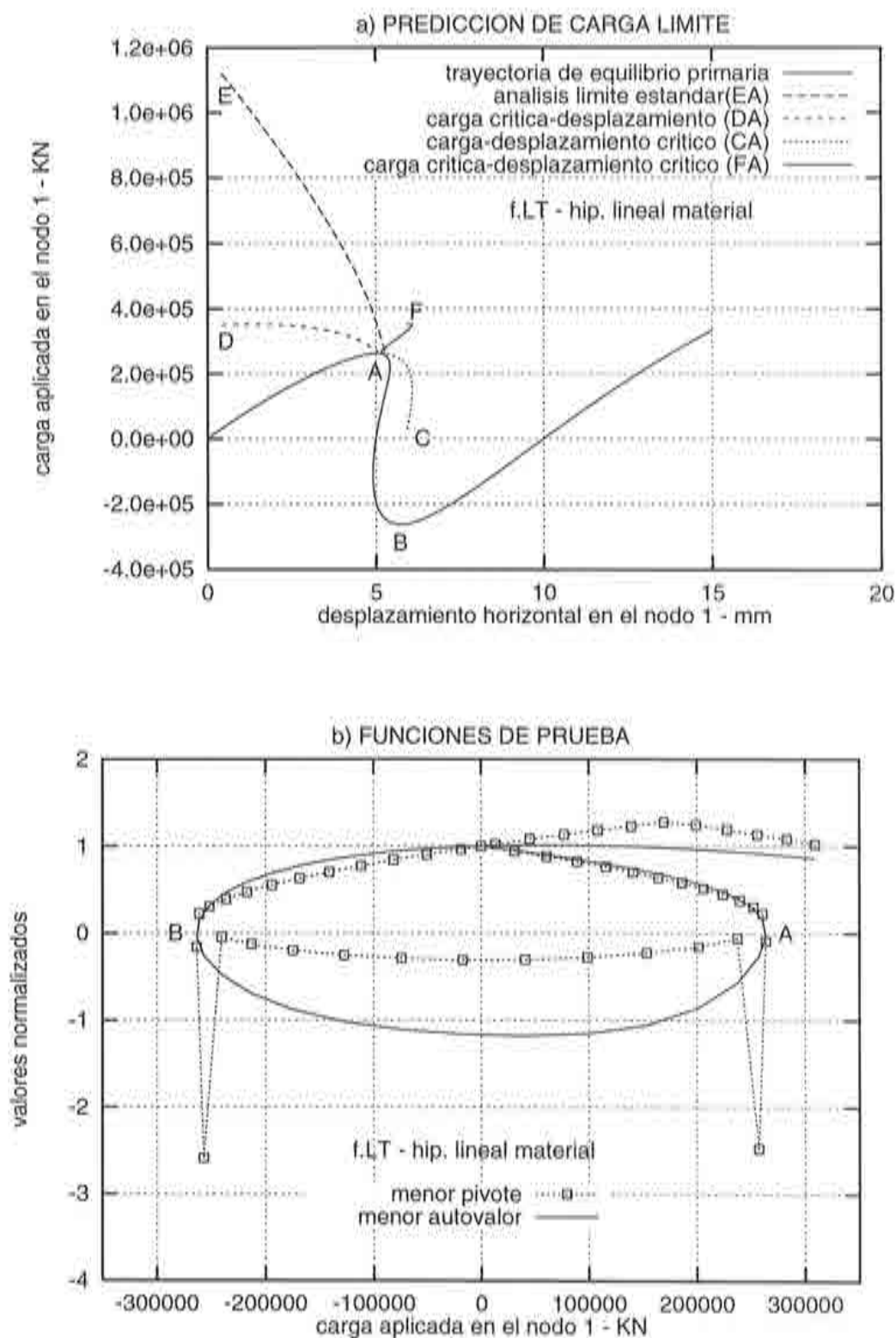


Figura 6.9 a) Predicción paso a paso de la carga límite. b) Detección de puntos críticos a través de funciones de prueba

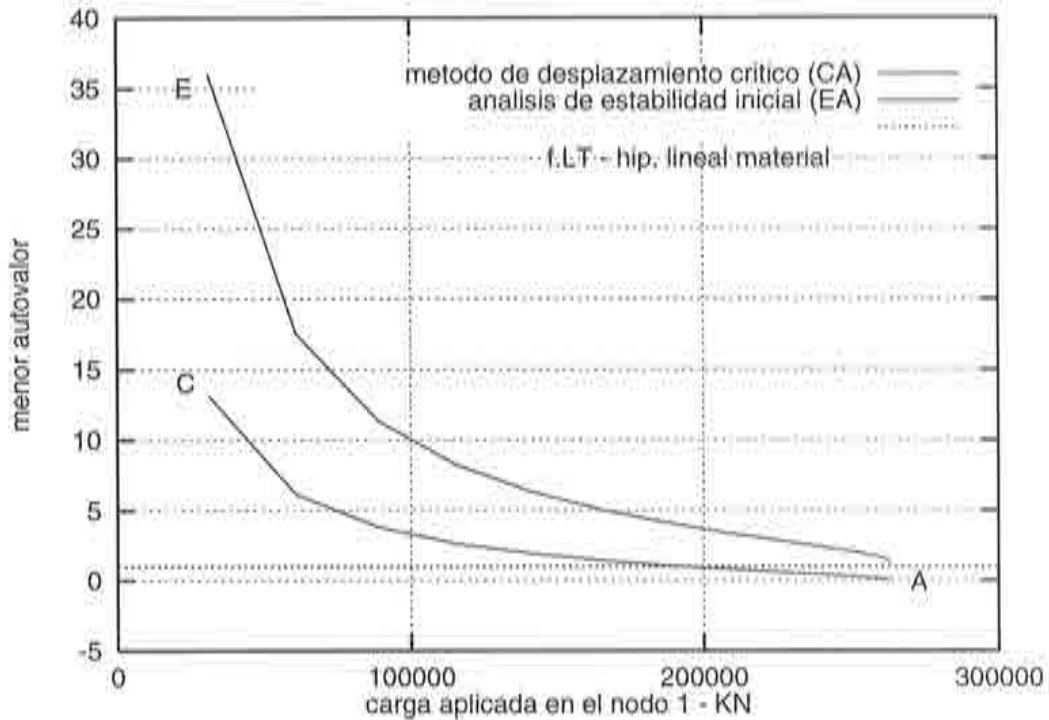
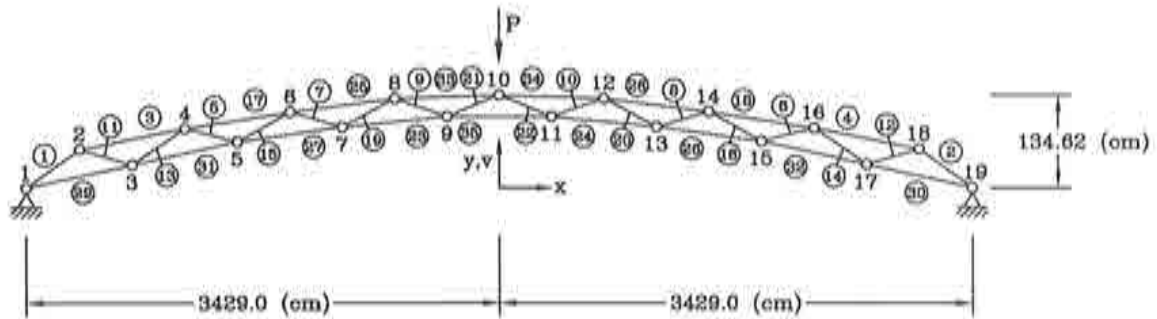


Figura 6.10 Evolución del menor autovalor de los sistemas (4.4.16) y (4.5.2) a lo largo de la trayectoria precrítica de equilibrio

6.2.3 Estructura articulada en forma de arco rebajado con bifurcación anterior al punto límite

Se considera una estructura articulada plana en forma de arco rebajado. Sus características geométricas se presentan en la Figura 6.11a. La estructura está formada por 19 nodos y 35 elementos de barra articulada 2D, cuyas secciones transversales son circulares. El área de la sección transversal de cada elemento y las coordenadas nodales se muestran en las tablas de la Figura 6.11b. El módulo de Young de las barras es $7.03 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$. El movimiento de los nodos 1 y 19 está restringido. Por tanto, dicha estructura posee 34 grados de libertad libres y 4 grados de libertad restringidos y, además, está sometida a una carga vertical aplicada en el nodo 10.

Esta estructura fue analizada por ROSEN y SCHMIT [1979], [1980] y por KONDOH y ATLURI [1985]. Estos autores estudiaron la influencia de imperfecciones y del pandeo local de las barras en la estabilidad global de la estructura. Sin embargo, aquí se estudia el comportamiento global de la estructura. En este sentido, dicha estructura presenta un punto de bifurcación, representado por un pandeo antisimétrico, antes de alcanzar el punto límite.



COORDENADAS NODALES

Nodo	Eje x	Eje y
1, 19	± 3429.0	0.00
2, 18	± 3048.0	50.85
3, 17	± 2667.0	34.75
4, 16	± 2286.0	83.82
5, 15	± 1905.0	65.30
6, 14	± 1524.0	110.85
7, 13	± 1143.0	87.99
8, 12	± 762.0	128.50
9, 11	± 381.0	100.05
10	0.0	134.60

Áreas Transversales

Barra	Área (cm ²)
1-10, 35	51.61
11, 12	64.52
13-16	83.87
17, 18	96.77
19-22	103.23
23, 24	161.29
25, 26	193.55
27, 28	258.06
29-32	290.32
33, 34	309.66

Modulo de Young 7.03×10^5 (kgf/cm²)

Figura 6.11 Estructura articulada plana en forma de arco rebajado con 19 nodos y 35 elementos. Características geométricas y propiedades mecánicas

KONDOH y ATLURI obtuvieron para la carga límite el valor 2640 Kgf. Sin embargo, no mencionaron la existencia del punto de bifurcación global que existe antes del punto límite. En este ejemplo se determinan ambos puntos a través del análisis del menor autovalor y del menor pivote de la matriz de rigidez tangente, adoptados como parámetros para la función de prueba. El valor de la carga de pandeo obtenido a través de la interpolación lineal de la función de prueba definida en (5.2.2), utilizado el menor autovalor como parámetro, fue de 2563.17 Kgf; mientras que el valor de la carga límite fue de 2630.76 Kgf. Se utilizan los métodos *DC* y *EI* para determinar la carga de pandeo antisimétrico de dicha estructura.

Para obtener las curvas que caracterizan la respuesta del modelo y las predicciones para la carga límite se ha utilizado el método de control de la respuesta con las siguientes características:

- ecuación de coacción: cilíndrica; definida en (5.7.7)

- longitud de arco constante: 4.0
- tolerancia para la convergencia: 10^{-5}
- número total de incrementos: 50
- esquema predictor-corrector: Newton Raphson (matriz de rigidez tangente)
- descripción Lagrangiana Total
- modelo constitutivo hiperelástico lineal material

Dichas curvas se muestran en la Figura 6.12a. En este ejemplo se observa que las predicciones para la carga de pandeo con el *método DC* son límites inferiores de dicha carga (curva DA). Por otro lado, las predicciones con el *método EI* son límites superiores de la carga de pandeo (curva EA). Ambos métodos convergen al valor de la carga de bifurcación cuando se realizan las predicciones en la vecindad del punto crítico, es decir, alrededor del punto A. El punto A representa el punto de bifurcación. Desde este punto se obtiene la rama bifurcada de equilibrio representada por la curva AB. Se ha obtenido esta rama simplemente aplicando una fuerza horizontal en el nodo 10 en el sentido positivo del eje- x de la estructura y de un valor igual a $1/100$ de la fuerza vertical aplicada al nodo 10. De esta manera se introduce un modo de deformación antisimétrico que corresponde al modo de bifurcación de dicha estructura. En esta misma figura, la curva CA representa las predicciones para el desplazamiento crítico en función de la carga aplicada. Finalmente la curva FA expresa la relación entre carga y desplazamiento críticos.

En la Figura 6.12b se muestra la evolución de los menores autovalor y pivote de la matriz de rigidez tangente en el rango de desplazamientos $[0,80]$. Como puede observarse, en los puntos A (punto de bifurcación) y el punto PL (punto límite) ambas funciones de prueba se anulan, indicando de esta manera la existencia de singularidad en la matriz de rigidez tangente de la estructura.

En la Figura 6.13 se presenta la evolución de los menores autovalores correspondientes a los problemas de valores propios definidos en las ecuaciones (4.4.16) y (4.5.2) a lo largo de la rama de equilibrio precrítico. La curva CA expresa la relación del menor autovalor de (4.4.16) con la carga, mientras que la curva EA relaciona el menor autovalor de (4.5.2) con la carga. El comportamiento observado en estas curvas confirma lo esperado al definir los *métodos DC* y *EI*. Es decir, que el menor autovalor (ρ) del sistema (4.4.16) converge a cero cuando se acerca al punto crítico y el menor autovalor ($\bar{\lambda}$) del sistema (4.5.2) converge a la uno.

En la Tabla 6.2e se presentan los resultados obtenidos en las predicciones inicial y en la vecindad del punto de bifurcación con los *métodos DC* y *EI*. Se comparan estos resultados con los obtenidos por medio del *método indirecto* para la detección del punto de bifurcación. En este ejemplo ambos *métodos DC* y

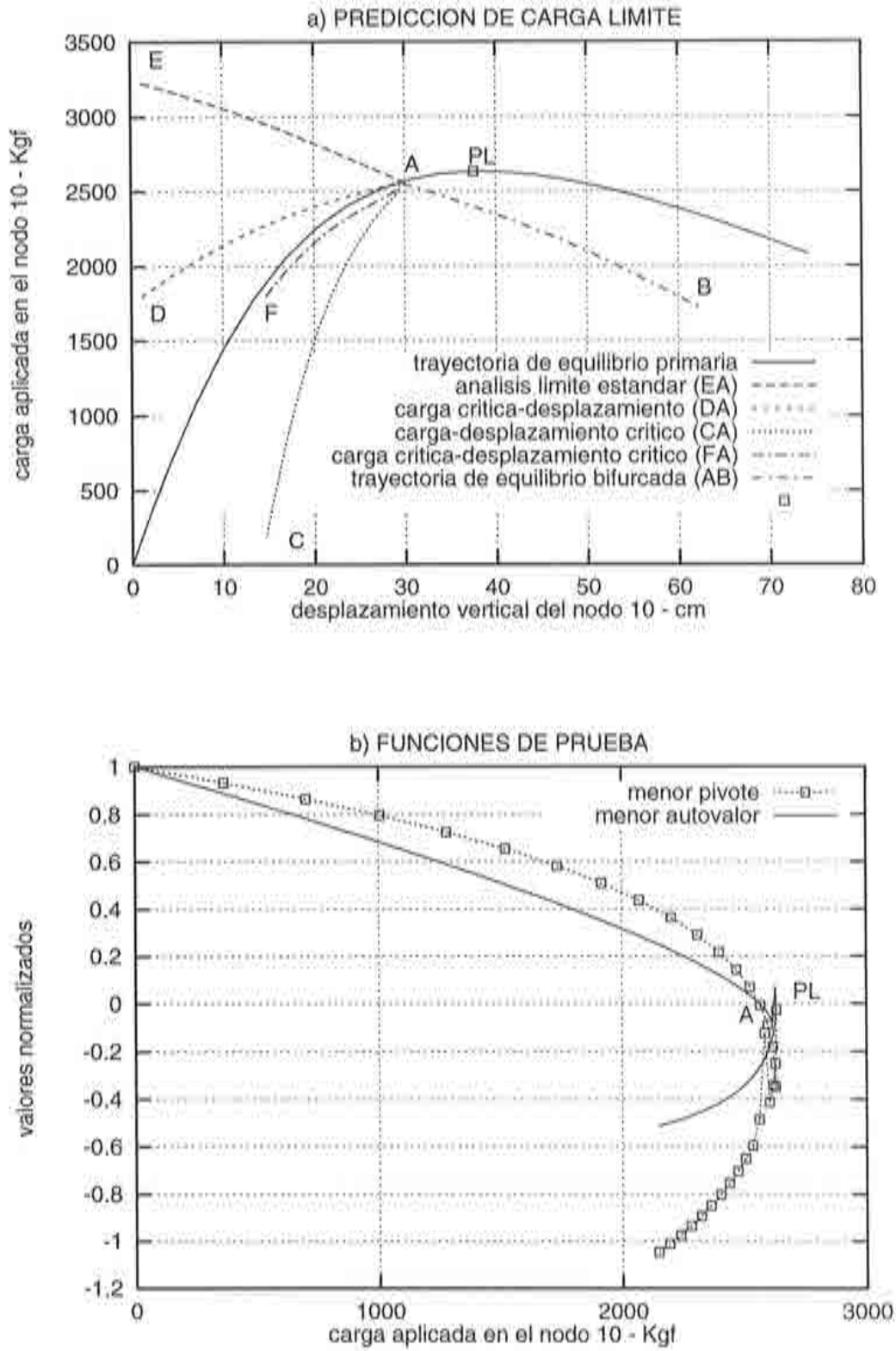


Figura 6.12 Estructura articulada en forma de arco rebajado. a) Predicción paso a paso de la carga límite. b) Detección de puntos críticos a través de funciones de prueba

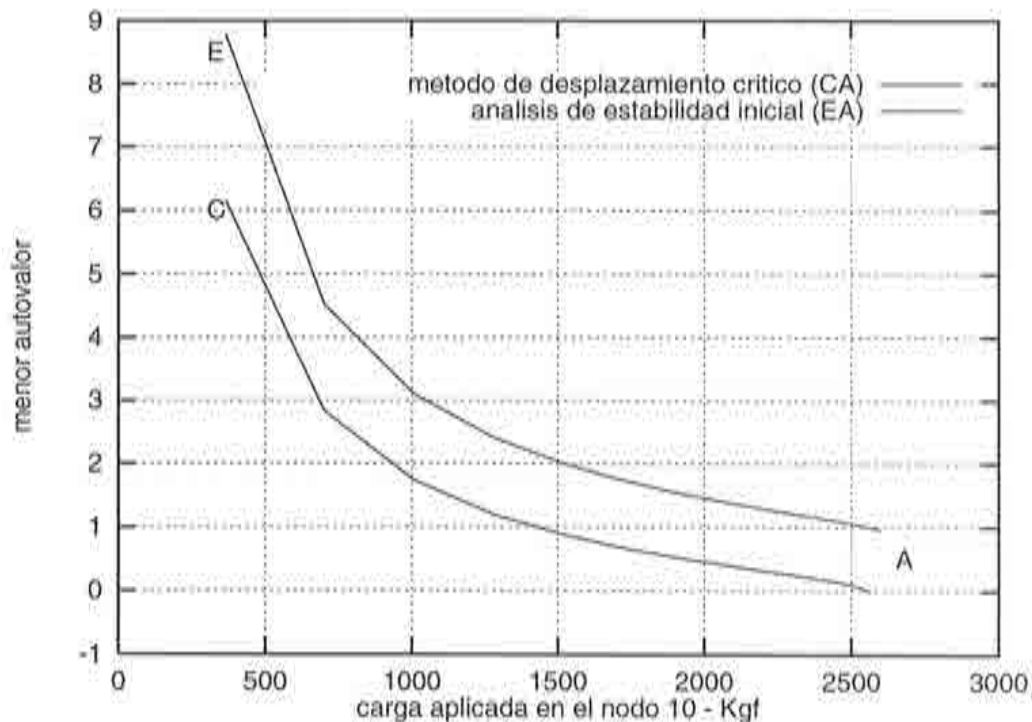


Figura 6.13 Evolución del menor autovalor de los sistemas (4.4.16) y (4.5.2) a lo largo de la trayectoria precrítica de equilibrio

El proporcionan valores iniciales aceptables para la carga de bifurcación. Se observan las buenas predicciones para la carga de pandeo en la vecindad del punto crítico utilizando ambos métodos respecto al valor dado por el *método indirecto*.

Predicción	Método de Desplazamiento Crítico Estrategia de solución: II		Análisis de Estabilidad Inicial (4.5.2)
	t_{v10}	$t_{f_{v10}}$	$t_{f_{v10}}$
Inicial	-14.708 (50.5%)	1795.45 (29.95%)	3223.07 (25.75%)
En la vecindad del punto crítico	-29.532 (0.64%)	2570.58 (0.29%)	2556.92 (0.24%)

Tabla 6.2e Estructura articulada plana en forma de arco rebajado con 19 nodos sometida a una carga puntual vertical en el nodo central. Modelo constitutivo hiperelástico material y descripción Lagrangiana Total. Los números entre paréntesis son porcentajes del error respecto al valor obtenido a través del Método Indirecto: $t_{v10} = -29.72$ cm y $t_{f_{v10}} = 2563.17$ Kgf

En la Tabla 6.2f se muestran los resultados de las predicciones para la carga de pandeo y desplazamiento crítico obtenidos con el método de desplazamiento

crítico utilizando la predicción paso a paso mejorada. Se puede observar las buenas predicciones con sólo tres incrementos de carga, respecto a los valores de carga y desplazamiento críticos obtenidos a través de la inspección del menor autovalor de la matriz de rigidez tangente de la estructura.

Incr. de Carga	Método de Desplazamiento Crítico Estrategia de solución: III		Análisis de Estabilidad Inicial (4.5.2)
	${}^t v_{10}$	${}^t f_{y10}$	${}^t f_{y10}$
1	-14.71 (50.5%)	1795.4 (29.95%)	3223.0 (25.74%)
2	-23.42 (21.2%)	2308.0 (9.96%)	2917.6 (13.83%)
3	-29.51 (0.71%)	2518.9 (1.73%)	2632.9 (2.72%)

Tabla 6.2f Estructura articulada plana en forma de arco rebajado con 19 nodos sometida a una carga puntual vertical en el nodo central. Modelo constitutivo hiperelástico material y descripción Lagrangiana Total. Los números entre paréntesis son porcentajes del error respecto al valor obtenido a través del Método Indirecto: ${}^t v_{10} = -29.72$ y ${}^t f_{y10} = 2563.17$

6.3 ESTRUCTURAS ARTICULADAS ESPACIALES

En este apartado se analizan algunas estructuras articuladas espaciales modeladas con el elemento de barra articulado 3D desarrollado en el Anexo A3. Son estructuras que presentan varios puntos límite y de bifurcación a lo largo de la trayectoria fundamental de equilibrio.

6.3.1 Estructura articulada espacial en forma de estrella

Se analiza en este apartado una estructura articulada espacial en forma de estrella. Sus características geométricas y propiedades mecánicas se muestran en la Figura 6.14. La estructura está cargada con una serie de fuerzas puntuales verticales actuando sobre los nodos 1-7, como puede apreciarse en dicha figura. Se trata de una estructura con 13 nodos y 24 elementos de barra articulada 3D. Dicha estructura posee 21 grados de libertad libres y 18 restringidos por medio de 6 apoyos simples.

Para trazar la trayectoria fundamental de equilibrio en el rango de desplazamientos de [0,11] se ha utilizado el método de control de la respuesta con las siguientes características:

- ecuación de coacción: control de desplazamiento (se ha controlado la componente vertical del desplazamiento del nodo 1)
- longitud de arco constante: -0.051
- tolerancia para la convergencia: 10^{-5}

- número total de incrementos: 207
- esquema predictor-corrector: Newton Raphson (matriz de rigidez tangente)
- descripción Lagrangiana Total
- modelo constitutivo hiperelástico lineal material

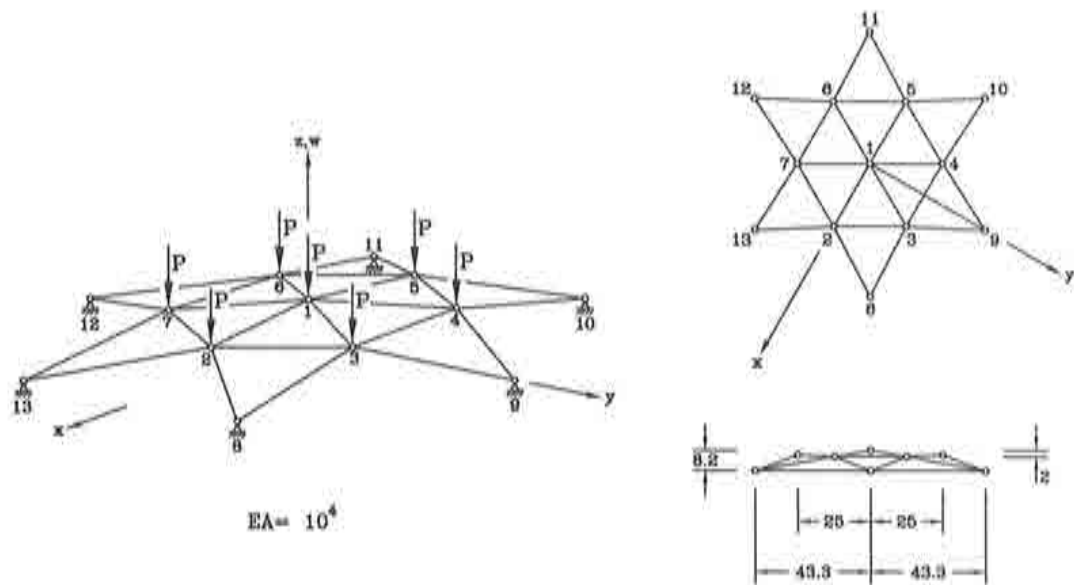


Figura 6.14 Estructura articulada espacial en forma de estrella con 13 nodos y 24 elementos. Características geométricas, propiedades mecánicas y posición de las cargas

En el rango de desplazamientos anteriormente mencionado, esta estructura presenta varios puntos de inestabilidad a lo largo de la trayectoria primaria de equilibrio. En la figura 6.15a se pueden observar los puntos críticos A, B, G, H y I en dicha trayectoria. Los puntos A, B y I son puntos límite, mientras que los puntos G y H son puntos de bifurcación.

Estos puntos se determinan a través de la función de prueba definida en (5.9.7), cuyo cero se evalúa por medio de la interpolación lineal dada en (5.9.2). Los valores de las cargas críticas en estos puntos son los siguientes:

- Punto A: $\lambda_A = 7.76$
- Punto B: $\lambda_B = -2.05$
- Punto G: $\lambda_G = 13.012$

- Punto H: $\lambda_H = 15.07$
- Punto I: $\lambda_I = 15.25$

En la Figura 6.15b, también se muestran estos puntos, además de la variación de distintos parámetros de la matriz de rigidez tangente respecto a la carga. Estos parámetros se anulan cuando dicha matriz se torna singular. En este ejemplo, además de los menores autovalores y pivote se ha utilizado como parámetro el determinante de ${}^0\mathbf{K}_T$ a través de la expresión (5.8.11).

El este ejemplo ha sido analizado por IRLES [1985] y OÑATE [1986]. Estos autores han utilizado el método de Newton Raphson con control de carga, con un algoritmo incremental-iterativo para obtener la trayectoria primaria de equilibrio en los trechos en que la matriz de rigidez tangente es positiva definida. IRLES obtuvo valores sólo para dos de las cargas críticas comentadas anteriormente. La estructura alcanza el primer punto crítico para una carga de $P=8$ (unidades de fuerza). La segunda carga de inestabilidad es de $P=15$ (unidades de fuerza), de acuerdo con la referencia IRLES [1984]. Esta segunda carga ha sido determinada, por dichos autores, al detectar la singularidad en el determinante de la matriz de rigidez de la estructura.

A lo largo de la trayectoria precrítica de equilibrio se han aplicado los métodos *DC* y *EI* para obtener predicciones de la carga crítica correspondiente al punto A. Como puede observarse en la Figura 6.15a, las curvas CA, DA y FA en el plano carga-desplazamiento resultan del método *DC*, mientras que se obtiene la curva EA con el método *EI*. La curva CA representa la variación del desplazamiento crítico con la carga. Para este ejemplo se observan las excelentes predicciones del desplazamiento crítico obtenidas con el método *DC*. La curva DA representa la variación de la carga crítica con el desplazamiento, y la curva FA la variación de la carga y el desplazamiento críticos. Por otro lado, el método *EI* aplicado paso a paso permite obtener la predicción de la carga crítica, representada por la curva EA. Se observa que las curvas EA y DA proporcionan valores superiores de la carga crítica, pero a medida que se acercan al punto crítico (punto A), ambos métodos convergen a un valor muy próximo a la carga crítica, (ver la Tabla 6.3a). En dicha tabla se comparan las predicciones inicial y en la vecindad del punto crítico, obtenidas con los métodos *DC* y *EI*, con los valores obtenidos por el método indirecto para la detección de puntos críticos. Se observa la buena predicción inicial con el método *DC* frente al método *EI*. En la vecindad del punto crítico ambos métodos obtienen buenas predicciones para la carga crítica.

En la Figura 6.16 se muestran las variaciones de los menores autovalores de los problemas de valores propios definidos en (4.4.16) y (4.5.2), con la carga en el tramo precrítico de la rama primaria de equilibrio. Como puede observarse estos autovalores convergen asintóticamente a cero y uno, respectivamente.

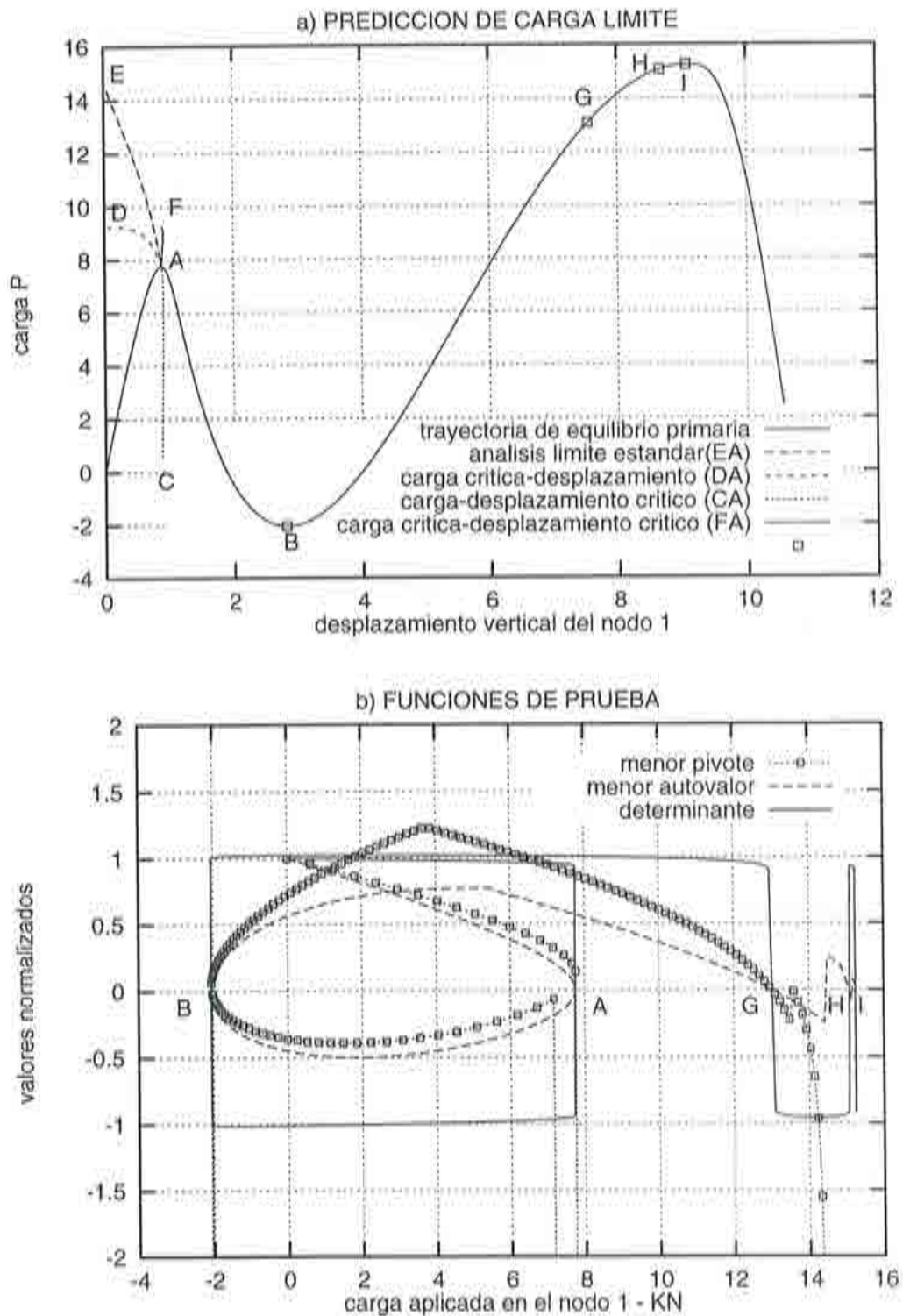


Figura 6.15 Estructura articulada espacial en forma de estrella. a) Predicción paso a paso de la carga límite. b) Detección de puntos críticos a través de funciones de prueba.

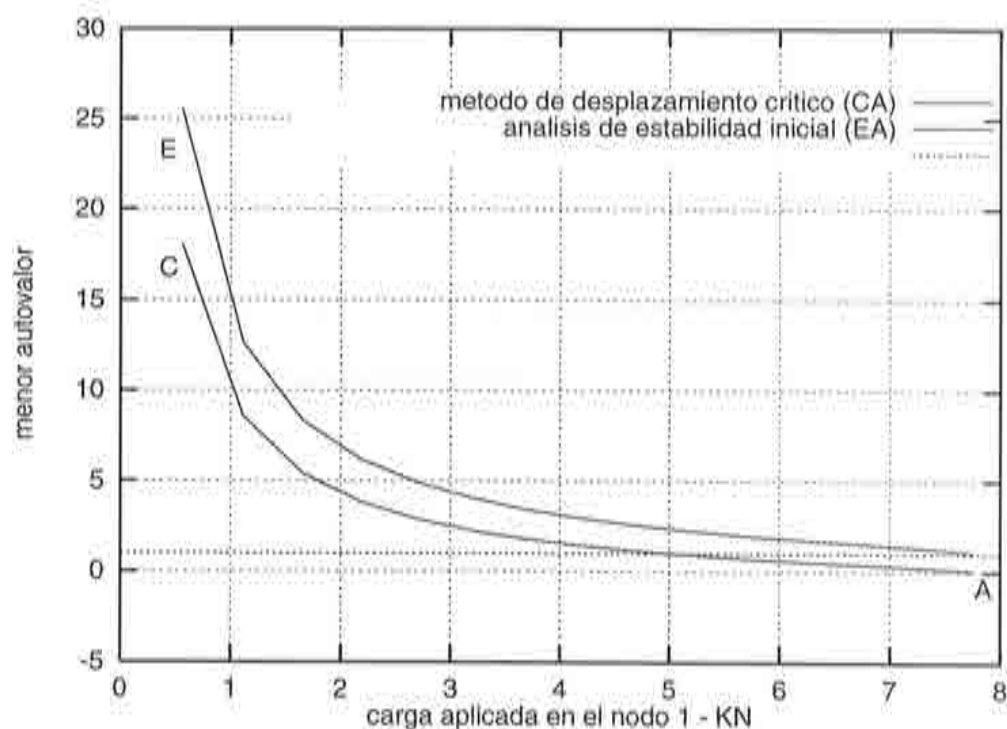


Figura 6.16 Evolución del menor autovalor de los sistemas (4.4.16) y (4.5.2) a lo largo de la trayectoria precrítica de equilibrio

Predicción	Método de Desplazamiento Crítico Estrategia de solución: II		Análisis de Estabilidad Inicial (4.5.2)
	${}^t w_1$	${}^t f_{s1}$	${}^t f_{s1}$
Inicial	-0.879 (1.38%)	9.23 (18.94%)	14.37 (25.75%)
En la vecindad del punto crítico	-0.881 (1.61%)	7.796 (0.46%)	7.85 (1.16%)

Tabla 6.3a Estructura articulada espacial en forma de estrella con 13 nodos sometida a fuerzas puntuales verticales en siete nodos. Modelo constitutivo hiperelástico material y descripción Lagrangiana Total. Los números entre paréntesis son porcentajes del error respecto al valor obtenido a través del Método Indirecto: ${}^t w_1 = -0.867$ y ${}^t f_{s1} = 7.76$

En la Tabla 6.3b se muestran las predicciones para la carga crítica obtenidas con el *método DC* aplicado en el esquema de *predicción paso a paso mejorada*. Se han adoptado sólo tres incrementos de carga. Puede observarse que ambos métodos se obtienen buenas predicciones al final del tercer incremento de carga. Naturalmente, se pueden mejorar aún más dichas predicciones simplemente adoptando más incrementos de carga.

Incr. de Carga	Método de Desplazamiento Crítico Estrategia de solución: III		Análisis de Estabilidad Inicial (4.5.2)
	${}^t w_1$	${}^t f_{s_1}$	${}^t F_{s_1}$
1	-0.876 (1.04%)	9.23 (18.94%)	14.53 (87.24%)
2	-0.897 (3.46%)	8.43 (8.63%)	9.89 (27.45%)
3	-0.888 (2.42%)	7.97 (2.71%)	8.01 (3.22%)

Tabla 6.3b Estructura articulada espacial en forma de estrella con 13 nodos sometida a fuerzas puntuales verticales en siete nodos. Modelo constitutivo hiperelástico material y descripción Lagrangiana Total. Los números entre paréntesis son porcentajes del error respecto al valor obtenido a través del Método Indirecto: ${}^t w_1 = -0.867$ y ${}^t f_{s_1} = 7.76$.

6.3.2 Estructura articulada espacial en forma de cúpula

Se presenta en este apartado una estructura articulada espacial en forma de cúpula. Sus características geométricas y propiedades mecánicas se muestran en la Figura 6.17. Dicha estructura está sometida a una serie de fuerzas puntuales verticales actuando sobre los nodos 8–13, posee 25 nodos y 60 elementos de barra articulada 3D. Tiene 57 grados de libertad libres y 18 grados de libertad restringidos con 6 apoyos simples.

El comportamiento precrítico de esta estructura se caracteriza por la existencia de dos puntos de bifurcación muy próximos antes de alcanzar el primer punto límite. Dicho comportamiento ha sido estudiado por CHOONG [1993]. En el primer punto de bifurcación este autor ha encontrado un factor de carga $\lambda_1 = 25.937$ y para el segundo punto de bifurcación el valor $\lambda_2 = 28.695$. Sin embargo, no hace ninguna mención respecto al valor de la carga correspondiente al punto límite. Utilizando la función de prueba definida en (5.8.7b) y la interpolación lineal, dada en (5.9.2) para encontrar el cero de dicha función, se han determinado dos puntos de bifurcación y un punto límite en la rama de equilibrio precrítico. El primer punto de bifurcación corresponde a un nivel de carga $\lambda_1 = 25.891$ y el segundo, a un valor de $\lambda_2 = 28.695$. El valor del factor de carga correspondiente al punto límite es de $\lambda_{lim.} = 31.46$. Estos valores corresponden a los puntos A, PB y PL, respectivamente, en los gráficos de la Figura 6.19.

En este ejemplo se ha efectuado en primer lugar un estudio de la tasa de convergencia para distintas expresiones de la matriz secante utilizables en el esquema predictor-corrector presentado en el Cuadro 5.1. Para realizar dicho estudio se han adoptado tres expresiones simétricas de la matriz de rigidez secante incremental asignando valores a los parámetros α y β en las ecuaciones (3.3.5a-d). Se ha definido las siguientes matrices: la matriz ${}^t_0\mathbf{K}_{S_1}$, con $\alpha = 1/2$ y $\beta = 0$ (OÑATE [1991]), la matriz ${}^t_0\mathbf{K}_{S_2}$, con $\alpha = 1/2$ y $\beta = 2/3$ (MALLET [1968]) y la matriz ${}^t_0\mathbf{K}_{S_3}$, con $\alpha = 1/2$ y $\beta = 1$ (FELIPPA [1994]).

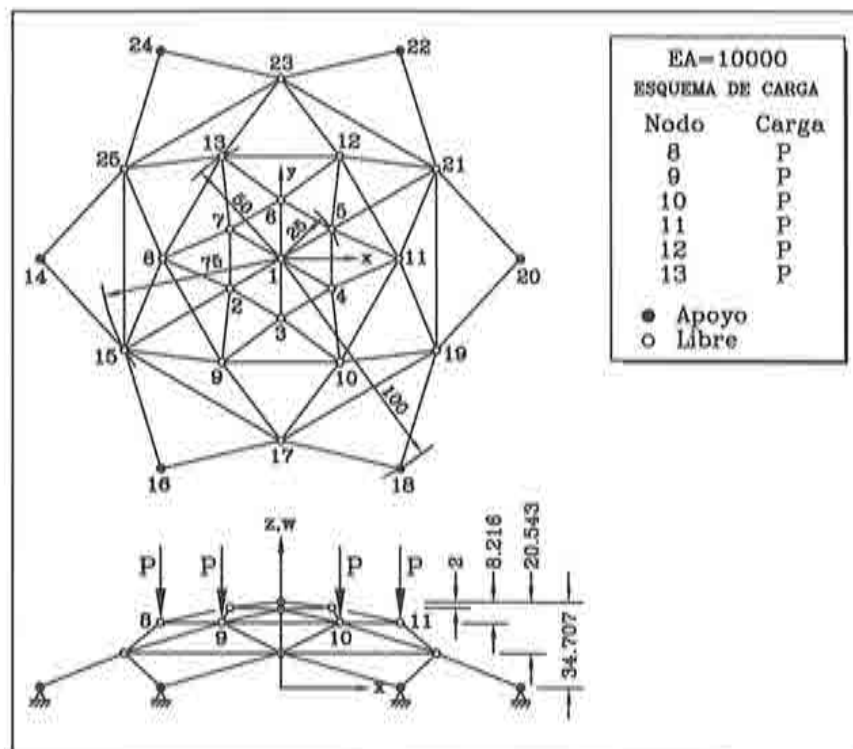


Figura 6.17 Estructura articulada espacial en forma de cúpula con 25 nodos y 60 elementos. Características geométricas, propiedades mecánicas y posición de las cargas

Para trazar la trayectoria fundamental y estudiar la tasa de convergencia de las distintas expresiones de la matriz secante en el rango de desplazamientos $[0,60]$ se ha utilizado el método de control de la respuesta con las siguientes características:

- ecuación de coacción: cilíndrica; definida en (5.7.7)
- longitud de arco constante: 2.5
- tolerancia para la convergencia: 10^{-12}
- número total de incrementos: 185
- esquema predictor-corrector: Newton Raphson (${}^t_0\mathbf{K}_T$) y Matriz de rigidez secante incremental (${}^t_0\mathbf{K}_{S_1}$, ${}^t_0\mathbf{K}_{S_2}$ y ${}^t_0\mathbf{K}_{S_3}$)
- descripción Lagrangiana Total
- modelo constitutivo hiperelástico lineal material

En la Figura 6.18 se muestra la trayectoria primaria de equilibrio en el rango de desplazamientos $[0,60]$ obtenida con las distintas expresiones de la matriz de rigidez secante incremental y la matriz de rigidez tangente. En dicha trayectoria

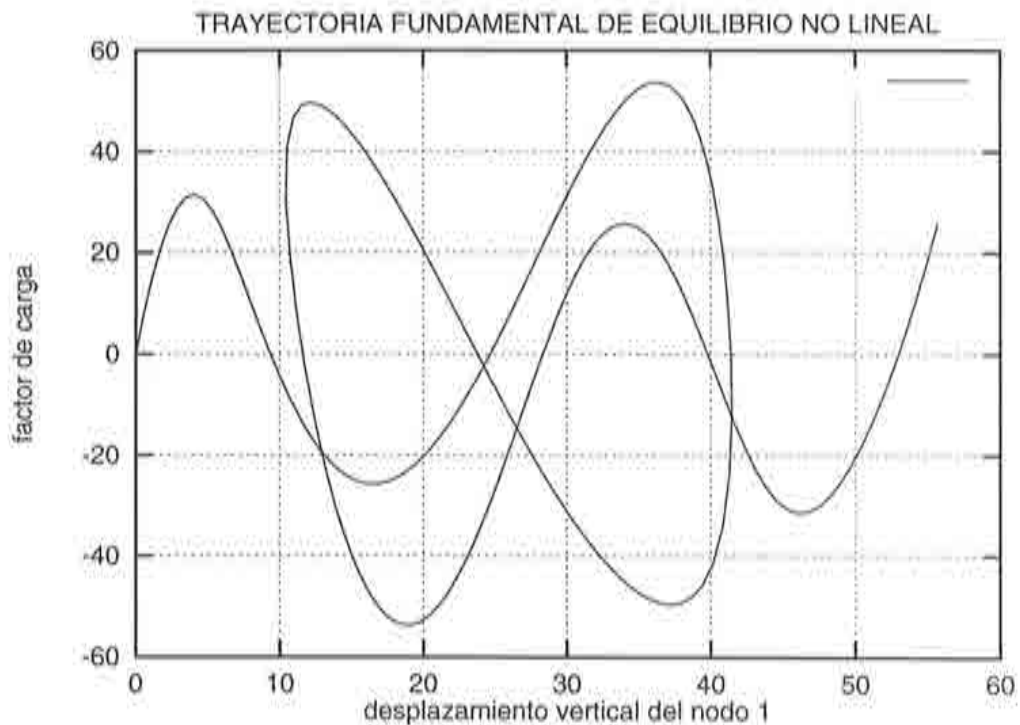


Figura 6.18 Estructura articulada espacial en forma de cúpula con 25 nodos y 60 elementos. Trayectoria fundamental de equilibrio obtenida con el algoritmo predictor-corrector del Cuadro 5.1 utilizando diferentes matrices secantes incrementales y la matriz tangente. Los resultados coinciden en todos los casos

no se observan respuestas diferentes al adoptar las distintas matrices secantes o la matriz tangente. Se puede observar la complejidad de la respuesta de este modelo, que se caracteriza por una fuerte no linealidad geométrica con varios puntos límite y puntos de bifurcación. En la Tabla 6.3c se presentan el número de iteraciones totales necesarias para seguir la respuesta en dicho rango de desplazamientos, además del promedio de iteraciones por incremento de carga. Puede observarse que no hay diferencias entre estos valores para las distintas matrices secantes. Se aprecia, también, que el algoritmo de resolución adoptando las distintas matrices secantes utiliza prácticamente una iteración más por incremento que el método de Newton-Raphson.

${}^t_0\mathbf{K}_T$	${}^t_0\mathbf{K}_{S_1}$ ($\alpha = 1/2, \beta = 0$)	${}^t_0\mathbf{K}_{S_2}$ ($\alpha = 1/2, \beta = 2/3$)	${}^t_0\mathbf{K}_{S_3}$ ($\alpha = 1/2, \beta = 1$)
727	922	922	921
3.93	4.98	4.98	4.98

Tabla 6.3c Estructura articulada espacial en forma de cúpula con 25 nodos sometida a fuerzas puntuales verticales en seis nodos. Modelo constitutivo hiperelástico material, descripción Lagrangiana Total y TOL= 10^{-12} . Número total de iteraciones en 185 incrementos de carga y promedio de iteraciones por incremento para distintas matrices secantes

Para estudiar la tasa de convergencia del algoritmo del Cuadro 5.1 utilizando las distintas matrices secantes anteriormente comentadas, se adopta la siguiente expresión

$$p = \frac{\ln \epsilon^{(k)} - \ln \epsilon^{(k-1)}}{\ln \epsilon^{(k-1)} - \ln \epsilon^{(k-2)}} = \frac{\ln \left(\frac{\epsilon^{(k)}}{\epsilon^{(k-1)}} \right)}{\ln \left(\frac{\epsilon^{(k-1)}}{\epsilon^{(k-2)}} \right)} \quad (6.3.1)$$

donde p es el estimador de la tasa de convergencia, ϵ es la norma del error en fuerzas residuales definida en (3.6.6) y k es la k -ésima iteración de la fase correctora del esquema predictor-corrector. El estimador p se basa en la norma del error evaluada en 3 iteraciones consecutivas.

Se puede clasificar la tasa de convergencia p de acuerdo con los siguientes valores asintóticos de p :

$$\begin{aligned} \text{Convergencia lineal} & : p \in [1.0, 1.1) \\ \text{Convergencia superlineal} & : p \in [1.1, 1.8] \\ \text{Convergencia cuadrática} & : p > 1.8 \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

Para más detalles respecto a las expresiones (6.3.1) y (6.3.2) consultar la referencia (HAUGEN [1994], cap. 3), de donde se han extraído dichas expresiones.

ITER	${}^t_0\mathbf{K}_T$	${}^t_0\mathbf{K}_{S_1}$ ($\alpha = 1/2, \beta = 0$)	${}^t_0\mathbf{K}_{S_2}$ ($\alpha = 1/2, \beta = 2/3$)	${}^t_0\mathbf{K}_{S_3}$ ($\alpha = 1/2, \beta = 1$)
1	0.28999D+00	0.39795D+00	0.39795D+00	0.39795D+00
2	0.11724D-02	0.66077D-01	0.66066D-01	0.66061D-01
3	0.13481D-06	0.21992D-02	0.21991D-02	0.21990D-02
4	0.40868D-14	0.15903D-04	0.15902D-04	0.15902D-04
5		0.38882D-08	0.38881D-08	0.38881D-08
6		0.78801D-14	0.10149D-13	0.12280D-13

Tabla 6.3d Estructura articulada espacial en forma de cúpula con 25 nodos sometida a fuerzas puntuales verticales en seis nodos. Modelo constitutivo hiperelástico material y descripción Lagrangiana Total. Norma del error en fuerzas residuales definida en (3.6.6) en el paso de carga 115 con TOL= 10^{-12}

En la Tabla 6.3d se muestra la norma del error en fuerzas residuales en la fase correctora del paso de carga 115 para las distintas matrices secantes y la matriz tangente. Como se ha comentado anteriormente, se ha adoptado una tolerancia para la convergencia de TOL= 10^{-12} . Se ha elegido el paso de carga 115 simplemente porque fue en este paso donde fue necesario un mayor número de iteraciones para lograr la convergencia con la tolerancia adoptada. Tomando para cada matriz la norma del error ϵ en las tres últimas iteraciones de la Tabla 6.3d y aplicando las expresiones (6.3.1) y (6.3.2) se obtienen los siguientes resultados:

${}^t_0\mathbf{K}_T$:	$p = 1.909$	\implies	<i>conv. cuadrática</i>
${}^t_0\mathbf{K}_{S_1}$:	$p = 1.576$	\implies	<i>conv. superlineal</i>
${}^t_0\mathbf{K}_{S_2}$:	$p = 1.546$	\implies	<i>conv. superlineal</i>
${}^t_0\mathbf{K}_{S_3}$:	$p = 1.523$	\implies	<i>conv. superlineal</i>

Simplemente, se analiza el comportamiento precrítico de este modelo a través de los métodos *DC* y *EI*. Aquí, se aplican ambos métodos con la estrategia de *predicción paso a paso*. Con este fin, se ha utilizado el método de control de la respuesta con las siguientes características:

- ecuación de coacción: control de desplazamiento (se ha controlado la componente vertical del desplazamiento del nodo 1)
- longitud de arco constante: -0.125
- tolerancia para la convergencia: 10^{-5}
- número total de incrementos: 80
- esquema predictor-corrector: Newton Raphson (matriz de rigidez tangente)

- descripción Lagrangiana Total
- modelo constitutivo hiperelástico lineal material

En la Figura 6.19a se muestran las distintas curvas carga-desplazamiento obtenidas por medio de los *métodos DC y EI*. Las curvas CA, DA y FA resultan de la aplicación del *método DC*, mientras que la curva EA resulta del *método EI*. Los puntos A, BP y PL corresponden a dos puntos de bifurcación y a un punto límite, respectivamente. La curva DA representa los valores de la carga de pandeo estimada a lo largo de la rama precrítica de equilibrio. La curva CA expresa los valores del desplazamiento crítico estimados paso a paso. Finalmente, la curva FA expresa la relación entre los valores estimados para la carga y desplazamientos críticos a lo largo de la rama primaria de equilibrio precrítico. Por otro lado, la curva EA representa los valores estimados para la carga de pandeo utilizando el *método EI*. Se observa que las predicciones para la carga crítica realizadas con el *método DC* (curva DA) son mejores que las predicciones realizadas con el *método EI* (curva EA). Naturalmente, ambos métodos convergen al valor de la carga de pandeo cuando se hacen predicciones en la vecindad del punto de bifurcación A.

La trayectoria secundaria de equilibrio (rama bifurcada curva AB), ha sido obtenida a través de la imposición de una pequeña perturbación en el vector de cargas nodales. Dicha perturbación es una carga aplicada en el sentido positivo del eje- x de la estructura y de un valor igual $1/5$ de las cargas verticales aplicadas en los nodos 8-13.

En la Figura 6.19b se muestra la variación del menor autovalor y el determinante de ${}^t_0\mathbf{K}_T$ con el factor de carga. Obsérvese que estos parámetros se anulan cuando la matriz ${}^t_0\mathbf{K}_T$ se hace singular. Estas funciones de prueba son las definidas en (5.8.7b) y (5.8.11).

En la Figura 6.20 se presenta la variación con la carga de los menores autovalores de los problemas de valores propios definidos en (4.4.16) y (4.5.2). Se observa que el menor autovalor del problema definido en (4.4.16), (curva CA), converge asintóticamente a cero cuando la carga se aproxima al valor de la carga crítica. Por otro lado, el menor autovalor correspondiente al *método EI*, (curva EA), converge a uno. Este comportamiento observado a lo largo de la rama de equilibrio precrítico coincide con lo esperado debido a la definición dada para estos parámetros (ρ y $\bar{\lambda}$) en el Capítulo 4.

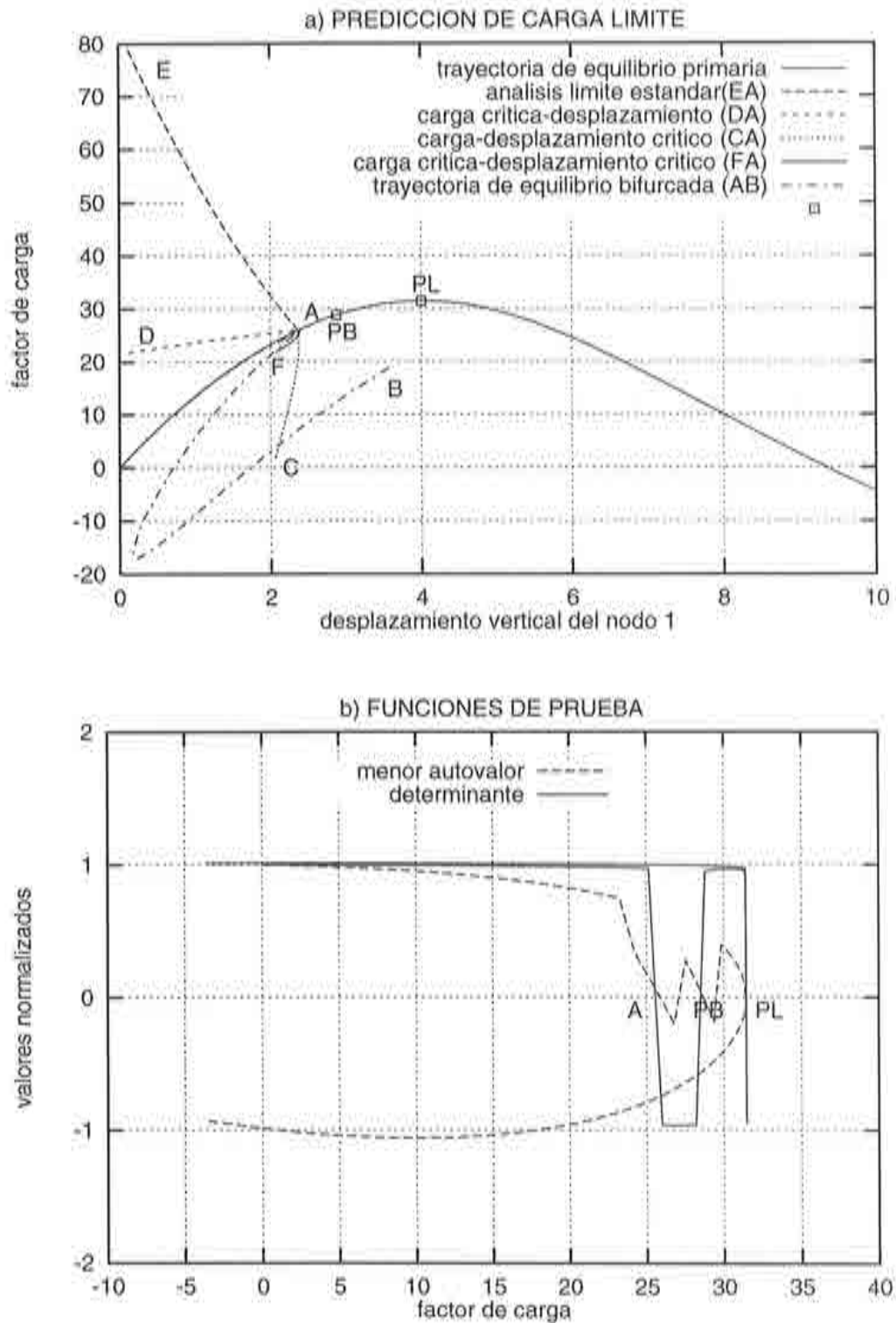


Figura 6.19 Estructura articulada espacial en forma de cúpula. a) Predicción paso a paso de la carga límite. b) Detección de puntos críticos a través de funciones de prueba

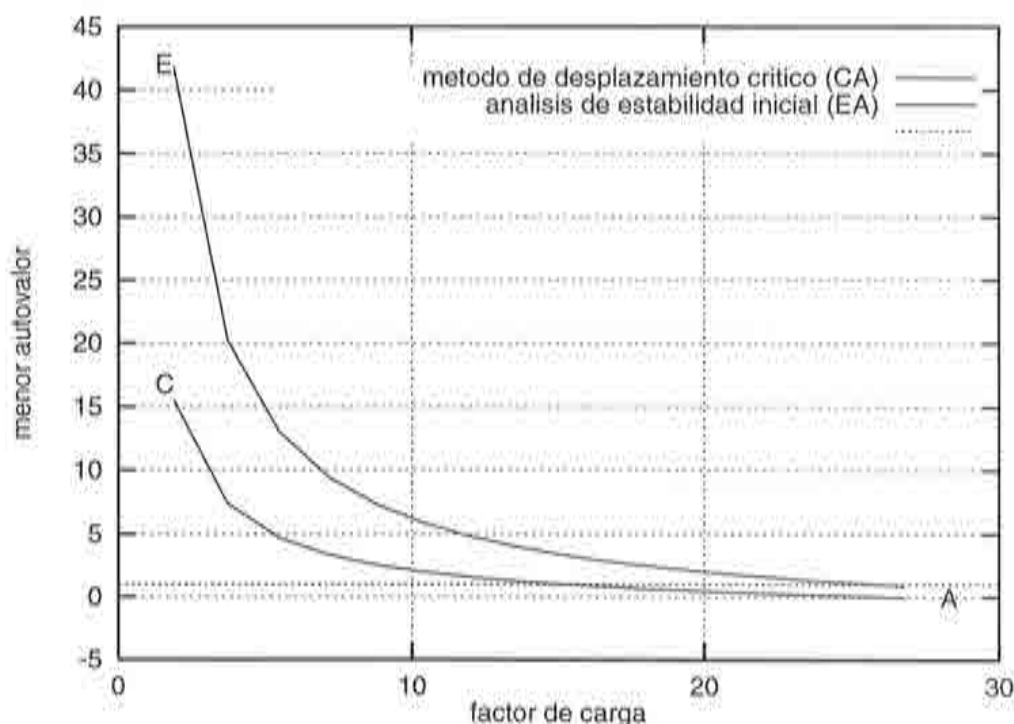


Figura 6.20 Evolución del menor autovalor de los sistemas (4.4.16) y (4.5.2) a lo largo de la trayectoria precrítica de equilibrio

Predicción	Método de Desplazamiento Crítico Estrategia de solución: II		Análisis de Estabilidad Inicial (4.5.2)
	${}^t_w w_1$	${}^t_w f_{11}$	${}^t_w f_{11}$
Inicial	-2.062 (12.56%)	21.777 (15.89%)	79.005 (205.14%)
En la vecindad del punto crítico	-2.394 (1.52%)	26.097 (0.80%)	25.776 (0.44%)

Tabla 6.3e Estructura articulada espacial en forma de cúpula con 25 nodos sometida a fuerzas puntuales verticales en seis nodos. Modelo constitutivo hiperelástico material y descripción Lagrangiana Total. Los números entre paréntesis son porcentajes del error respecto al valor obtenido a través del Método Indirecto: ${}^t_w w_1 = -2.358$ y ${}^t_w f_{11} = 25.891$

En la Tabla 6.3e se presentan los valores estimados a través de los *métodos DC y EI* para la carga crítica de bifurcación. Se trata de valores predichos a partir de una configuración de equilibrio cercana a la configuración indeformada, y en otra configuración de equilibrio en la vecindad del punto crítico. Estos valores se comparan con los valores de carga y desplazamiento crítico obtenido con el *método indirecto*. Se ha utilizado como parámetro de la función de prueba el menor autovalor de ${}^t_0 \mathbf{K}_T$. Para determinar los valores de la carga y del desplazamiento críticos se ha utilizado la interpolación lineal definida en (5.9.2).

Puede observarse en dicha tabla que las predicciones iniciales para la carga y el desplazamiento críticos realizadas con el *método DC* son buenas, y, además, que la carga crítica predicha en el paso inicial con el *método DC* es mejor que el valor obtenido con el *método EI*. Para la predicción en la vecindad del punto crítico ambos métodos se obtienen buenos resultados.

Incr. de Carga	Método de Desplazamiento Crítico Estrategia de solución: III		Análisis de Estabilidad Inicial (4.5.2)
	${}^t w_1$	${}^t f_{c1}$	${}^t f_{c1}$
1	-2.05 (13.06%)	21.71 (16.15%)	79.79 (208.18%)
2	-2.38 (0.93%)	25.34 (2.13%)	33.35 (28.81%)
3	-2.36 (0.08%)	25.96 (0.27%)	24.92 (3.75%)

Tabla 6.3f Estructura articulada espacial en forma de cúpula con 25 nodos sometida a fuerzas puntuales verticales en seis nodos. Modelo constitutivo hiperelástico material. Los números entre paréntesis son porcentajes del error respecto al valor obtenido a través del Método Indirecto: ${}^t w_1 = -2.358$ y ${}^t f_{c1} = 25.891$

Por último, se presentan en la Tabla 6.3f las predicciones para la carga y desplazamiento críticos calculadas con los *métodos DC y EI* utilizando la *predicción paso a paso mejorada*. Se observa que sólo con tres incrementos de carga se han obtenido buenos resultados con ambos métodos. Es remarcable que después del primer incremento de carga el *método DC* predice tanto el desplazamiento como la carga crítica con un error inferior al 17%. Dicho error disminuye a menos de 2.5% en el segundo incremento de carga.

6.4 TIPOLOGÍAS ESTRUCTURALES ANALIZADAS CON ELEMENTOS DE SÓLIDO 2D

En este apartado se analizan arcos con elementos de sólido 2D. Las matrices esenciales para estos elementos se presentan en el Anexo A.4. El elemento escogido en todo los casos es el cuadrilátero Serendípito de 8 nodos. Para evaluar las matrices de rigidez tangente y secante y los vectores de fuerzas internas y residuales de este elemento se utiliza una integración numérica con una cuadratura de Gauss-Legendre 2×2 .

6.4.1 Arco circular rebajado biempotrado

Se considera un arco rebajado de directriz circular, con ambos extremos empotrados, sometido a la acción de una carga vertical en la clave. Las características geométricas y propiedades mecánicas del arco se describen en la Figura 6.21.

Debido a la simetría de la deformada del arco se considera únicamente la mitad del arco, que ha sido discretizada en diez elementos isoparamétricos de 8 nodos.

Esta estructura ha sido estudiado por DAWE [1971] y posteriormente por OLIVER [1982]. Presenta una situación de inestabilidad representada por *el cambio de forma hacia delante (snap-trough)* que puede observarse en la curva fuerza-desplazamiento de la clave del arco (Figura 6.22a). La carga límite y el desplazamiento en la clave correspondiente a esta carga, de acuerdo con la referencia OLIVER [1982], son $P_{límite} = 160 \text{ N}$ y $v_{clave} = 10 \text{ mm}$, respectivamente.

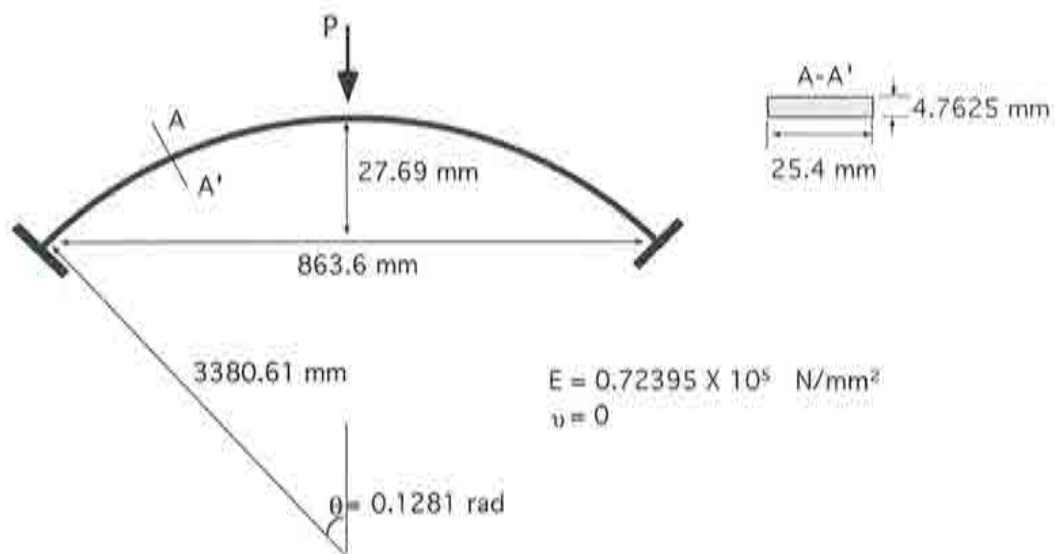


Figura 6.21 Arco circular rebajado biempotrado. Características geométricas y propiedades mecánicas

Para obtener la trayectoria fundamental de equilibrio y las demás curvas resultantes de la aplicación de los *métodos DC y EI* para predecir la carga de inestabilidad, se ha utilizado el método de control de la respuesta con las siguientes características:

- ecuación de coacción: control de desplazamiento (se ha controlado la componente vertical del desplazamiento en la clave del arco)
- longitud de arco constante: -0.5
- tolerancia para la convergencia: 10^{-5}
- número total de incrementos: 90
- esquema predictor-corrector: Newton Raphson (matriz de rigidez tangente)
- descripción Lagrangiana Total

- modelo constitutivo hiperelástico lineal material

Para determinar la carga y desplazamiento críticos se aplican los *métodos DC y EI* en una estrategia de predicción paso a paso, definida conforme el Apartado 4.5.2 del Capítulo 4. Con el *método EI* se ha obtenido la curva EB, ver la Figura 6.22a. Dicha curva expresa la variación de la carga límite estimada con el desplazamiento. El punto E es la predicción inicial y el punto B la predicción final. La predicción inicial se refiere a una configuración de equilibrio cercana a la indeformada, mientras se calcula la predicción final respecto a una configuración de equilibrio en la vecindad del estado crítico. Aplicando el *método DC* se obtienen varias curvas. La curva CD expresa la variación de la carga crítica con el desplazamiento en la clave del arco. La curva AB representa la relación entre el desplazamiento crítico estimado y la carga aplicada. La curva CB expresa la relación entre los valores estimados para la carga y el desplazamiento críticos. Obsérvese que las predicciones de la carga límite a través del *método DC* (curvas CB y DB), son mejores que las del *método EI* (curva EB).

Para detectar el punto singular se ha controlado el menor autovalor, el determinante y el menor pivote de la matriz de rigidez tangente. En la Figura 6.22b se muestran las variaciones de estos parámetros con la carga aplicada. Se puede observar que estos parámetros se anulan (puntos A y B) cuando la matriz de rigidez se torna singular.

En la Tabla 6.4a se muestran los valores estimados para la carga y desplazamiento críticos utilizando la estrategia de *predicción paso a paso* y los *métodos DC y EI*. Estos resultados se comparan con los obtenidos con el *método indirecto* a través de la función de prueba respecto al menor autovalor de ${}^t_0\mathbf{K}_T$. Nótese que la predicción inicial para la carga crítica realizada con el *método DC* es bastante mejor que la predicción con el *método EI*. En la vecindad del estado crítico ambos métodos obtienen valores muy próximos al valor de la carga límite.

En la Figura 6.23 se muestran las curvas que expresan la variación del menor autovalor, correspondientes a los sistemas definidos en las ecuaciones (4.4.16) y (4.5.2), con la carga. Puede observarse que el menor autovalor del problema de valores propios (4.4.16) del *método DC* converge asintóticamente a cero cuando la carga estimada converge al valor de la carga crítica. Por otro lado, el menor autovalor del problema de valores propios en (4.5.2) del *método EI* converge asintóticamente a uno. Estos resultados están de acuerdo con las definiciones dadas para estos parámetros en los Apartados 4.4.5 y 4.5.2, para los *métodos DC y EI*, respectivamente.

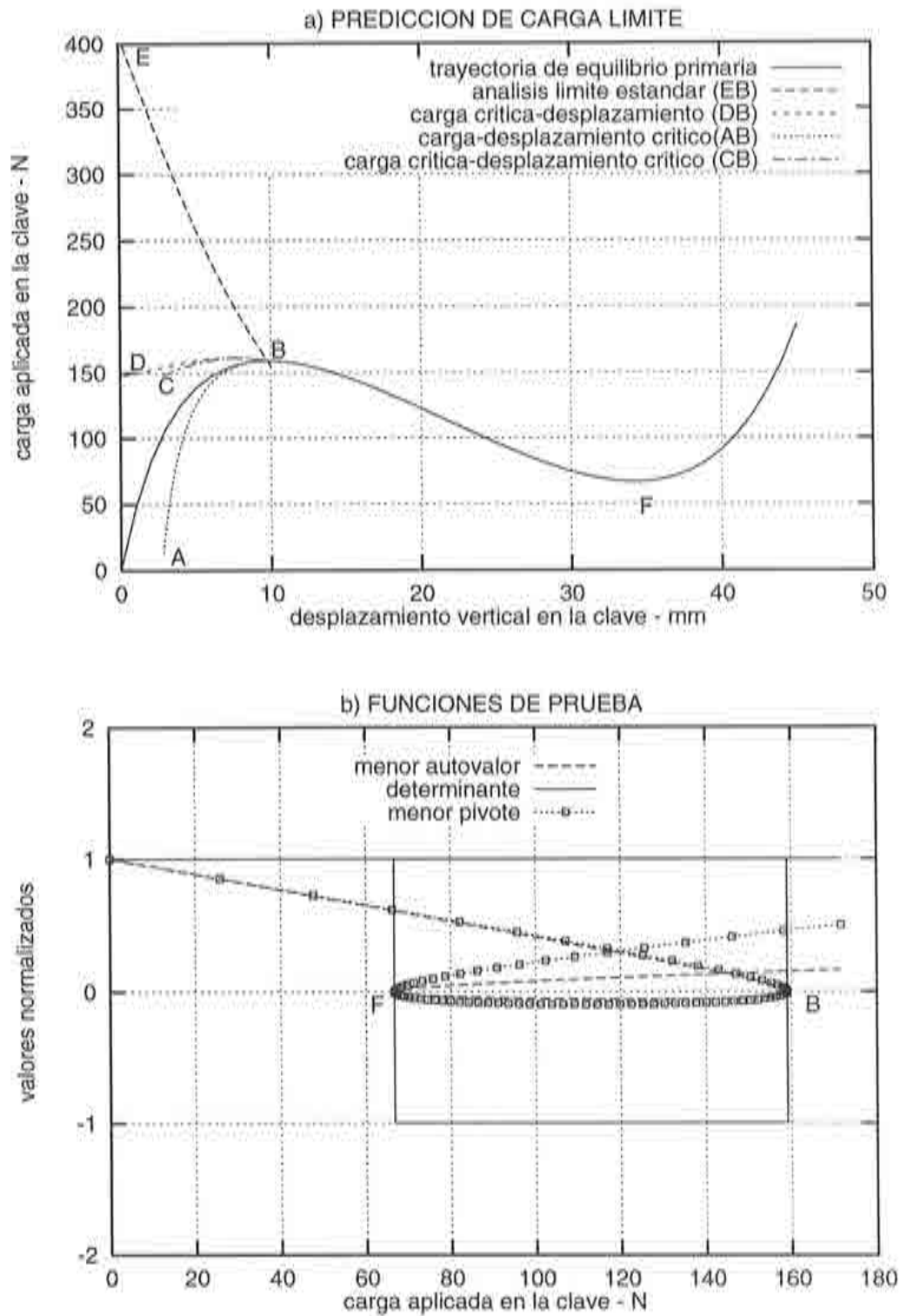


Figura 6.22 Arco circular rebajado biempotrado. a) Predicción paso a paso de la carga límite, b) Detección de puntos críticos a través de funciones de prueba

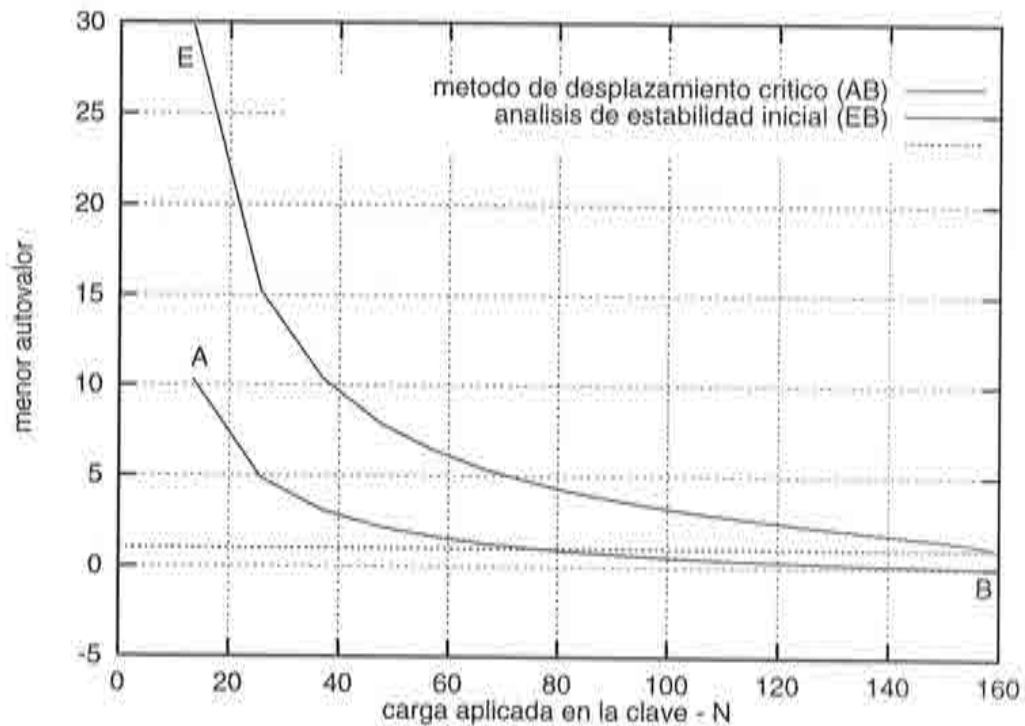


Figura 6.23 Evolución del menor autovalor de los sistemas (4.4.16) y (4.5.2) a lo largo de la trayectoria precrítica de equilibrio

Predicción	Método de Desplazamiento Crítico Estrategia de solución: II		Análisis de Estabilidad Inicial (4.5.2)
	${}^{t_e}v_{clave}$ (mm)	${}^{t_e}f_{clave}$ (N)	${}^{t_e}f_{clave}$ (N)
Inicial	-2.828 (71.72%)	148.367 (6.73%)	398.914 (150.76%)
En la vecindad del punto crítico	-9.751 (2.49%)	159.138 (0.04%)	159.5 (0.26%)

Tabla 6.4a Arco circular rebajado biempotrado sometido a una fuerza puntual vertical en la clave. Modelo constitutivo hiperelástico material y descripción Lagrangiana Total. Los números entre paréntesis son porcentajes del error respecto al valor obtenido a través del Método Indirecto: ${}^{t_e}v_{clave} = -10.0$ mm y ${}^{t_e}f_{clave} = 159.08$ N

6.4.2 Arco circular de gran altura biapoyado

Se trata de un arco de gran altura con directriz circular; sometido a la acción de una fuerza vertical puntual actuando en la clave. Sus extremos se encuentran simplemente apoyados. En la Figura 6.24 se describen las características geométricas del arco, sus propiedades mecánicas y la malla de elementos finitos utilizada. Se ha discretizado la totalidad del arco con diez elementos isoparamétricos de 8 nodos.

Este modelo presenta dos formas de pandeo: pandeo simétrico con cambio de forma ("snap through") para una carga límite de $P_{cr} = 15.2 EI/R^2$, y pandeo antisimétrico con bifurcación a un nivel de carga $P_{cr} = 13.0 EI/R^2$ y el correspondiente desplazamiento vertical en la clave $v_{crit} = 108R$. Estos resultados analíticos fueron extraídos de las referencias HUDDLESTON [1968] y DA DEPPO [1969]. El comportamiento postcrítico en ambas formas de pandeo ha sido estudiado extensivamente por varios autores (CONNOR [1968], SHARIFI [1971], WOOD [1977], OLIVER [1982] y KOUHIA [1995]).

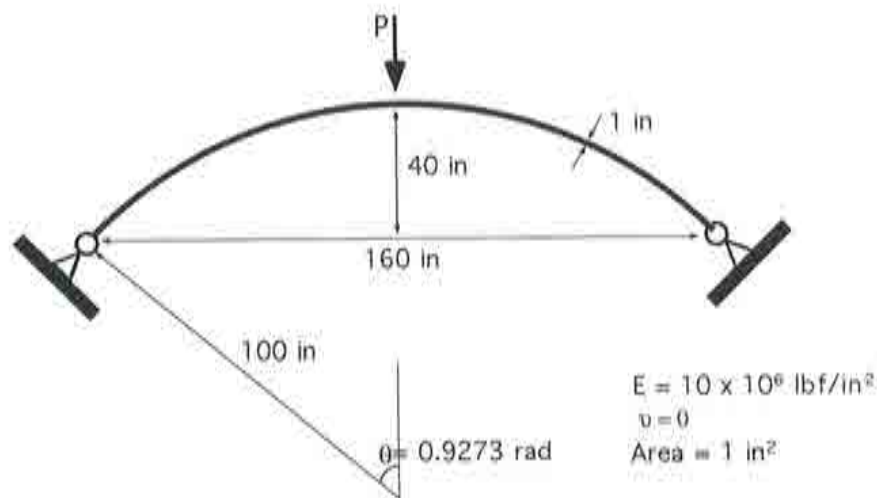


Figura 6.24 Arco circular de gran altura biapoyado. Características geométricas y propiedades mecánicas

Para obtener las trayectorias fundamental y secundaria de esta estructura, así como las curvas de predicción para la carga y desplazamiento críticos se ha utilizado el método de control de la respuesta con las siguientes características:

- ecuación de coacción: control de desplazamiento. Se ha controlado la componente vertical del desplazamiento en la clave del arco
- longitud de arco constante: -0.5
- tolerancia para la convergencia: 10^{-5}
- número total de incrementos: 80
- esquema predictor-corrector: Newton Raphson (matriz de rigidez tangente)
- descripción Lagrangiana Total
- modelo constitutivo hiperelástico lineal material

Para obtener la trayectoria de equilibrio secundaria (bifurcada) se ha aplicado una fuerza puntual horizontal en la clave del arco en el sentido positivo del eje- x . De esta manera, se fuerza el modo de deformación antisimétrico correspondiente al modo de pandeo del arco. La magnitud de dicha fuerza es $1/100$ del valor de la fuerza vertical aplicada en la clave del arco, manteniéndose las características del método de control de la respuesta, anteriormente mencionadas.

El análisis del comportamiento precrítico de esta estructura se basa en la predicción de la carga de bifurcación y del correspondiente modo de pandeo a través de los *métodos DC y EI*. Se adopta como estrategia de solución para ambos métodos la *estrategia de predicción paso a paso*. En la Figura 6.25a se muestran las distintas curvas de carga-desplazamiento en el plano (v_k, λ) . Las curvas AB, CB y DB son curvas obtenidas aplicando el *método DC*. El significado de cada curva ya se ha comentado en los ejemplos anteriores. Es importante destacar en este ejemplo, el buen comportamiento del *método EI*. Con este método se ha obtenido una buena predicción inicial (punto E), a pesar del comportamiento precrítico no lineal de la estructura. Por otro lado, la predicción del modo de deformación crítico a través del *método DC* (curva AB), no ha sido bueno, o mejor dicho, no ha sido lo esperado. Dentro del contexto del *método DC* se puede interpretar, a través de la curva AB, que las configuraciones de equilibrio en el rango precrítico están muy cerca de la configuración de equilibrio inestable. Es decir, que para pequeñas perturbaciones (parámetro ρ) en el modo de deformación de la estructura, esta alcanza el estado crítico. Por otro lado, se puede observar que las predicciones para la carga de pandeo, son buenas (curvas CB y DB). El punto C indica la predicción inicial y el punto B la predicción final.

Cabe comentar que se han analizado varios arcos de directriz circular de gran altura con distintas condiciones de borde. En todos ellos la predicción del modo de deformación crítico ha sido idéntica a lo observado en este ejemplo (ver la curva AB). Sin embargo, en todos los casos se han obtenido buenas predicciones para la carga crítica utilizando dicho modo de deformación crítico estimado. De acuerdo con la experiencia numérica en este tipo de tipología estructural (arcos

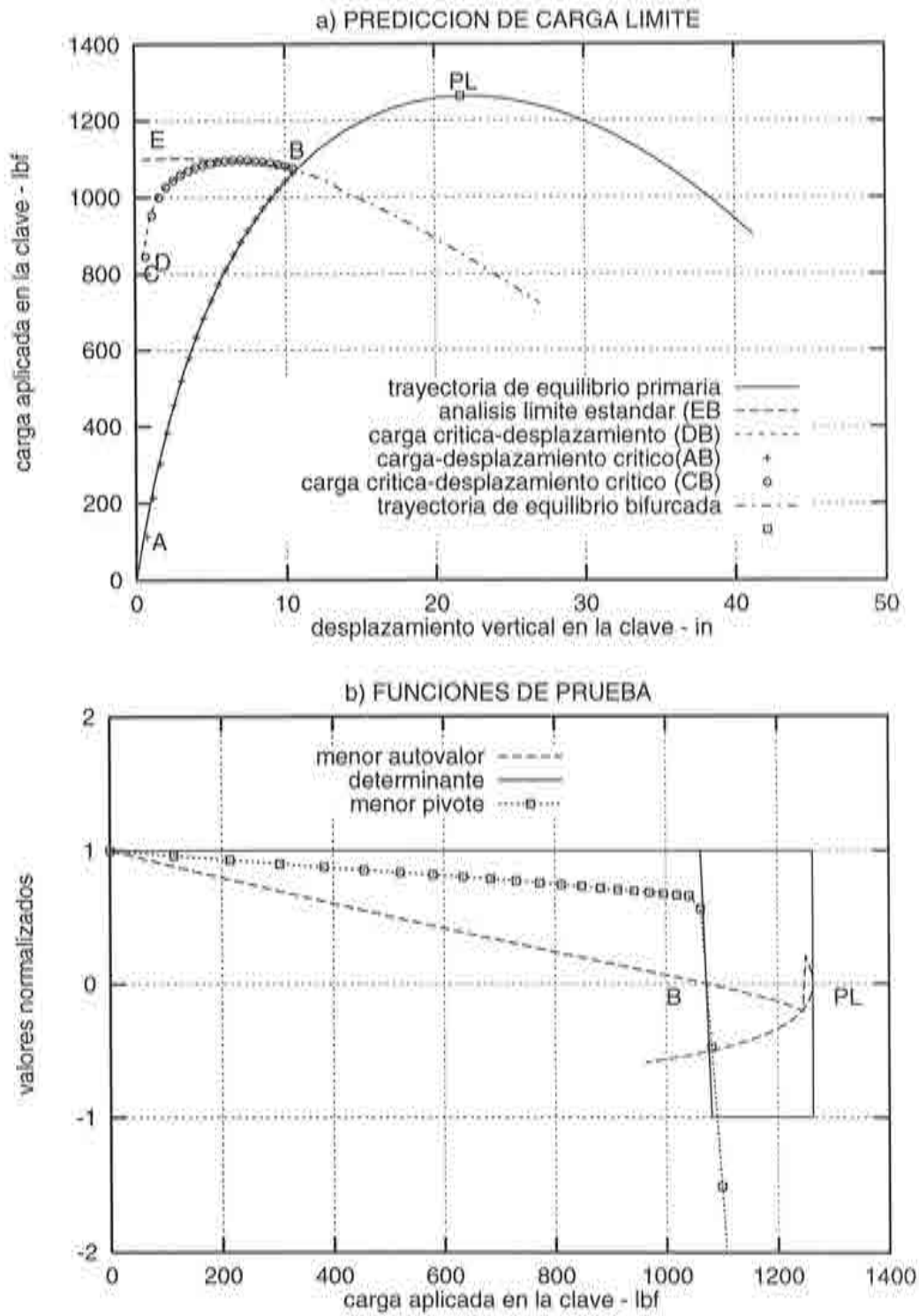


Figura 6.25 Arco circular de gran altura biapoyado. a) Predicción paso a paso de la carga límite. b) Detección de puntos críticos a través de funciones de prueba

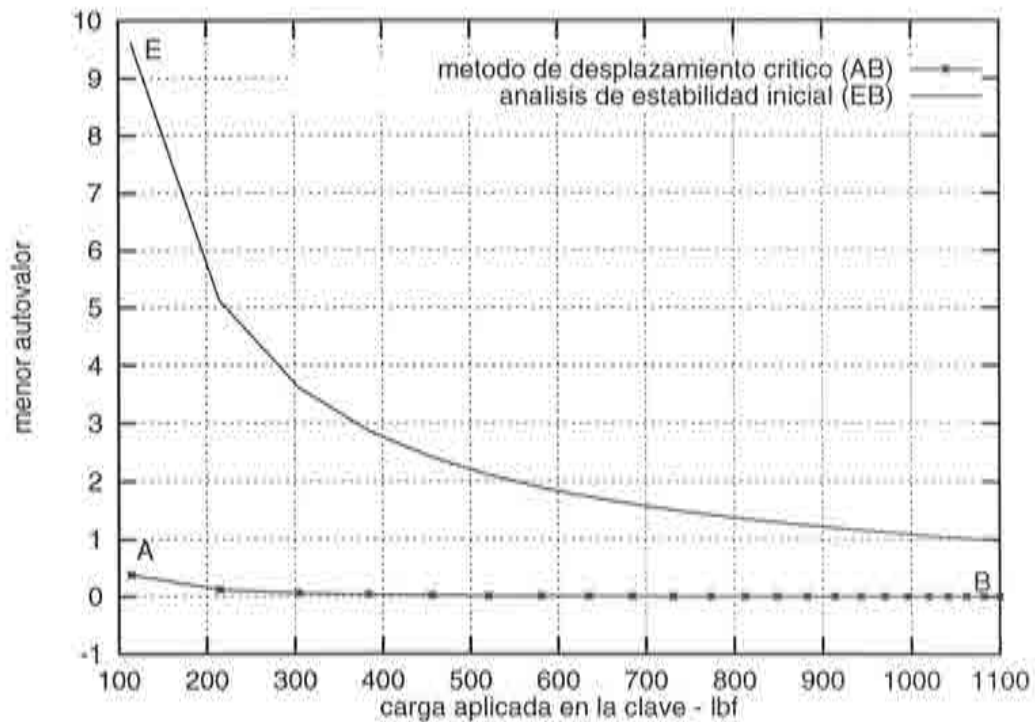


Figura 6.26 Evolución del menor autovalor de los sistemas (4.4.16) y (4.5.2) a lo largo de la trayectoria precrítica de equilibrio

circulares de gran altura), se ha observado que en estos ejemplos la predicción para el desplazamiento crítico con el *método DC* no es tan buena como en los ejemplos anteriores.

En la Figura 6.25b se muestran las variaciones del menor autovalor, del determinante y del menor pivote de ${}^t_0\mathbf{K}_T$ con la carga aplicada en la clave del arco. Se detecta el valor de la carga correspondiente al punto de bifurcación (punto B) y el valor de la carga límite, correspondiente al punto PL. En estos puntos se puede observar que dichos parámetros se anulan.

En la Figura 6.26 se muestran las curvas de las variaciones de los menores autovalores de los problemas de valores propios que se utilizan en los *métodos DC* y *EI* respecto a la carga aplicada en clave del arco. Puede observarse la pequeña magnitud (entre 0.5 y 0) del menor valor propio obtenido con el *método DC* a través de la ecuación (4.4.16) (curva AB) para cargas en el rango precrítico. Además, se aprecia que ambos autovalores convergen asintóticamente al valor cero y uno, respectivamente.

Predicción	Método de Desplazamiento Crítico Estrategia de solución: II		Análisis de Estabilidad Inicial (4.5.2)
	${}^t e v_{crítica}$ (in)	${}^t e f_{crítica}$ (lbf)	${}^t e f_{crítica}$ (lbf)
Inicial	-0.688 (99.72%)	845.16 (21.24%)	1098.64 (2.37%)
En la vecindad del punto crítico	-10.5 (1.52%)	1076.02 (0.27%)	1075.16 (0.19%)

Tabla 6.4b Arco circular biapoyado sometido a una fuerza puntual vertical en la clave. Modelo constitutivo hiperelástico material y descripción Lagrangiana Total. Los números entre paréntesis son porcentajes del error respecto al valor obtenido a través del Método Indirecto: ${}^t e v_{crítica} = -10.66$ in y ${}^t e f_{crítica} = 1073.12$ lbf

En la Tabla 6.4b se presentan los valores de las predicciones para la carga de pandeo y el desplazamiento crítico obtenido a través de los métodos *DC* y *EI*. En dicha tabla se comparan estos valores con los resultados calculados con el método indirecto a través de los parámetros de ${}^t_0 \mathbf{K}_T$, anteriormente mencionados. Se puede observar que el método *EI* obtiene una buena predicción inicial para la carga de pandeo. Por otro lado, también, se puede ver la mala predicción inicial del desplazamiento crítico obtenida con el método *DC*.

6.5 TIPOLOGÍAS ESTRUCTURALES ANALIZADAS CON ELEMENTOS DE SÓLIDO 3D

En este apartado se analizan láminas cilíndricas con elementos de sólido 3D. Las expresiones fundamentales de estos elementos se presentan en el Capítulo 3. El elemento 3D escogido en todos los casos es el hexaedro Serendípito cuadrático de 20 nodos. Para evaluar las matrices de rigidez tangente y secante y los vectores de fuerzas internas y residuales de este elemento se utiliza una integración numérica con una cuadratura de Gauss-Legendre $3 \times 3 \times 3$.

6.5.1 Lámina cilíndrica biapoyada

Se considera un lámina cilíndrica cuyas características geométricas, propiedades mecánicas y malla se muestran en la Figura 6.27. La lámina está apoyada en sus bordes rectos, totalmente libre en los bordes curvos, y sometida a una fuerza vertical en el centro de la misma.

Debido a la doble simetría del problema, se ha analizado solamente un cuarto de lámina que ha sido discretizado en 16 elementos hexaedros isoparamétricos de 20 nodos. Este ejemplo ha sido estudiado por OLIVER [1982], SURANA [1983], SIMO [1990] y HAUGEN [1994] entre otros. Esta estructura se ha consagrado como un ejemplo de prueba estándar en los estudios de no linealidad geométrica en el contexto del método de elementos finitos. En la literatura técnica varios investigadores han utilizado este ejemplo para hacer pruebas con distintas

formulaciones de lámina y distintos algoritmos de resolución de ecuaciones no lineales. Por lo tanto, se trata de un ejemplo bien documentado en el ámbito de la mecánica no lineal del sólido.

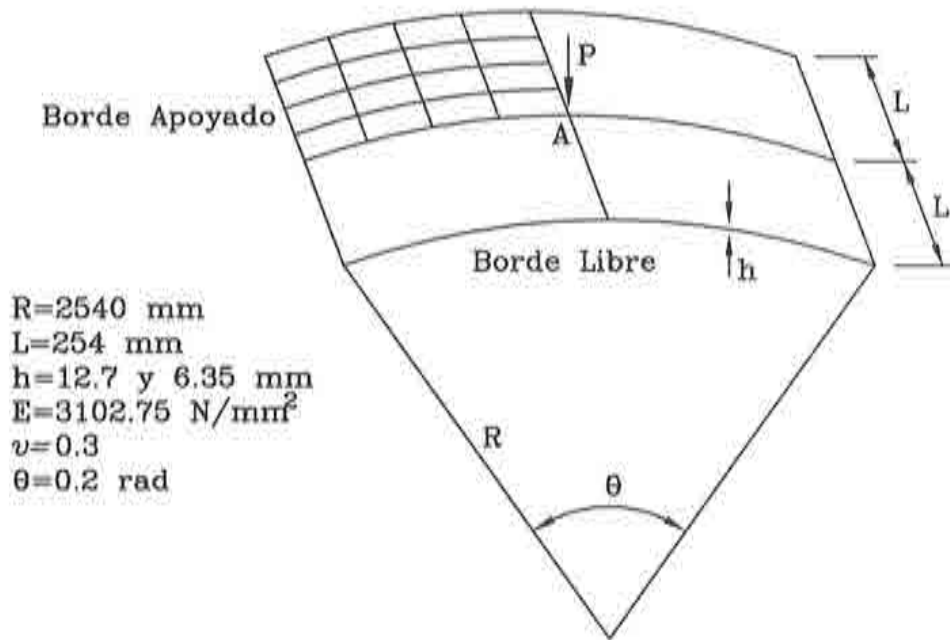


Figura 6.27 Lámina cilíndrica biapoyada. Características geométricas, propiedades mecánicas y malla de elementos finitos

El comportamiento postcrítico de esta estructura se caracteriza por la pérdida de rigidez con el consiguiente cambio de forma (snap-through). La forma del cambio de geometría de este modelo depende de su espesor. A continuación se analizan los distintos cambios de forma que se presentan para dos espesores distintos.

• **Lámina cilíndrica gruesa con comportamiento postcrítico caracterizado por un rebote hacia delante**

Para analizar esta lámina con espesor de 12.7 mm se ha utilizado el método de control de la respuesta con las siguientes características:

- ecuación de coacción: control de desplazamiento (se ha controlado la componente vertical del desplazamiento en el punto A)
- longitud de arco constante: -0.95

- tolerancia para la convergencia: 10^{-3}
- número total de incrementos: 40
- esquema predictor-corrector: Newton Raphson (matriz de rigidez tangente)
- descripción Lagrangiana Total
- modelo constitutivo hiperelástico lineal material

Para este espesor la lámina presenta un cambio de forma para un nivel de carga $P_{lim.} = 2.216$ KN (OLIVER [1982]). El fenómeno de cambio de forma se puede observar en la trayectoria de equilibrio primaria que se muestra en la Figura 6.28a. Para obtener la carga límite y el correspondiente desplazamiento crítico se han aplicado los métodos *DC* y *EI* a través de la *predicción paso a paso*. En la Figura 6.28a se presentan varias curvas proyectadas en el plano (w_A, λ_A) . Las curvas AB, CB, y DB resultan de la aplicación del método *DC*, mientras que la curva EB resulta del método *EI*. La curva AB expresa la relación entre el desplazamiento crítico estimado y la carga. El punto A corresponde a la estimación inicial del desplazamiento crítico. La curva DB expresa la relación entre la estimación de la carga crítica y desplazamiento. El punto D representa la estimación inicial de la carga límite. La curva CB expresa la relación entre los valores estimados de la carga y desplazamiento críticos. El punto C representa la estimación inicial de la carga y desplazamiento críticos. Por último, la curva EB expresa la relación entre la estimación de la carga límite y el desplazamiento obtenida por el método *EI*.

Se puede observar en la misma figura, que la predicción de la carga límite realizada con el método *DC* (curva DB), es mejor que la estimación obtenida con el método *EI* (curva EB). No obstante, cuando en la trayectoria de equilibrio primaria se hace el análisis cerca del punto límite (punto B) ambos métodos convergen al mismo valor correcto de la carga límite.

En la Figura 6.28b se muestra la variación con la carga aplicada del menor autovalor, el menor pivote y del determinante de ${}^t_0\mathbf{K}_T$. Estos parámetros se utilizan en las funciones de prueba definidas por las ecuaciones (5.9.7a), (5.8.11) y (5.8.12), respectivamente. Como se observa en la misma figura, estos parámetros se anulan cuando la matriz de rigidez tangente es singular (puntos B y F). Para calcular el valor de la carga y el desplazamiento en estos puntos se ha utilizado la interpolación lineal definida en (5.9.2) y la función de prueba basada en el menor autovalor de ${}^t_0\mathbf{K}_T$. El valor de la carga límite en el punto B es $\lambda_B = 2.213$ KN y el desplazamiento $w_B = 10.5$ mm. En el punto F, estos valores son $\lambda_F = 0.776$ KN y $w_F = 19.587$ mm.

En la Figura 6.29 se muestran dos curvas correspondientes a la variación de los menores autovalores con la carga. Estos autovalores resultan de los problemas de valores propios definidos en las ecuaciones (4.4.16) y (4.5.2). La curva AB

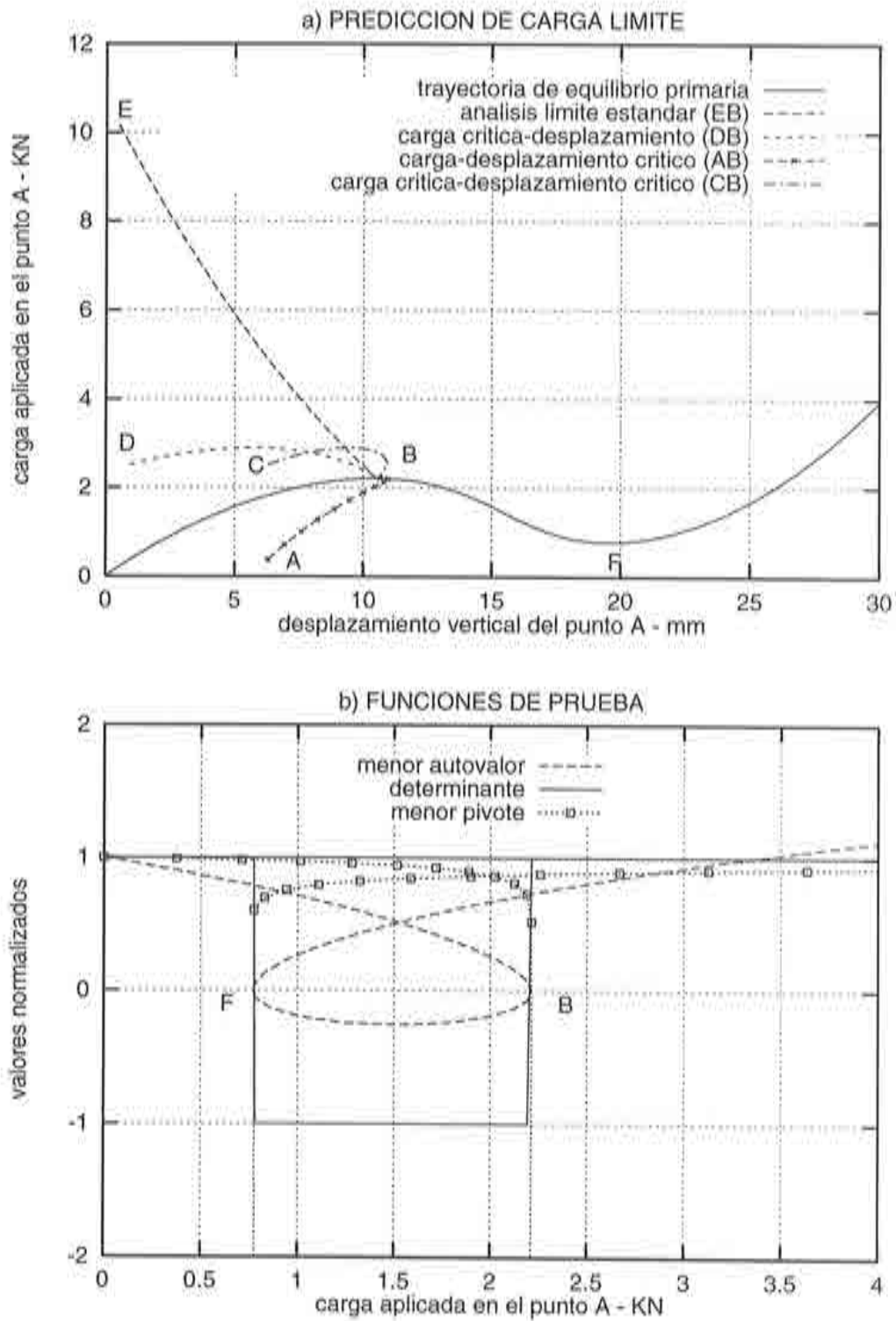


Figura 6.28 Lámina cilíndrica biapoyada ($e=12.7$ mm). a) Predicción paso a paso de la carga límite. b) Detección de puntos críticos a través de funciones de prueba

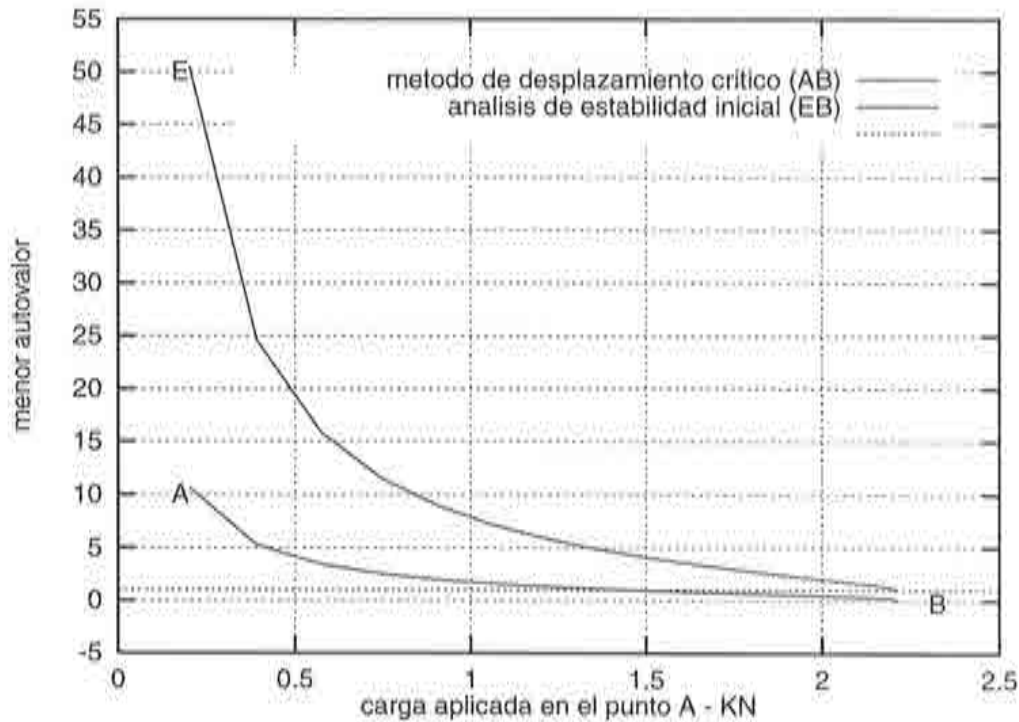


Figura 6.29 Evolución del menor autovalor de los sistemas (4.4.16) y (4.5.2) a lo largo de la trayectoria precrítica de equilibrio

expresa la variación del menor autovalor de (4.4.16) con la carga, mientras que la curva EB relaciona el menor autovalor de (4.5.2) con la carga. Ambas curvas se evalúan a lo largo de la rama de equilibrio precrítica. El comportamiento observado en estas curvas confirma lo esperado al definir los métodos DC y EI. Es decir, que el menor autovalor ρ del sistema (4.4.16) converge a cero cuando se acerca al punto crítico y el menor autovalor $\bar{\lambda}$ del sistema (4.5.2) converge a la unidad.

Predicción	Método de Desplazamiento Crítico Estrategia de solución: II		Análisis de Estabilidad Inicial (4.5.2)
	${}^t_w w_A$ (mm)	${}^t_c f_{s,A}$ (KN)	${}^t_c f_{s,A}$ (KN)
Inicial	-6.293 (40.07%)	2.521 (13.92%)	10.18 (360.01%)
En la vecindad del punto crítico	-10.66 (1.52%)	2.258 (2.03%)	2.23 (1.16%)

Tabla 6.5a Lámina cilíndrica gruesa sometida a una fuerza puntual vertical en A. Modelo constitutivo hiperelástico material y descripción Lagrangiana Total. Los números entre paréntesis son porcentajes del error respecto al valor obtenido a través del Método Indirecto: ${}^t_w w_A = -10.5$ mm y ${}^t_c f_{s,A} = 2.213$ KN

En la Tabla 6.5a se muestran los resultados de las estimaciones de la carga y el desplazamiento críticos obtenidas con los *métodos DC y EI*. Se han hecho dichas predicciones respecto a dos configuraciones de equilibrio, una cercana a la configuración inicial y la otra en la vecindad del punto crítico. Estos resultados han sido comparados con los obtenidos a través de la función de prueba basada en el menor autovalor de ${}^t_0\mathbf{K}_T$. Se puede observar que la predicción inicial para la carga límite realizada con el *método DC* es bastante mejor que la del *método EI*. En las predicciones cercanas al punto crítico ambos métodos obtienen buenos resultados siendo el *método EI* el que proporciona un resultado más preciso.

• **Lámina cilíndrica delgada con comportamiento postcrítico caracterizado por rebotes hacia delante y hacia atrás**

Para analizar la lámina cilíndrica con espesor 6.35 mm, se ha utilizado el método de control de la respuesta con las siguientes características:

- ecuación de coacción: cilíndrica; definida en (5.7.7)
- longitud de arco constante: 2.5
- tolerancia para la convergencia: 10^{-3}
- número total de incrementos: 125
- esquema predictor-corrector: Newton Raphson (matriz de rigidez tangente)
- descripción Lagrangiana Total
- modelo constitutivo hiperelástico lineal material

Cuando el espesor de la lámina se reduce a la mitad, se agudiza la forma de la trayectoria fundamental de equilibrio, como se observa en la Figura 6.30a. En este caso se produce un doble cambio de forma. El primer cambio, *hacia adelante* (snap-through) ocurre para un valor de $\lambda_B = 0.587$ KN, valor extraído de la referencia OLIVER [1982]. En este punto, al aumentar ligeramente la fuerza se produce un *salto* en los desplazamientos. A continuación, ocurre un cambio de forma *hacia atrás* (snap-back) para un valor de $w \approx 17$ mm. Al aumentar un poco el valor de dicho desplazamiento se produce un nuevo salto, incluso con cambio de signo en la fuerza de reacción.

Para obtener la carga límite y el correspondiente desplazamiento crítico se han aplicado los *métodos DC y EI* haciendo una *predicción paso a paso* para los valores críticos de la carga y desplazamiento a lo largo de la trayectoria de equilibrio precrítica. Además de la rama primaria de equilibrio, se presentan en la Figura 6.30a varias curvas que se proyectan en el plano (w_A, λ_A) . Las curvas AB, CB, y DB resultan de la aplicación del *método DC*, mientras que la curva EB resulta del *método EI*. La curva AB expresa la relación entre el desplazamiento crítico estimado y la carga. El punto A corresponde a la estimación inicial del desplazamiento crítico. La curva DB expresa la relación entre la estimación de

la carga crítica y el desplazamiento. El punto D representa la estimación inicial de la carga límite. La curva CB expresa la relación entre los valores estimados de la carga y el desplazamiento críticos. El punto C representa la estimación inicial de la carga y el desplazamiento críticos. Por último, la curva EB expresa la relación entre la estimación de la carga límite y el desplazamiento obtenida con el *método EI*.

Se puede observar en la misma figura que la predicción de la carga límite realizada con el *método DC* (curva DB), es mejor que la estimación hecha con el *método EI* (curva EB). De nuevo, cuando en la trayectoria de equilibrio primaria se hace el análisis cerca del punto límite (punto B) ambos métodos convergen al valor de la carga límite.

En la Figura 6.30b se muestra la variación con la carga aplicada del menor autovalor, el menor pivote y del determinante de ${}^t_0\mathbf{K}_T$. Estos parámetros se utilizan en las funciones de prueba definidas por las ecuaciones (5.9.7a), (5.8.11) y (5.8.12). Como se observa en la misma figura, estos parámetros se anulan cuando la matriz de rigidez tangente es singular (puntos B y F). Para calcular el valor de la carga y el desplazamiento en estos puntos se ha utilizado la interpolación lineal definida en (5.9.2) y la función de prueba basada en el menor autovalor de ${}^t_0\mathbf{K}_T$. El valor de la carga límite en el punto B es $\lambda_B = 0.6$ KN y el desplazamiento $w_B = 12.72$ mm. En el punto F, estos valores son $\lambda_F = -0.333$ KN y $w_F = 16.41$ mm.

En la Figura 6.31 se muestran dos curvas correspondientes a la variación de los menores autovalores con la carga. Estos autovalores resultan de los problemas de valores propios definidos en las ecuaciones (4.4.16) y (4.5.2). La curva AB expresa la variación del menor autovalor de (4.4.16) con la carga, mientras que la curva EB relaciona el menor autovalor de (4.5.2) con la carga. Ambas curvas expresan dichas relaciones a lo largo de la rama de equilibrio precrítica. El comportamiento observado en estas curvas confirma lo esperado al definir los *métodos DC y EI*. Es decir, que el menor autovalor ρ del sistema (4.4.16) converge a cero cuando se acerca al punto crítico y el menor autovalor λ del sistema (4.5.2) converge a la unidad.

En la Tabla 6.5b se muestran los resultados de las estimaciones de la carga y el desplazamiento críticos realizadas con los *métodos DC y EI*. Se han hecho dichas predicciones respecto a dos configuraciones de equilibrio, una cercana a la configuración inicial y la otra en la vecindad del punto crítico. Estos resultados han sido comparados con los obtenidos a través de la función de prueba basada en el menor autovalor de ${}^t_0\mathbf{K}_T$. Se puede observar que la predicción inicial para la carga límite realizada con el *método DC* es bastante mejor que la del *método EI*. En las predicciones cercanas al punto crítico con ambos métodos se obtienen buenos resultados siendo el *método DC* el que ha obtenido un resultado más preciso.

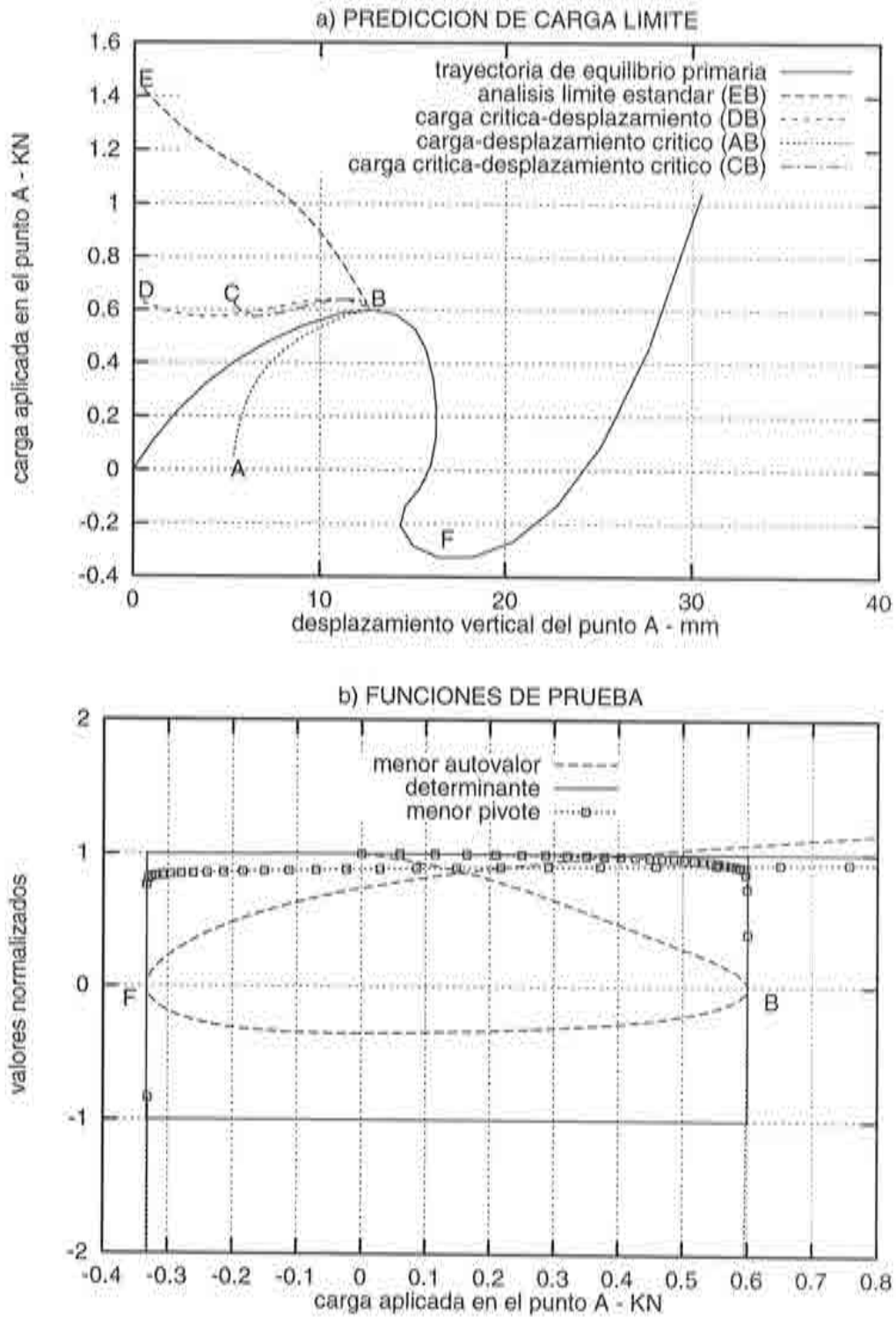


Figura 6.30 Lámina cilíndrica biapoyada ($e=6.35$ mm). a) Predicción paso a paso de la carga límite. b) Detección de puntos críticos a través de funciones de prueba

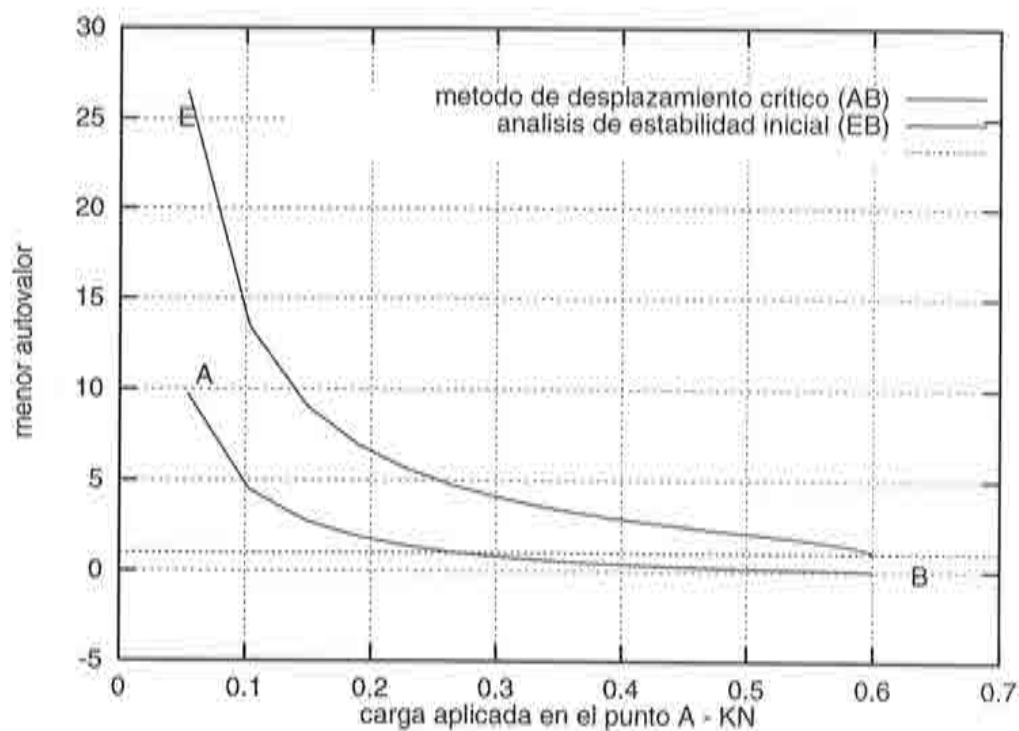


Figura 6.31 Evolución del menor autovalor de los sistemas (4.4.16) y (4.5.2) a lo largo de la trayectoria precrítica de equilibrio

Predicción	Método de Desplazamiento Crítico Estrategia de solución: II		Análisis de Estabilidad Inicial (4.5.2)
	${}^t\epsilon w_A$	${}^t\epsilon f_{r,A}$	${}^t\epsilon f_{r,A}$
Inicial	-5.377 (57.73%)	0.628 (4.67%)	1.425 (137.5%)
En la vecindad del punto crítico	-12.635 (0.67%)	0.609 (1.5%)	0.627 (4.5%)

Tabla 6.5b Lámina cilíndrica delgada sometida a una fuerza puntual vertical en A. Modelo constitutivo hiperelástico material y descripción Lagrangiana Total. Los números entre paréntesis son porcentajes del error respecto al valor obtenido a través del Método Indirecto: ${}^t\epsilon w_A = -12.72$ mm y ${}^t\epsilon f_{r,A} = 0.6$ KN

6.6 REFERENCIAS

- BATHE, K.J. and DVORKIN, E. N. [1983], On the automatic solution of nonlinear finite element equations, *Computers & Structures*, Vol. 17, nº 5-6, pp. 871-879.
- CHOONG, K.K. and HANGAI, Y. [1993], Review on methods of bifurcation analysis for geometrically nonlinear structures, *Bulletin of IASS*, Vol. 34, nº 112, pp. 133-149.
- CONNOR, J., LOGGUER, R.D., CHAN, S.C. [1968], Nonlinear analysis of elastic framed structures, *A.S.C.E. Journal, Structural Div.*
- CROLL, J.G.A. and WALKER, A.C. [1975], *Elementos de Estabilidad Structural*, Editorial Reverté, Barcelona, España.
- DA DEPPO, D.A. and SCHIMIDT, R. [1969], Side way buckling of deep circular arches under concentrated load, *J. Appl. Mech.*, Vol. 36, pp. 325-327.
- DAWE, D.J. [1971], Finite deflection analysis of shallow arches by discrete element method, *J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 3, nº 4.
- HAUGEN, B. [1994], Buckling and stability problems for thin shell structures using high performance finite elements, Ph.D., Aerospace Engineering Sciences, University of Colorado, Boulder.
- HUDDLESTON, J.V., [1968], Finite deflections and snap-through of high circular arches, *J. Appl. Mech. ASME*, Vol. 35, pp. 763-769.
- IRLES, R. [1985], Un modelo numérico para el análisis del colapso en entramados metálicos, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia.
- KONDOH, K. and ATLURI, S.N. [1985], Influence of local buckling on global instability: simplified, large deformation, post-buckling analysis of plane trusses", *Computers & Structures*, Vol. 21, nº 4, pp. 613-627.
- KOUHIA, R. and MIKKOLA, M., [1995], Strategies for structural stability analysis, in: *Advances in finite element technology*, Edited by Nils - Erik Wiberg, CIMNE, Barcelona.
- OÑATE, E. [1986], Una formulación incremental para análisis de problemas de no linealidad geométrica en estructuras por el método de los elementos finitos. *II Simposium sobre Aplicaciones del Método de los Elementos Finitos* 9-12 de junio, Barcelona.
- OLIVER, J. [1982], Una formulación cuasi-intrínseca para el estudio, por el método de los elementos finitos, de vigas, arcos, placas y láminas, sometidas a grandes corrimientos en régimen elastoplástico. Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Catalunya, Barcelona.

- PIGNATARO, M., RIZZI, N., LUONGO, A. [1991], *Stability, Bifurcation and Postcritical Behaviour of Elastic Structures*, Elsevier, Amsterdam.
- PORTIER-FERRY, M. [1987], Buckling and Post-Buckling, *Lecture Notes in Physics*, Vol. 288, Springer-Verlag.
- POWELL, G. and SIMONS, J. [1981], Improved iteration strategy for nonlinear structures, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 17, pp. 1455-1467.
- ROSEN, A. and SCHMIT, L.A. [1979], Design oriented analysis of imperfect truss structures. Part I (accurate analysis), *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 14, pp. 1309-1321.
- ROSEN, A. and SCHMIT, L.A. [1980], Design oriented analysis of imperfect truss structures. Part II (approximate analysis), *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 15, pp. 483-494.
- SHARIFI, P. and POPOV, E.P. [1971], Nonlinear buckling of sandwich arches, *J. Engng. Mech. Div. ASCE*, Vol. 97 (EM5), pp. 1397-1412.
- SIMO, J.C., FOX, D.D., RIFAI, M.S. [1990], Formulation and computational aspects of a stress resultant geometrically exact shell model, in *Computational Mechanics of Nonlinear Response of Shells*, Eds. Krätzig and Onate, Springer-Verlag.
- SURANA, K.S. [1983], Geometrically nonlinear formulation for the curved shell elements, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 19, pp. 581-615.
- WOOD, R.D. and ZIENKIEWICZ, O.C., [1977], Geometrically nonlinear finite element analysis of beams, frames, arches and axisymmetric shells, *Computers & Structures*, Vol. 7, pp. 725-735.

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN

7.1 CONCLUSIONES SOBRE EL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

Los aspectos más destacados de este trabajo, se pueden resumir en los siguientes puntos:

- 1) Se eligió la formulación Lagrangiana Generalizada para describir las ecuaciones incrementales de movimiento del sólido. Esta formulación confiere un carácter general y unificado para expresar la forma débil de las ecuaciones de movimiento a través del principio de los trabajos virtuales. De esta formulación resultan como casos particulares las formulaciones Lagrangiana Total y Actualizada. Se ha adoptado para describir las relaciones cinemáticas y estáticas en forma incremental el tensor de deformación de Green-Lagrange y el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff. Son pares conjugados energéticamente y permiten formular las ecuaciones de movimiento en presencia de grandes desplazamientos, rotaciones y deformaciones.
- 2) Se adoptó un modelo constitutivo hiperelástico que relaciona incrementos del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff con incrementos del tensor de deformaciones elásticas de Green-Lagrange. Dentro del contexto de la formulación Lagrangiana Generalizada, este modelo permite definir de manera consistente el tensor constitutivo tangente en cualquier configuración de equilibrio que se tome como referencia para describir las ecuaciones incrementales del movimiento de un sólido.
- 3) Para discretizar la forma débil de las ecuaciones incrementales del movimiento se ha utilizado el método de elementos finitos con formulación en desplazamientos. Al considerarse todos los términos no lineales en gradientes de desplazamientos en la expresión incremental de equilibrio del principio de los trabajos virtuales, se obtiene una expresión paramétrica y general de la matriz de rigidez secante incremental. Dicha matriz forma parte de la expresión de equilibrio entre incrementos de fuerzas aplicadas al sólido y los incrementos de desplazamientos corres-

pendientes. Por otro lado, al escribirse las ecuaciones de equilibrio discretizadas en la configuración indeformada, se ha obtenido la expresión paramétrica y general de la matriz de rigidez secante total. Dicha matriz forma parte de la relación de equilibrio entre las fuerzas totales aplicadas al sólido y los desplazamientos totales. Por último, cabe destacar que se obtiene la expresión estándar de la matriz de rigidez tangente en los problemas con no linealidad geométrica en la mecánica del sólido de manera directa, al desprejiciarse los terminos dependientes del gradiente de incrementos de desplazamientos en la expresión general de la matriz de rigidez secante incremental.

- 4) Se han unificado las expresiones de la matriz de rigidez secante incremental en la formulación Lagrangiana Generalizada utilizando el principio de los trabajos virtuales, con las expresiones de dicha matriz obtenidas por otros autores a través del principio de mínima energía potencial descrito en la formulación Lagrangiana Total. Por tanto, desde un punto de vista teórico, dentro de la mecánica no lineal las distintas notaciones utilizadas en uno u otro principio energético se han unificado de manera consistente.
- 5) Se ha propuesto un nuevo método para la predicción y detección de puntos críticos en el análisis de inestabilidad estructural. El método se basa en la definición de un campo de desplazamiento crítico que aproxima al modo de pandeo o al modo de deformación crítico del sistema estructural. Se determina este campo de desplazamiento imponiendo la condición de singularidad en una expresión aproximada de la matriz de rigidez tangente en la configuración de equilibrio inestable. La predicción de la carga límite se calcula a partir de la relación secante, total o incremental, entre carga y desplazamiento. Además, se han propuesto algunas estrategias de solución del método de desplazamiento crítico. Se ha demostrado la gran versatilidad y efectividad del método propuesto en varios problemas con distintos comportamientos precríticos y postcríticos para ello se han utilizado varias tipologías estructurales, tales como estructuras articuladas, vigas, arcos, marcos planos y láminas. Las estructuras articuladas 2D y 3D fueran analizadas con elementos de barras articulados 2D y 3D, respectivamente, mientras que las vigas, marcos planos y arcos fueron analizados con elementos de sólidos 2D, bajo la hipótesis de tensión plana. Finalmente, las placas y láminas se analizaron con elementos de sólidos 3D.
- 6) Se han propuesto nuevos algoritmos de resolución de sistemas de ecuaciones no lineales utilizando los conceptos de las matrices de rigidez secante incremental y total. Se trata de algoritmos distintos a los basados en una expresión numérica de la matriz de rigidez secante, como los

métodos cuasi-Newton, secante-Newton, de Broyden y los derivados del BFGS.

7.2 APORTACIONES AL ESTADO DEL CONOCIMIENTO

Como aportaciones esenciales de este trabajo se destacan las siguientes:

- a) La formulación de las ecuaciones incrementales de movimiento del sólido a través de la formulación Lagrangiana Generalizada, que permite obtener:
 - La expresión general y paramétrica de la matriz de rigidez secante incremental y total.
 - La unificación de las expresiones de la matriz de rigidez secante obtenidas con el principio del mínimo en la energía potencial total y con el principio de los trabajos virtuales.
 - La deducción, de forma directa, de la matriz de rigidez tangente a partir de la expresión de la matriz de rigidez secante incremental.
- b) La formulación e implementación numérica del método de desplazamiento crítico con las siguientes características:
 - Se puede utilizar en las descripciones Lagrangianas Total y Actualizada.
 - Permite predecir de manera aceptable la carga límite o de bifurcación desde una configuración de equilibrio en la vecindad de la configuración indeformada para sistemas estructurales con comportamiento precrítico no lineal.
 - Permite predecir con exactitud los modos de deformación críticos y la carga crítica de sistemas estructurales en la vecindad del estado crítico.
 - Se han definido distintas estrategias de solución para la predicción de cargas límite y de bifurcación.
 - Se trata de una herramienta sencilla y efectiva para la predicción de puntos críticos en la rama de equilibrio precrítica.

7.3 LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURA

Tomando como punto de partida el modelo numérico aquí desarrollado se pueden proponer una serie de modificaciones y extensiones que pueden generar nuevas líneas de investigación.

Desde el punto de vista de la descripción incremental de las relaciones cinemáticas y estáticas se puede adoptar otras medidas de deformaciones y tensiones conjugadas energéticamente y asimismo puede ser de interés la extensión de esta descripción a problemas estructurales con grados de libertad rotacionales. Para estos casos, la existencia de la matriz de rigidez secante viene

condicionada al tipo de función que describe la relación entre los gradientes de desplazamientos y los grados de libertad rotacionales. El tema de la existencia o no del operador secante en problemas que involucran grados de libertad rotacionales aún se considera un campo abierto a la investigación.¹

En este trabajo se ha comparado el método de desplazamiento crítico con el método de pandeo inicial y el método indirecto. Para tener una visión más crítica sobre el rendimiento y posibilidades de dicho método es importante compararlo con los métodos directos eficientes que se basan en una metodología análoga, como, por ejemplo, el método propuesto por WRIGGERS et al.²

En este trabajo siempre se ha utilizado el campo de desplazamiento convergido para construir las matrices de rigideces incrementales que forman parte del problema de autovalores linealizado en el método de desplazamiento crítico. Sería interesante investigar el comportamiento del método al utilizar el modo de pandeo asociado al menor autovalor del problema de estabilidad inicial, o el autovector asociado al menor autovalor de la matriz de rigidez tangente.

Parece también de interés evaluar si hay diferencias significativas entre los resultados, utilizando el problema cuadrático de autovalores y el problema de valores propios linealizado en el método de desplazamiento crítico. Los ejemplos numéricos presentados en este trabajo se basan en la resolución del problema de autovalores linealizado. La investigación del comportamiento de este método al utilizar el problema de autovalores cuadrático es otra de las líneas abiertas a la investigación futura.

Con relación al desarrollo de algoritmos de búsqueda de ramas secundarias utilizando el concepto de la matriz de rigidez secante en el ámbito del método presentado en esta monografía también se debe considerar como tema de interés a la investigación futura.

La última gran línea de investigación que abre esta monografía es la predicción de puntos críticos considerando la no linealidad del material. El tema parece abordable siguiendo las ideas apuntadas por KRÖPLIN y DINKLER³ y es intención del autor dirigir sus esfuerzos también en esta dirección en un futuro próximo.

¹ FELIPPA, C.; CRIVELLI, L.A.; HAUGEN, B. [1994], A survey of the core-congruential formulation for geometrically nonlinear TL finite elements, *Archives of Comp. Meth. in Eng.*, Vol. 1, n° 1, pp. 1-48.

² WRIGGERS, P., WAGNER, W., MIEHE, C. [1988], A quadratically convergent procedure for the calculation of stability points in finite element analysis, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 70, pp. 329-347.
WRIGGERS, P. and SIMO, J.C. [1990], A general procedure for the direct computation of turning and bifurcation points, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 30, pp. 155-176.

³ KRÖPLIN, B. and DINKLER, D. [1988], A material law for coupled load yielding and geometric instability, *Engineering Computations*, Vol. 5, N°3, 210-216.

ANEXO A1

FORMA MATRICIAL DE LOS TENSORES DE INCREMENTO DE DEFORMACIÓN DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN

El objetivo de este anexo es la obtención de las matrices que forman parte de la expresión matricial que representa los tensores de incremento de deformación de primer y segundo orden.

Las expresiones tensoriales de los incrementos de deformación de primer y segundo orden, ${}^r e_{ij}$ y ${}^r \eta_{ij}$, se escriben como (ver (2.4.8a) y (2.4.8b))

$${}^r e_{ij} = \frac{1}{2} ({}^r \Delta u_{i,j} + {}^r \Delta u_{j,i} + \underbrace{{}^t u_{k,i} {}^r \Delta u_{k,j} + {}^r \Delta u_{k,i} {}^t u_{k,j}}_{= 0 \text{ para } {}^r V = {}^t V}) \quad (A1.1a)$$

$${}^r \eta_{ij} = \frac{1}{2} {}^r \Delta u_{k,i} {}^r \Delta u_{k,j} \quad (A1.1b)$$

Después de reordenar las componentes tensoriales de los incrementos de deformación, estas se expresan en forma matricial como

$${}^r \mathbf{e} = [\mathbf{L}_0 + {}^t_r \mathbf{L}_1 ({}^t_r \mathbf{g})] {}^r \mathbf{g} \quad (A1.2a)$$

$${}^r \boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2} {}^r \mathbf{L}_1 ({}^r \mathbf{g}) {}^r \mathbf{g} \quad (A1.2b)$$

donde las matrices \mathbf{L}_0 , ${}^t_r \mathbf{L}_1$ y ${}^r \mathbf{L}_1$ son rectangulares (6×9). Estas matrices, en elasticidad tridimensional (sólidos 3D), tienen la siguiente forma

$$\mathbf{L}_0 = \begin{bmatrix} 100 & 000 & 000 \\ 000 & 010 & 000 \\ 000 & 000 & 001 \\ 010 & 100 & 000 \\ 001 & 000 & 100 \\ 000 & 001 & 010 \end{bmatrix} \quad (A1.3)$$

$${}^t_r\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} {}^t_r\mathbf{g}_1^T & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & {}^t_r\mathbf{g}_2^T & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & {}^t_r\mathbf{g}_3^T \\ {}^t_r\mathbf{g}_2^T & {}^t_r\mathbf{g}_1^T & \mathbf{0}_3 \\ {}^t_r\mathbf{g}_3^T & \mathbf{0}_3 & {}^t_r\mathbf{g}_1^T \\ \mathbf{0}_3 & {}^t_r\mathbf{g}_3^T & {}^t_r\mathbf{g}_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^t_r\mathbf{g}^T & \mathbf{H}_1 \\ {}^t_r\mathbf{g}^T & \mathbf{H}_2 \\ \vdots & \vdots \\ {}^t_r\mathbf{g}^T & \mathbf{H}_6 \end{bmatrix} \quad (\text{A1.4})$$

$${}_r\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} {}_r\mathbf{g}_1^T & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & {}_r\mathbf{g}_2^T & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & {}_r\mathbf{g}_3^T \\ {}_r\mathbf{g}_2^T & {}_r\mathbf{g}_1^T & \mathbf{0}_3 \\ {}_r\mathbf{g}_3^T & \mathbf{0}_3 & {}_r\mathbf{g}_1^T \\ \mathbf{0}_3 & {}_r\mathbf{g}_3^T & {}_r\mathbf{g}_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_r\mathbf{g}^T & \mathbf{H}_1 \\ {}_r\mathbf{g}^T & \mathbf{H}_2 \\ \vdots & \vdots \\ {}_r\mathbf{g}^T & \mathbf{H}_6 \end{bmatrix} \quad (\text{A1.5})$$

donde ${}^t_r\mathbf{g}$ y ${}_r\mathbf{g}$ son matrices columnas (9×1). Sus componentes representan los gradientes de los desplazamientos iniciales y de los incrementos de desplazamientos y se escriben como

$${}^t_r\mathbf{g} = \begin{Bmatrix} {}^t_r\mathbf{g}_1 \\ {}^t_r\mathbf{g}_2 \\ {}^t_r\mathbf{g}_3 \end{Bmatrix} \quad ; \quad {}_r\mathbf{g} = \begin{Bmatrix} {}_r\mathbf{g}_1 \\ {}_r\mathbf{g}_2 \\ {}_r\mathbf{g}_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A1.6})$$

donde ${}^t_r\mathbf{g}_i$ y ${}_r\mathbf{g}_i$ son los gradientes de los desplazamientos iniciales y de incremento de desplazamientos respecto a la coordenada ${}^r x_i$ de la configuración de referencia ${}^r V$. Son matrices columnas (3×1), esto es

$${}^t_r\mathbf{g}_i = {}^t_r\mathbf{u}, i = \frac{\partial {}^t\mathbf{u}}{\partial {}^r x_i} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial {}^t u_1}{\partial {}^r x_i} \\ \frac{\partial {}^t u_2}{\partial {}^r x_i} \\ \frac{\partial {}^t u_3}{\partial {}^r x_i} \end{Bmatrix} \quad ; \quad {}_r\mathbf{g}_i = {}_r\Delta\mathbf{u}, i = \frac{\partial(\Delta\mathbf{u})}{\partial {}^r x_i} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial(\Delta u_1)}{\partial {}^r x_i} \\ \frac{\partial(\Delta u_2)}{\partial {}^r x_i} \\ \frac{\partial(\Delta u_3)}{\partial {}^r x_i} \end{Bmatrix} \quad (\text{A1.7})$$

$\mathbf{0}_3$ es una matriz fila (1×3) que tiene ceros como componentes

$$\mathbf{0}_3 = [0, 0, 0] \quad (\text{A1.8})$$

y por último, las matrices \mathbf{H}_i son cuadradas (9×9) y tienen como componentes ceros y unidades

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} & ; & \quad \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
\mathbf{H}_3 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} & ; & \quad \mathbf{H}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
\mathbf{H}_5 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} & ; & \quad \mathbf{H}_6 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
\mathbf{I}_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & ; & \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{A1.9}$$

donde \mathbf{I}_3 es la matriz identidad (3×3) y $\mathbf{0}$ es una matriz nula (3×3).

ANEXO A2

SIMETRIZACIÓN Y PARAMETRIZACIÓN DE LA EXPRESIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ SECANTE INCREMENTAL

El objetivo de este anexo es demostrar cómo se simetriza y se parametriza la expresión no simétrica de la matriz de rigidez secante que surge al discretizar las ecuaciones incrementales de equilibrio por el MEF.

• Simetrización

Para simetrizar la expresión de la matriz secante se añade el término ${}^r\mathbf{G}^T {}^r\mathbf{E} {}^r\mathbf{G}$ en el segundo miembro de (3.3.1b). Aquí se demostrará que este término surge del desarrollo algebraico de la expresión $\delta {}^r\boldsymbol{\eta}^T {}^r\mathbf{D} {}^r\mathbf{e}$. Por tanto, se demuestra que

$$\delta {}^r\boldsymbol{\eta}^T {}^r\mathbf{D} {}^r\mathbf{e} = \frac{1}{2} \delta(\Delta\mathbf{a})^T \left[{}^r\mathbf{B}_1^T {}^r\mathbf{D} {}^t\mathbf{B}_L + {}^r\mathbf{G}^T {}^r\mathbf{E} {}^r\mathbf{G} \right] \Delta\mathbf{a} \quad (A2.1)$$

Por simplicidad en la notación se omitirán los superíndices y subíndices que aparezcan en las representaciones matriciales de los tensores. Por consiguiente, los tensores de incremento de deformaciones, el gradiente de incremento de desplazamientos y el tensor constitutivo se denotan como

$$\mathbf{e} = {}^r\mathbf{e} \quad ; \quad \boldsymbol{\eta} = {}^r\boldsymbol{\eta} \quad ; \quad \mathbf{g}_i = {}^r\mathbf{g}_i \quad ; \quad \mathbf{g} = {}^r\mathbf{g} \quad ; \quad \mathbf{D} = {}^r\mathbf{D} \quad (A2.2)$$

El tensor constitutivo definido a través de la ecuación (2.5.13) se expresa de la siguiente forma

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ D_{3311} & D_{3322} & D_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{2323} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & 0 & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{66} \end{bmatrix} \quad (A2.3)$$

Utilizando (A2.3) se escribe el primer miembro de (A2.1) del siguiente modo

$$\delta \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{D} \mathbf{e} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & 0 & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{12} \\ 2e_{13} \\ 2e_{23} \end{Bmatrix} \quad (A2.4)$$

Desarrollando esta expresión matricial se llega a

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{D} \mathbf{e} &= \delta \eta_{11} (d_{11} e_{11} + d_{12} e_{22} + d_{13} e_{33}) + \\ &+ \delta \eta_{22} (d_{21} e_{11} + d_{22} e_{22} + d_{23} e_{33}) + \\ &+ \delta \eta_{33} (d_{31} e_{11} + d_{32} e_{22} + d_{33} e_{33}) + \\ &+ 2\delta \eta_{12} d_{44} 2e_{12} + 2\delta \eta_{13} d_{55} 2e_{13} + 2\delta \eta_{23} d_{66} 2e_{23} \end{aligned} \quad (A2.5)$$

El primer término del segundo miembro de (A2.5) puede ser escrito como

$$\begin{aligned} \delta \eta_{11} (d_{11} e_{11} + d_{12} e_{22} + d_{13} e_{33}) &= \frac{1}{2} \delta \eta_{11} (d_{11} e_{11} + d_{12} e_{22} + d_{13} e_{33}) + \\ &+ \frac{1}{2} \delta \eta_{11} (d_{11} e_{11} + d_{12} e_{22} + d_{13} e_{33}) \end{aligned} \quad (A2.6a)$$

Por otro lado, de acuerdo con (A1.1b) el término $\delta \eta_{11}$ se escribe como

$$\delta \eta_{11} = \delta(\Delta u_{1,1}) \Delta u_{1,1} + \delta(\Delta u_{2,1}) \Delta u_{2,1} + \delta(\Delta u_{3,1}) \Delta u_{3,1} \quad (A2.6b)$$

Según (A1.6b) y (A1.7b), esta expresión se reescribe de la siguiente manera

$$\delta \eta_{11} = \delta \mathbf{g}_1^T \mathbf{g}_1 = \delta \mathbf{g}_1^T \mathbf{I}_3 \mathbf{g}_1 \quad (A2.6c)$$

Finalmente, el primer término del segundo miembro de (A2.5) se expresa como

$$\begin{aligned} \delta\eta_{11}(d_{11}e_{11} + d_{12}e_{22} + d_{13}e_{33}) &= \frac{1}{2} \delta\eta_{11}(d_{11}e_{11} + d_{12}e_{22} + d_{13}e_{33}) + \\ &+ \frac{1}{2} (d_{11}e_{11} + d_{12}e_{22} + d_{13}e_{33}) \delta\mathbf{g}_1^T \mathbf{I}_3 \mathbf{g}_1 \end{aligned} \quad (A2.6d)$$

El segundo y tercer término se escriben de la misma manera como

$$\begin{aligned} \delta\eta_{22}(d_{21}e_{11} + d_{22}e_{22} + d_{23}e_{33}) &= \frac{1}{2} \delta\eta_{22}(d_{21}e_{11} + d_{22}e_{22} + d_{23}e_{33}) + \\ &+ \frac{1}{2} (d_{21}e_{11} + d_{22}e_{22} + d_{23}e_{33}) \delta\mathbf{g}_2^T \mathbf{I}_3 \mathbf{g}_2 \end{aligned} \quad (A2.7)$$

$$\begin{aligned} \delta\eta_{33}(d_{31}e_{11} + d_{32}e_{22} + d_{33}e_{33}) &= \frac{1}{2} \delta\eta_{33}(d_{31}e_{11} + d_{32}e_{22} + d_{33}e_{33}) + \\ &+ \frac{1}{2} (d_{31}e_{11} + d_{32}e_{22} + d_{33}e_{33}) \delta\mathbf{g}_3^T \mathbf{I}_3 \mathbf{g}_3 \end{aligned} \quad (A2.8)$$

De la combinación de las ecuaciones (A2.6a), (A2.7) y (A2.8) se obtiene

$$\begin{aligned} &\delta\eta_{11}(d_{11}e_{11} + d_{12}e_{22} + d_{13}e_{33}) + \delta\eta_{22}(d_{21}e_{11} + d_{22}e_{22} + d_{23}e_{33}) + \\ &+ \delta\eta_{33}(d_{31}e_{11} + d_{32}e_{22} + d_{33}e_{33}) = \frac{1}{2} \delta\eta_{11}(d_{11}e_{11} + d_{12}e_{22} + d_{13}e_{33}) + \\ &+ \frac{1}{2} \delta\eta_{22}(d_{21}e_{11} + d_{22}e_{22} + d_{23}e_{33}) + \frac{1}{2} \delta\eta_{33}(d_{31}e_{11} + d_{32}e_{22} + d_{33}e_{33}) + \\ &+ \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta\mathbf{g}_1^T & \delta\mathbf{g}_2^T & \delta\mathbf{g}_3^T \end{bmatrix}}_{\delta\mathbf{g}^T} \begin{bmatrix} a \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & b \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & c \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}} \end{aligned} \quad (A2.9)$$

con

$$\begin{aligned} a &= [d_{11}, d_{12}, d_{13}] \hat{\mathbf{e}} \quad ; \quad b = [d_{21}, d_{22}, d_{23}] \hat{\mathbf{e}} \\ c &= [d_{31}, d_{32}, d_{33}] \hat{\mathbf{e}} \quad , \quad \hat{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (A2.10)$$

donde $\mathbf{0}$ es una matriz nula (3×3).

El mismo procedimiento se aplica a los términos correspondientes a las deformaciones tangenciales en (A2.5). Así, el término $\delta\eta_{12}$, de acuerdo con las ecuaciones (A1.1b), (A1.6b) y (A1.7b), se expresa como

$$\begin{aligned}\delta\eta_{12} &= \frac{1}{2} [\delta(\Delta u_{1,1})\Delta u_{1,2} + \delta(\Delta u_{2,1})\Delta u_{2,2} + \delta(\Delta u_{3,1})\Delta u_{3,2} + \\ &\quad + \Delta u_{1,1}\delta(\Delta u_{1,2}) + \Delta u_{2,1}\delta(\Delta u_{2,2}) + \Delta u_{3,1}\delta(\Delta u_{3,2})] = \\ &= \frac{1}{2} [\delta\mathbf{g}_1^T \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_1^T \delta\mathbf{g}_2] = \frac{1}{2} [\delta\mathbf{g}_1^T \mathbf{I}_3 \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_1^T \mathbf{I}_3 \delta\mathbf{g}_2]\end{aligned}\quad (\text{A2.11})$$

El cuarto término del segundo miembro de (A2.5) se puede escribir como

$$2\delta\eta_{12}d_{44}2e_{12} = \delta\eta_{12}d_{44}2e_{12} + \delta\eta_{12}d_{44}2e_{12}\quad (\text{A2.12})$$

Sustituyendo la ecuación (A2.11) en uno de los términos del segundo miembro de (A2.12), resulta

$$\begin{aligned}\delta\eta_{12}d_{44}2e_{12} &= d_{44}2e_{12}\frac{1}{2} (\delta\mathbf{g}_1^T \mathbf{I}_3 \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_1^T \mathbf{I}_3 \delta\mathbf{g}_2) = \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{[\delta\mathbf{g}_1^T, \delta\mathbf{g}_2^T, \delta\mathbf{g}_3^T]}_{\delta\mathbf{g}^T} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & d \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ d \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_3 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{g}}\end{aligned}\quad (\text{A2.13a})$$

con

$$d = d_{44}2e_{12}\quad (\text{A2.13b})$$

Los demás términos relacionados con las deformaciones tangenciales se expresan como

$$\delta\eta_{13}d_{55}2e_{13} = \frac{1}{2} \delta\mathbf{g}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & e \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ e \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{g}\quad (\text{A2.14a})$$

con

$$e = d_{55}2e_{13}\quad (\text{A2.14b})$$

y

$$\delta\eta_{23}d_{66}2e_{23} = \frac{1}{2} \delta\mathbf{g}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & f \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0} & f \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{g} \quad (A2.15a)$$

con

$$f = d_{66}2e_{23} \quad (A2.15b)$$

De la combinación de las ecuaciones (A2.13a), (A2.14a), y (A2.15a), las componentes de (A2.5) correspondientes a las deformaciones tangenciales se escriben de la siguiente manera

$$2\delta_{12}d_{44}2e_{12} + 2\delta_{13}d_{55}2e_{13} + 2\delta_{23}d_{66}2e_{23} = \delta_{12}d_{44}2e_{12} + \delta_{13}d_{55}2e_{13} + \delta_{23}d_{66}2e_{23} + \frac{1}{2} \mathbf{g}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & d \mathbf{I}_3 & e \mathbf{I}_3 \\ d \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & f \mathbf{I}_3 \\ e \mathbf{I}_3 & f \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{g} \quad (A2.16)$$

Sumando las ecuaciones (A2.9) y (A2.16), se puede expresar (A2.5) como

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{D} \mathbf{e} = & \frac{1}{2} \delta\eta_{11}(d_{11}e_{11} + d_{12}e_{22} + d_{13}e_{33}) + \frac{1}{2} \delta\eta_{22}(d_{21}e_{11} + d_{22}e_{22} + d_{23}e_{33}) + \\ & + \frac{1}{2} \delta\eta_{33}(d_{31}e_{11} + d_{32}e_{22} + d_{33}e_{33}) + \delta\eta_{12}d_{44}2e_{12} + \delta\eta_{13}d_{55}2e_{13} + \\ & + \delta\eta_{23}d_{66}2e_{23} + \frac{1}{2} \mathbf{g}^T \begin{bmatrix} a \mathbf{I}_3 & d \mathbf{I}_3 & e \mathbf{I}_3 \\ & b \mathbf{I}_3 & f \mathbf{I}_3 \\ \text{sym.} & & c \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \mathbf{g} \end{aligned} \quad (A2.17)$$

Lo que resulta en

$$\boxed{\delta\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{D} \mathbf{e} = \frac{1}{2} \delta\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{D} \mathbf{e} + \frac{1}{2} \delta\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{D} \mathbf{e} = \frac{1}{2} \delta(\Delta\mathbf{a})^T \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L \Delta\mathbf{a} + \frac{1}{2} \delta\mathbf{g}^T \mathbf{E} \mathbf{g}} \quad (A2.18)$$

con

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} a \mathbf{I}_3 & d \mathbf{I}_3 & e \mathbf{I}_3 \\ & b \mathbf{I}_3 & f \mathbf{I}_3 \\ \text{sym.} & & c \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \quad (A2.19)$$

y

$$[a, b, c, d, e, f]^T = \mathbf{D} \mathbf{e} \quad (\text{A2.20})$$

Haciendo uso de la relación $\mathbf{g} = \mathbf{G} \Delta \mathbf{a}$ en (A2.18) se llega a la expresión de la ecuación (A2.1) y de esta manera la demostración queda completada.

• Parametrización

Para parametrizar la expresión de la matriz de rigidez secante se introducen los parámetros α y β en las ecuaciones (3.3.1b) y (3.3.1c) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \delta_r \boldsymbol{\eta}^T {}_r \mathbf{D} {}_r \mathbf{e} + \delta_r \mathbf{e}^T {}_r \mathbf{D} {}_r \boldsymbol{\eta} = \delta(\Delta \mathbf{a})^T \left[\frac{1}{2} {}^t \mathbf{B}_L^T {}_r \mathbf{D} {}_r \mathbf{B}_1 + \alpha {}_r \mathbf{B}_1^T {}_r \mathbf{D} {}^t \mathbf{B}_L + \right. \\ \left. + (1 - \alpha) {}_r \mathbf{G}^T {}_r \mathbf{E} {}_r \mathbf{G} \right] \Delta \mathbf{a} \end{aligned} \quad (\text{A2.21})$$

$$\begin{aligned} \delta_r \boldsymbol{\eta}^T {}_r \mathbf{D} {}_r \boldsymbol{\eta} = \delta(\Delta \mathbf{a})^T \left[\frac{1}{4} (2 - \beta) {}_r \mathbf{B}_1^T {}_r \mathbf{D} {}_r \mathbf{B}_1 + \right. \\ \left. + \frac{\beta}{4} {}_r \mathbf{G}^T {}_r \mathbf{H} {}_r \mathbf{G} \right] \Delta \mathbf{a} \end{aligned} \quad (\text{A2.22})$$

donde la forma explícita de todas las matrices relevantes en (A2.21) y (A2.22) se detallan en los Cuadros 3.1 y 3.2.

El objetivo aquí es demostrar las igualdades (A2.21) y (A2.22).

Primeramente se demostrará la igualdad en (A2.21). Así, se reescribe el miembro izquierdo de esta ecuación como

$$\delta_r \mathbf{e}^T {}_r \mathbf{D} {}_r \boldsymbol{\eta} + \delta_r \boldsymbol{\eta}^T {}_r \mathbf{D} {}_r \mathbf{e} = \delta_r \mathbf{e}^T {}_r \mathbf{D} {}_r \boldsymbol{\eta} + \alpha \delta_r \boldsymbol{\eta}^T {}_r \mathbf{D} {}_r \mathbf{e} + (1 - \alpha) \delta_r \boldsymbol{\eta}^T {}_r \mathbf{D} {}_r \mathbf{e} \quad (\text{A2.23})$$

Nótese que esta expresión es válida para cualquier valor arbitrario de α .

Las ecuaciones (3.2.11) y (3.2.13) permiten escribir las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} {}_r \mathbf{e} &= {}^t \mathbf{B}_L \Delta \mathbf{a} \quad ; & \delta_r \mathbf{e} &= {}^t \mathbf{B}_L \delta(\Delta \mathbf{a}) \\ {}_r \boldsymbol{\eta} &= \frac{1}{2} {}_r \mathbf{B}_1 \Delta \mathbf{a} \quad ; & \delta_r \boldsymbol{\eta} &= {}_r \mathbf{B}_1 \delta(\Delta \mathbf{a}) \end{aligned} \quad (\text{A2.24})$$

Sustituyendo estas expresiones en (A2.23) y advirtiendo que, $\delta_r \boldsymbol{\eta}^T {}_r \mathbf{D} {}_r \mathbf{e} = \delta(\Delta \mathbf{a})^T {}_r \mathbf{G}^T {}_r \mathbf{E} {}_r \mathbf{G} \Delta \mathbf{a}$, de acuerdo con (A2.18), se obtiene

$$\delta_r \mathbf{e}^T {}_r \mathbf{D} {}_r \boldsymbol{\eta} + \delta_r \boldsymbol{\eta}^T {}_r \mathbf{D} {}_r \mathbf{e} = \delta \Delta \mathbf{a}^T \left[\frac{1}{2} {}_r \mathbf{B}_L {}_r \mathbf{D} {}_r \mathbf{B}_1 + \alpha {}_r \mathbf{B}_1^T {}_r \mathbf{D} {}_r \mathbf{B}_L + (1 - \alpha) {}_r \mathbf{G}^T {}_r \mathbf{E} {}_r \mathbf{G} \right] \Delta \mathbf{a} \quad (A2.25)$$

así la igualdad (A2.21) queda demostrada.

Ahora se procede a la demostración de la igualdad (A2.22). El lado izquierdo de esta ecuación después de introducir el parámetro β se puede reescribir como

$$\delta_r \boldsymbol{\eta}^T {}_r \mathbf{D} {}_r \boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2} (2 - \beta) \delta_r \boldsymbol{\eta}^T {}_r \mathbf{D} {}_r \boldsymbol{\eta} + \frac{1}{2} \beta \delta_r \boldsymbol{\eta}^T {}_r \mathbf{D} {}_r \boldsymbol{\eta} \quad (A2.26)$$

Obsérvese que esta igualdad se verifica para cualquier valor β .

A través de las relaciones dadas en (A2.24) el primer término del segundo miembro de (A2.26) se escribe como

$$\frac{1}{2} (2 - \beta) \delta_r \boldsymbol{\eta}^T {}_r \mathbf{D} {}_r \boldsymbol{\eta} = \delta (\Delta \mathbf{a})^T \left[\frac{1}{4} (2 - \beta) {}_r \mathbf{B}_1^T {}_r \mathbf{D} {}_r \mathbf{B}_1 \right] \Delta \mathbf{a} \quad (A2.27)$$

El segundo término de (A2.26) surge del desarrollo algebraico que se muestra a continuación.

Las ecuaciones (2.4.15b) y (2.4.20b) permiten escribir que

$${}_r \boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2} {}_r \mathbf{L}_1 {}_r \mathbf{g} \quad \text{and} \quad \delta_r \boldsymbol{\eta} = {}_r \mathbf{L}_1 \delta_r \mathbf{g} \quad (A2.28)$$

con ${}_r \mathbf{L}_1$ dado por la ecuación (A1.5).

Con base en las ecuaciones (A1.5) – (A1.9), el segundo término del segundo miembro de (A2.26) se desarrolla del modo siguiente

$$\begin{aligned} \delta_r \boldsymbol{\eta}^T {}_r \mathbf{D} {}_r \boldsymbol{\eta} &= \frac{1}{2} \delta_r \mathbf{g}^T [\mathbf{H}_1 {}_r \mathbf{g}, \dots, \mathbf{H}_6 {}_r \mathbf{g}] {}_r \mathbf{D} \begin{bmatrix} {}_r \mathbf{g}^T \mathbf{H}_1 \\ \vdots \\ {}_r \mathbf{g}^T \mathbf{H}_6 \end{bmatrix} {}_r \mathbf{g} = \\ &= \frac{1}{2} \delta_r \mathbf{g}^T [\mathbf{H}_1 {}_r \mathbf{g}, \dots, \mathbf{H}_6 {}_r \mathbf{g}] \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^6 d_{1i} {}_r \mathbf{g}^T \mathbf{H}_i {}_r \mathbf{g} \\ \sum_{i=1}^6 d_{2i} {}_r \mathbf{g}^T \mathbf{H}_i {}_r \mathbf{g} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^6 d_{6i} {}_r \mathbf{g}^T \mathbf{H}_i {}_r \mathbf{g} \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \delta_r \mathbf{g}^T \mathbf{H}_1 r \mathbf{g} \left(\sum_{i=1}^6 d_{1i} r \mathbf{g}^T \mathbf{H}_i r \mathbf{g} \right) + \dots + \frac{1}{2} \delta_r \mathbf{g}^T \mathbf{H}_6 r \mathbf{g} \left(\sum_{i=1}^6 d_{6i} r \mathbf{g}^T \mathbf{H}_i r \mathbf{g} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \delta_r \mathbf{g}^T \left(\sum_{i=1}^6 d_{1i} r \mathbf{g}^T \mathbf{H}_i r \mathbf{g} \right) \mathbf{H}_1 r \mathbf{g} + \dots + \frac{1}{2} \delta_r \mathbf{g}^T \left(\sum_{i=1}^6 d_{6i} r \mathbf{g}^T \mathbf{H}_i r \mathbf{g} \right) \mathbf{H}_6 r \mathbf{g} = \\
&= \frac{1}{2} \delta_r \mathbf{g}^T \left(\sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 d_{ij} (r \mathbf{g}^T \mathbf{H}_j r \mathbf{g}) \mathbf{H}_i \right) r \mathbf{g} \tag{A2.29}
\end{aligned}$$

donde $d_{1i} \mathbf{H}_i = d_{11} \mathbf{H}_1 + \dots + d_{16} \mathbf{H}_6$, etc. Nótese que en (A2.29), por simplicidad, se ha tomado $d_{ij} = r d_{ij}$.

Al sustituir en (A2.29) las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
r \mathbf{g} &= r \mathbf{G} \Delta \mathbf{a} \\
\delta_r \mathbf{g} &= r \mathbf{G} \delta(\Delta \mathbf{a})
\end{aligned} \tag{A2.30}$$

se obtiene que

$$\begin{aligned}
\delta_r \boldsymbol{\eta}^T r \mathbf{D} r \boldsymbol{\eta} &= \frac{1}{2} \delta(\Delta \mathbf{a})^T r \mathbf{G}^T \left(\sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 d_{ij} (r \mathbf{g}^T \mathbf{H}_j r \mathbf{g}) \mathbf{H}_i \right) r \mathbf{G} \Delta \mathbf{a} = \\
&= \frac{1}{2} \delta(\Delta \mathbf{a})^T r \mathbf{G}^T \left(\sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 d_{ij} r \eta_j \mathbf{H}_i \right) r \mathbf{G} \Delta \mathbf{a} = \\
&= \frac{1}{2} \delta(\Delta \mathbf{a})^T r \mathbf{G}^T r \mathbf{H} r \mathbf{G} \Delta \mathbf{a}
\end{aligned} \tag{A2.31}$$

donde $r \mathbf{H} = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 d_{ij} r \eta_j \mathbf{H}_i$ con $r \eta_j = r \mathbf{g}^T \mathbf{H}_j r \mathbf{g}$.

Reemplazando (A2.31) en el segundo término del segundo miembro de (A2.26) se llega a

$$\frac{1}{2} \beta r \boldsymbol{\eta}^T r \mathbf{D} r \boldsymbol{\eta} = \delta(\Delta \mathbf{a})^T \left[\frac{\beta}{4} r \mathbf{G}^T r \mathbf{H} r \mathbf{G} \right] \Delta \mathbf{a} \tag{A2.32}$$

De esta manera, las ecuaciones (A2.32), (A2.27) y (A2.26) permiten demostrar de manera completa la igualdad (A2.22).

ANEXO A3

MATRIZ DE RIGIDEZ SECANTE INCREMENTAL PARA EL ELEMENTO DE BARRA ARTICULADO 3D

Las estructuras formadas por elementos unidimensionales que trabajan únicamente a esfuerzo axial representan probablemente la tipología estructural de comportamiento más simple. Ejemplos prácticos de aplicación de dichas estructuras se encuentran en las estructuras planas (2D) o espaciales (3D) de barras articuladas con cargas actuando en los nudos y en los cables.

El objetivo de este anexo es la deducción de la expresión exacta de la matriz de rigidez secante incremental para el elemento de barra articulado 3D (que se aplica al estudio de estructuras espaciales de barras articuladas) en las descripciones Lagrangiana Total y Actualizada. Además, se deduce la expresión de la matriz de rigidez secante total de forma explícita en la formulación Lagrangiana Total para dicho elemento. Asimismo, se presenta la forma explícita de las varias matrices que forman parte de la matriz de rigidez secante incremental y del vector de fuerzas residuales para el caso particular del elemento de barra de dos nodos.

Sea un elemento de barra, definido según un sistema de referencia Cartesiano (x_1, x_2, x_3) , recto y articulado en sus extremidades, de sección transversal cualquiera, con n nodos, sometido solamente a esfuerzo axial, es decir, sometido a un estado uniaxial de tensión.

Se define un sistema de referencia Cartesiano local (x'_1, x'_2, x'_3) , con el eje x'_1 coincidente con el eje baricéntrico del elemento y los demás ejes, x'_2 y x'_3 , orientados en cualquier dirección ortogonal al eje baricéntrico, Figura A3.1.

Se desarrollarán analíticamente las expresiones necesarias para la deducción de la matriz secante incremental utilizando la descripción LA, ${}^tV = {}^lV$. De acuerdo con las ecuaciones (2.4.8), los incrementos de la deformación axial de primer y segundo orden de un punto arbitrario del elemento pueden definirse como

$${}^te'_{11} = \frac{d(\Delta u'_1)}{d {}^tx'_1} \quad \text{y} \quad {}^t\eta'_{11} = \frac{1}{2} \frac{d(\Delta u'_1)}{d {}^tx'_1} \frac{d(\Delta u'_1)}{d {}^tx'_1} \quad (\text{A3.1})$$

donde $\Delta u'_1$ es el incremento de desplazamiento de este punto en la dirección del eje local ${}^t x'_1$ entre los instantes t y $t + \Delta t$. Nótese que los incrementos de desplazamientos en las direcciones de los ejes locales ${}^t x'_2$ y ${}^t x'_3$ no contribuyen en el cálculo de la deformación axial, esto implica que ${}^t \Delta u'_{2,1} = {}^t \Delta u'_{3,1} = 0$.

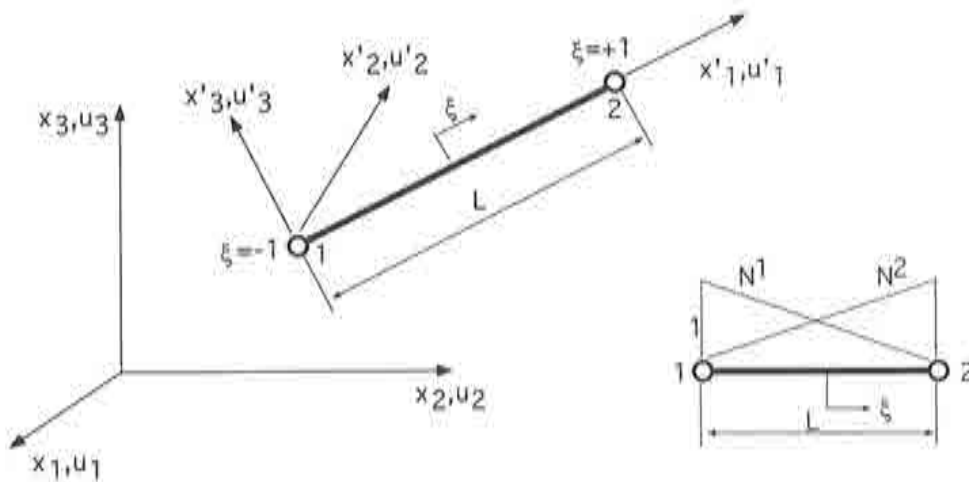


Figura A3.1 Elemento de barra articulado 3D de dos nodos

Los incrementos de desplazamientos de un punto arbitrario del elemento respecto a los sistemas de coordenadas local y global se relacionan de acuerdo con la siguiente ley de transformación

$$\Delta u'_j = \frac{\partial {}^t x_i}{\partial {}^t x'_j} \Delta u_i \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{A3.2})$$

Se pueden expresar los incrementos de deformación axial en función de los incrementos de desplazamientos, en ejes de coordenadas globales, como

$${}^t e'_{11} = \frac{\partial {}^t x_i}{\partial {}^t x'_1} \frac{d(\Delta u_i)}{d {}^t x'_1} \quad \text{y} \quad m'_{11} = \frac{1}{2} \frac{d(\Delta u_i)}{d {}^t x'_1} \frac{d(\Delta u_i)}{d {}^t x'_1} \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A3.3})$$

a través de la sustitución la ecuación (A3.2) en (A3.1).

La hipótesis de estado uniaxial de tensión en la dirección del eje local ${}^t x'_1$ implica que

$$\begin{cases} {}_t\Delta S'_{22} = {}_t\Delta S'_{33} = 0 \\ {}_t\Delta S'_{12} = {}_t\Delta S'_{13} = {}_t\Delta S'_{23} = 0 \implies {}_t\Delta \varepsilon'_{12} = {}_t\Delta \varepsilon'_{13} = {}_t\Delta \varepsilon'_{23} = 0 \end{cases} \quad (A3.4)$$

Imponiendo las restricciones anteriores en la ecuación (2.5.15b) resulta que

$$\begin{cases} {}_t\Delta S'_{11} = (\lambda + 2\mu) {}_t\Delta \varepsilon'_{11} + \lambda {}_t\Delta \varepsilon'_{22} + \lambda {}_t\Delta \varepsilon'_{33} \\ 0 = \lambda {}_t\Delta \varepsilon'_{11} + (\lambda + 2\mu) {}_t\Delta \varepsilon'_{22} + \lambda {}_t\Delta \varepsilon'_{33} \\ 0 = \lambda {}_t\Delta \varepsilon'_{11} + \lambda {}_t\Delta \varepsilon'_{22} + (\lambda + 2\mu) {}_t\Delta \varepsilon'_{33} \end{cases} \quad (A3.5)$$

De las ecuaciones (A3.5b) y (A3.5c) se concluye que ${}_t\Delta \varepsilon'_{22} = {}_t\Delta \varepsilon'_{33}$; esto permite reescribir (A3.5a) como

$$\begin{cases} {}_t\Delta S'_{11} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} {}_t\Delta \varepsilon'_{11} \\ \text{con } {}_tE = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \text{ lo que implica } \boxed{{}_t\Delta S'_{11} = {}_tE {}_t\Delta \varepsilon'_{11}} \end{cases} \quad (A3.6)$$

donde ${}_tE$ es el módulo de Young en la configuración tV , λ y μ las constantes de Lamé y ${}_t\Delta \varepsilon'_{11}$ el incremento de deformación axial en el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$, que se expresa como ${}_t\Delta \varepsilon_{11} = {}_te'_{11} + {}_t\eta'_{11}$.

Se considera el estado uniaxial de tensión homogéneo y uniforme en todo el elemento, de esta manera, el incremento de esfuerzo axial entre los instantes t y $t + \Delta t$ puede expresarse como

$${}_t\Delta N = \int_{{}_tA^{(e)}} {}_t\Delta S'_{11} dA = {}_t\Delta S'_{11} {}^tA \quad (A3.7)$$

La ecuación constitutiva incremental ahora puede escribirse de manera sencilla como

$${}_t\Delta N = {}^t[EA] [{}_te'_{11} + {}_t\eta'_{11}] \quad (A3.8)$$

donde tA es el área de la sección transversal del elemento en la configuración tV .

Las coordenadas cartesianas globales de un punto arbitrario de un elemento en la configuración tV se interpolan en función de sus valores nodales como

$${}^t e'_{11} = {}^t \mathbf{B}_L \Delta \mathbf{a} \quad ; \quad \boxed{{}^t \mathbf{B}_L = \frac{1}{lJ^2} {}^t \mathbf{x}^T \mathbf{N}_{,\xi}^T \mathbf{N}_{,\xi}}$$

$${}^t \eta'_{11} = {}^t \mathbf{B}_1 \Delta \mathbf{a} \quad ; \quad \boxed{{}^t \mathbf{B}_1 = \frac{1}{lJ^2} \Delta \mathbf{a}^T \mathbf{N}_{,\xi}^T \mathbf{N}_{,\xi}}$$

$$\boxed{{}^t \mathbf{G} = \frac{1}{lJ} \mathbf{N}_{,\xi}}$$

$$\boxed{{}^t \mathbf{E} = \frac{\partial {}^t x_i}{\partial {}^t x'_1} \frac{d(\Delta u_i)}{d {}^t x'_1} {}^t [EA] \mathbf{I}_3 = \frac{{}^t [EA]}{lJ^2} {}^t \mathbf{x}^T \mathbf{N}_{,\xi}^T \mathbf{N}_{,\xi} \Delta \mathbf{a}}$$

$$\boxed{{}^t \mathbf{H} = \frac{d(\Delta u_i)}{d {}^t x'_1} \frac{d(\Delta u_j)}{d {}^t x'_1} {}^t [EA] \mathbf{I}_3 = \frac{{}^t [EA]}{lJ^2} \Delta \mathbf{a}^T \mathbf{N}_{,\xi}^T \mathbf{N}_{,\xi} \Delta \mathbf{a}}$$

$$\mathbf{N}_{,\xi} = \left[\frac{dN^1}{d\xi} \mathbf{I}_3, \dots, \frac{dN^n}{d\xi} \mathbf{I}_3 \right]$$

$${}^t \mathbf{x}^{(e)} = [{}^t x_1^1, {}^t x_2^1, {}^t x_3^1, \dots, {}^t x_1^n, {}^t x_2^n, {}^t x_3^n]^T$$

$$\Delta \mathbf{a} = [\Delta a_1^1, \Delta a_2^1, \Delta a_3^1, \dots, \Delta a_1^n, \Delta a_2^n, \Delta a_3^n]^T$$

$${}^t J = \frac{d {}^t x'_1}{d\xi} \quad (\text{usualmente } {}^t J = \frac{l^{(e)}}{2}) \quad ; \quad \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cuadro A3.1 Expresiones de las matrices relevantes para el cálculo de la matriz de rigidez secante incremental del elemento de barra articulado 3D en la formulación LA

$${}^t x_i = \sum_{k=1}^n N^k(\xi) {}^t x_i^k \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A3.9})$$

El campo de incremento de desplazamiento en el interior de un elemento se interpola en función de los incrementos de desplazamientos nodales por

$$\Delta u_i = \sum_{k=1}^n N^k(\xi) \Delta a_i^k \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A3.10})$$

Con base en las ecuaciones (A3.9), (A3.10) y (A3.3) se obtienen las expresiones de las matrices de deformación de primer y segundo orden, ${}^t\mathbf{B}_L$ y ${}^t\mathbf{B}_1$, que se detallan en el Cuadro A3.1, conjuntamente con las matrices relevantes (${}^t\mathbf{G}$, ${}^t\mathbf{E}$ y ${}^t\mathbf{H}$) para el cálculo de la matriz de rigidez secante incremental a través de las ecuaciones (3.3.4) y (3.3.5).

• **Particularización para un elemento de barra articulado 3D lineal**

El elemento de barra articulado 3D más sencillo es el de dos nodos con funciones de forma lineales $N_i = \frac{1}{2}(1 + \xi\xi_i)$, $i = 1, 2$. Estos elementos interpolan el campo de deformaciones de manera constante y son usualmente utilizados en el análisis de estructuras de barras articuladas (ver Figura A3.1).

$$\begin{aligned}
 {}^t\mathbf{K}_{Lij} &= {}^t \left[\frac{EA}{l^3} \right] (-1)^{i+j} \begin{bmatrix} ({}^tx_{12})^2 & {}^tx_{12} {}^ty_{12} & {}^tx_{12} {}^tz_{12} \\ \text{sym.} & ({}^ty_{12})^2 & {}^ty_{12} {}^tz_{12} \\ & & ({}^tz_{12})^2 \end{bmatrix} \\
 {}^t\mathbf{K}_{Mij} &= {}^t \left[\frac{EA}{2l^3} \right] (-1)^{i+j} \begin{bmatrix} 2 {}^tx_{12}u_{12} & ({}^tx_{12}v_{12} + {}^ty_{12}u_{12}) & ({}^tx_{12}w_{12} + {}^tz_{12}u_{12}) \\ \text{sym.} & 2 {}^ty_{12}v_{12} & ({}^ty_{12}w_{12} + {}^tz_{12}v_{12}) \\ & & 2 {}^tz_{12}w_{12} \end{bmatrix} + \\
 &+ {}^t \left[\frac{EA}{2l^3} \right] (-1)^{i+j} [({}^tx_{12}u_{12} + {}^ty_{12}v_{12} + {}^tz_{12}w_{12})] \mathbf{I}_3 \\
 {}^t\mathbf{K}_{Nij} &= {}^t \left[\frac{EA}{2l^3} \right] (-1)^{i+j} \begin{bmatrix} (u_{12})^2 & u_{12}v_{12} & u_{12}w_{12} \\ \text{sym.} & (v_{12})^2 & v_{12}w_{12} \\ & & (w_{12})^2 \end{bmatrix} \\
 {}^t\mathbf{K}_{\sigma ij} &= {}^t \left[\frac{N}{l} \right] (-1)^{i+j} \mathbf{I}_3 \\
 \text{con } {}^tx_{12} &= {}^tx_1 - {}^tx_2, \quad u_{12} = \Delta u_1 - \Delta u_2, \quad \text{etc} \\
 & \quad i \text{ y } j = \text{nodos del elemento de barra}
 \end{aligned}$$

Cuadro A3.2 Expresiones de las diferentes matrices que intervienen en el cálculo de la matriz de rigidez secante incremental para el elemento de barra con dos nodos, utilizando la descripción Lagrangiana Actualizada ($\alpha = 1/2$ y $\beta = 0$)

La sencillez de este elemento permite obtener la forma explícita de las diferentes matrices que intervienen en el cálculo de la matriz de rigidez secante incremental en (3.3.5). Se elige aquí una forma simétrica de la matriz secante con $\alpha = 1/2$ y $\beta = 0$ en la descripción Lagrangiana Actualizada. La expresión exacta de las distintas matrices que forman parte de la matriz secante incremental del elemento de barra articulado 3D se detallan en el Cuadro A3.2.

El vector de fuerzas residuales, de acuerdo con la ecuación (3.3.3a) y con la matriz de deformación ${}^t\mathbf{B}_L$ expresada en el Cuadro A3.1, puede escribirse como

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{r}^{(e)} = \frac{{}^tN}{{}^tl} \begin{Bmatrix} {}^tx_{12} \\ {}^ty_{12} \\ {}^tz_{12} \\ -{}^tx_{12} \\ -{}^ty_{12} \\ -{}^tz_{12} \end{Bmatrix} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{f}^{(e)} \quad (\text{A3.11})$$

donde ${}^{t+\Delta t}\mathbf{f}^{(e)}$ es el vector de fuerzas nodales equivalentes que actúan en el elemento en el instante $t + \Delta t$.

Se obtiene ahora la forma explícita de la matriz de rigidez secante incremental utilizando la formulación Lagrangiana Total. El planteamiento es muy similar al realizado en el procedimiento anterior para la formulación Lagrangiana Actualizada.

Por tanto, a partir de la ecuación (A3.3) se puede expresar los incrementos de deformación axial en función de las coordenadas de la configuración indeformada 0V del modo siguiente

$${}^0e'_{11} = \frac{\partial {}^0x_i}{\partial {}^0x'_1} \frac{d(\Delta u_i)}{d {}^0x'_1} + \frac{\partial {}^tu_i}{\partial {}^0x'_1} \frac{d(\Delta u_i)}{d {}^0x'_1} \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A3.12})$$

$${}^0\eta'_{11} = \frac{1}{2} \frac{d(\Delta u_i)}{d {}^0x'_1} \frac{d(\Delta u_i)}{d {}^0x'_1}$$

teniendo en cuenta que ${}^tx_i = {}^0x_i + {}^tu_i$.

Considerando las definiciones dadas en (A3.6), (A3.7) y (A3.8), la relación entre el incremento de esfuerzo axial y los incrementos de deformaciones axiales se expresa en la configuración 0V como

$${}^0\Delta N = {}^0[EA] [{}^0e'_{11} + {}^0\eta'_{11}] \quad (\text{A3.13})$$

donde 0A y 0E son el área de la sección transversal y el módulo de Young del elemento en la configuración indeformada.

$${}^0e'_{11} = {}^t\mathbf{B}_L \Delta \mathbf{a} \quad ; \quad \boxed{{}^t\mathbf{B}_L = \frac{1}{{}^0J^2} {}^0\mathbf{x}^T \mathbf{N}_{,\xi}^T \mathbf{N}_{,\xi} + \frac{1}{{}^0J^2} {}^t\mathbf{a}^T \mathbf{N}_{,\xi}^T \mathbf{N}_{,\xi}}$$

$${}^0\eta'_{11} = {}^0\mathbf{B}_1 \Delta \mathbf{a} \quad ; \quad \boxed{{}^0\mathbf{B}_1 = \frac{1}{{}^0J^2} \Delta \mathbf{a}^T \mathbf{N}_{,\xi}^T \mathbf{N}_{,\xi}}$$

$$\boxed{{}^0\mathbf{G} = \frac{1}{{}^0J} \mathbf{N}_{,\xi}}$$

$$\boxed{{}^0\mathbf{E} = \left(\frac{\partial {}^0x_i}{\partial {}^0x'_1} \frac{d(\Delta u_i)}{d {}^0x'_1} + \frac{\partial {}^tu_i}{\partial {}^0x'_1} \frac{d(\Delta u_i)}{d {}^0x'_1} \right) {}^0[EA] \mathbf{I}_3}$$

$$\boxed{{}^0\mathbf{E} = \frac{{}^0[EA]}{{}^0J^2} ({}^0\mathbf{x}^T \mathbf{N}_{,\xi}^T \mathbf{N}_{,\xi} \Delta \mathbf{a} + {}^t\mathbf{a}^T \mathbf{N}_{,\xi}^T \mathbf{N}_{,\xi} \Delta \mathbf{a})}$$

$$\boxed{{}^0\mathbf{H} = \frac{d(\Delta u_i)}{d {}^0x'_1} \frac{d(\Delta u_i)}{d {}^0x'_1} {}^0[EA] \mathbf{I}_3 = \frac{{}^0[EA]}{{}^0J^2} \Delta \mathbf{a}^T \mathbf{N}_{,\xi}^T \mathbf{N}_{,\xi} \Delta \mathbf{a}}$$

$$\mathbf{N}_{,\xi} = \left[\frac{dN^1}{d\xi} \mathbf{I}_3, \dots, \frac{dN^n}{d\xi} \mathbf{I}_3 \right]$$

$${}^0\mathbf{x}^{(e)} = [{}^0x_1^1, {}^0x_2^1, {}^0x_3^1, \dots, {}^0x_1^n, {}^0x_2^n, {}^0x_3^n]^T$$

$${}^t\mathbf{a} = [{}^ta_1^1, {}^ta_2^1, {}^ta_3^1, \dots, {}^ta_1^n, {}^ta_2^n, {}^ta_3^n]^T$$

$$\Delta \mathbf{a} = [\Delta a_1^1, \Delta a_2^1, \Delta a_3^1, \dots, \Delta a_1^n, \Delta a_2^n, \Delta a_3^n]^T$$

$${}^0J = \frac{d {}^0x'_1}{d\xi} \quad (\text{usualmente } {}^0J = \frac{{}^0l^{(e)}}{2}) \quad ; \quad \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cuadro A3.3 Expresiones de las matrices relevantes para el cálculo de la matriz de rigidez secante incremental del elemento de barra articulado 3D en la formulación LT

Las coordenadas cartesianas globales de un punto arbitrario de un elemento en la configuración 0V se interpolan en función de sus valores en los nodos de dicho elemento como

$${}^0x_i = \sum_{k=1}^n N^k(\xi) {}^0x_i^k \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A3.14})$$

El campo de desplazamientos, entre las configuraciones 0V y tV , en el interior de un elemento, se interpola en función de los desplazamientos nodales por

$${}^tu_i = \sum_{k=1}^n N^k(\xi) {}^ta_i^k \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A3.15})$$

Con base en las ecuaciones (A3.14), (A3.15) y (A3.12) se obtienen las expresiones de las matrices de deformación de primer y segundo orden, ${}^t\mathbf{B}_L$ y ${}^0\mathbf{B}_1$, que se detallan en el Cuadro A3.3, conjuntamente con las matrices relevantes (${}^0\mathbf{G}$, ${}^0\mathbf{E}$ y ${}^0\mathbf{H}$) para el cálculo de la matriz de rigidez secante incremental a través de las ecuaciones (3.3.4) y (3.3.5) en la formulación Lagrangiana Total.

Se adopta una forma simétrica de la matriz de rigidez secante incremental con $\alpha = 1/2$ y $\beta = 0$ en la descripción Lagrangiana Total. La expresión explícita de las distintas matrices que forman parte de la matriz secante incremental del elemento de barra articulado 3D se detallan en el Cuadro A3.4.

De acuerdo con la definición dada en (2.4.1) las coordenadas globales del nodo 1 (${}^tx_1, {}^ty_1, {}^tz_1$) y del nodo 2 (${}^tx_2, {}^ty_2, {}^tz_2$) del elemento en el instante t pueden expresarse en función de sus coordenadas nodales en la configuración indeformada ${}^0\mathbf{x}^{(e)}$ y de sus desplazamientos nodales ${}^t\mathbf{a}$ entre las configuraciones 0V y tV . Teniendo en cuenta la definición de (${}^tx_{12}, {}^ty_{12}, {}^tz_{12}$) dada en el Cuadro A3.2, después de algunas operaciones algebraicas, se obtienen las siguientes expresiones

$$\begin{cases} {}^tx_{12} = {}^0x_{12} + {}^tu_{12} \\ {}^ty_{12} = {}^0y_{12} + {}^tv_{12} \\ {}^tz_{12} = {}^0z_{12} + {}^tw_{12} \end{cases} \quad (\text{A3.16a})$$

$$\text{con } \begin{cases} {}^tx_{12} = {}^tx_1 - {}^tx_2 \quad ; \quad {}^0x_{12} = {}^0x_1 - {}^0x_2 \quad ; \quad {}^tu_{12} = {}^tu_1 - {}^tu_2 \\ {}^ty_{12} = {}^ty_1 - {}^ty_2 \quad ; \quad {}^0y_{12} = {}^0y_1 - {}^0y_2 \quad ; \quad {}^tv_{12} = {}^tv_1 - {}^tv_2 \\ {}^tz_{12} = {}^tz_1 - {}^tz_2 \quad ; \quad {}^0z_{12} = {}^0z_1 - {}^0z_2 \quad ; \quad {}^tw_{12} = {}^tw_1 - {}^tw_2 \end{cases} \quad (\text{A3.16b})$$

De las ecuaciones (A3.16a) y (A3.11) se obtiene la siguiente expresión para el vector de fuerzas residuales en la formulación LT

$$\begin{aligned}
{}^t_0\mathbf{K}_{Lij} &= {}^0\left[\frac{EA}{l^3}\right](-1)^{i+j} \begin{bmatrix} ({}^0x_{12})^2 & {}^0x_{12} {}^0y_{12} & {}^0x_{12} {}^0z_{12} \\ \text{sym.} & ({}^0y_{12})^2 & {}^0y_{12} {}^0z_{12} \\ & & ({}^0z_{12})^2 \end{bmatrix} + \\
&+ {}^0\left[\frac{EA}{l^3}\right](-1)^{i+j} \begin{bmatrix} 2 {}^0x_{12} {}^t u_{12} & ({}^0x_{12} {}^t v_{12} + {}^0y_{12} {}^t u_{12}) & ({}^0x_{12} {}^t w_{12} + {}^0z_{12} {}^t u_{12}) \\ \text{sym.} & 2 {}^0y_{12} {}^t v_{12} & ({}^0y_{12} {}^t w_{12} + {}^0z_{12} {}^t v_{12}) \\ & & 2 {}^0z_{12} {}^t w_{12} \end{bmatrix} + \\
&+ {}^0\left[\frac{EA}{l^3}\right](-1)^{i+j} \begin{bmatrix} ({}^t u_{12})^2 & {}^t u_{12} {}^t v_{12} & {}^t u_{12} {}^t w_{12} \\ \text{sym.} & ({}^t v_{12})^2 & {}^t v_{12} {}^t w_{12} \\ & & ({}^t w_{12})^2 \end{bmatrix} \\
{}^t_0\mathbf{K}_{Mij} &= {}^0\left[\frac{EA}{2l^3}\right](-1)^{i+j} \begin{bmatrix} 2 {}^0x_{12} u_{12} & ({}^0x_{12} v_{12} + {}^0y_{12} u_{12}) & ({}^0x_{12} w_{12} + {}^0z_{12} u_{12}) \\ \text{sym.} & 2 {}^0y_{12} v_{12} & ({}^0y_{12} w_{12} + {}^0z_{12} v_{12}) \\ & & 2 {}^0z_{12} w_{12} \end{bmatrix} + \\
&+ {}^0\left[\frac{EA}{2l^3}\right](-1)^{i+j} \begin{bmatrix} 2 {}^t u_{12} u_{12} & ({}^t u_{12} v_{12} + {}^t v_{12} u_{12}) & ({}^t u_{12} w_{12} + {}^t w_{12} u_{12}) \\ \text{sym.} & 2 {}^t v_{12} v_{12} & ({}^t v_{12} w_{12} + {}^t w_{12} v_{12}) \\ & & 2 {}^t w_{12} w_{12} \end{bmatrix} + \\
&+ {}^0\left[\frac{EA}{2l^3}\right](-1)^{i+j} [({}^0x_{12} u_{12} + {}^0y_{12} v_{12} + {}^0z_{12} w_{12})] \mathbf{I}_3 + \\
&+ {}^0\left[\frac{EA}{2l^3}\right](-1)^{i+j} [({}^t u_{12} u_{12} + {}^t v_{12} v_{12} + {}^t w_{12} w_{12})] \mathbf{I}_3 \\
{}^t_0\mathbf{K}_{Nij} &= {}^0\left[\frac{EA}{2l^3}\right](-1)^{i+j} \begin{bmatrix} (u_{12})^2 & u_{12} v_{12} & u_{12} w_{12} \\ \text{sym.} & (v_{12})^2 & v_{12} w_{12} \\ & & (w_{12})^2 \end{bmatrix} \\
{}^t_0\mathbf{K}_{\sigma ij} &= \left[\frac{{}^t N}{{}^0 l}\right](-1)^{i+j} \mathbf{I}_3 \\
{}^0x_{12} &= {}^0x_1 - {}^0x_2, \quad {}^t u_{12} = {}^t u_1 - {}^t u_2, \quad u_{12} = \Delta u_1 - \Delta u_2, \quad \text{etc}
\end{aligned}$$

Cuadro A3.4 Expresiones de las diferentes matrices que intervienen en el cálculo de la matriz de rigidez secante incremental para el elemento de barra con dos nodos, utilizando la descripción Lagrangiana Total ($\alpha = 1/2$ y $\beta = 0$)

$${}^{t+\Delta t}{}_0\mathbf{r}^{(e)} = \frac{{}^tN}{0l} \begin{Bmatrix} ({}^0x_{12} + {}^tu_{12}) \\ ({}^0y_{12} + {}^tv_{12}) \\ ({}^0z_{12} + {}^tw_{12}) \\ -({}^0x_{12} + {}^tu_{12}) \\ -({}^0y_{12} + {}^tv_{12}) \\ -({}^0z_{12} + {}^tw_{12}) \end{Bmatrix} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{f}^{(e)} \quad (\text{A3.17})$$

Como se ha comentado en el Apartado 3.5 del Capítulo 3, el concepto de la matriz secante total sólo se aplica en la descripción Lagrangiana Total. Para deducir la forma explícita de la matriz secante total se adoptan las siguientes hipótesis:

- Se supone la configuración indeformada como la configuración de referencia ${}^rV = {}^0V \Rightarrow$ formulación LT;
- Se supone que la configuración indeformada es libre de tensiones iniciales $\Rightarrow {}^tN = 0$;
- Se define una relación entre fuerza y desplazamiento totales en el instante $t + \Delta t \Rightarrow {}^t\mathbf{a} = \mathbf{0}$ y $\Delta\mathbf{a} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{a}$;
- Se supone que el tensor constitutivo elástico tangente es idéntico al tensor constitutivo elástico secante ${}^{t+\Delta t}{}_0E = {}^0E$.

Por tanto, considerando estas hipótesis en las expresiones de las matrices del Cuadro 3.4, se obtienen, fácilmente, las expresiones explícitas de las distintas matrices que forman parte de la expresión de la matriz de rigidez secante total para el elemento de barra articulado 3D. Dichas matrices se detallan en el Cuadro 3.5.

El tensor gradiente de la deformación entre la configuración indeformada 0V y la configuración deformada en tV , para un estado uniaxial de tensión, se expresa como

$${}^t{}_0F_{mn} = \frac{\partial {}^tx'_m}{\partial {}^0x'_n} = \frac{{}^tl^{(e)}}{{}^0l^{(e)}} \quad (\text{A3.18})$$

donde ${}^0l^{(e)}$ es la longitud del elemento en la configuración indeformada y ${}^tl^{(e)}$ es su longitud en el instante t . El determinante del tensor gradiente de la deformación se determina fácilmente como

$$\det ({}^t{}_0F_{mn}) = \frac{{}^tl^{(e)}}{{}^0l^{(e)}} \quad (\text{A3.19})$$

De esta manera los tensores constitutivos tangentes definidos en las configuraciones 0V y tV se relacionan, de acuerdo con (2.5.5), de la siguiente manera

$${}^{t+\Delta t}{}_0\mathbf{K}_{Lij} = {}^0\left[\frac{EA}{l^3}\right] (-1)^{i+j} \begin{bmatrix} ({}^0x_{12})^2 & {}^0x_{12} {}^0y_{12} & {}^0x_{12} {}^0z_{12} \\ & ({}^0y_{12})^2 & {}^0y_{12} {}^0z_{12} \\ \text{sym.} & & ({}^0z_{12})^2 \end{bmatrix}$$

$${}^{t+\Delta t}{}_0\mathbf{K}_{Mij} = {}^0\left[\frac{EA}{2l^3}\right] (-1)^{i+j} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 2 {}^0x_{12} {}^{t+\Delta t}u_{12} & ({}^0x_{12} {}^{t+\Delta t}v_{12} + {}^0y_{12} {}^{t+\Delta t}u_{12}) & ({}^0x_{12} {}^{t+\Delta t}w_{12} + {}^0z_{12} {}^{t+\Delta t}u_{12}) \\ & 2 {}^0y_{12} {}^{t+\Delta t}v_{12} & ({}^0y_{12} {}^{t+\Delta t}w_{12} + {}^0z_{12} {}^{t+\Delta t}v_{12}) \\ \text{sym.} & & 2 {}^0z_{12} {}^{t+\Delta t}w_{12} \end{bmatrix} +$$

$$+ {}^0\left[\frac{EA}{2l^3}\right] (-1)^{i+j} [{}^0x_{12} {}^{t+\Delta t}u_{12} + {}^0y_{12} {}^{t+\Delta t}v_{12} + {}^0z_{12} {}^{t+\Delta t}w_{12}] \mathbf{I}_3$$

$${}^{t+\Delta t}{}_0\mathbf{K}_{Nij} = {}^0\left[\frac{EA}{2l^3}\right] (-1)^{i+j} \begin{bmatrix} ({}^{t+\Delta t}u_{12})^2 & {}^{t+\Delta t}u_{12} {}^{t+\Delta t}v_{12} & {}^{t+\Delta t}u_{12} {}^{t+\Delta t}w_{12} \\ & ({}^{t+\Delta t}v_{12})^2 & {}^{t+\Delta t}v_{12} {}^{t+\Delta t}w_{12} \\ \text{sym.} & & ({}^{t+\Delta t}w_{12})^2 \end{bmatrix}$$

con ${}^0x_{12} = {}^0x_1 - {}^0x_2$, ${}^{t+\Delta t}u_{12} = {}^{t+\Delta t}u_1 - {}^{t+\Delta t}u_2$, etc
 i y j = nodos del elemento de barra

Cuadro A3.5 Expresiones de las diferentes matrices que intervienen en el cálculo de la matriz de rigidez secante total para el elemento de barra con dos nodos, utilizando la descripción Lagrangiana Total ($\alpha = 1/2$ y $\beta = 0$)

$${}^tE = \left(\frac{{}^t l(e)}{{}^0 l(e)}\right)^3 {}^0E \tag{A3.20}$$

Si la deformación axial del elemento es infinitesimal, esto implica que ${}^t l(e)/{}^0 l(e) \approx 1 \implies {}^t E \approx {}^0 E$. De esta manera, al adoptarse el material lineal elástico en la configuración indeformada 0V , o en la configuración deformada tV , los resultados de las simulaciones numéricas con el mismo problema utilizando las descripciones LT y LA serán idénticos sólo si las deformaciones son infinitesimales.

Nótese que en todos los cuadros presentados hasta el momento aparecen las expresiones ${}^0[EA]$ y ${}^t[EA]$ que se definen en las ecuaciones (A3.8) y (A3.13); son

las rigideces axiales del elemento de barra descrito en la configuración indeformada 0V y en la configuración deformada tV , respectivamente. Es de interés práctico y teórico establecer una relación entre dichas rigideces en el ámbito de las deformaciones axiales finitas.

Una vez que se admiten deformaciones finitas hay que incluir el cambio de volumen del elemento. Sea 0A el área de la sección transversal del elemento en el instante $t = 0$ y tA el área del mismo elemento en el instante t . Se puede definir la siguiente relación

$$\frac{{}^tA}{{}^0A} = \left(\frac{{}^0l(e)}{{}^tl(e)} \right)^{2\nu} \quad (\text{A3.21})$$

donde ν es el coeficiente de Poisson. La ecuación (A3.21) expresa el cambio del área del elemento en función del cambio de su longitud y del coeficiente de Poisson. La deducción de esta expresión se encuentra con detalle en el capítulo 3 del libro de CRISFIELD [1991].¹

Basada en las ecuaciones (A3.20) y (A3.21) se puede definir una relación que expresa el cambio de la rigidez axial del elemento entre los instantes *inicial* y t del modo siguiente

$$\frac{{}^t[EA]}{{}^0[EA]} = \left(\frac{{}^tl(e)}{{}^0l(e)} \right)^{3-2\nu} \quad (\text{A3.22})$$

Normalmente, las hipótesis fundamentales del análisis de estructuras articuladas planas o espaciales son:

- La tensión normal es constante en toda la sección transversal.
- El área permanece constante durante la deformación.

La segunda hipótesis implica suponer el coeficiente de Poisson nulo ($\nu = 0$) teniendo en cuenta la ecuación (A3.21). De esta manera, imponiendo el coeficiente de Poisson nulo en la ecuación (A3.22), resulta

$$\frac{{}^t[EA]}{{}^0[EA]} = \left(\frac{{}^tl(e)}{{}^0l(e)} \right)^3 \quad (\text{A3.23})$$

La ecuación anterior expresa el cambio de la rigidez axial del elemento en función del cambio de longitud del mismo elemento durante la deformación.

¹ CRISFIELD, M.A. [1991], *Non-Linear finite element analysis of solids and structures, Volumen 1: Essentials*, John Wiley & Sons

ANEXO A4

MATRICES RELEVANTES EN EL CÁLCULO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ SECANTE INCREMENTAL DEL ELEMENTO DE SÓLIDO 2D

El objetivo de este anexo es describir las expresiones de las matrices relevantes en el cálculo de la matriz de rigidez secante incremental para elementos de sólido 2D, adoptando la hipótesis de tensión plana.

De acuerdo con las ecuaciones (3.3.5), las diversas matrices que forman parte de la expresión de matriz de rigidez secante incremental son función de las matrices de deformación, y además, de las matrices dependientes de las tensiones y de sus incrementos.

Las matrices de deformación de primer y segundo orden, (${}^t_r\mathbf{B}_L$ y ${}^r_r\mathbf{B}_1$), son construidas a partir de la matriz de deformación infinitesimal (${}^r_r\mathbf{B}_{L0}^k$), definida en los nodos del elemento, y de las matrices de los gradientes de los desplazamientos y de sus incrementos (${}^t_r\mathbf{L}$ y ${}^r_r\mathbf{L}$), de acuerdo con las ecuaciones (3.2.12). Se obtienen dichas matrices para elementos de sólido 2D, expresadas en el Cuadro A4.1, a partir de las definiciones dadas en el Cuadro 3.1 para elementos de sólidos 3D. La matriz del gradiente de las funciones de forma de los nodos del elemento, ${}^r_r\mathbf{G}$ también se detalla en el cuadro A4.1.

La hipótesis de tensión plana implica que

$$\begin{cases} {}^r_r\Delta S_{33} = 0 & \text{con } {}^r_r\Delta \varepsilon_{33} \neq 0 \\ {}^r_r\Delta S_{13} = {}^r_r\Delta S_{23} = 0 \implies {}^r_r\Delta \varepsilon_{13} = {}^r_r\Delta \varepsilon_{23} = 0 \end{cases} \quad (A4.1)$$

La representación matricial de los tensores de incremento de deformación de primer y segundo orden, de acuerdo con (A4.1), se expresa como

$$\begin{aligned} {}^r_r\mathbf{e} &= [{}^r_r e_{11}, {}^r_r e_{22}, 2 {}^r_r e_{12}]^T \\ {}^r_r\boldsymbol{\eta} &= [{}^r_r \eta_{11}, {}^r_r \eta_{22}, 2 {}^r_r \eta_{12}]^T \end{aligned} \quad (A4.2)$$

y de los tensores de tensiones y de incrementos de tensiones como

$$\begin{aligned}
{}^r\mathbf{G} &= [{}^r\mathbf{G}^1, {}^r\mathbf{G}^2, \dots, {}^r\mathbf{G}^n] \quad ; \quad {}^r\mathbf{G}^k = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^k}{\partial {}^r x_1} \mathbf{I}_2 \\ \frac{\partial N^k}{\partial {}^r x_2} \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \\
{}^t\mathbf{B}_L &= [{}^t\mathbf{B}_L^1, {}^t\mathbf{B}_L^2, \dots, {}^t\mathbf{B}_L^n] \\
{}^r\mathbf{B}_1 &= [{}^r\mathbf{B}_1^1, {}^r\mathbf{B}_1^2, \dots, {}^r\mathbf{B}_1^n] \\
{}^t\mathbf{B}_L^k &= {}^r\mathbf{B}_{L_0}^k [\mathbf{I}_2 + {}^t\mathbf{L}^T] \\
{}^r\mathbf{B}_1^k &= {}^r\mathbf{B}_{L_0}^k {}^r\hat{\mathbf{L}}^T \\
{}^r\mathbf{B}_{L_0}^k &= \begin{bmatrix} {}^rN_{,1}^k & 0 \\ 0 & {}^rN_{,2}^k \\ {}^rN_{,2}^k & {}^rN_{,1}^k \end{bmatrix} \quad ; \quad {}^t\mathbf{B}_{L_1}^k = {}^r\mathbf{B}_{L_0}^k {}^t\mathbf{L}^T \\
{}^t\mathbf{L} &= \begin{bmatrix} {}^t l_{11} & {}^t l_{12} \\ {}^t l_{21} & {}^t l_{22} \end{bmatrix} \quad ; \quad {}^r\hat{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} {}^r\hat{l}_{11} & {}^r\hat{l}_{12} \\ {}^r\hat{l}_{21} & {}^r\hat{l}_{22} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^rN_{,i}^k &= \frac{\partial N^k}{\partial {}^r x_i} \quad ; \quad {}^t l_{ij} = \frac{\partial {}^t u_i}{\partial {}^r x_j} = \sum_{k=1}^n {}^rN_j^k {}^t a_i^k \quad ; \quad {}^r\hat{l}_{ij} = \frac{\partial \Delta u_i}{\partial {}^r x_j} = \sum_{k=1}^n {}^rN_j^k \Delta a_i^k
\end{aligned}$$

Cuadro A4.1 Matrices de deformación de primer y segundo orden para elementos de sólido 2D

$$\begin{aligned}
{}^t\mathbf{S} &= [{}^t S_{11}, {}^t S_{22}, {}^t S_{12}]^T \\
{}^r\Delta\mathbf{S} &= [{}^r\Delta S_{11}, {}^r\Delta S_{22}, {}^r\Delta S_{12}]^T
\end{aligned} \tag{A4.3}$$

Imponiendo las restricciones (A4.1) en la ecuación (2.5.15b), resulta

$$\begin{cases}
{}^r\Delta S_{11} = (\lambda + 2\mu) {}^r\Delta\varepsilon_{11} + \lambda {}^r\Delta\varepsilon_{22} + \lambda {}^r\Delta\varepsilon_{33} \\
{}^r\Delta S_{22} = \lambda {}^r\Delta\varepsilon_{11} + (\lambda + 2\mu) {}^r\Delta\varepsilon_{22} + \lambda {}^r\Delta\varepsilon_{33} \\
0 = \lambda {}^r\Delta\varepsilon_{11} + \lambda {}^r\Delta\varepsilon_{22} + (\lambda + 2\mu) {}^r\Delta\varepsilon_{33} \\
{}^r\Delta S_{12} = \mu 2 {}^r\Delta\varepsilon_{12}
\end{cases} \tag{A4.4}$$

El tensor constitutivo tangente en la configuración rV , definido en (2.5.13), se reescribe para el estado plano de tensión, teniendo en cuenta las ecuaciones (A4.4), como

$${}_r\mathbf{D} = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \begin{bmatrix} 2(\lambda + \mu) & \lambda & 0 \\ \lambda & 2(\lambda + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda + 2\mu}{2} \end{bmatrix} \quad (A4.5)$$

donde λ y μ son las constantes de Lamé.

De esta manera, las matrices $({}_r\mathbf{E}, {}_r\mathbf{H}$ y ${}^t_r\hat{\mathbf{S}})$ que son función de los incrementos de tensión de primer y de segundo orden, y de las tensiones en la configuración tV , respectivamente, tienen sus expresiones detalladas en el Cuadro A4.2. Nótese que las matrices ${}_r\mathbf{E}, {}_r\mathbf{H}, \mathbf{H}_i$ y ${}^t_r\hat{\mathbf{S}}$ son matrices cuadradas (4×4) .

$${}_r\mathbf{E} = \begin{bmatrix} a \mathbf{I}_2 & c \mathbf{I}_2 \\ c \mathbf{I}_2 & b \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad [a, b, c]^T = {}_r\mathbf{D} \, {}_r\mathbf{e} = {}_r\Delta\mathbf{S}^{1ord}$$

$${}_r\mathbf{E} = \begin{bmatrix} {}_r\Delta S_{11}^{1ord} \mathbf{I}_2 & {}_r\Delta S_{12}^{1ord} \mathbf{I}_2 \\ {}_r\Delta S_{21}^{1ord} \mathbf{I}_2 & {}_r\Delta S_{22}^{1ord} \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

$${}_r\mathbf{H} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 {}_r d_{ij} \, {}_r\eta_j \, \mathbf{H}_i \quad ; \quad {}_r\eta_j = {}_r\mathbf{g}^T \mathbf{H}_j \, {}_r\mathbf{g} \quad ; \quad {}_r\mathbf{g} = \begin{Bmatrix} {}_r\mathbf{g}_1 \\ {}_r\mathbf{g}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial(\Delta u_1)}{\partial {}^r x_1} \\ \frac{\partial(\Delta u_2)}{\partial {}^r x_1} \\ \frac{\partial(\Delta u_1)}{\partial {}^r x_2} \\ \frac{\partial(\Delta u_2)}{\partial {}^r x_2} \end{Bmatrix}$$

donde ${}_r d_{ij}$ es el término ij de la matriz constitutiva ${}_r\mathbf{D}$

con $\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$

$$\frac{1}{2} {}_r\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \bar{a} \mathbf{I}_2 & \bar{c} \mathbf{I}_2 \\ \bar{c} \mathbf{I}_2 & \bar{b} \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad [\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}]^T = {}_r\mathbf{D} \, {}_r\boldsymbol{\eta} = {}_r\Delta\mathbf{S}^{2ord}$$

$$\frac{1}{2} {}_r\mathbf{H} = \begin{bmatrix} {}_r\Delta S_{11}^{2ord} \mathbf{I}_2 & {}_r\Delta S_{12}^{2ord} \mathbf{I}_2 \\ {}_r\Delta S_{21}^{2ord} \mathbf{I}_2 & {}_r\Delta S_{22}^{2ord} \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

$${}^t_r\hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} {}^t_r S_{11} \mathbf{I}_2 & {}^t_r S_{12} \mathbf{I}_2 \\ {}^t_r S_{21} \mathbf{I}_2 & {}^t_r S_{22} \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

\mathbf{I}_2 : matriz identidad 2×2

Cuadro A4.2. Matrices ${}_r\mathbf{E}, {}_r\mathbf{H}$ y ${}^t_r\hat{\mathbf{S}}$ para elementos de sólido 2D