

J.M. Romera^a, N. Carbajal^b, U. Garitaonandia^b, F.Mujika^b^a Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad UPV/EHU, Grupo Materiales + Tecnologías / Mecánica de Materiales, Rafael Moreno Pitxitxi 2, 48013 Bilbao, España^b Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad UPV/EHU, Grupo Materiales + Tecnologías / Mecánica de Materiales, Plaza de Europa 1, 20018 San Sebastián, España

Nuevas soluciones analíticas para las tensiones de borde en laminados simétricos

RESUMEN

Historia del artículo:

Recibido 29 de Mayo de 2019

En la versión revisada 20 de Junio de 2019

Aceptado 5 de Julio de 2019

Accesible online 15 de Abril de 2021

Palabras clave:

Laminados simétricos

Tensiones de borde

Carga de tracción

Aproximación analítica

Efectos de acoplamiento

Los efectos de borde en laminados compuestos son un tema recurrente en la bibliografía desde los años setenta debido a su influencia en la reducción de la resistencia de los mismos.

En trabajos anteriores se obtuvieron soluciones analíticas de forma explícita para laminados simétricos angulares y cuasi-isótropos mediante un nuevo planteamiento. En esta ocasión, se propone un nuevo modelo para la resolución de laminados simétricos generales. Éste está basado en la hipótesis de un nuevo campo de desplazamientos que permite la flexión transversal del laminado. Se plantea una estrategia para la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales, así como diferentes hipótesis para las condiciones de contorno.

Mediante el desarrollo de la técnica propuesta se pueden obtener diferentes soluciones para las tensiones interlaminares en las intercaras.

Novel analytic solutions for edge stresses in symmetric laminates

ABSTRACT

Keywords:

Symmetric laminates

Edge stresses

Tensile load

Analytic approach

Coupling effects

The "edge effect" problem in laminates is a redundant topic in the literature since the seventies because of its influence on the reduction of the laminate strength.

In previous works analytic solutions for angle-ply and quasi-isotropic symmetric laminates were obtained. In this work, a new model for obtaining solutions in the general case of symmetric laminates is presented. It is based on a new assumed displacement field in which the transverse bending of the laminate is not constrained. An strategy for solving the system of differential equations is proposed, as well as different hypotheses for the boundary conditions.

Different solutions for the interlaminar stresses can be derived from the proposed technique.

1 Introducción

Los efectos de borde afectan a geometrías con esquinas, bordes y agujeros. En estas circunstancias se produce una reducción de la resistencia de los laminados de material compuesto cuando se les somete a carga. Ello es debido al incremento de las tensiones interlaminares en la zona de los bordes.

En la práctica este fenómeno tiene las siguientes repercusiones. Por una parte, se produce una subestimación de las propiedades de los materiales [1] ya que éstas se determinan en ensayos que se realizan sobre cupones con bordes libres. Por otra parte, surge la necesidad de seleccionar entre diferentes espesores y orientaciones en el diseño de geometrías con bordes libres, puesto que la influencia de este efecto sobre la resistencia de los laminados varía. De hecho, se han desarrollado criterios de fallo como el de Sun y Zhou [2] que tienen en cuenta la influencia de las tensiones interlaminares. Asimismo, Joo y Sun [3] han presentado un nuevo criterio de fallo para laminados simétricos equilibrados de carbono/epoxy el cual está basado en la diferencia del acoplamiento tracción-cortadura entre las capas adyacentes. Finalmente, Lorriot et al. [4] y Lagunegrand et al. [5] han propuesto otro criterio basado en tensiones para predecir experimentalmente el inicio de la delaminación en los bordes libres teniendo en cuenta las tensiones interlaminares.

Las tensiones interlaminares en las proximidades de los bordes libres se obtienen mediante aproximaciones numéricas y analíticas. En el caso de las aproximaciones numéricas la técnica más usada habitualmente es el Método de los Elementos Finitos (MEF). Sin embargo, es necesario el empleo de un alto coste computacional si se pretenden obtener resultados precisos del campo de tensiones en torno a la zona del borde. Ello es debido a la necesidad de disponer un mallado fino en esa zona por el elevado gradiente que presentan las tensiones [6]. En cuanto a los modelos analíticos existen varias opciones en la literatura que en general requieren de un elevado *expertise* [7].

Este trabajo pretende generalizar los modelos analíticos presentados para calcular las tensiones de borde en laminados angulares sometidos a carga axial [8] a cualquier secuencia simétrica. Desde un punto de vista de la deformación, los efectos de acoplamiento de la mitad del laminado son compensados por la otra mitad y el comportamiento total del mismo es el de un material isotrópico. Sin embargo, las deformaciones inducidas por los acoplamientos que cada sublaminado presentaría si estuviera solo, son coartadas por la reacción que ejerce la otra mitad. Se analiza cada sublaminado por separado mediante la adopción de un nuevo campo de desplazamientos que permite la flexión transversal del mismo. Como resultado de la sustitución de las ecuaciones de equilibrio en las expresiones de las deformaciones se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Finalmente se propone una

estrategia para su resolución y la obtención de las tensiones interlaminares.

2 Aproximación analítica

El problema a analizar es un laminado simétrico con $2n$ capas sometido a tracción como el que se puede ver en la Figura 1.

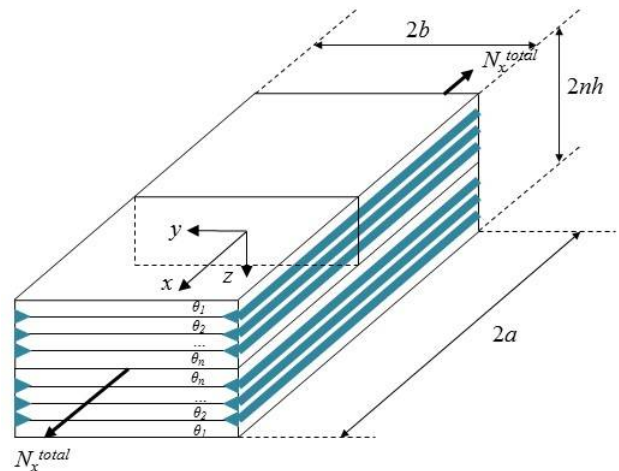


Figura 1. Laminado simétrico sometido a tracción.

En una primera fase se va a extraer el sublaminado superior, incorporándole la reacción que la otra mitad le ejerce, tal y como se ve en la Figura 2.

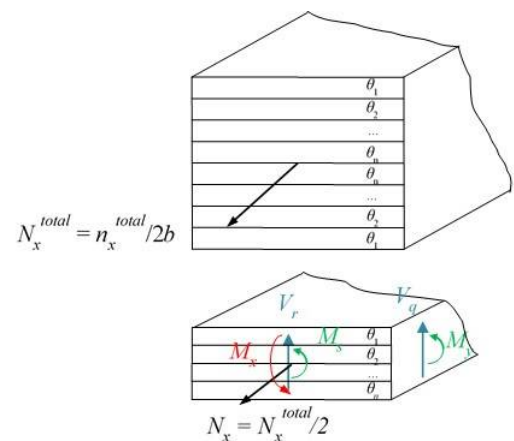


Figura 2. Extracción del laminado superior.

Dentro del laminado superior y debido a las ecuaciones de equilibrio se debe cumplir la ecuación (1),

$$\begin{cases} N_s = N_y = 0 \\ M_{s,y} = V_r \\ M_{y,y} = V_q \end{cases} \quad (1)$$



Con el objetivo de que el modelo propuesto tenga en cuenta la flexión transversal del sublaminado, se propone el siguiente campo de desplazamientos,

$$\begin{cases} u = u_0(x, y) + z\theta_x(x, y) \\ v = v_0(x, y) + z\theta_y(x, y) \\ w = w_0(x) - y\theta_y(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

Mediante la derivación del campo de desplazamientos se llega a la siguiente relación entre las curvaturas y sus correspondientes deformaciones angulares,

$$\begin{cases} -\gamma_{yz,yy} = \kappa_{y,y} \\ \gamma_{xz,yy} = \kappa_{s,y} \end{cases} \quad (3)$$

Asimismo, sustituyendo en la ecuación (3) la ecuación constitutiva del laminado se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales,

$$\begin{cases} -\gamma_{yz,yy} = d_{xy}M_{x,y} + d_{yy}M_{y,y} + d_{ys}M_{s,y} \\ \gamma_{xz,yy} = d_{xs}M_{x,y} + d_{ys}M_{y,y} + d_{ss}M_{s,y} \end{cases} \quad (4)$$

Finalmente, realizando los siguientes cambios de variable $x = \gamma_{yz}$ e $y = \gamma_{xz}$ y teniendo en cuenta la ecuación (1) el sistema resulta,

$$\begin{cases} F_{11}x'' + G_{11}y'' = F_{12}x + G_{12}y \\ F_{21}x'' + G_{21}y'' = F_{22}x + G_{22}y \end{cases} \quad (5)$$

Para la resolución del sistema definido en la ecuación (5) se va a realizar un nuevo cambio de variable $x' = z$ e $y' = p$, con lo que resulta,

$$\begin{cases} x' = z \\ y' = p \\ z' = Z_1x + Z_2y \\ p' = P_1x + P_2y \end{cases} \quad (6)$$

La ecuación (6) es un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden lineal y homogéneo de la forma $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$, donde,

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ p \end{pmatrix} \quad (7)$$

La ecuación característica correspondiente a la ecuación (6) es,

$$\lambda^4 - (P_2 + Z_1)\lambda^2 + (Z_1P_2 - Z_2P_1) = 0 \quad (8)$$

Por lo tanto, la forma de la solución quedará condicionada por los valores propios de la ecuación (8) y sus vectores propios correspondientes. En definitiva, la forma de la solución para las deformaciones angulares quedará condicionada por la configuración del laminado, esto es, por los espesores y orientaciones de las capas, el material de cada capa y la anchura del laminado. En cualquier caso la solución será una superposición de funciones exponenciales.

Además, para resolver el sistema son necesarias las correspondientes condiciones de contorno, y en este momento hay que optar por una de las siguientes posibilidades,

$$\begin{cases} M_s(\pm b) = 0 \\ M_y(\pm b) = 0 \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} M_s(\pm b) = 0 \\ M_{y,y}(\pm b) = 0 \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} M_y(\pm b) = 0 \\ M_{y,y}(\pm b) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Al sustituir las condiciones de contorno en la forma general de la solución del sistema de ecuaciones diferenciales resulta un sistema algebraico lineal de 4 ecuaciones no homogéneo. Las incógnitas del mismo son las constantes de integración.

3 Tensiones interlaminares

Las tensiones interlaminares se obtienen mediante la integración con respecto a z de las ecuaciones de equilibrio expresadas en tensiones,

$$\begin{cases} \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} = 0 \\ \sigma_{yy,y} + \tau_{yz,z} = 0 \\ \tau_{yz,y} + \sigma_{zz,z} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

A su vez, cada componente de tensión en el plano σ_{ij} se puede expresar en función de las deformaciones angulares calculadas en la sección anterior,

$$\sigma_{ij}^k = f^k(\gamma_{yz,yy}, \gamma_{xz,yy}) \quad (11)$$

donde k es el índice para la numeración de las capas. Las constantes de esta última integración se calculan mediante la aplicación de la condición de igualdad de tensiones fuera del plano en las intercaras,

$$\begin{cases} \sigma_{iz}^1(z_0) = 0 \\ \sigma_{iz}^j(z_j) = \sigma_{iz}^{j+1}(z_j) \end{cases} \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, 2n - 1 \quad (12)$$

siendo z_i las coordenadas en dirección z de las intercaras en el sistema de referencia de la Figura 3.

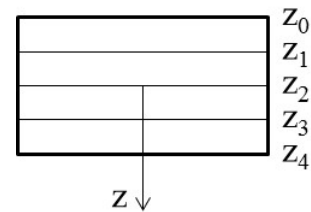


Figura 3. Sección transversal de un laminado de cuatro capas.

4 Conclusiones

Se presenta un nuevo modelo analítico para determinar las tensiones de borde en laminados simétricos generales.

La forma de la solución depende de la configuración del laminado.

La forma de la solución es una superposición de funciones exponenciales.

Se pueden utilizar diferentes condiciones de contorno para determinar las constantes de integración.

Agradecimientos

Los autores agradecen a la Universidad del País Vasco (UPV/EHU) la financiación del Grupo de Investigación Mecánica de Materiales GIU 16/51 en la convocatoria de 2016.



Referencias

- [1] T.A. Fletcher, A.K. Reinarz, T.J. Dodwell, R. Butler, R. Scheichl, R. Newley, Efficient modelling and accurate certification of curved aerospace laminates, *17th European Conference on Composite Materials*, (2016).
- [2] C.T. Sun, S.G. Zhou, Failure of Quasi-Isotropic Composite Laminates with Free Edges, *J. Reinf. Plast. Compos.* **7**, pág. 515-557 (1988).
- [3] J.W. Joo, C.T. Sun, A Failure criterion for Laminates Governed by Free Edge Interlaminar Shear Stresses, *J. Compos Mater.* **26**, 10, pág. 1510-1522 (1992).
- [4] T. Lorriot, G. Marion, R. Harry, H. Wagnier, Onset of free-edge delamination in composite laminates under tensile loading, *Compos. Pt. B-Eng.* **34**, pág. 459-471 (2003).
- [5] L. Lagunegrand, T. Lorriot, R. Harry, H. Wagnier, J.M. Quenisset, Initiation of free-edge delamination in composite laminates, *Compos. Sci. Technol.* **66**, pág. 1315-1327 (2006).
- [6] J. Wei, J.H. Zhao, Three-dimensional Finite Element Analysis on Interlaminar Stresses of Symmetric Laminates, *Comput. Struct.* **41**, 4, pág. 561-567 (1991).
- [7] A. Nosier, M. Maleki, Free edge stresses in general composite laminates, *Int. J. Mech. Sci.* **50**, pág. 1435-1447 (2008).
- [8] J.M. Romera, M.A. Cantera, I. Adarraga, F. Mujika, A top-down analytic approach for the analysis of edge effects of angle-ply symmetric laminates, *Composite Structures*, **104**, pág 60-70 (2013). <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.04.016>

