Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 6, 1, 53-66(1990)

RESOLUCION DE FLUJOS POTENCIALES COMPRESIBLES NO-ESTACIONARIOS POR EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

MARIO STORTI*

Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química (INTEC)
UNL-CONICET
Santa Fe-Argentina

RESUMEN

Son considerados flujos alrededor de perfiles aerodinámicos que evolucionan en el tiempo en forma rígida. Para evitar el uso de mallas deformables la ecuación potencial completa es transformada a un sistema de referencia no-inercial donde el dominio de integración es fijo. En este sistema las ecuaciones son discretizadas y resueltas por un método de minimización en direcciones dadas por los vectores de Lanczos. Para casos con sustentación se tiene en cuenta la vorticidad concentrada en el borde de fuga siguiendo el modelo de Giesing-Maskell el cual, para frecuencias reducidas muy pequeñas, es equivalente a la condición de Kutta-Joukowski estacionaria. Varios ejemplos numéricos son presentados.

SUMMARY

In this work inviscid irrotational flows around aerodynamic profiles which experiment rigid motions are studied. To avoid the use of deformable grids the full potential equation is transformed to a non-inertial frame of reference where the domain of integration is fixed. The problem is discretized in this frame of reference and the resulting system of equations is resolved via a minimization along Lanczos vectors algorithm. In lift problems, the vorticity concentrated in the wake is taken account. This vorticity is produced in the trailing edge following the model of Giesing & Maskell, which reduces to the steady Kutta-Joukowski condition for low reduced frequencies. Finally several numerical examples are presented.

INTRODUCCION

En vuelo transónico un movimiento del cuerpo origina cambios importantes en las fuerzas aerodinámicas que actúan sobre él. Esto se debe a que la curva de presión sobre el perfil es muy sensible a cambios en el ángulo de ataque u otros efectos en este régimen. Es bien sabido, por ejemplo, que las curvas de respuesta del perfil en régimen estacionario (por ejemplo C_M = momento versus α) se vuelven más sensibles al pasar a régimen transónico. Esto es más importante cuanto mayor sean las variaciones

* Becario de Formación Superior del CONICET

Recibido: Marzo 1989

©Universitat Politècnica de Catalunya (España) ISSN 0213-1315

en la posición y amplitud de la onda de choque, por ejemplo en el caso de perfiles supercríticos con curvas de presión muy "planas" en la cara externa del perfil.

En régimen no-estacionario las fuerzas aerodinámicas deben analizarse no sólo por su magnitud sino también por el retraso de fase que presentan con respecto a la excitación. En el caso transónico, los retrasos de fase son relativamente grandes debido a que las perturbaciones del fluido deben propagarse en contra de un flujo casi sónico y rodear las zonas supersónicas. Este efecto es muy importante ya que es sabido, de la teoría de control, que retrasos de fase importantes se asocian a inestabilidad.

Un parámetro importante en régimen no-estacionario es la frecuencia reducida:

$$k = \omega a/2V$$

Nótese que a/V es (aproximadamente) el tiempo que tarda una partícula de fluido en recorrer la cuerda. Como en régimen transónico $V \approx a$ este tiempo es también (aprox.) el tiempo que tarda una perturbación en recorrer la cuerda c. En control (δ (control) $\gg$ δ (flutter); k (control) $\ll$ k (flutter)) se trata de predecir la respuesta del perfil ante un cierto cambio en las condiciones de vuelo (cambio del ángulo de ataque, cambio en la posición de los "flaps", etc...), fundamentalmente se intenta predecir los tiempos de respuesta y las posibles inestabilidades. En flutter, los desplazamientos van asociados, generalmente, a la amplitud de los modos de vibración de la estructura. Aquí se trata de predecir bajo que circunstancias estos modos interactúan con el fluido en forma tal que su amplitud crece indefinidamente.

En la parte 1 de este trabajo haremos una transformación de las ecuaciones de forma que estas sigan siendo válidas en un sistema de referencia no inercial. De esta manera la ecuación completa que describe el flujo de un fluido no viscoso compresible irrotacional (supondremos ondas de choque débiles) sea resuelta en un sistema de referencia que se mueve en forma rígida solidariamente con el perfil. Esto nos permitirá evitar la utilización de mallas deformables. En la parte 2 se detalla la discretización y la formulación variacional. En la parte 3 se modifica la técnica de "decentraje" utilizada en el caso estacionario. En la parte 4 se discute la extensión de la condición de Kutta-Joukowski al caso no-estacionario. Se adopta un modelo debido a Giesing que describe la emisión de vorticidad en el borde de fuga. A frecuencias reducidas bajas este modelo se reduce a la imposición de la CKJ en forma cuasi-estacionaria. Esta última es la técnica usada corrientemente en los códigos potenciales no-estacionarios en diferencias finitas. Finalmente, en la parte 5 presentaremos varios ejemplos numéricos.

TRANSFORMACION DE LAS ECUACIONES A UN SISTEMA DE REFERENCIA NO INERCIAL

Las ecuaciones de la aerodinámica para un fluido no viscoso alrededor de un perfil en régimen no-estacionario son:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \nabla \phi) = 0; \qquad \text{ecuación de continuidad} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \psi(\rho) = cte = \frac{1}{2}v_\infty^2 + \psi(\rho); \qquad \text{ecuación de Bernouilli} \quad (2)$$

$\psi(\rho)$ es una función conocida. Para un fluido perfecto:

$$\psi(\rho) = \frac{v_\infty^2}{(\gamma - 1)M_\infty^2}\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right)^{\gamma-1} \quad (3)$$

La velocidad se obtiene del potencial como:

$$\mathbf{v} = \nabla\phi \quad (4)$$

Estas ecuaciones se derivan de la ecuación de Euler bajo la suposición de irrotacionalidad y entropía constante. Son válidas sólo en un sistema de referencia inercial (se entiende por ésto a un sistema de referencia que permanece fijo con respecto a las estrellas fijas). La ecuación de Bernoulli (2) debe ser mirada como una ecuación constitutiva que permite despejar $\rho = \rho((\nabla\phi)^2, \partial\phi/\partial t)$ para reemplazar en (1) y obtener así una ecuación en derivadas parciales para ϕ.

Las condiciones en los límites apropiados son:

$$\rho\nabla\phi \cdot \hat{\mathbf{n}} = \rho_\infty \mathbf{v}_\infty \cdot \hat{\mathbf{n}}; \qquad \text{en } \Gamma_\infty \quad (5)$$

$$(\nabla\phi - \mathbf{v}_p) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0; \qquad \text{en } \Gamma_p(t) \quad (6)$$

Las condiciones iniciales son:

$$\rho(\mathbf{x}, t=0) = \rho^0(\mathbf{x}); \qquad \text{en } \Omega(t) \quad (7)$$

$$\phi(\mathbf{x}, t=0) = \phi^0(\mathbf{x}); \qquad \text{en } \Omega(t) \quad (8)$$

Debido al movimiento del perfil Γ_p varía y, por tanto, Ω también, esto nos lleva a considerar el uso de mallas deformables. Sin embargo, si el movimiento del perfil es rígido (como en el caso de variaciones en el ángulo de ataque o translaciones del perfil) existe la posibilidad de hacer una transformación de coordenadas a un sistema de referencia que se mueve junto al perfil. En este sistema $\Gamma'_p \neq \Gamma'_p(t)$ y eligiendo $\Gamma'_\infty \neq \Gamma'_\infty(t)$ obtenemos un dominio $\Omega \neq \Omega(t)$. De esta forma podemos obviar el uso de mallas deformables. Sin embargo, este sistema no será inercial y, por lo tanto, debemos transformar las ecuaciones originales.

Tenemos entonces un sistema de referencia inercial S donde son válidas las ecuaciones (1)–(4) y otro S' no inercial. Las coordenadas $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ de un punto P en ambos sistemas están relacionadas por:

$$\mathbf{x}' = O(t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(t)) \quad (9)$$

donde:

$$O \in \mathbb{R}^{3x3} \text{ matriz ortogonal } (OO^T = I) \text{ de rotación} \tag{10}$$

$\mathbf{x}_c$ = coordenadas de un punto fijo del perfil en S por ejemplo a media cuerda.

En $2D$ O es función sólo del ángulo de ataque:

$$O(t) = \begin{bmatrix} \cos\alpha(t) & -\operatorname{sen}\alpha(t) \\ \operatorname{sen}\alpha(t) & \cos\alpha(t) \end{bmatrix} \tag{11}$$

En $3D$ la evolución del perfil está especificada por los ángulos de Euler $\psi(t)$, $\theta(t)$, $\phi(t)$. Estos corresponden a una descomposición de O según tres rotaciones alrededor de los ejes z', N y z (N es la intersección de los planos xy y $x'y'$).

En este caso tenemos:

$$O(t) = \begin{bmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi & 0 \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & -\operatorname{sen}\psi & 0 \\ \operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Un punto fijo en S, es decir con $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}(t)$ describirá una trayectoria $\mathbf{x}'(t)$ en S'; llamamos $\mathbf{v}'_s(\mathbf{x}, t)$ la velocidad instantánea con la que se mueve el punto fijo con respecto a S que pasa por $\mathbf{x}'$ en el instante t:

$$\mathbf{v}'_S(\mathbf{x}, t) = \left[\frac{d\mathbf{x}'(\mathbf{x}, t)}{dt}\right]_{\mathbf{x}=cte} = \frac{dO}{dt}O^T\mathbf{x}' + \mathbf{v}'_c(t) \tag{13}$$

Derivando la igualdad $OO^T = I$ se puede demostrar que $M = (dO/dt)O^T$ es una matriz antisimétrica y por lo tanto, en $3D$, existe un vector Ω tal que $M\mathbf{v} = \Omega \times \mathbf{v}$ para cualquier vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Por lo tanto:

$$\mathbf{v}'_S(\mathbf{x}, t) = \Omega'(t) \times \mathbf{x}' + \mathbf{v}_c(t) \tag{14}$$

Se puede ver fácilmente que: $\nabla \cdot \mathbf{v}'_s = 0$

También podemos definir:

$$\mathbf{v}_{SI} = \left[\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right]_{\mathbf{x}'=cte} = -O^T\mathbf{v}_S \tag{15}$$

En $2D$: $\Omega' = (d\alpha/dt)\hat{\mathbf{z}}'$

En $3D$:

$$\Omega' = \begin{bmatrix} \dot{\phi}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ -\dot{\phi}\operatorname{sen}\theta\cos\psi + \dot{\theta}\operatorname{sen}\psi \\ \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{bmatrix} \tag{16}$$

Las leyes de transformación para los diferentes tipos de cantidades son:

$$\rho(\mathbf{x},t) = \rho'(\mathbf{x}'(\mathbf{x},t),t); \qquad \text{escalares} \qquad (17)$$

$$\nabla = O^T\nabla'; \qquad \text{vectores} \qquad (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\ \Big)_{\mathbf{x}=cte} = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\ \Big)'_{\mathbf{x}'=cte} + \mathbf{v}'_S.\nabla'\Big(\ \Big)'; \qquad \text{derivada temporal} \qquad (19)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \nabla'\mathbf{u}'(\mathbf{x}'(\mathbf{x},t),t); \qquad \text{divergencia} \qquad (20)$$

Las ecuaciones transformadas resultan ser:

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \nabla'\cdot(\rho'\mathbf{v}') = 0 \qquad (21)$$

$$\frac{\partial\phi'}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathbf{v}'^2 - \underline{\frac{1}{2}\mathbf{v}_S^2} + \psi(\rho') = cte = \frac{1}{2}\mathbf{v}_\infty^2 + \psi(\rho') \qquad (22)$$

$$\mathbf{v} = \underline{\mathbf{v}'_S} + \nabla\phi$$

Los términos subrayados son aquellos que aparecen al pasar al sistema no-inercial, nótese que si $\mathbf{v}_S \equiv 0$, S' es inercial y recuperamos las ecuaciones originales.

DISCRETIZACION

Suoponemos a Ω dividido en una triangulación de elementos finitos. Además:

$$\begin{aligned}
t^n &= n\Delta t \\
\phi^n(\mathbf{x}) &\cong \phi(\mathbf{x},t^n) = \sum_{i=1}^{N}\phi_i^n N_i(\mathbf{x}) \\
\rho^{n+1} &= \rho_\infty\left(1+\frac{\gamma-1}{2a_\infty^2}K\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \\
K &= \mathbf{v}_\infty^2 + (\mathbf{v}_S^{n+1})^2 - (\nabla\phi^{n+1} + \mathbf{v}_S^{n+1})^2 \\
&\qquad - 2\left[\frac{\phi^{n+1}-\phi^n}{\Delta t}\right]_{\mathbf{x}_c} \\
&= \rho^{n+1}(\phi^{n+1},\phi^n)
\end{aligned} \qquad (23)$$

Nótese que ρ^{n+1} es constante por elemento.

La ecuación para ϕ^{n+1} es entonces:

$$\frac{1}{\Delta t}\int_\Omega \rho^{n+1}(\phi^{n+1})N_i d\Omega - \int_\Omega \rho^{n+1}(\phi^{n+1})(\nabla\phi^{n+1} + \mathbf{v}_S)\cdot\nabla N_i d\Omega = \frac{1}{\Delta t}\int_\Omega \rho^n N_i d\Omega - \int_{\Gamma_\infty} \rho_\infty(\mathbf{v}_\infty(t) + \mathbf{v}_S)\cdot\hat{\mathbf{n}}d\Gamma \tag{24}$$

En el caso subsónico este sistema de ecuaciones es no–lineal pero elíptico, de manera que una variada gama de algoritmos de resolución de sistemas no-lineales dará resultados satisfactorios, en particular podemos citar el método de gradientes conjugados, desarrollo en vectores de Lanczos, etc...; sin embargo el caso de interés es el régimen transónico donde veremos que un algoritmo de resolución rápido y robusto es indispensable.

REGIMEN TRANSONICO: MODIFICACION DE LA TECNICA DE DECENTRAJE

Se puede ver que:

$$\nabla(\rho^{n+1}\cdot(\nabla\phi^{n+1} + \mathbf{v}_S)) = \rho^{n+1}\left(I - \frac{\mathbf{v}'\mathbf{v}'}{a^2}\right)\cdot\nabla\nabla\phi^{n+1} + \frac{\rho^{n+1}}{a^2}\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}_S\cdot\mathbf{v}_S - \frac{\rho^{n+1}}{a^2}\mathbf{v}'\cdot\nabla\left(\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t}\right) \tag{25}$$

con

$$a^2 = a_\infty^2 + \frac{\gamma - 1}{2}\left[\mathbf{v}_\infty^2 + (\mathbf{v}_S^{n+1})^2 - (\nabla\phi^{n+1} + \mathbf{v}_S^{n+1})^2 - 2[\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t}]_{\mathbf{x}_c}\right] \tag{27}$$

El primer término es el que determina la elipticidad del sistema. En un sistema orientado convenientemente ($\hat{s}$ paralelo a la línea de corriente y $\hat{\mathbf{n}}_1$, $\hat{\mathbf{n}}_2$ completando un sistema de ejes ortonormal):

$$\left(I - \frac{\mathbf{v}'\mathbf{v}'}{a^2}\right) = (1 - M'^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial s^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial n_1^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial n_2^2} \tag{28}$$

La ecuación será hiperbólica donde $M' = v'/a > 1$. El carácter mixto de la ecuación hace que se pierda la unicidad en la solución. Para capturar la solución física del problema (sin ondas de choque "ficticias") se le agrega un término de "viscosidad artificial". Por analogía con las ecuaciones de convección-difusión se agrega un término de "difusión según la línea de corriente":

$$T(\phi) = h\frac{\partial}{\partial s}\left\{\rho^{n+1}(1 - M'^2)\frac{\partial^2\phi^{n+1}}{\partial s^2}\right\} \tag{29}$$

En un contexto de elementos finitos este término se puede calcular de la siguiente manera:

$$T(\phi) = h\frac{\partial}{\partial s}\left\{(1 - M'^{-2})^+ + (\nabla\phi + \mathbf{v}_s)\nabla\rho^{n+1}\right\} \tag{30}$$

La ecuación resultante después de agregar este término es discretizado en la forma estándar y el sistema de ecuaciones es resuelto por un método de minimización del residuo en subespacios generados por los vectores de Lanczos. Se ha encontrado que este tipo de método es más eficiente que el de gradientes conjugados.

EL CASO CON SUSTENTACION: LA CKJ TRANSIENTE Y EL TRATAMIENTO DE LA ESTELA

En el caso en que el perfil tiene bordes agudos (como es el caso del borde de fuga de perfiles aerodinámicos portantes), los elevados gradientes de velocidad que se producen en esas zonas produce un desprendimiento de la capa límite con la consecuente emisión de vorticidad. Sin embargo, como la viscosidad del fluido es muy baja, esta vorticidad es transportada aguas abajo y permanece confinada en una zona de espesor muy delgado que llamamos "estela" o "capa vorticosa" del perfil. El flujo no es irrotacional sólo en la capa límite y en la estela. Si bien el valor del potencial puede ser diferente de un lado y otro de la estela la ecuación de Bernouilli nos dice que:

$$\left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \psi(\rho)\right]_- = 0 \qquad \text{en } \Gamma_s \tag{31}$$

Siendo ρ constante y definiendo la velocidad en la estela como el promedio de las velocidades de ambos lados de la misma obtenemos:

$$\beta = \dot{\Gamma} = \frac{1}{2}\left[(\nabla\phi)^2|_{BF}\right]_- \tag{32}$$

$$\frac{D}{Dt}[\phi]_- \equiv 0; \qquad \text{en } \Gamma_s \tag{33}$$

donde la derivada material debe ser calculada en base a la velocidad media en la estela ya mencionada.

Este modelo para el tratamiento de la estela y la emisión de vorticidad se debe a Giesing[3].

DISCRETIZACION DEL CASO PORTANTE

En el caso portante se deben tener en cuenta los siguientes puntos:

(i) resolución de la ecuación potencial, compresible, no-estacionaria (como descripta en el segundo apartado) en $\Omega - \Gamma_s$ sujeto a la condición: $[\phi]_- = \psi(s)$.

(ii) seguimiento de la estela $\Gamma_s(t)$.
(iii) transporte de la vorticidad sobre Γ_s: $D\psi/Dt = 0$.

Para poder simular el salto de potencial ψ, Γ_s debe coincidir con una línea interelementos, por lo tanto el movimiento de Γ_s implicaría el uso de mallas deformables, lo que se quiso evitar desde un principio. Optamos entonces por un modelo simplificado donde Γ_s permanece constante y coincide con una recta que sale del BF y se prolonga aguas abajo. Cabe destacar que este modelo es el utilizado en todos los códigos potenciales no-estacionarios en diferencias finitas existentes[1,5,6]. A continuación propondremos varios esquemas de integración temporal posibles:

Esquema EE: explícito en la parte de transporte, implícito en la parte compresible:
Dados $\phi^n \simeq \phi(\mathbf{x}, t^n)$; $\psi^n \simeq \psi(s, t^n)$; ϕ^{n+1} y ψ^{n+1} se obtienen de:

$$\begin{aligned} &\text{S1:} \quad \beta = \tfrac{1}{2}[(\nabla\phi)^2]_- \\ &\text{S2:} \quad \psi^{n+1} = \text{transporte } (\psi^n, \beta, \phi^n) \\ &\text{S3:} \quad \phi^{n+1} = \text{compresible } (\psi^{n+1}) \end{aligned}$$

En S1 se obtiene la emisión de vorticidad en forma explícita, o sea evaluando las velocidades en t^n. En S2 se halla el salto de potencial gracias a la ecuación de transporte (33). Para ello se calcula la velocidad tangencial en la estela:

$$u_s(s) = \frac{1}{2}(\nabla\phi^n(s)^+ + \nabla\phi(s)^-) \cdot \hat{\mathbf{s}} \tag{34}$$

Para hallar ψ^{n+1} en cualquier nodo P_i sobre la estela seguimos la característica hacia tiempos menores:

$$\frac{d}{dt}s_i(t) = u_s \qquad t < t^{n+1} \tag{35}$$

$$s_i(t^{n+1}) = s(P_i) \tag{36}$$

Pueden presentarse dos casos:

a) $s_i(t^n) > 0$
definimos simplemente: $\psi^{n+1}(P_i) = \psi^n(s_i(t^n))$

b) $s_i(t^n + \tau) = 0$ para $0 < \tau < \Delta t$

$$\Rightarrow \quad \psi^{n+1}(P_i) = \Gamma(t^n + \tau) \approx \Gamma(t^n) + \dot{\Gamma}\tau = \psi^n(\mathbf{BF}) + \beta\tau$$

ψ^{n+1} se define entre dos nodos por interpolación lineal. En S3 hacemos un cálculo compresible similar al descripto en la parte 2, ecuaciones (23)–(24). Estas mismas ecuaciones son resueltas en $\Omega - \Gamma_s$ imponiendo ψ^{n+1} como salto potencial a través de Γ_s:

$$[\phi^{n+1}]_- = \psi^{n+1} \tag{37}$$

Esta secuencia de operaciones es relativamente sencilla, la parte más costosa del

cálculo es la resolución de la parte S3. Podemos estimar groseramente el costo de la resolución del paso S3 (problema compresible) como del orden de 1/3 del costo de un problema transónico estacionario. Sin embargo al considerarse los pasos S1 y S2 en forma explícita es de esperarse que este esquema sea condicionalmente estable. Efectivamente, en la práctica se ve que el paso de tiempo necesario para alcanzar la estabilidad es prohibitivamente pequeño.

Esquema II. ***implícito-implícito***

T1: $\beta = \frac{1}{2}[(\nabla\phi)^2]_-$
T2: $\psi^{n+1} =$ transporte (ψ^n, β, ϕ^n)
T3: $\phi^{n+1} =$ compresible (ψ^{n+1})

Sólo se ha cambiado el punto S1 $\rightarrow$ T1 donde β es ahora evaluado en t^{n+1}, sin embargo esto acopla las tres ecuaciones y no pueden, por lo tanto, ser resueltas como una secuencia de operaciones. Este sistema puede ser resuelto de la siguiente forma: definamos una función $f(\beta')$ como:

FUNCION $f(\beta')$.

F1: $\tilde{\psi} =$ transporte (ψ^n, β, ϕ^n)
F2: $\tilde{\phi} =$ compresible $(\tilde{\psi})$
F3: $f(\beta') = \beta' - \frac{1}{2}[(\nabla\tilde{\phi})^2]_-$**BF**

La resolución del sistema II es equivalente entonces a resolver $f(\beta) = 0$. Como $f(\beta)$ es una función unidimensional esto se puede hacer mediante muchos métodos como dicotomía, secante, tangente, etc...; sin embargo estos métodos se basan en la evaluación de f en un cierto número de valores de β': $\{\beta_i\}$ hasta hallar una convergencia adecuada. La evaluación de f implica en su paso F2 la resolución de un problema compresible y, por lo tanto, avanzar un paso de tiempo tiene un costo equivalente a varios problemas transónicos estacionarios. Proponemos entonces el siguiente esquema predictor-corrector:

Esquema PC predictor-corrector

PC1: Resolver:

$\beta = \frac{1}{2}[(\nabla\phi)^P]$
$\psi^{n+1} =$ transporte (ψ^n, β, ϕ^n)
$\phi^P =$ compresible' (ψ^{n+1})
PC2: $\phi^{n+1} =$ compresible (ψ^{n+1})

En PC1 resolvemos un problema equivalente al II pero hemos reemplazado el problema compresible por otro compresible' más sencillo. Posteriormente, el valor de ϕ^{n+1} es obtenido de un cálculo compresible sin modificar. En particular, si el problema compresible' es lineal en ψ^{n+1} resulta que la función $f(\beta)$ correspondiente es cuadrática y, por lo tanto, no hace falta un esquema iterativo. En la práctica se ha utilizado este esquema. Como problema compresible modificado hemos elegido:

Problema compresible'. ***Problema compresible modificado***

entrada ψ^{n+1}
C1: Resolver:

$$\int_{\Omega-\Gamma_s} \nabla(\phi^P - \phi^n) \cdot N_i d\Omega = 0$$

$$[\phi^P]_- = \psi^{n+1}$$

que equivale a reemplazar el problema compresible no-estacionario por uno incompresible estacionario, por lo tanto lineal. En ningún caso se ha manifestado inestabilidad del esquema de integración, incluso en el caso en que el modelo no-estacionario ha sido usado para capturar una solución estacionaria usando pasos de tiempo artificialmente grandes. Por otra parte, queremos remarcar que todos los esquemas presentados son de primer orden de precisión.

RESULTADOS NUMERICOS

El primer ejemplo tiene como objetivo verificar la estabilidad del esquema de integración temporal utilizado. Se trata de un perfil NACA0012 que evoluciona según:

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0; & t < 0 \\ \alpha_0 = 1°; & t \geq 0 \end{cases}$$

$$M_\infty = 0.78 > M_{cr}$$

En la simulación se han utilizado pasos de tiempo exageradamente grandes a fin de:

i) verificar la estabilidad
ii) capturar la solución estacionaria a $M_\infty = 0.78$, y $\alpha = 1°$ para compararla con otra obtenida por un algoritmo estacionario.

En la Figura 1 vemos la evolución de la circulación en función del tiempo. El comportamiento es absolutamente estable y el valor se acerca asintóticamente al obtenido por un algoritmo estacionario.

El segundo ejemplo consiste en el mismo perfil ejecutando una oscilación de cabeceo ("pitching") alrededor de media cuerda:

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0°; & t < 0 \\ \alpha_m + \alpha_0 \text{ sen } (\omega t); & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\alpha_m = 1°; \alpha_0 = 0.2°; \omega = 2\pi/T; T = 0.1 \text{ seg}$$

$$M_\infty = 0.78$$

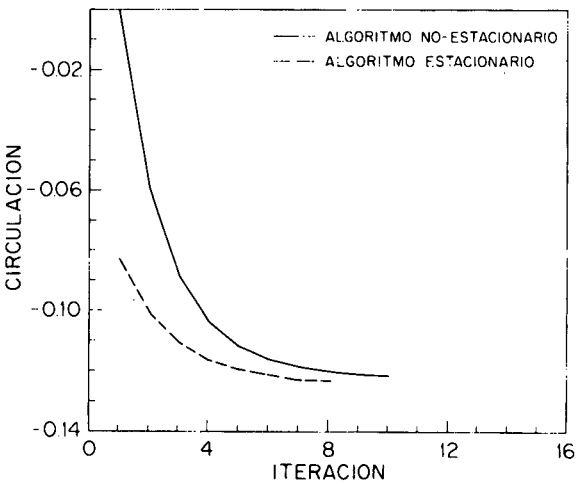

Figura 1. Circulación del caso estacionario.

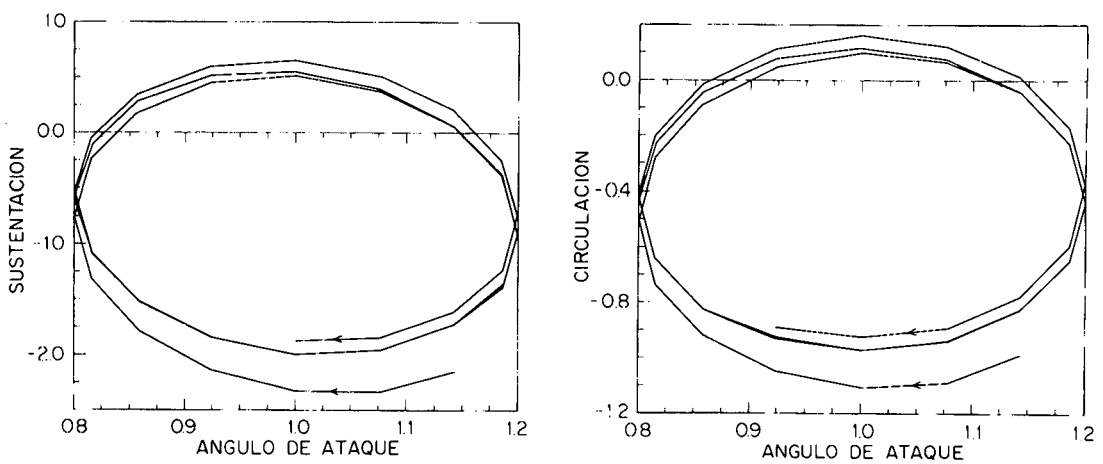

Figura 2. Excitación periódica tipo "pitching". a) sustentación b)circulación.

En el caso de excitaciones periódicas como ésta uno está interesado generalmente en obtener la solución periódica que se alcanza (asintóticamente) después del transitorio. Graficando la "respuesta del sistema" (C_L, C_M, etc...) en función de α se obtiene una figura cerrada. La Figura 2 nos muestra estas figuras obtenidas para C_L.vs.t y Γ.vs.t. Se desprende del gráfico que:

i) las figuras son elipses, por lo tanto: *la respuesta del sistema en este rango es lineal*
ii) el retraso de fase de Γ y C_L con respecto a α es muy grande ($\approx 90°$)

En el tercer ejemplo:

$$\alpha = \begin{cases} 0 & ; \quad t < 0 \\ \alpha_0 t/T & ; \quad 0 \\ \alpha_0 & ; \quad T \leq t \end{cases}$$

$$\alpha_0 = 1^\circ$$

$$M_\infty = 0.8$$

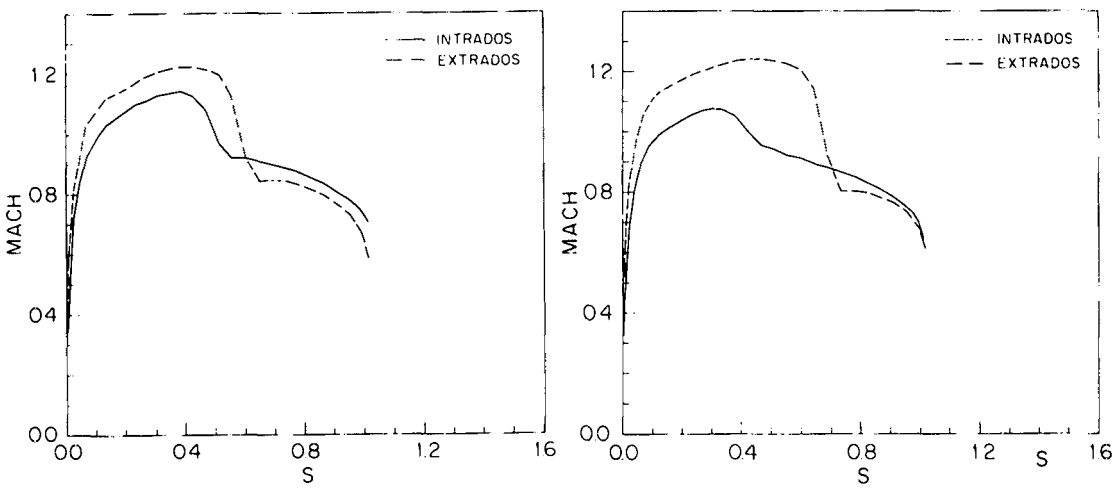

Figura 3. Curvas de Mach sobre la piel del perfil. Nótese el no cumplimiento de la condición de K.J. a t=0.1.
a) t=0.1 seg. b) t=0.2 seg.

En la Figura 3 vemos las curvas de Mach sobre la piel del perfil a $t = 0.1$ seg y $t = 0.2$ seg. Obsérvese la diferencia en los valores de la velocidad de un lado y del otro del BF a $t = 0.1$ seg (figura 3.a). A $t = 0.2$ seg la vorticidad originada en el borde de fuga ha sido transportada aguas abajo en la estela y se está cerca del cumplimiento de la condción de de Kutta-Joukowski. Obsérvese también el desplazamiento de la onda de choque aguas abajo.

NOTACION Y SIMBOLOS

a = velocidad del sonido
BF = Borde de Fuga
c = cuerda (largo) del perfil
C_M = momento de las fuerzas aerodinámicas sobre el perfil
C_L = sustentación aerodinámica
CKJ = Condición de Kutta-Joukowski
D/Dt = derivada material en la estela
f = función de una variable
GM = Giesing-Maskell
k = frecuencia reducida

M = v/a = número de Mach
$\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2$ = versores que completan con $\hat{\mathbf{s}}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ (local)
$\hat{\mathbf{n}}$ = versor normal a una superficie
n = como supraíndice indica cantidad evaluada en $t^n = n\Delta t$
N_i = función de interpolación del método de los elementos finitos
O = matriz de rotación
s = coordenada lineal sobre la línea de corriente, también coordenada lineal sobre la estela
$\hat{\mathbf{s}}$ = versor según la línea de corriente
S, S' = sistemas de referencia inercial y no inercial (resp.)
$s_i(t)$ = característica del i-ésimo nodo sobre la estela
t = tiempo
Δt = paso del tiempo
$T(\phi)$ = operador de viscosidad artificial
u_s = velocidad en la estela
$\mathbf{v}_S, \mathbf{v}_{S'}$ = velocidades de S y S' con respecto al otro
V = velocidad del perfil
$\mathbf{x}$ = vector de coordenadas en $\mathbb{R}^3$
$\mathbf{x}_c$ = coordenada en S de un punto fijo del perfil
α = ángulo de ataque
β = $\dot{\Gamma}$ = emisión de vorticidad en BF
δ = amplitud de las perturbaciones
ϕ = potencial (velocidad = $\nabla\phi$)
γ = C_p/C_v razón entre los calores específicos; (γ = 1.4) para el aire
Γ_p = superficie del perfil
Γ_s = estela
ρ = densidad
τ = intervalo de tiempo (ver etapa de transporte, parte 5)
ψ = energía interna en la ecuación de Bernoulli (2), también salto de potencial a través de la estela
ψ, θ, ϕ = ángulos de Euler
ω = frecuencia angular o pulsación
Ω = volumen-dominio de integración, también vector velocidad angular
$(\ )_\infty$ = indica cantidades evaluadas en el infinito aguas arriba
$\times$ = producto vectorial
$(\ )'$ = cantidad ( ) evaluada en S'
$\dot{(\ )}$ = derivada temporal de ( )
$(\ )^+$ = parte positiva de ( ): $2(x)^+ = x + |x|$
$[\ ]_-$ = salto de [ ] a través de la estela

REFERENCIAS

1. M.H. Williams, S.R. Bland y J.W. Eduards, "Flow Instabilities in Transonic Small Disturbance Theory", *AIAA Journal*, Vol. **23**, no. 10, pp. 1491–1496.

2. M.O. Bristeau, O. Pironneau, R. Glowinski, J. Periaux, P. Perrier y G. Poirier, "On the Numerical Solution of Non-Linear Problems in Fluid Dynamics by Least Square Methods", *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, Vol. **51**, pp. 363–394, (1985).
3. J.P. Giesing, "Vorticity and Kutta Condition for Unsteady Multienergy Flows", *Trans. of the ASME*, pp. 608–613, (1969).
4. D.R. Poling y D.P. Telionis, *AIAA Journal*, Vol. **24**, pp. 193–199, (1986).
5. "Transonic Unsteady Aerodinamics and its Aeroelastic Applications", *AGARD, Conf. Proc.*, no. 374.
6. "Computation of Transonic Flow about Helicopter Rotor Blades", *AIAA Journal*, Vol. **24**, no. 5, pp. 723–728, (1986).