

## MÉTODOS ADAPTADOS DE TIPO STÖRMER-COWELL DE ORDEN ELEVADO

J.M. FRANCO

J.M. CORREAS

y

F. PETRIZ

*Dpto. de Matemática Aplicada,  
E.T.S.I.I. de Zaragoza, Univ. de Zaragoza,  
Av. María Zambrano 50, 50015 Zaragoza.*

### RESUMEN

Recientemente ha resurgido un gran interés por la integración numérica de problemas de la mecánica orbital que vienen gobernados por ecuaciones diferenciales de la forma  $y'' \pm \omega^2 y = f(t, y)$ , donde el parámetro  $\omega$  es conocido o puede ser estimado con bastante exactitud. Un requerimiento apropiado para los métodos numéricos asociados a esta clase de problemas es que integren exactamente funciones trigonométricas y/o hiperbólicas además de polinomios algebraicos. En este trabajo, obtenemos un procedimiento recurrente para la construcción de métodos adaptados de tipo Störmer-Cowell que integren la ecuación diferencial anterior, para cualquier orden de aproximación. También estudiamos las propiedades de consistencia, estabilidad y convergencia de los métodos adaptados. Finalmente, los métodos propuestos se comparan favorablemente con otros métodos.

### SUMMARY

Recently a renewed interest has been focused on the numerical integration of problems from orbital mechanics governed by differential equations of the form  $y'' \pm \omega^2 y = f(t, y)$  where the parameter  $\omega$  is known or may be accurately estimated. An appropriate requirement for the numerical methods associated with this kind of problems is to integrate exactly trigonometric and/or hiperbolic functions along with algebraic polynomials. In this paper we show a procedure for the construction of adaptive Störmer-Cowell formulas of arbitrarily high order of accuracy. Our methods are compared to their advantage with other methods.

### INTRODUCCION

En mecánica orbital son frecuentes los problemas regidos por ecuaciones diferenciales de segundo orden de la forma

$$\begin{cases} y'' \pm \omega^2 y = f(t, y), & t \in [0, T], \quad \omega > 0, \quad y \in R^m \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0 \end{cases} \quad (1)$$

Recibido: Febrero 1990

donde  $\omega$  es un parámetro característico del problema que puede ser conocido o estimado con bastante exactitud y suponemos que la fuerza perturbadora  $f(t, y)$  es pequeña con respecto al término restante  $\pm \omega^2 y$ . El tratamiento numérico del problema (1), puede conducirse aplicando los clásicos métodos de Störmer-Cowell<sup>5</sup>, que corresponden a un esquema lineal del tipo

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h^2 \sum_{j=0}^k \beta_j y''_{n+j} \quad (2)$$

Estos métodos, como todos los esquemas de coeficientes constantes, integran exactamente polinomios algebraicos hasta un cierto grado, es decir, sin error de truncación local. Sin embargo, debido a la naturaleza de los fenómenos que rigen las ecuaciones de la mecánica orbital y algunos de los problemas que surgen en ingeniería, parece conveniente considerar métodos que además de polinomios algebraicos integren también otro tipo de funciones. Además, los métodos de Störmer-Cowell de orden mayor que dos tienen una deficiencia numérica: para un problema test que describe un movimiento circular uniforme, la solución numérica espirala hacia el interior. Este fenómeno es conocido como *inestabilidad orbital*. La utilización de métodos de Störmer-Cowell de orden elevado para aproximar la solución del problema (1) restringe la elección del paso de integración a valores bastantes pequeños. Por lo tanto, parece más conveniente considerar métodos que integren exactamente polinomios algebraicos, así como funciones trigonométricas o hiperbólicas. La idea de adaptar métodos de orden elevado para la integración de fenómenos oscilantes ha sido propuesta por varios autores como Gautschi<sup>4</sup>, Lyche<sup>9</sup>, Stiefel & Bettis<sup>10</sup>, Bettis<sup>11</sup>, Jain et al.<sup>6</sup>, etc.. Por ejemplo Bettis<sup>11</sup> obtiene esta adaptación modificando algunos de los coeficientes de los clásicos métodos de Störmer-Cowell de coeficientes constantes.

En este trabajo, proponemos métodos multipaso lineales de tipo Störmer-Cowell adaptados al problema (1), de manera que integren exactamente polinomios algebraicos y funciones trigonométricas o hiperbólicas. Esta adaptación se obtiene modificando todos los coeficientes de los clásicos métodos de Störmer-Cowell, de manera que dichos coeficientes sean funciones del parámetro  $v = \omega h$ , donde  $h$  es el paso de integración y  $\omega$  es la frecuencia principal del problema. Para la definición de los métodos, imponemos que integren exactamente a los espacios lineales  $\Pi_p(\omega)$ , generados por las funciones modificadas de Stumpff<sup>2</sup> y obtenemos la relación entre los coeficientes y el orden de consistencia de los métodos. A continuación, estudiamos la convergencia de los métodos y construimos de forma recurrente una familia de métodos adaptados de tipo Störmer-Cowell para cualquier orden de aproximación. Finalmente, efectuamos algunas comparaciones numéricas de los métodos propuestos, mostrando su buen comportamiento numérico respecto de otros métodos.

## FORMULACION DE LOS METODOS Y CONDICIONES DE ORDEN

Para la integración numérica del problema de valor inicial (1) es recomendable el empleo de métodos que no requieran introducir las derivadas  $y'$ , puesto que dicha ecuación no las contiene explícitamente. En la literatura abundan los métodos basados

en esquemas multipaso lineales para problemas del tipo (1), véase Henrici<sup>5</sup>, Lambert<sup>7</sup>, Lambert & Watson<sup>8</sup>, Stiefel & Bettis<sup>10</sup>, etc.. Suponiendo que se conoce a priori la frecuencia de oscilación (exactamente o con bastante aproximación), estudiamos la formulación de una clase de métodos adaptados de tipo Störmer-Cowell para la integración del problema (1), de la forma

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j(v) y_{n+j} = h^2 \sum_{j=0}^k \beta_j(v) f(t_{n+j}, y_{n+j}), \quad v = \omega h \quad (3)$$

El desarrollo de los métodos (3) sigue la idea dada en los trabajos de Correas<sup>2-3</sup>. Estos métodos vienen caracterizados mediante operadores lineales  $L_h$ , definidos por

$$L_h[y(t)] = \sum_{j=0}^k \left[ \alpha_j(v) y(t+jh) - h^2 \beta_j(v) \{y''(t+jh) \pm \omega^2 y(t+jh)\} \right] \quad (4)$$

de forma que anulen los espacios lineales  $\Pi_p(\omega)$  engendrados por las funciones modificadas de Stumpff  $\phi_i(t, \omega)$ ,  $i = 0, 1, \dots, p$ , donde

$$\phi_0(t, \omega) = \begin{cases} \cos \omega t, & \text{para el signo + de (1)} \\ 1, & \text{para } \omega = 0 \\ \operatorname{ch} \omega t, & \text{para el signo - de (1)} \end{cases}$$

$$\phi_{i+1}(t, \omega) = \int_0^t \phi_i(t, \omega) dt, \quad i \geq 0$$

Hacemos notar que  $\phi_i(t, \omega) \rightarrow \phi_i(t, 0)$  cuando  $\omega \rightarrow 0$  y que el espacio lineal  $\Pi_p(\omega)$  engendrado por las funciones  $\phi_i(t, \omega)$  puede expresarse en la forma

$$\Pi_p(\omega) = \begin{cases} \operatorname{Span}\{1, t, t^2, \dots, t^{p-2}, \cos \omega t, \operatorname{sen} \omega t\} & \text{para el signo +} \\ \operatorname{Span}\{1, t, t^2, \dots, t^{p-2}, t^{p-1}, t^p\} & \text{para } \omega = 0 \\ \operatorname{Span}\{1, t, t^2, \dots, t^{p-2}, \operatorname{ch} \omega t, \operatorname{sh} \omega t\} & \text{para el signo -} \end{cases}$$

Por lo tanto, en el caso  $\omega = 0$ , los esquemas lineales (3) coinciden con los clásicos esquemas lineales de Störmer-Cowell de coeficientes constantes.

En los trabajos de Correas<sup>2-3</sup> aparecen demostradas algunas propiedades de las funciones modificadas de Stumpff que nosotros usaremos para obtener las condiciones de orden de los métodos adaptados y que recogemos en la siguiente

**PROPOSICION 1:** Las funciones modificadas de Stumpff  $\phi_i(t, \omega)$  verifican las siguientes propiedades

- i)  $\phi_0(x+y, \omega) = \phi_0(x, \omega)\phi_0(y, \omega) \mp \omega^2 \phi_1(x, \omega)\phi_1(y, \omega)$
- ii)  $\phi_1(x+y, \omega) = \phi_1(x, \omega)\phi_0(y, \omega) + \phi_0(x, \omega)\phi_1(y, \omega)$
- iii)  $\phi_n(x+y, \omega) = \sum_{i=0}^{n-2} \frac{x^i}{i!} \phi_{n-i}(y, \omega) + \phi_{n-1}(x, \omega)\phi_1(y, \omega) + \phi_n(x, \omega)\phi_0(y, \omega)$   
 $n \geq 2$
- iv)  $\phi_n(x, \omega) = \phi_n(x, 0) \mp \omega^2 \phi_{n+2}(x, \omega), \quad n \geq 0$
- v)  $\phi_n(xh, \omega) = h^n \phi_n(x, \omega h), \quad n \geq 0$
- vi)  $\phi_0^2(x, \omega) \pm \omega^2 \phi_1^2(x, \omega) = 1$
- vii)  $\phi_1^2(x, \omega) - \phi_0(x, \omega)\phi_2(x, \omega) = \phi_2(x, \omega)$
- viii)  $\phi_i^{(n+2)}(x, \omega) \pm \omega^2 \phi_i^{(n)}(x, \omega) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n+1, \quad n \geq 0$

Para definir los coeficientes de los métodos adaptados introducimos los resultados que vienen a continuación y que nos mostrarán la conexión existente entre los espacios  $\Pi_p(\omega)$  y los operadores lineales  $L_h$ . Además, supondremos que los coeficientes  $\alpha_j(v)$  y  $\beta_j(v)$  son funciones acotadas y continuas para todo  $v \in [0, \Lambda]$ , con  $\Lambda > 0$  dado, y tales que los métodos (3) quedan bien definidos.

**PROPOSICION 2:** El operador lineal  $L_h$  asociado a un esquema lineal del tipo (3) anula el espacio  $\Pi_p(\omega)$  si y solo si se verifican las siguientes condiciones

$$\begin{aligned}
 D_0 &= \sum_{j=0}^k \alpha_j(v) \phi_0(j, v) = 0 \\
 D_1 &= \sum_{j=0}^k \alpha_j(v) \phi_1(j, v) = 0 \\
 D_i &= \sum_{j=0}^k \left[ \{\alpha_j(v) \mp v^2 \beta_j(v)\} \phi_i(j, v) - \beta_j(v) \phi_{i-2}(j, v) \right] = 0, \quad i = 2, 3, \dots, p
 \end{aligned} \tag{5}$$

*Demostración:* Los operadores lineales  $L_h$  anulan el espacio  $\Pi_p(\omega)$  si y solo si

$$L_h[\phi_i(t, \omega)] = 0, \quad i = 0, 1, \dots, p$$

o equivalentemente

$$\sum_{j=0}^k \left[ \alpha_j(v) \phi_i(t + jh, \omega) - h^2 \beta_j(v) \left\{ \phi_i''(t + jh, \omega) \pm \omega^2 \phi_i(t + jh, \omega) \right\} \right] = 0$$

$$i = 0, 1, \dots, p$$

Empleando la propiedad viii) de la Proposición 1, esto es equivalente a

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k \alpha_j(v) \phi_0(t + jh, \omega) &= 0 \\ \sum_{j=0}^k \alpha_j(v) \phi_1(t + jh, \omega) &= 0 \\ \sum_{j=0}^k \left[ \left\{ \alpha_j(v) \mp v^2 \beta_j(v) \right\} \phi_i(t + jh, \omega) - h^2 \beta_j(v) \phi_{i-2}(t + jh, \omega) \right] &= 0, \quad i = 2, 3, \dots, p \end{aligned} \quad (6)$$

En virtud de las propiedades i) - iv) de las funciones modificadas de Stumpff recogidas en la Proposición (1), las funciones  $\phi_i(t + jh, \omega)$  se pueden expresar en términos de los valores  $\phi_n(jh, \omega)$  ( $n = 0, 1, \dots, i$ ) y de las funciones  $\phi_n(t, 0)$  ( $n = 0, 1, \dots, i - 2$ ),  $\phi_{i-1}(t, \omega)$ ,  $\phi_i(t, \omega)$ . De donde se tiene que las expresiones (6) son equivalentes a las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \left[ \sum_{j=0}^k \alpha_j(v) \phi_0(jh, \omega) \right] \phi_0(t, \omega) \mp \omega^2 \left[ \sum_{j=0}^k \alpha_j(v) \phi_1(jh, \omega) \right] \phi_1(t, \omega) &= 0 \\ \left[ \sum_{j=0}^k \alpha_j(v) \phi_1(jh, \omega) \right] \phi_0(t, \omega) + \left[ \sum_{j=0}^k \alpha_j(v) \phi_0(jh, \omega) \right] \phi_1(t, \omega) &= 0 \\ \sum_{s=0}^{i-2} \left\{ \sum_{j=0}^k \left[ \alpha_j(v) \mp \beta_j(v) \phi_{i-s}(jh, \omega) - h^2 \beta_j(v) \phi_{i-2-s}(jh, \omega) \right] \right\} \frac{t^s}{s!} + \\ + \left\{ \sum_{j=0}^k \alpha_j(v) \phi_1(jh, \omega) \right\} \phi_{i-1}(t, \omega) + \left\{ \sum_{j=0}^k \alpha_j(v) \phi_0(jh, \omega) \right\} \phi_i(t, \omega) &= 0, \quad i = 2, 3, \dots, p \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que las funciones  $1, t, \dots, t^{i-2}, \phi_{i-1}(t, \omega), \phi_i(t, \omega)$  ( $i = 2, 3, \dots, p$ ) son linealmente independientes y la propiedad v) de la Proposición 1, se tiene

$$\begin{aligned} D_0 &= \sum_{j=0}^k \alpha_j(v) \phi_0(j, v) = 0 \\ D_1 &= \sum_{j=0}^k \alpha_j(v) \phi_1(j, v) = 0 \\ D_i &= \sum_{j=0}^k \left[ \left\{ \alpha_j(v) \mp v^2 \beta_j(v) \right\} \phi_i(j, v) - \beta_j(v) \phi_{i-2}(j, v) \right] = 0, \quad i = 2, 3, \dots, p \end{aligned}$$

Con objeto de establecer el concepto de orden para los métodos lineales (3), exponemos a continuación la relación entre las expresiones  $D_i$  de la Proposición 2 y las expresiones  $C_i$  correspondientes a métodos lineales (3) que solo integran polinomios algebraicos en el siguiente resultado.

**PROPOSICION 3:** Si un método lineal del tipo (3) integra exactamente el espacio lineal  $\Pi_p(\omega)$ , entonces dicho método vendrá caracterizado por las condiciones

$$C_i = 0, \quad i = 0, 1, \dots, p, \quad \text{si } \omega = 0$$

$$\tilde{D}_i = 0, \quad i = 0, 1, \dots, p, \quad \text{si } \omega \neq 0$$

donde

$$\tilde{D}_0 = D_0, \quad \tilde{D}_1 = D_1, \quad \tilde{D}_2 = C_0 = \sum_{j=0}^k \{\alpha_j(v) \mp v^2 \beta_j(v)\}$$

$$\tilde{D}_3 = C_1 = \sum_{j=0}^k j \{\alpha_j(v) \mp v^2 \beta_j(v)\}$$

$$\tilde{D}_{i+2} = C_i = \sum_{j=0}^k \left[ \frac{j^i}{i!} \{\alpha_j(v) \mp v^2 \beta_j(v)\} - \frac{j^{i-2}}{(i-2)!} \beta_j(v) \right], \quad i \geq 2$$

*Demostración:*

Si  $\omega = 0$ , es trivial, puesto que estamos en el caso de métodos que integran exactamente polinomios algebraicos.

Si  $\omega \neq 0$ , de acuerdo con v) de la Proposición 1, podemos escribir

$$\phi_{n+2}(j, v) = \frac{\phi_n(j, v) - \phi_n(j, 0)}{\mp v^2}$$

y sustituyendo en las expresiones  $D_i$  ( $i \geq 2$ ), tenemos

$$\begin{aligned} D_2 &= \mp \frac{1}{v^2} \left\{ \sum_{j=0}^k \alpha_j(v) \phi_0(j, v) - \sum_{j=0}^k (\alpha_j(v) \mp \beta_j(v)) \right\} \\ D_3 &= \mp \frac{1}{v^2} \left\{ \sum_{j=0}^k \alpha_j(v) \phi_1(j, v) - \sum_{j=0}^k j (\alpha_j(v) \mp v^2 \beta_j(v)) \right\} \\ D_{i+2} &= \mp \frac{1}{v^2} \left\{ D_i - \sum_{j=0}^k \left[ \frac{j^i}{i!} (\alpha_j(v) \mp v^2 \beta_j(v)) - \frac{j^{i-2}}{(i-2)!} \beta_j(v) \right] \right\}, \quad i \geq 2 \end{aligned}$$

de donde

$$D_i = \mp \frac{1}{v^2} (D_{i-2} - C_{i-2}), \quad i \geq 2$$

o lo que es lo mismo

$$C_{i-2} = D_{i-2} \pm v^2 D_i, \quad i \geq 2$$

Luego

$$D_i = 0, \quad i = 0, 1, \dots, p \Leftrightarrow \begin{cases} D_0 = D_1 = 0 \\ C_i = 0, \quad i = 0, 1, \dots, p-2 \end{cases}$$

Hacemos notar que las expresiones  $C_i$  que aparecen en la Proposición 3 corresponden a métodos de tipo Störmer-Cowell, para el problema (1), que integran exactamente polinomios algebraicos; pero ahora dichas expresiones dependen del parámetro  $v$ . En el caso en que  $\omega = 0 (\Leftrightarrow v = 0)$ , las expresiones  $C_i$  coinciden con las obtenidas para los clásicos métodos de Störmer-Cowell de coeficientes constantes.

A continuación veremos el papel que juegan las condiciones  $C_i = 0, (i = 0, 1, \dots, p)$  en este contexto. Para ello consideraremos la expresión del operador lineal  $L_h[y(t)]$  desarrollado en serie de Taylor en un entorno del punto  $t$

$$L_h[y(t)] = \sum_{j=0}^k \left[ (\alpha_j(v) \mp v^2 \beta_j(v)) \sum_{i \geq 0} \frac{(jh)^i}{i!} y^{(i)}(t) - h^2 \beta_j(v) \sum_{i \geq 2} \frac{(jh)^{i-2}}{(i-2)!} y^{(i)}(t) \right]$$

De acuerdo con la Proposición 1 se verifican las siguientes identidades

$$\frac{(jh)^n}{n!} = \phi_n(jh, 0) = h^n \phi_n(j, 0) = h^n [\phi_n(j, v) \pm v^2 \phi_{n+2}(j, v)]$$

Sustituyendo esta última expresión en el desarrollo del operador lineal  $L_h[y(t)]$  y agrupando términos obtenemos

$$L_h[y(t)] = \sum_{i \geq 0} (D_i \pm v^2 D_{i+2}) h^i y^{(i)}(t) = \sum_{i \geq 0} C_i h^i y^{(i)}(t) \quad (7)$$

**Definición 4:** Un esquema multipaso adaptado del tipo (2.1) se dirá *consistente de orden  $p$*  ( $p \geq 0$ ) si se verifica

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|L_h[y(t_{n-k})]\| = O(h^{p+2}), \text{ cuando } h \rightarrow 0 \text{ y } N = \frac{T}{h}$$

o equivalentemente si se verifica  $C_0 = C_1 = \dots = C_{p+1} = 0$  y  $C_{p+2} \neq 0$ .

Entonces, de acuerdo con las Proposiciones 2 y 3, obtenemos el siguiente resultado

#### PROPOSICION 5:

- i) Todo método adaptado del tipo (3) que anula el espacio lineal  $\Pi_{p+1}(\omega)$  tiene por lo menos orden  $p-2$
- ii) En las condiciones de i) el esquema lineal será de orden  $p$ , para todo  $\omega$  real
- iii) Las condiciones  $D_i = 0, i = 0, 1, \dots, p+1$  son suficientes para alcanzar orden  $p$ , pero no necesarias, ya que bastaría con exigir

$$D_0 = 0(h^{p+2}), D_1 = 0(h^{p+1}), \dots, D_{p+1} = 0(h)$$

*Demostración:*

i) Es inmediato sin más que tener en cuenta la relación

$$C_i = D_i \pm v^2 D_{i+2}, \quad i \geq 0$$

ii) Por hipótesis  $D_i = 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, p+1$  y sustituyendo en (7) resulta

$$\begin{aligned} L_h[y(t)] &= h^p C_p y^{(p)}(t) + h^{p+1} C_{p+1} y^{p+1}(t) + 0(h^{p+2}) \\ &= \pm v^2 h^p D_{p+2} \pm v^2 h^{p+1} D_{p+3} + 0(h^{p+2}) \\ &= \pm \omega^2 \{ h^{p+2} D_{p+2} + h^{p+3} D_{p+3} \} + 0(h^{p+2}) = 0(h^{p+2}) \end{aligned}$$

iii) Es inmediato puesto que bastaría con exigir

$$D_0 = 0(h^{p+2}), D_1 = 0(h^{p+1}), \dots, D_{p+1} = 0(h)$$

y entonces

$$C_0 = 0(h^{p+2}), C_1 = 0(h^{p+1}), \dots, C_{p+1} = 0(h)$$

## CONVERGENCIA DE LOS METODOS

En esta sección desarrollamos un estudio de la convergencia de los métodos lineales (3) análoga a la existente para métodos multipaso lineales de coeficientes constantes. Introducimos los conceptos de estabilidad y convergencia utilizando una formulación matricial de (3) que nos permitirá obtener una generalización de los conceptos y resultados existentes para el caso de métodos lineales de coeficientes constantes ( $\omega = 0$ ). Para análisis posteriores, supondremos que la función  $f(t, -)$  es continua y satisface la condición de Lipschitz dada por

$$\|f(t, y) - f(t, y^*)\| \leq L \|y - y^*\| \text{ para todo } y, y^* \in R^m \text{ y para todo } t \in [0, T]$$

Consideremos un método adaptado (3), siendo  $\eta_n$ ,  $n = 0, 1, \dots, k-1$ , los valores iniciales del método,  $\alpha_k(v) = 1$  por razones de normalización y por simplicidad supondremos que la ecuación (1) es escalar. Utilizando una formulación matricial similar a la dada en [1], introducimos los siguientes vectores y matrices

$$\eta = [\eta_{k-1}, \eta_{k-2}, \dots, \eta_0]^T$$

$$Y_{n+k} = [y_{n+k}, y_{n+k-1}, \dots, y_{n+1}]^T$$

$$A(v) = \begin{bmatrix} -\alpha_{k-1}(v) & -\alpha_{k-2}(v) & \cdots & -\alpha_0(v) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F(v, Y_{n+k}, Y_{n+k-1}) = \left[ \sum_{j=0}^k \beta_j(v) f(t_{n+j}, y_{n+j}), 0, \dots, 0 \right]^T$$

de acuerdo con esta notación, la ecuación en diferencias (3) junto con los valores de iniciación puede expresarse en la forma

$$\begin{cases} Y_{k-1} = \eta \\ Y_{n+k} = A(v)Y_{n+k-1} + h^2 F_{n+k}(v, Y_{n+k}, Y_{n+k-1}), \quad 0 \leq n \leq N-k \end{cases} \quad (8)$$

**Definición 6:** Diremos que un método adaptado (8) es estable, si para toda función  $F_n$  continua y verificando la condición de Lipschitz y para todo  $v \in [0, \Lambda]$ , existen unas constantes positivas  $h_0$  y  $K$  tales que para todo  $h \in (0, h_0]$

$$\sup_{0 \leq n \leq N-k} \|A^n(v)\| \leq \frac{K}{h}, \quad (9)$$

A continuación, obtenemos condiciones simples que permitirán la construcción de métodos adaptados que sean estables.

**LEMA 7:** La existencia de constantes positivas  $h_0$ ,  $K$  verificando (9) es equivalente a:

“Si  $\lambda(v)$  es un valor propio de  $A(v)$  entonces existe una constante positiva  $C$  tal que  $|\lambda(v)| \leq \exp(Cv)$  y si  $\lambda(v)$  es un valor propio de  $A(v)$  con multiplicidad mayor que dos, entonces  $|\lambda(v)| < 1$ ”.

**Demostración:** Como la matriz  $A(v)$  se puede expresar en la forma  $A(v) = SJ(v)S^{-1}$ , donde  $J(v)$  es la correspondiente matriz canónica de Jordan y  $A^n(v) = SJ^n(v)S^{-1}$ . Entonces, para la matriz de Jordan se verificará una acotación similar a (5). Además, la  $n$ -ésima potencia de la submatriz de Jordan asociada al valor propio  $\lambda(v)$  será de la forma

$$J_{\lambda}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n(v) & \binom{n}{1}\lambda^{n-1}(v) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\ & \lambda^n(v) & \binom{n}{1}\lambda^{n-1}(v) & \cdots & & \\ & & 0 & \ddots & & \lambda^n(v) \end{bmatrix}$$

En consecuencia, una condición necesaria para que se verifiquen la acotación (9) es que exista una constante positiva  $C$  tal que  $|\lambda(v)| \leq \exp(Cv)$ , ya que en caso contrario tendríamos

$$|\lambda(v)|^n > \exp(Cnv) \exp(C\omega t)$$

para toda constante positiva  $C$  y  $t = nh \leq T$ , llegando a un absurdo.

Si  $\lambda(v)$  es un valor propio de  $A(v)$  con multiplicidad mayor que dos, dada la forma de las cajas  $J_\lambda^n$ , para que se verifique la acotación (9) se ha de verificar que  $|\lambda(v)| < 1$ .

La implicación en el otro sentido es inmediata, puesto que razonando a la inversa, han de existir constantes positivas  $K$  y  $h_0$  tales que

$$\|J^n(v)\| \leq \frac{K}{h} \quad \text{para todo } 0 \leq n \leq N - k \text{ y } h \in (0, h_0]$$

Teniendo en cuenta que  $\|A^n(v)\|_\infty \leq \|S\|_\infty \|J^n(v)\|_\infty \|S^{-1}\|_\infty$ , la demostración queda completada.

Como una consecuencia inmediata, obtenemos la siguiente.

**PROPOSICION 8:** Un método adaptado es estable si el polinomio característico  $\rho(\xi, v)$  verifica la siguiente condición sobre sus raíces:

“Si  $\xi(v)$  es una raíz de  $\rho(\xi, v)$ , entonces existe una constante  $C \geq 0$  tal que  $|\xi(v)| \leq \exp(Cv)$ . Además, si  $\xi(v)$  es una raíz de  $\rho(\xi, v)$  con multiplicidad mayor que dos, entonces  $|\xi(v)| < 1$ ”.

Hacemos notar que cuando el parámetro  $v$  tiende a cero, la condición de las raíces obtenida coincide con la condición de las raíces de los métodos clásicos de Störmer-Cowell (Henrici<sup>5</sup>).

La convergencia de los métodos adaptados (Consistencia + Estabilidad  $\Rightarrow$  Convergencia) se demuestra fácilmente siguiendo técnicas bien conocidas, por ejemplo ver Calvo-Montijano<sup>1</sup>.

*Observación:* Los métodos adaptados se pueden extender fácilmente al caso de un sistema formado por  $m$  osciladores armónicos perturbados

$$\begin{aligned} y''_i + \omega_i^2 y_i &= f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_m), \quad i = 1, 2, \dots, m \\ y_i(t_0) &= y_{i0}, y'_i(t_0) = y'_{i0} \end{aligned}$$

Llamando  $v_i = \omega_i h$ , bastaría con considerar  $m$  métodos adaptados de la forma

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j(v_i) y_{i,n+j} = h^2 \sum_{j=0}^k \beta_j(v_i) f_{i,n+j}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

uno para cada ecuación del sistema, resultando un método multipaso de coeficientes matriciales

$$\sum_{j=0}^k A_j(v) Y_{n+j} = h^2 \sum_{j=0}^k B_j(v) F_{n+j}$$

donde  $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ ,  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$ ,  $F(t, Y) = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$

$$A_j(v) = \text{diag}(\alpha_j(v_1), \alpha_j(v_2), \dots, \alpha_j(v_m))$$

$$B_j(v) = \text{diag}(\beta_j(v_1), \beta_j(v_2), \dots, \beta_j(v_m))$$

Este método está bien definido y el orden será el mínimo de los órdenes de cada uno de los métodos adaptados puesto que de acuerdo con la proposición 5, el orden de cada método es independiente del parámetro  $\omega_i$  elegido.

### CONSTRUCCION DE METODOS ADAPTADOS DE TIPO STÖRMER-COWELL

La obtención de métodos adaptados mediante la resolución de un sistema de ecuaciones lineales dado por las condiciones (5) o equivalentemente por las condiciones de la Proposición 3, puede resultar inabordable en la práctica cuando se requieren métodos de orden elevado. Este inconveniente puede ser evitado, al menos para ciertas familias de fórmulas, mediante la obtención de unas leyes de recurrencia que nos permitirán determinar los coeficientes del método utilizando cálculos directos.

La solución general del problema de valor inicial (1) viene dada por

$$y(t) = C_1 \phi_0(t, \omega) + C_2 \omega \phi_1(t, \omega) + \int_{t_n}^t f(s) \phi_1(t-s, \omega) ds \quad (10)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes arbitrarias,  $\omega$  es la frecuencia principal del problema (1) y  $f(s)$  representa a  $f(s, y(s))$  en un abuso de notación. Si sustituimos en (10) los valores de  $t = t_{n+1}, t_n, t_{n-1}$  y eliminamos las constantes  $C_1$  y  $C_2$  de las ecuaciones resultantes, obtenemos la relación

$$y(t_{n+1}) - 2\phi_0(1, v)y(t_n) + y(t_{n-1}) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} [f(s) + f(2t_n - s)] \phi_1(t_{n+1} - s, \omega) ds$$

con  $v = \omega h$ . Esta ecuación será la base para la construcción de métodos adaptados de tipo Störmer-Cowell de orden elevado. Si aproximamos la función perturbadora  $f$  por el polinomio de interpolación de Newton (en la forma de diferencias regresivas) en una red de puntos equidistantes  $t_j = t_0 + jh, (0 \leq j \leq k)$

$$P(t) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{-\tau}{j} \nabla^j f_k, \quad t_0 \leq t \leq t_k \quad (11)$$

donde  $\tau = (t - t_k)/h$ ,  $\nabla^j f_k$  es la  $j$ -ésima diferencia regresiva y  $f_k = f(t_k, y_k)$ , obtenemos el siguiente método adaptado

$$y_{n+1} - 2\phi_0(1, v)y_n + y_{n-1} = h^2 \sum_{j=0}^k \sigma_{j,r}(v) \nabla^j f_{n+r} \quad (12)$$

donde con  $r = 0$  denotamos cuando el método es explícito y con  $r = 1$  cuando es implícito y los coeficientes  $\sigma_{j,r}(v)$  vienen dados por las expresiones integrales

$$\sigma_{j,0} = (-1)^j \int_0^1 \left[ \binom{-\tau}{j} + \binom{\tau}{j} \right] \phi_1(1-\tau, v) d\tau \quad (\text{caso explícito}) \quad (13.a)$$

$$\sigma_{j,1} = (-1)^j \int_{-1}^0 \left[ \binom{-\tau}{j} + \binom{\tau+2}{j} \right] \phi_1(-\tau, v) d\tau \quad (\text{caso implícito}) \quad (13.b)$$

Estos coeficientes se pueden calcular de una forma sencilla y recurrente mediante la técnica de obtener una función generatriz  $G_r(t, v)$  (ver Henrici<sup>5</sup>), que tiene por coeficientes a los  $\sigma_{j,r}(v)$  en su desarrollo de Mac-Laurin.

Consideremos funciones generatrices de la forma

$$G_r(t, v) = \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_{j,r}(v) t^j, \quad r = 0, 1$$

Sustituyendo los valores de los coeficientes  $\sigma_{j,r}(v)$  en la expresión de la función generatriz  $G_r(t, v)$ , e integrando por partes, obtenemos

$$G_r(t, v) = \frac{2(1 - \phi_0(1, v))(1 - t) + t^2}{[r + (1 - r)(1 - t)] [(\log(1 - t))^2 \pm v^2]}, \quad r = 0, 1 \quad (14)$$

Observamos inmediatamente que cuando el parámetro  $v$  tiende a cero, las funciones generatrices (14) se convierten en

$$G_0(t, 0) = \frac{t^2}{(1 - t)(\log(1 - t))^2}, \quad G_1(t, 0) = \frac{t^2}{(\log(1 - t))^2}$$

coincidiendo con las funciones generatrices obtenidas por Henrici<sup>5</sup>, para los clásicos métodos de Störmer-Cowell (caso explícito y caso implícito).

Si ahora consideramos los desarrollos de Taylor, en un entorno del punto  $t = 0$ , de las funciones que aparecen en la expresión (14) de las funciones generatrices, obtenemos las siguientes leyes de recurrencia para el cálculo de los coeficientes  $\sigma_{j,r}(v)$

#### Caso explícito

$$\sigma_{0,0} = \frac{2(1 - \phi_0(1, v))}{\pm v^2}, \quad \sigma_{1,0} = 0$$

$$\sigma_{n+2,0} = \pm \frac{1}{v^2} \left[ 1 - \sigma_{n,0} - \frac{2}{3} h_2 \sigma_{n-1,0} - \frac{2}{4} h_3 \sigma_{n-2,0} - \cdots - \frac{2}{n+2} h_{n+1} \sigma_{0,0} \right], \quad n \geq 0$$

#### Caso implícito

$$\sigma_{0,1} = \frac{2(1 - \phi_0(1, v))}{\pm v^2}, \quad \sigma_{1,1} = -\sigma_{0,1}, \quad \sigma_{2,1} = \frac{1 - \sigma_{0,1}}{\pm v^2}$$

$$\sigma_{n+2,1} = \pm \frac{1}{v^2} \left[ -\sigma_{n,1} - \frac{2}{3} h_2 \sigma_{n-1,1} - \frac{2}{4} h_3 \sigma_{n-2,1} - \cdots - \frac{2}{n+2} h_{n+1} \sigma_{0,1} \right], \quad n \geq 1$$

donde  $h_n = 1 + 1/2 + \dots + 1/n$ .

Una vez que hemos calculado los coeficientes  $\sigma_{j,r}(v)$  podemos expresar el método (11) en forma lagrangiana como

$$y_{n+1} - 2\phi_0(1, v)y_n + y_{n-1} = h^2 \sum_{j=0}^k \beta_{k,j}^{(r)}(v) f_{n+r-j}, \quad r = 0, 1 \quad (15)$$

donde los coeficientes son

$$\beta_{k,j}^{(r)}(v) = (-1)^j \sum_{s=0}^{k-j} \binom{j+s}{j} \sigma_{j+s,r}(v)$$

Hacemos notar que es de gran importancia el hecho de haber obtenido unas leyes de recurrencia para el cálculo de los coeficientes, ya que esto nos permitirá la construcción de métodos adaptados para cualquier orden de aproximación sin excesivo trabajo.

**TEOREMA 9:** Los coeficientes  $\beta_{k,j}(v)$  de los métodos de tipo Störmer-Cowell dados en (15) son funciones acotadas y continuas para todo  $v \in [0, \Lambda]$ .

*Demostración:* Primero veremos que estos coeficientes son funciones acotadas para todo valor del parámetro  $v \in [0, \Lambda]$ . Esta conclusión es inmediata para los coeficientes  $\alpha_j(v)$ . Los coeficientes  $\beta_{k,j}(v)$  correspondientes al método implícito (el caso explícito es similar) vienen dados por

$$h^2 \sum_{j=0}^k \beta_{k,j}(v) f_{n+1-j} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} [P_k(t) + P_k(2t_n - t)] \phi_1(t_{n+1} - t, \omega) dt$$

donde  $P_k(t)$  es el polinomio de interpolación de  $f(t, y)$  en los puntos  $t_{n+1}, t_n, \dots, t_{n+1-k}$  que en forma lagrangiana viene dado por

$$P_k(t) = \sum_{j=0}^k L_{n,j}(t) f_{n+1-j}$$

donde

$$L_{n,j}(t) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^k \frac{(t - t_{n+1-i})}{(t_{n+1-j} - t_{n+1-i})}, \quad 0 \leq j \leq k$$

En consecuencia, los coeficientes  $\beta_{k,j}(v)$ , vienen dados por

$$\beta_{k,j}(v) = \frac{1}{h^2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} [L_{n,j}(t) + L_{n,j}(2t_n - t)] \phi_1(t_{n+1} - t, \omega) dt$$

Además,

$$\left| \frac{1}{h^2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \phi_1(t_{n+1} - t, \omega) dt \right| \leq \max_{0 \leq \tau \leq 1} |\phi_1(1 - \tau, v)| \leq C \quad \text{para todo } v \in [0, \wedge]$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} |\beta_{k,j}(v)| &\leq C \left\{ \max_{t_n \leq t \leq t_{n+1}} |L_{n,j}(t)| + \max_{t_n \leq t \leq t_{n+1}} |L_{n,j}(2t_n - t)| \right\} \leq \\ &\leq 2C \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^k \frac{(t_{n+1} - t_{n+1-i})}{|t_{n+1-j} - t_{n+1-i}|}, \quad 0 \leq j \leq k \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$t_{n+1} - t_{n+1-i} \leq \begin{cases} (j+1)(t_{n+1-j} - t_{n+1-i}), & \text{si } i > j \\ j(t_{n+1-j} - t_{n+1-i}), & \text{si } i < j \end{cases}$$

se tiene que los coeficientes  $\beta_{k,j}(v)$  están acotados. En estas condiciones, los coeficientes  $\beta_{k,j}(v)$  son funciones continuas del parámetro  $v$  por construcción.

Se observa inmediatamente que los métodos adaptados de tipo Störmer-Cowell dados por la ecuación (15) son siempre consistentes de orden  $k+1$  por construcción.

Además, el polinomio característico  $\rho(\xi, v)$  viene dado por

$$\rho(\xi, v) = (\xi^2 - 2\phi_0(1, v)\xi + 1)\xi^{k-2}$$

de donde es inmediato obtener que las raíces de este polinomio son

$$\xi_1(v) = e^{iv}, \quad \xi_2(v) = e^{-iv}, \quad \xi_j(v) = 0, \quad j = 3, 4, \dots, k, \quad (\text{caso trigonométrico})$$

$$\xi_1(v) = e^v, \quad \xi_2(v) = e^{-v}, \quad \xi_j(v) = 0, \quad j = 3, 4, \dots, k, \quad (\text{caso hiperbólico})$$

Entonces, los métodos (15) verifican la condición de las raíces dada en la Proposición 8 y de acuerdo con las conclusiones del Teorema 9 son estables (debido a que la función  $f(t, y)$  verifica la condición de Lipschitz y, por lo tanto, también la verificará la función  $F(v, Y)$ ). En conclusión, los métodos son convergentes.

A continuación, presentamos algunos ejemplos de métodos adaptados

i) Método explícito de dos pasos (orden 2)

$$y_{n+1} - 2(\cos v)y_n + y_{n-1} = h^2 \frac{2(1 - \cos v)}{v^2} f_n \quad \text{caso trigonométrico}$$

Integra exactamente al espacio  $\Pi_3(\omega) = \text{Span}\{1, t, \cos \omega t, \sin \omega t\}$

$$y_{n+1} - 2(\text{ch } v)y_n - y_{n-1} = -h^2 \frac{2(1 - \text{ch } v)}{v^2} f_n \quad \text{caso hiperbólico}$$

Integra exactamente al espacio  $\Pi_3(\omega) = \text{Span}\{1, t, \text{ch } \omega t, \text{sh } \omega t\}$

ii) Método implícito de dos pasos (orden 4)

$y_{n+1} - 2(\cos v)y_n + y_{n-1} = h^2(\beta_0 f_{n+1} + \beta_1 f_n + \beta_0 f_{n-1})$  caso trigonométrico

$$\beta_0 = \frac{v^2 - 2(1 - \cos v)}{v^4}, \quad \beta_1 = \frac{-2v^2 + (4 + 2v^2)(1 - \cos v)}{v^4}$$

Integra exactamente al espacio  $\Pi_5(\omega) = \text{Span}\{1, t, t^2, t^3, \text{sen } \omega t, \cos \omega t\}$

$y_{n+1} - 2(\text{ch } v)y_n + y_{n-1} = h^2(\beta_0 f_{n+1} + \beta_1 f_n + \beta_0 f_{n-1})$  caso hiperbólico

$$\beta_0 = -\frac{v^2 - 2(1 - \text{ch } v)}{v^4}, \quad \beta_1 = \frac{-2v^2 + (4 - 2v^2)(1 - \text{ch } v)}{v^4}$$

Integra exactamente al espacio  $\Pi_5(\omega) = \text{Span}\{1, t, t^2, t^3, \text{ch } \omega t, \text{sh } \omega t\}$

iii) Método explícito de tres pasos (orden 3)

$y_{n+1} - 2(\cos v)y_n - y_{n-1} = h^2(\beta_0 f_n + \beta_1 f_{n-1} + \beta_2 f_{n-2})$  caso trigonométrico

$$\beta_0 = \frac{v^2 + (2v^2 - 2)(1 - \cos v)}{v^4}, \quad \beta_1 = \frac{-2v^2 + 4(1 - \cos v)}{v^4}, \quad \beta_2 = \frac{v^2 - 2(1 - \cos v)}{v^4}$$

Integra exactamente al espacio  $\Pi_4(\omega) = \text{Span}\{1, t, t^2, t^3, \cos \omega t, \text{sen } \omega t\}$

$y_{n+1} - 2(\text{ch } v)y_n + y_{n-1} = h^2(\beta_0 f_n + \beta_1 f_{n-1} + \beta_2 f_{n-2})$  caso hiperbólico

$$\beta_0 = -\frac{v^2 + (2v^2 + 2)(1 - \text{ch } v)}{v^4}, \quad \beta_1 = \frac{2v^2 + 4(1 - \text{ch } v)}{v^4}, \quad \beta_2 = \frac{v^2 + 2(1 - \text{ch } v)}{v^4}$$

Integra exactamente al espacio  $\Pi_4(\omega) = \text{Span}\{1, t, t^2, \text{ch } \omega t, \text{sh } \omega t\}$

## PROPIEDADES DE FASE DE LAS RAICES DEL POLINOMIO DE ESTABILIDAD

### DEFINICION 10

Un método de integración numérica se dice *incondicionalmente estable* (*I-estable*) si cuando se aplica a la ecuación test  $y'' + \lambda^2 y = 0$ , las raíces  $\xi_j(H)$  del polinomio característico asociado a la ecuación en diferencias resultante verifican

$$|\xi_j(H)| \leq 1 \quad \text{para todo } H = \lambda h > 0$$

Análogamente, se dice *P-estable* cuando dichas raíces verifican

$$|\xi_j(H)| = 1 \quad \text{para todo } H = \lambda h > 0$$

En los casos en que para  $0 < H^2 \leq \eta_0$  con  $\eta_0$  dado, las raíces verifican  $|\xi_j(H)| \leq 1$  o  $|\xi_j(H)| = 1$ , se dice que el método es *condicionalmente estable* o que tiene *intervalo de periodicidad*  $(0, \eta_0)$ , respectivamente.

Si consideramos la ecuación test del oscilador armónico expresada en la forma

$$y'' + \omega^2 y = \delta y, \text{ con } \delta = (\omega^2 - \lambda^2)$$

y la integramos mediante un método adaptado (3), la solución numérica viene dada por la ecuación en diferencias

$$\sum_{j=0}^k [\alpha_j(v) - (H^2 - v^2)\beta_j(v)]y_{n+j} = 0 \quad (16)$$

La ecuación en diferencias (16) tiene como polinomio de estabilidad asociado

$$P(\xi, v) = \sum_{j=0}^k [\alpha_j(v) - (H^2 - v^2)\beta_j(v)]\xi^j = 0 \quad (17)$$

En el caso particular de métodos de dos pasos, el polinomio de estabilidad asociado es de la forma

$$P_2(\xi, v) = \xi^2 - 2B(H, v)\xi + 1 \quad (18)$$

y para que las raíces estén sobre la circunferencia unidad se ha de verificar

$$|B(H, v)| \leq 1 \quad (19)$$

Para el *método trigonométrico explícito de dos pasos (orden 2)*

$$B(H, v) = 1 - \left( \frac{1 - \cos v}{v^2} \right) H^2$$

verifica la condición (19) si y solo si  $0 \leq H^2 \leq \frac{2v^2}{1 - \cos v}$  y por lo tanto, tiene intervalo de periodicidad  $(0, \frac{2v^2}{1 - \cos v})$ .

Para el *método trigonométrico implícito de dos pasos (orden 4)*

$$B(H, v) = \frac{2(1 - \cos v)/v^2 - H^2\beta_1(v)/2}{2(1 - \cos v)/v^2 + H^2\beta_0(v)}$$

verifica la condición (19) si y solo si  $0 \leq H^2 \leq F(v)$ , donde  $F(v) = \frac{4v^2(1 - \cos v)}{(4 + v^2)(1 - \cos v) - 2v^2}$  y por lo tanto, tiene intervalo de periodicidad  $(0, F(v))$ .

En general, cuando el método es de  $k$  pasos, se puede despejar  $H^2$  en (17):

$$H^2 = v^2 - \frac{\rho(\xi, v)}{\sigma(\xi, v)}$$

Como se desea encontrar los valores de  $H^2$  de manera que las raíces de (17) estén sobre la circunferencia unidad, se puede imponer que dichas raíces sean de la forma  $\xi(v) = e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  y los valores de  $H(\theta)$  que hacen que esto ocurra serán aquellos que verifiquen que

$$H^2(\theta) = v^2 - \frac{\rho(e^{i\theta}, v)\sigma(e^{-i\theta}, v)}{|\sigma(e^{i\theta}, v)|^2} \text{ sea un número real} \quad (20)$$

En el caso particular de la familia de métodos (15) la expresión (20) se reduce a

$$H^2(\theta) = v^2 - \frac{2(\cos \theta - \cos v)}{R^2 + S^2} [R \cos(k-1)\theta + S \sin(k-1)\theta + \\ + i(R \sin(k-1)\theta - S \cos(k-1)\theta)]$$

donde

$$R = \beta_0(v) + \beta_1(v) \cos \theta + \cdots + \beta_k(v) \cos k\theta \\ S = \beta_1(v) \sin \theta + \cdots + \beta_k(v) \sin k\theta$$

Cuando se conoce exactamente la frecuencia del problema,  $\lambda = \omega$ , el polinomio de estabilidad asociado a los métodos (15) es

$$P(\xi, v) = (\xi^2 - 2(\cos v)\xi + 1)\xi^{k-2} \quad (21)$$

y tiene las raíces principales sobre la circunferencia unidad, siendo nulas las restantes raíces. Entonces, podemos concluir que en este caso los métodos (15) son *incondicionalmente estables* (*I-estables*).

### Comparaciones numéricas

Para ilustrar el buen comportamiento de los métodos que hemos desarrollado en este trabajo, realizamos unas aplicaciones numéricas de ellos a una familia de problemas test.

Consideraremos los métodos adaptados obtenidos en la sección anterior, los métodos clásicos de Adams<sup>5</sup> y de Cowell<sup>5</sup>, los métodos obtenidos por Lambert-Watson<sup>8</sup> (tienen intervalo de periodicidad no vacío), todos ellos de orden 8 y los métodos de Cash<sup>12</sup> que son *P-estables* y de orden 6, para resolver numéricamente problemas lineales y no lineales. Como estos métodos son de tipo multipaso, la iniciación de todos ellos se ha realizado con el método Runge-Kutta-Nyström de orden 10 obtenido por Hairer<sup>13</sup> y paso de integración 1/4 del paso considerado para los métodos anteriores en cada caso. La implementación de los métodos se ha realizado en la forma  $P(EC)^2E$  (predicor-corrector). Además, consideraremos el método LIPS(3) (Long-term Integration of Periodic Systems) propuesto por Kirchgraber<sup>14</sup>. Este método es

válido para la integración numérica de problemas de valor inicial perturbados cuando el problema no perturbado tiene solución periódica y la función perturbadora  $f(t, y)$  es periódica en la variable  $t$  con el mismo periodo que la solución no perturbada. En estas condiciones, el método LIPS solamente se podrá aplicar a los ejemplos 1, 2 y 5.

En las figuras presentadas aparece la propagación del error conforme la variable independiente aumenta. En el eje horizontal representamos la variable independiente denotada por  $t$  y en el eje vertical representamos el logaritmo decimal con signo cambiado del máximo del error absoluto en norma euclídea obtenido hasta ese valor de la variable independiente, lo que nos indicará el número de cifras decimales de aproximación obtenidas por cada método. Además, en las figuras aparecen los nombres de los métodos involucrados en cada comparación, indicando entre paréntesis el orden de cada uno de ellos.

*Ejemplo 1:* El problema cuasi-periódico propuesto por Stiefel and Bettis<sup>10</sup>

$$z'' + z = \varepsilon \exp(it), \quad \varepsilon = 0.001, \quad t \in [0, 40\pi], \quad z \in \mathbb{C}$$

$$z(0) = 1, \quad z'(0) = 0.9995i$$

cuya solución analítica viene dada por

$$z(t) = (\cos t + 0.0005t \operatorname{sen} t) + i(\operatorname{sen} t - 0.0005t \cos t)$$

y representa un movimiento circular perturbado sobre el plano complejo.

En las Figuras 1 y 2 se presentan la propagación del error para todos los métodos considerados, con pasos de integración  $h = \pi/24$  y  $h = \pi/12$ . En estas figuras no hemos incluido el método LIPS porque da una aproximación muy grosera (del orden de una cifra decimal) debido a que el problema tiene una resonancia.

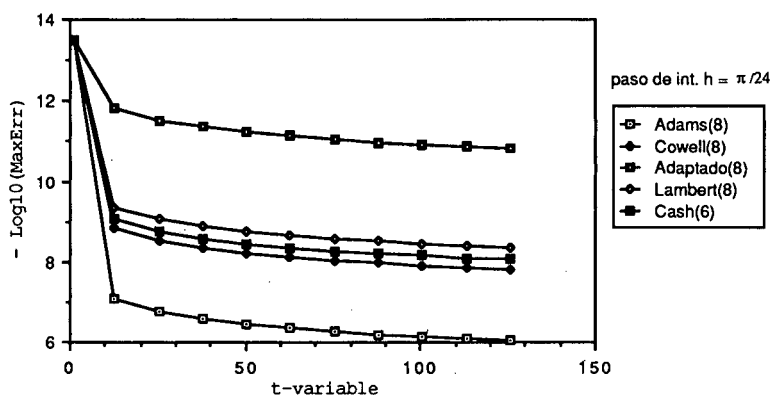


Figura 1.

*Ejemplo 2:* El problema no lineal propuesto por Jain et al.<sup>6</sup>

$$z'' + (1 + \gamma + \gamma \delta e^{-2it})z = \gamma e^{-it} z^2, \quad t \in [0, 10\pi], \quad z \in \mathbb{C}$$

$$z(0) = 1 + \delta, \quad z'(0) = i(1 - \delta)$$

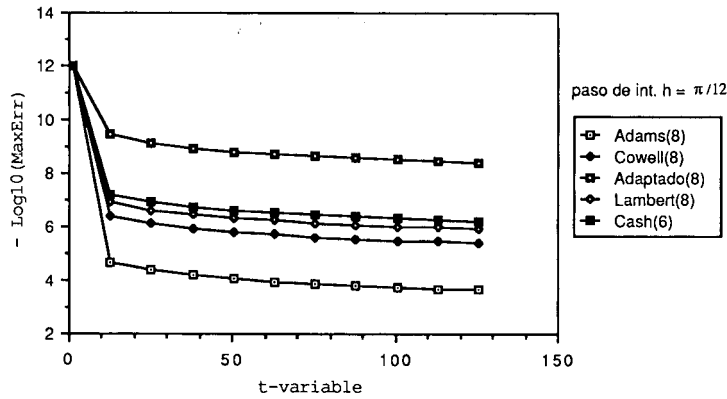


Figura 2.

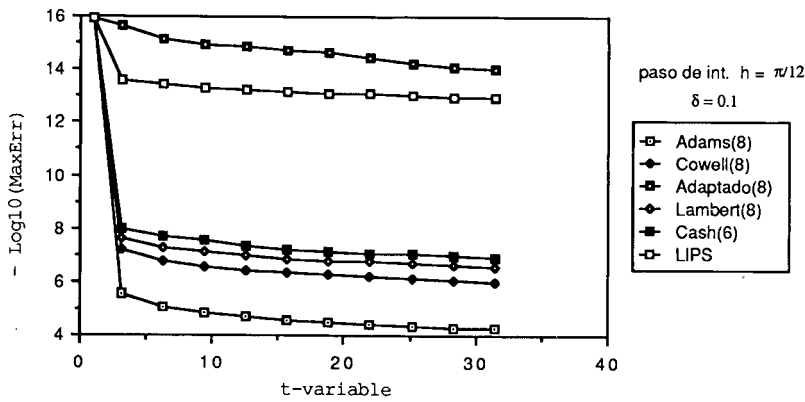


Figura 3.

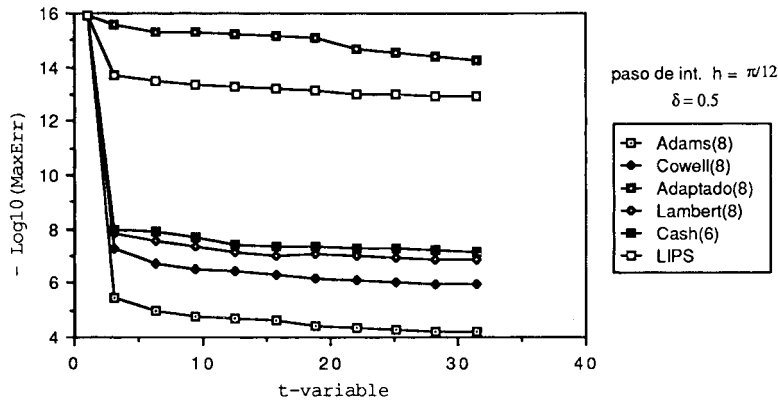


Figura 4.

con  $\gamma \geq 0$ ,  $0 \leq \delta \leq 1$ . La solución analítica es  $z(t) = e^{it} + \delta e^{-it}$  y representa una elipse en el plano complejo, donde  $\delta$  es un parámetro de distorsión y  $\gamma$  un parámetro de no linealidad. El problema se integró con paso  $h = \pi/12$  y valores de los parámetros  $\omega^2 = 1 + \gamma$ ,  $\gamma = 0.1 \times 10^{-5}$  y distintos valores de  $\delta$ . La propagación del error absoluto viene representada en las Figuras 3 y 4.

*Ejemplo 3:* El problema propuesto por Lambert-Watson<sup>8</sup>

$$y''_1 + \lambda^2 y_1 = f''(t) + \lambda^2 f(t), \quad y_1(0) = a + f(0), \quad y'_1(0) = f'(0), \quad t \in [0, 10\pi]$$

$$y''_2 + \lambda^2 y_2 = f''(t) + \lambda^2 f(t), \quad y_2(0) = f(0), \quad y'_2(0) = \lambda a + f'(0)$$

con  $f(t) = e^{-0.05t}$  y que tiene por solución exacta

$$y_1(t) = a \cos \lambda t + e^{-0.05t}$$

$$y_2(t) = a \operatorname{sen} \lambda t + e^{-0.05t}$$

El problema fue integrado con pasos  $h = \pi/24$  y  $h = \pi/12$  para los valores de los parámetros  $\omega = \lambda$ ,  $a = 1$ ,  $\lambda = 3$  y los resultados vienen dados en las Figuras 5 y 6.

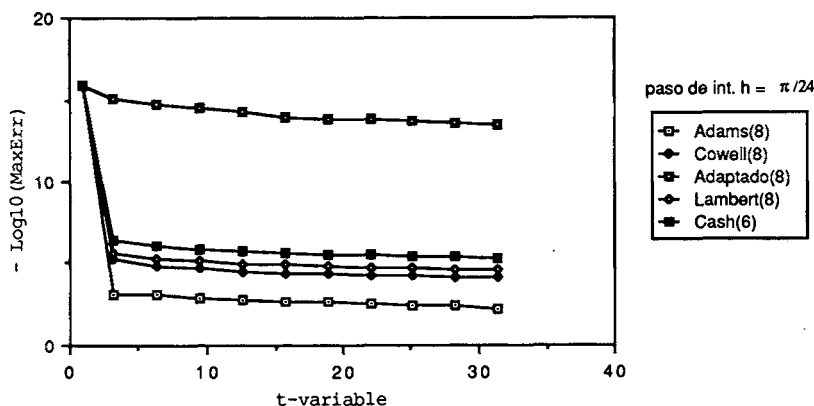


Figura 5.

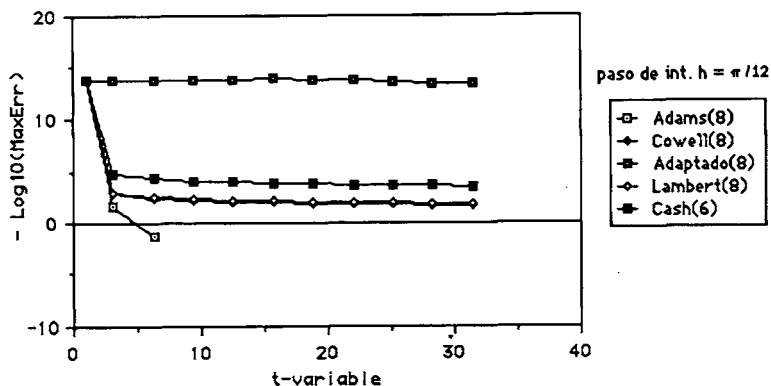


Figura 6.

*Ejemplo 4:* El problema hiperbólico

$$y'' - y = \varepsilon \operatorname{sen} t, \quad \varepsilon = 0.001, \quad t \in [0, 10]$$

$$y(0) = 1, y'(0) = -0.0005$$

cuya solución analítica es  $y(t) = \text{ch } t - 0.0005 \text{ sen } t$  y representa un movimiento hiperbólico (inestable). El problema fue integrado con pasos  $h = 0.1$  y  $h = 0.2$  y los resultados vienen dados en las Figuras 7 y 8.

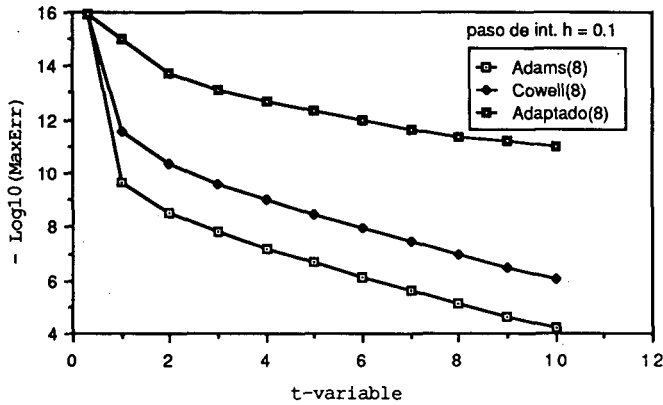


Figura 7.

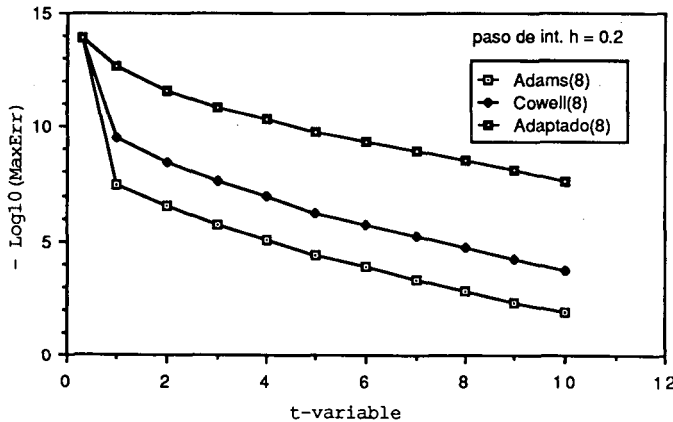


Figura 8.

*Ejemplo 5:* Se considera un caso particular de un satélite zonal de la Tierra con un potencial perturbador  $V$  dado por

$$V = -\frac{\varepsilon}{r^3} \left( \frac{1}{3} - \frac{z^2}{r^2} \right)$$

donde  $\varepsilon = (3J_2)/(2r_p^2)$  resulta de normalizar el armónico zonal de primer orden  $J_2$  con  $r_p$  distancia al perigeo de la órbita osculatriz no perturbada en el instante inicial. Formulando el problema en las variables de Kustanheimo-Stiefel, las ecuaciones del movimiento son de la forma

$$\ddot{\vec{u}} + \omega^2 \vec{u} = -\frac{r}{4} \frac{\partial V}{\partial \vec{u}} - \frac{1}{2} V \vec{u}$$

donde  $\omega$  es una constante de la integral de la energía.

El problema se ha integrado tomando condiciones iniciales en el perigeo de la órbita y con valores de la inclinación  $i = 0$ , y con excentricidad  $e = 0.1$ , con pasos de integración  $h = 0.1$  y  $h = 0.2$ . El valor de  $\epsilon$  se ha tomado para una altitud aproximada del satélite de 500 Km y los errores se han obtenido comparando con una órbita de referencia que se ha calculado con el método de Cowell de orden 16. Los resultados vienen dados en las Figuras 9 y 10.

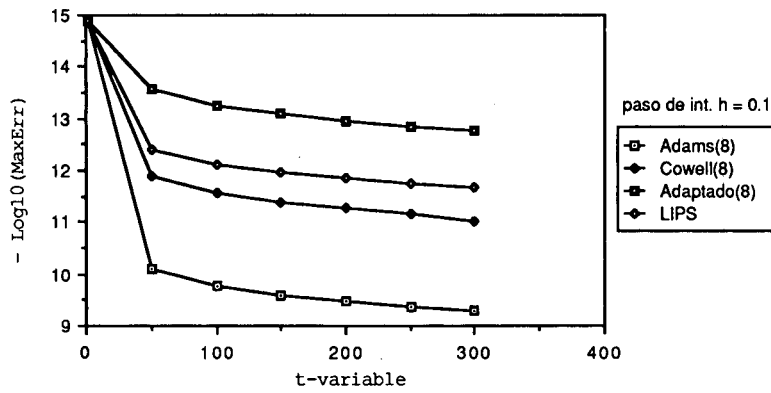


Figura 9.

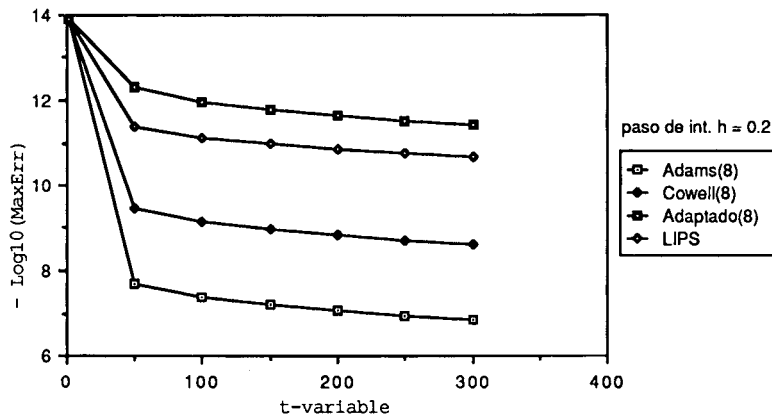


Figura 10.

## CONCLUSIONES

En este trabajo presentamos una formulación de los métodos de Störmer-Cowell adaptados a la integración de problemas oscilatorios perturbados en los que la frecuencia principal es conocida o puede ser estimada con bastante exactitud. Estudiamos las propiedades de consistencia, estabilidad y convergencia de los métodos y obtenemos una familia de métodos adaptados en forma recurrente, para cualquier orden de aproximación.

Finalmente aplicamos los métodos obtenidos a una familia de problemas test, comparándolos con otros métodos que se encuentran en las referencias citadas. De los resultados numéricos presentados en las Figuras 1-10, se desprenden las siguientes conclusiones:

- 1.- Los métodos de Adams funcionan apreciablemente peor que los restantes métodos que están diseñados para ecuaciones especiales de 2º orden de la forma  $y'' = f(t, y)$ . En particular, en la Figura 6 se aprecia que la propagación del error degenera mucho más rápidamente para el método de Adams.
- 2.- Los métodos que tienen propiedades de periodicidad o estabilidad orbital como los de Lambert-Watson<sup>8</sup> y Cash<sup>12</sup> funcionan ligeramente mejor que el método de Cowell y en particular, el método de Cash que es  $P$ -estable, aumenta su eficiencia al aumentar el paso de integración como se puede apreciar en las Figuras 2, 4 y 6.
- 3.- Los métodos adaptados propuestos por nosotros resultaron ser los más eficientes, para la familia de problemas test considerada en los que la frecuencia principal es conocida y los restantes términos representan una pequeña perturbación. Además, de acuerdo con los resultados numéricos, la mejor aproximación obtenida con los métodos adaptados frente al resto de métodos multipaso tiene relación con el orden de magnitud de la fuerza perturbadora  $f(t, y)$  frente al término  $\pm\omega^2 y$ . Se observa que los métodos adaptados consiguen por lo menos  $m$  cifras decimales significativas más que los otros métodos multipaso cuando la relación existente entre la fuerza perturbadora y el término no perturbado es del orden de  $10^{-m}$  (se aprecia muy claramente en el ejemplo 2 en el que la fuerza perturbadora es del orden de  $10^{-6}$ ).
- 4.- El método LIPS consigue muy buena aproximación para los ejemplos 2 y 5 pero en el caso del ejemplo 1 que tiene una resonancia, la aproximación obtenida es solamente de una cifra decimal. Además, desde el punto de vista computacional, resulta muy costoso para cortos y moderados intervalos de tiempo y tiene el inconveniente de que solamente proporciona la solución para un número entero de periodos pero no permite calcular la solución en puntos intermedios de la órbita.
- 5.- En el caso del ejemplo 4 en que la solución es inestable, el método adaptado consigue muy buena aproximación, mientras que la aproximación obtenida con los métodos de Adams y de Cowell degenera rápidamente.

### AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen los comentarios realizados por los referees que han contribuido a mejorar ciertos aspectos del trabajo presentado.

Este trabajo ha sido realizado dentro de los proyectos PB87-0637 de la CICYT, PCB10/87 de la DGA e IT-7/88 del CONAI.

### REFERENCIAS

1. M. Calvo y J.I. Montijano, "Métodos lineales multipaso para la resolución numérica de E.D.O.", S.P. Universidad de Zaragoza, (1985).
2. J.M. Correias, "Linear Multistep Schemes based on algebraic, trigonometric and exponential polynomials", *First world Conf. on Math. Serv. Man.*, Vol. 1, pp. 339-359, (1977).

3. J.M. Correás y M.C. Martín, "Métodos multipaso de coeficientes variables para el P.V.I. 2 especial", *V Jornadas Mat. Luso-Españolas*, Vol. **3**, pp. 940-962, (1978).
4. W. Gautschi, "Numerical integration of O.D.E's based on trigonometric polynomials", *Numer. Math.*, Vol. **3**, pp. 381-397, (1961).
5. P. Henrici, "*Discrete variable methods in O.D.E's*", Wiley, (1964).
6. M.K. Jain et al., "P-stable methods for periodic I.V.P. of second order differential equations", *BIT*, Vol. **19**, pp. 347-355, (1979).
7. J.D. Lambert, "*Computational methods in O.D.E's*", Wiley, (1973).
8. J.D. Lambert y I.A. Watson, "Symetric multistep methods for periodic I.V.P.", *J. Inst. Math. Appl.*, Vol. **18**, pp. 189-202, (1976).
9. T. Lyche, "Chebyshevian multistep methods for O.D.E's", *Num. Math.*, Vol. **19**, pp. 65-75, (1972).
10. E. Stiefel y D.G. Bettis, "Stabilization of Cowell's methods", *Numer. Math.*, Vol. **13**, pp. 154-175, (1969).
11. D.G. Bettis, "Stabilization of finite difference methods of numerical integration", *Celes. Mech.*, Vol. **2**, pp. 282-295, (1970).
12. J.R. Cash, "High order P-stable formulae for the numerical integration of periodic IVP", *Numer. Math.*, Vol. **37**, pp. 355-370, (1981).
13. E. Hairer, "A one-step method of order 10 for  $y' = f(t, y)$ ", *IMA Journal of Numer. Anal.*, Vol. **2**, pp. 83-94, (1982).
14. U. Kirchgraber, "An ODE-solver based on the method of averaging", *Numer. Math.*, Vol. **53**, pp. 621-652, (1988).