

ECUACIONES DE DIFERENCIAS MEJORADAS PARA ECUACIONES DIFERENCIALES

WILBERT LICK

*Dept. of Mechanical and Environmental Engineering
University of California
Santa Bárbara, CA 93106, USA*

RESUMEN

Se presenta en este artículo una reseña sobre el uso del método integral para derivar ecuaciones de diferencias a partir de ecuaciones diferenciales. El método se aplica a varios tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias correspondientes a problemas de valores de contorno y a problemas de valores iniciales, ilustrándose la utilidad del método con varios ejemplos sencillos.

SUMMARY

In this paper a survey on the use of the integral method for deriving difference equations from differential equations is presented. The method is applied to various types of ordinary differential equations corresponding to boundary value and initial value problems as well partial differential equations. The efficiency of the method is checked with its application to several simple examples.

INTRODUCCION

El primer problema y el más básico, en la solución numérica de ecuaciones diferenciales es el de aproximar las ecuaciones diferenciales por medio de ecuaciones de diferencias. Hay muchas maneras de formar ecuaciones de diferencias a partir de las ecuaciones diferenciales. Algunas son más ventajosas que otras y el grado de éxito de un método en particular normalmente depende del problema a resolver.

El primer método de uso general fue el de diferencias finitas. En este método, se obtienen ecuaciones de diferencias por medio de desarrollos locales de las variables, generalmente series de Taylor truncadas. El procedimiento es relativamente simple y ha sido utilizado en forma extensiva en prácticamente todas las áreas de la dinámica en que se han necesitado aproximaciones numéricas. Como con cualquier método aproximado, el procedimiento tiene sus defectos, ej., con frecuencia las ecuaciones de diferencias son inestables y es difícil imponer las condiciones de contorno de forma adecuada.

Para derivar mejor las ecuaciones de diferencias apropiadas y eliminar algunas de estas dificultades, se desarrolló un método integral^{1,2}. Este método es general (ej., las ecuaciones de diferencias usuales obtenidas por medio de la serie de Taylor se pueden obtener también por este método como un caso especial) y ha sido usado extensamente como una extensión natural del método de diferencias finitas sin mucho reconocimiento formal de su poder y versatilidad.

Más recientemente, se ha desarrollado una clase más general de procedimientos llamados elementos finitos. En gran parte, estos métodos han sido atractivos a ingenieros y científicos porque, al igual que en el método integral, el continuo se divide

Recibido: Marzo 1985

en una serie de volúmenes de control o elementos finitos, cada uno de los cuales tiene significado físico. El método ha sido aplicado en forma extensa a problemas en dinámica de continuos, principalmente en estructuras, pero también en dinámica de fluidos.

Para determinar cómo se relacionan estos procedimientos, consideremos en general la ecuación diferencial dada por $L(u) = 0$, donde $L(u)$ está definida en el dominio espacial Ω . Por ejemplo, $L(u)$ podría ser

$$L(u) = \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx} + u - f = 0 \quad (1)$$

donde $f = f(x)$ y Ω es la región unidimensional representada por x . Definamos un producto interior tal que

$$\int_{\Omega} L(u) w \, d\Omega = 0 \quad (2)$$

donde w es una función de peso. Distintas elecciones de w conducen a distintas maneras de obtener ecuaciones de diferencias.

Por ejemplo, consideremos problemas de valores de contorno en una dimensión. Si escogemos w como una serie de funciones de intervalo tales que $w_i = 1$ para $x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}$ y cero en otras partes, la ecuación (2) se reduce a

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} L(u) dx = 0 \quad (3)$$

Una ecuación de este tipo se aplica a cada elemento definido por $x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}$ donde $i = 1, 2, \dots, I$. Esto conduce al método integral que se describirá en más detalle a continuación. Si w se define en términos de una serie de funciones de prueba que tienen la misma forma que las funciones usadas para aproximar u , el resultado es lo que generalmente llamamos el método de Galerkin. La mayor parte de los procedimientos a que nos referimos como métodos de elementos finitos están basados en aproximaciones del tipo de Galerkin^{3,4,5}. También es posible elegir w en otras formas, véase por ejemplo Brebbia et al.⁵.

En este artículo, el método integral se usará para derivar ecuaciones de diferencias por las siguientes razones. (a) Es una extensión lógica del método de diferencias finitas con todas sus ventajas pero no todas sus desventajas. (b) Se usan volúmenes de control o elementos finitos y las ecuaciones que gobiernan el proceso se satisfacen en promedio sobre cada elemento. (c) El método integral trabaja directamente con las ecuaciones fundamentales, e.g., las ecuaciones de conservación, en vez de ecuaciones ponderadas como lo hace el método de elementos finitos. Debido a (b) y (c), las aproximaciones físicas que se desprenden de este procedimiento son más aparentes que en los métodos usuales de diferencias finitas o elementos finitos.

También describiremos una extensión interesante del método integral, una extensión que incorpora soluciones analíticas aproximadas de la ecuación diferencial en la construcción de las ecuaciones de diferencias. Cuando conocemos una buena aproximación a la solución de la ecuación diferencial, la exactitud de la ecuación de diferencias correspondiente se puede mejorar considerablemente en comparación con la que se obtiene usando aproximaciones standard por series de Taylor. Desde este punto de vista, las aproximaciones por series de Taylor conducen a ecuaciones de diferencias crudas y producen soluciones comparativamente pobres de la ecuación diferencial.

El método integral y su extensión como se describe aquí, está íntimamente relacionado con, y motivado, por la física del problema. De hecho, la mayor ventaja de este

procedimiento es que uno puede transferir directamente las aserciones analíticas que se usan para aproximar la física a algoritmos numéricos.

En este artículo se presenta una breve reseña acerca del uso del método integral para derivar ecuaciones de diferencias a partir de ecuaciones diferenciales. El método se aplicará primero a ecuaciones diferenciales ordinarias en la próxima sección. En las secciones siguientes el método se aplica a la ecuación de Helmholtz, la ecuación de calor y la ecuación de onda, como ejemplos representativos de ecuaciones en derivadas parciales elípticas, parabólicas e hiperbólicas respectivamente. Para más aplicaciones y más detalles sobre este procedimiento debe consultarse otras referencias.

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

En esta sección, el método integral se aplica a ecuaciones diferenciales ordinarias. Se describen dos ejemplos en cada caso de problemas de valor de contorno y problemas de valor inicial.

Problemas de valor de contorno

Como un ejemplo sencillo para ilustrar el procedimiento⁷, consideremos el problema de convección y difusión definido por

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} - u \frac{d\phi}{dx} = 0 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4)$$

$$\phi(0) = 0, \quad \phi(1) = 1 \quad (5)$$

en que u es constante. La solución exacta para este problema es

$$\phi = \frac{e^{ux} - 1}{e^u - 1} \quad (6)$$

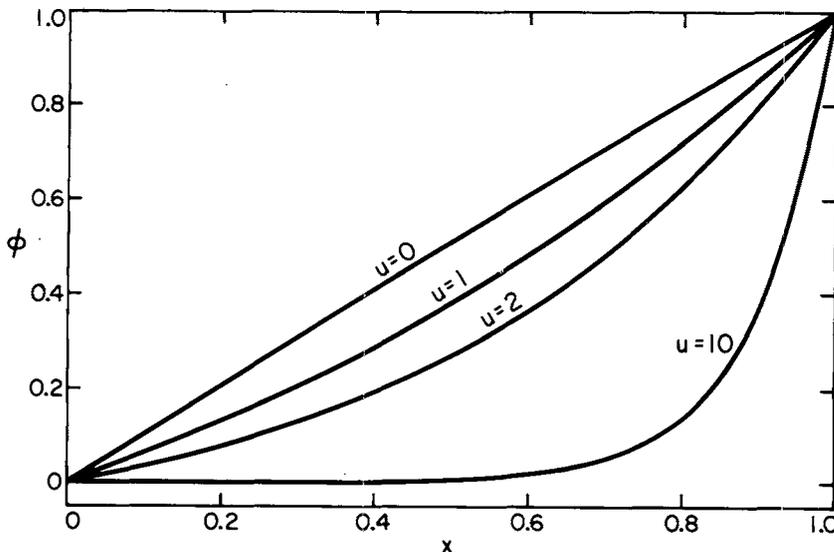


Fig. 1.— Solución de la ecuación lineal de convección y difusión para diversos valores del parámetro u .

y se ilustra en la Figura 1 para varios valores del parámetro u . Para $u \ll 1$, ϕ varía lentamente con x , mientras que para $u \gg 1$, ϕ varía rápidamente en la cercanía de $x = 1$ con un grosor de la capa límite del orden de $1/u$.

Una aproximación por serie de Taylor aplicada a la ecuación (4) nos da

$$\left(1 - u \frac{\Delta x}{2}\right) \phi_{i+1} - 2\phi_i + \left(1 + u \frac{\Delta x}{2}\right) \phi_{i-1} = 0 \quad (7)$$

donde hemos usado diferencias centrales. La cantidad adimensional $u\Delta x$ se conoce por el nombre de número de Reynolds celular, Re_c . Para $Re_c < 2$, la solución de la ecuación de diferencias (7) es una aproximación razonable a la solución de la ecuación diferencial (4). Para $Re_c > 2$, la solución de la ecuación de diferencias oscila y no es una buena aproximación a la solución de la ecuación diferencial. De aquí se desprende que el tamaño Δx de la red debe ser menor que $2/u$ para que la solución sea correcta y, por lo tanto, muy pequeño cuando u es grande.

Para resolver las ecuaciones (4) y (5) en forma numérica por medio del método integral, primero dividamos el intervalo ($0 \leq x \leq 1$) en elementos finitos. Aunque no es necesario, para simplificar supondremos que estos elementos son de un tamaño uniforme Δx . Al centro del elemento i , definamos el punto x_i de la malla donde se calculará la función $u(x_i) \equiv u_i$. Para hacer la notación más conveniente, hagamos $a = x_{i-1/2} = x_i - \Delta x/2$ y $b = x_{i+1/2} = x_i + \Delta x/2$ en cada elemento.

El paso siguiente consiste en una integración formal de la ecuación diferencial sobre cada elemento. La integral de la ecuación (4) es entonces

$$\frac{d\phi}{dx}(b) - \frac{d\phi}{dx}(a) - u\phi(b) + u\phi(a) = 0 \quad (8)$$

Para proseguir y obtener una ecuación de diferencias, debemos suponer la forma de la solución en cada elemento. Esto se puede hacer, por ejemplo, usando la serie de Taylor, aproximando por medio de polinomios simples, o usando soluciones aproximadas de la ecuación diferencial. Se espera que mientras más exacta sea la supuesta forma de la solución, mayor será la exactitud de la solución de la ecuación de diferencias.

Como una primera aproximación simple, supongamos que ϕ es lineal entre los puntos de la malla, y que por lo tanto en este intervalo $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, ϕ se puede representar por

$$\phi = a_i + b_i x \quad (9)$$

donde a_i y b_i son constantes. Estas constantes se pueden evaluar en términos de los valores de ϕ en los puntos de la malla. Se desprende que

$$a_i = \phi_i \quad (10)$$

$$b_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} \quad (11)$$

Expresiones similares se pueden obtener para estos parámetros en el intervalo $x_{i-1} \leq x \leq x_i$.

Substituyendo las ecuaciones (9) - (11) y expresiones similares para el intervalo

$x_{i-1} \leq x \leq x_i$ en la ecuación (8) de la ecuación (7) que había sido obtenida por medio de la serie de Taylor.

En la derivación previa, la suposición básica es que ϕ varía en forma lineal en el intervalo $x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1}$. Esta es una aproximación muy cruda para ϕ y, en este ejemplo, se puede encontrar una aproximación mucho mejor, es decir, una solución exacta. En este caso, la solución de la ecuación (4) en cada intervalo es

$$\phi = a_i + b_i e^{u(x-x_i)} \tag{12}$$

en que nuevamente a_i y b_i son constantes.

Por el mismo procedimiento descrito anteriormente, estas constantes se pueden evaluar, y substituyendo la ecuación (12) en la ecuación (8) nos da

$$\phi_{i+1} - (1 + e^{u\Delta x}) \phi_i + e^{u\Delta x} \phi_{i-1} = 0 \tag{13}$$

Resolviendo esta ecuación directamente en forma analítica, se puede demostrar que la ecuación es exacta, es decir, la solución de la ecuación de diferencias (13) es exactamente la misma en todos los puntos de la malla que la solución de la ecuación diferencial original (4). Cuando $\Delta x \rightarrow 0$ la ecuación (13) se reduce a la ecuación (12).

El procedimiento se puede extender directamente a la ecuación no homogénea definida por

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} - u \frac{d\phi}{dx} = f(x) \tag{14}$$

y a otras condiciones de contorno, ej., la condición general dada por

$$\frac{d\phi(0)}{dx} + h\phi(0) = 1.$$

El ejemplo anterior era relativamente simple con una solución exacta conocida. Un ejemplo más interesante es el siguiente. Consideremos el problema definido por

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + u \frac{du}{dr} = 0 \tag{15}$$

$$u(r_0) = 0, \quad u(\infty) = 1 \tag{16}$$

Estas ecuaciones describen un ejemplo modelo para el problema de Stokes-Oseen de flujo alrededor de un objeto para valores bajos del número de Reynolds. El problema se ha resuelto antes por el método de desarrollos asintóticos acoplados^{8,9}.

El carácter general de la solución de este problema es el siguiente. Cerca del cuerpo, en $r = r_0$, el término no lineal se puede despreciar y el flujo está dominado por los dos primeros términos de la ecuación (15), los términos viscosos. Una ecuación aproximada válida cerca del cuerpo es entonces

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} = 0 \tag{17}$$

y la solución general es $u = a + b \ln r$. Para valores grandes de r , lejos del cuerpo, u tiende a uno y el flujo se puede aproximar por

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \frac{du}{dr} = 0 \tag{18}$$

La solución general de esta ecuación es $u = a + b E(r)$ donde $E(r)$ es la integral exponencial definida por

$$E(r) = \int_r^{\infty} \frac{e^{-\rho}}{\rho} d\rho \quad (19)$$

Una solución numérica de este problema se puede obtener directamente usando el método de diferencias finitas usual. Aplicando la serie de Taylor a la ecuación (15) obtenemos

$$\left(1 + \frac{\Delta r}{2r_j}\right)u_{j+1} - 2u_j + \left(1 - \frac{\Delta r}{2r_j}\right)u_{j-1} + \frac{\Delta r}{2}u_j(u_{j+1} - u_{j-1}) = 0 \quad (20)$$

Hay dos dificultades con la solución numérica del presente problema usando la ecuación (20) con las condiciones de contorno especificadas por la ecuación (16). Una dificultad relativamente menor está asociada con la variación rápida de u en la cercanía del cuerpo donde $u \sim \ln r$. Debido a esto, debe usarse una red fina para obtener exactitud. La segunda dificultad es el trato adecuado de la condición de contorno lejos del cuerpo, $u(\infty) = 1$. Ambas dificultades pueden sortearse usando el presente método integral.

Integrando la ecuación (15) sobre el elemento de volumen rdr , $r_{j-1/2} \leq r \leq r_{j+1/2}$, obtenemos

$$\left(r \frac{du}{dr}\right)_{j+1/2} - \left(r \frac{du}{dr}\right)_{j-1/2} + \int_{j-1/2}^{j+1/2} r u \frac{du}{dr} dr = 0 \quad (21)$$

Una solución aproximada de la ecuación (21) válida cerca del cuerpo y para el intervalo $r_{j-1/2} \leq r \leq r_{j+1/2}$ es $u = a_j + b_j \ln r$, donde

$$a_j = \frac{u_j \ln r_{j+1} - u_{j+1} \ln r_j}{\ln r_{j+1} - \ln r_j} \quad (22)$$

$$b_j = \frac{u_{j+1} - u_j}{\ln r_{j+1} - \ln r_j} \quad (23)$$

Esta solución aproximada se puede substituir en la ecuación (21) para obtener una ecuación de diferencias mucho más exacta que la ecuación (20). Para simplificar la ecuación aún más, debemos notar que el término no lineal sólo es importante lejos del cuerpo y en esa región la solución cambia en forma suave y relativamente lenta. La simplificación consiste entonces en aproximar u en el término no lineal de la ecuación (21) por una función lineal en vez de una función logarítmica. Este procedimiento conduce a la ecuación

$$\frac{u_{j+1} - u_j}{\ln r_{j+1} - \ln r_j} - \frac{u_j - u_{j-1}}{\ln r_j - \ln r_{j-1}} + \frac{r_j}{8} [(u_{j+1} + u_j)^2 - (u_j + u_{j-1})^2] = 0 \quad (24)$$

Los dos primeros términos corresponden a los dos primeros términos de la ecuación (21) y el último término corresponde al término no-lineal. Debido a su naturaleza más exacta, esta ecuación permite el uso de mallas más gruesas para obtener la misma exactitud que usando la ecuación (20).

Para tratar la condición de borde $u(\infty) = 1$, consideremos el elemento de contorno definido por $r_{J-1/2} \leq r \leq r_J$. Integrando la ecuación (15) sobre este elemento se obtiene

$$\left(r \frac{du}{dr}\right)_J - \left(r \frac{du}{dr}\right)_{J-1/2} + \int_{J-1/2}^J r u \frac{du}{dr} dr = 0 \quad (25)$$

El segundo y tercer término en esta ecuación se pueden evaluar en la forma descrita anteriormente. Una aproximación apropiada para el primer término se puede obtener de la siguiente manera. Lejos del cuerpo, una solución aproximada de la ecuación (15) de gran exactitud; que satisface $u(\infty) = 1$ es $u = 1 + b E(r)$, donde $b = (u_J - 1)/E(r_J)$. Usando esta relación y las aproximaciones anteriores, podemos escribir la ecuación (25) como

$$-r_J(u_J - 1) - \frac{u_J - u_{J-1}}{\ln r_J - \ln r_{J-1}} + \frac{r_J}{2} \left[u_J^2 - \frac{1}{4}(u_J + u_{J-1})^2 \right] = 0 \quad (26)$$

Esta ecuación es de primer orden, contiene solamente los valores de u en r_J y r_{J-1} , y satisface la condición $u(\infty) = 1$ con exactitud. Las condiciones de contorno en el infinito generalmente se pueden tratar por este método encontrando una buena representación de la solución del problema en el campo lejano (lo que generalmente significa eliminar soluciones no deseadas, como ondas entrantes en un problema de propagación de ondas, etc.) e incorporándola a la ecuación de diferencias por medio del método integral, a un valor finito de la variable independiente.

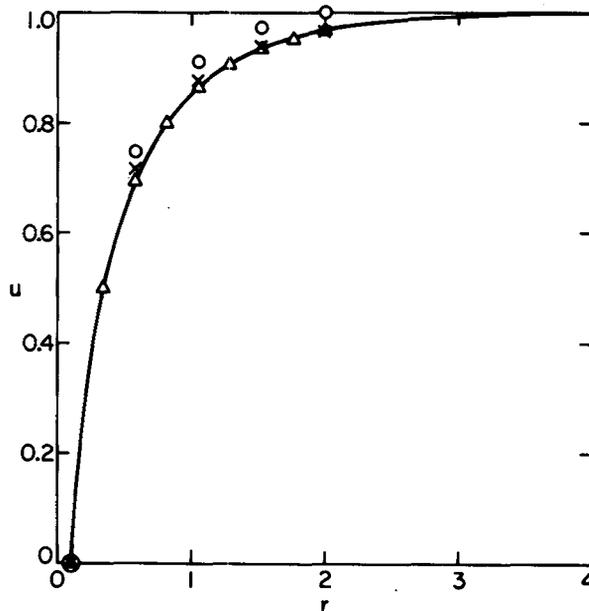


Fig. 2.— Problema modelo de Stokes-Oseen. La línea sólida es la solución obtenida de la ecuación (17) (serie de Taylor) con $\Delta r = 0.5$ y la condición de borde $u(6.0) = 1.0$. También se muestran soluciones obtenidas con de la ecuación (21) con: a) o, $\Delta r = 0.475$ y la condición de borde $u(2.0) = 1.0$; b) x, $\Delta r = 0.475$ y el uso de la ecuación (23) como condición de borde en $r = 2.0$; c) Δ , $\Delta r = 0.2375$ y el uso de la ecuación (23) como condición de borde en $r = 2.0$.

Un ejemplo específico calculado se muestra en la Figura 2. Se usaron redes relativamente crudas para mostrar claramente la diferencia entre los distintos algoritmos y aproximaciones. La línea sólida es la solución obtenida de la ecuación (20) (serie de Taylor) con $\Delta r = 0.05$ y la condición de contorno $u(6.0) = 1.0$. También se muestran los resultados obtenidos de la ecuación (21) con (a) $\Delta r = 0.475$ y la condición de contorno $u(2.0) = 1.0$, (b) $\Delta r = 0.475$ y el uso de la ecuación (26) como condición de contorno en $r = 2.0$, y (c) $\Delta r = 0.2375$ y el uso de (26) como condición de contorno en $r = 2.0$.

Se puede observar que (c), con sólo nueve puntos en la red, es tan exacta como la ecuación (20) con 119 puntos en la red, mientras (b) con sólo cinco nodos es casi tan exacta. La solución (a) no es una buena aproximación. De aquí uno puede deducir que: (a) para la misma exactitud, se pueden usar redes más gruesas con la ecuación (24) obtenida por el método integral, que usando la ecuación (20) obtenida por medio de la serie de Taylor; y (b) el tratamiento de la condición de contorno en el campo lejano usando el presente método, es directo y exacto.

Problemas de valor inicial

Como ejemplo de un problema simple de valor inicial, consideremos las ecuaciones

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 1 \quad (27)$$

$$y(0) = 1 \quad (28)$$

La solución exacta es

$$y = \frac{1}{2}(1 + e^{-2x}) \quad (29)$$

En la solución previa del problema de valores de contorno, cada punto x_i de la red estaba rodeado por un elemento tal que $x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}$. Esto conduce a una ecuación de diferencias cuya solución en el punto i depende de valores de la solución en $i+1$ e $i-1$. Esto es correcto físicamente para problemas de tipo difusión. Sin embargo, para problemas de valor inicial, la solución debería depender sólo de la función en valores menores de la variable independiente. Esto conduce a la idea de un elemento de integración tal que $x_i \leq x \leq x_{i+1}$. Con esta definición de elemento, el mismo procedimiento anterior se usa para obtener la ecuación de diferencias.

Para la ecuación (27), integrando sobre el elemento $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ obtenemos

$$y_{i+1} - y_i = \Delta x - 2 \int_i^{i+1} y \, dx \quad (30)$$

Esta ecuación produce entonces algoritmos de Euler explícitos, implícitos o modificados dependiendo de cómo se aproxima la integral.

La ecuación de diferencias exacta se puede obtener de la siguiente manera. La solución exacta de la ecuación (24) en el intervalo $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ es

$$y = 1/2 + a_i e^{-2(x-x_i)} \quad (31)$$

donde a_i está dado por $y_i - 1/2$. Substituyendo este resultado en la ecuación (30) obtenemos la ecuación de diferencias exacta dada por

$$y_{i+1} - e^{-2\Delta x} y_i = 1/2 (1 - e^{-2\Delta x}) \quad (32)$$

Esta ecuación se reduce a la aproximación usual por serie de Taylor cuando $\Delta x \rightarrow 0$.

Este problema es bastante simple pero sirvió para ilustrar la aplicación del método integral a problemas de valor inicial. Un problema más desafiante, que es generalmente difícil de tratar por los métodos standard de diferencias finitas, es un problema de dos tiempos, i.e., un problema en que hay dos escalas de distancia o tiempo muy diferentes inherentes al problema. Para ilustrar la solución de este tipo de problemas usando este método integral, consideremos el problema de un oscilador lineal con amortiguación pequeña definido por

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\epsilon \frac{dy}{dt} + y = 0 \quad (33)$$

$$y(0) = 0, \quad \frac{dy}{dt}(0) = 1 \quad (34)$$

donde $0 < \epsilon \ll 1$. La solución exacta a este problema está dada por

$$y = \frac{e^{-\epsilon t}}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \sin \sqrt{1-\epsilon^2} t \quad (35)$$

y consiste en oscilaciones amortiguadas cuyo período es aproximadamente 2π y cuyo tiempo de disminución es aproximadamente $1/\epsilon$.

El método de la serie de Taylor aplicado a la ecuación (33) da la ecuación de diferencias finitas

$$y_{n+1} + (-2 + 2\epsilon\Delta t + \Delta t^2)y_n + (1 - 2\epsilon\Delta t)y_{n-1} = 0 \quad (36)$$

Para exactitud, la solución numérica de esta ecuación requiere intervalos de tiempo pequeños en comparación con el período de las oscilaciones, i.e., Δt debe ser del orden de 0.5 o menos. Para describir la disminución en la amplitud de la oscilación (que ocurre en un tiempo $O(1/\epsilon)$), el número de intervalos de tiempo debe ser mucho mayor que $1/\epsilon$. Después de esta cantidad de intervalos de tiempo, la exactitud de la solución numérica generalmente no es buena debido a la acumulación de errores. Esto es típico de problemas de dos tiempos en que se presentan dos escalas desiguales de distancia o de tiempo.

Aquí discutiremos diversas ecuaciones de diferencias que permiten utilizar intervalos de tiempo más grandes para obtener la misma exactitud. Para obtener estas ecuaciones, es conveniente reemplazar la ecuación (33) por las dos ecuaciones

$$\frac{dy}{dt} - f = 0 \quad (37)$$

$$\frac{df}{dt} + 2\epsilon \frac{dy}{dt} + y = 0 \quad (38)$$

La primera ecuación de diferencias majorada se deriva de una solución aproximada de la ecuación (33) obtenida despreciando ϵ , i.e., un método de perturbación regular. Esta solución aproximada está dada por

$$y = a \cos t + b \sin t \quad (39)$$

y $f(=dy/dt)$ se puede encontrar diferenciado. Las constantes a y b se pueden determinar en términos de los valores de y y f al principio del intervalo. Substituyendo esta solución en las formas integradas de las ecuaciones (37) y (38) se obtiene

$$y_{n+1} = y_n \cos \Delta t + f_n \sin \Delta t \quad (40)$$

$$f_{n+1} = -2\epsilon y_{n+1} + f_n \cos \Delta t - (\sin \Delta t - 2\epsilon)y_n \quad (41)$$

Una solución más aproximada de la ecuación (33) que tiene validez uniforme y que toma en cuenta el decrecimiento exponencial se puede obtener usando un desarrollo de dos variables y es

$$y = ae^{-\epsilon t} \cos t + b e^{-\epsilon t} \sin t \quad (42)$$

Las ecuaciones de diferencias correspondientes obtenidas por el mismo procedimiento anterior son.

$$y_{n+1} = e^{-\epsilon \Delta t} (\cos \Delta t + \epsilon \sin \Delta t) y_n + e^{-\epsilon \Delta t} \sin \Delta t f_n \quad (43)$$

$$f_{n+1} = \left[\frac{\epsilon^2}{1+\epsilon^2} + \frac{e^{-\epsilon \Delta t}}{1+\epsilon^2} (\cos \Delta t + \epsilon \sin \Delta t) \right] f_n - 2\epsilon y_{n+1} \\ + \left[\frac{2\epsilon^3}{1+\epsilon^2} - \frac{e^{-\epsilon \Delta t}}{1+\epsilon^2} \left\{ (1-\epsilon^2) \sin \Delta t - 2\epsilon \cos \Delta t \right\} \right] y_n \quad (44)$$

La solución exacta de la ecuación (33) es

$$y = e^{-\epsilon t} \left[a \cos \sqrt{1-\epsilon^2} t + b \sin \sqrt{1-\epsilon^2} t \right] \quad (45)$$

y conduce a las ecuaciones de diferencias exactas

$$y_{n+1} = e^{-\epsilon \Delta t} \left[\cos \Delta \tau + \frac{\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \sin \Delta \tau \right] y_n \\ + \frac{e^{-\epsilon \Delta t}}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \sin \Delta \tau f_n \quad (46)$$

$$f_{n+1} = e^{-\epsilon \Delta t} \left[\cos \Delta \tau + \frac{\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \sin \Delta \tau \right] f_n - 2\epsilon y_{n+1} \\ + e^{-\epsilon \Delta t} \left[2\epsilon \cos \Delta \tau - \frac{(1-2\epsilon^2)}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \sin \Delta \tau \right] y_n \quad (47)$$

donde $\Delta\tau = \sqrt{1 - \epsilon^2} \Delta t$.

La solución exacta de las ecuaciones (33) y (34) con $\epsilon = 0.01$ se muestra en la Figura 3 para $0 \leq t \leq 200$. Soluciones numéricas usando las ecuaciones de diferencias correspondientes a las ecuaciones (39) y (42) también han sido calculadas. Se puede demostrar que la ecuación (39) tiene suficiente exactitud sólo si $\Delta t \leq \pi/2$, lo que representa una mejora sobre la serie de Taylor, pero no demasiado excitante. Por otro lado, la ecuación (42) es adecuada para $\Delta t = 96$, lo que representa una mejora sobre la serie de Taylor en un factor de 200. Un gráfico de la solución usando la ecuación (42) con $\Delta t = 96$ no se puede distinguir de la solución exacta que se muestra en la Figura 3. La ecuación (45) es, por supuesto, exacta y se puede usar con valores arbitrarios de Δt .

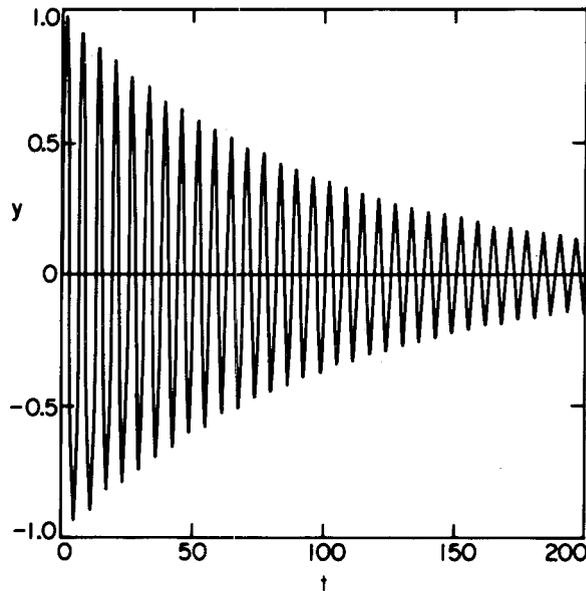


Fig. 3.— Solución exacta para el oscilador lineal con amortiguación pequeña para $\epsilon = 0.01$.

ECUACIONES ELIPTICAS

Las ecuaciones en derivadas parciales elípticas generalmente describen el estado límite estacionario de problemas en que la parte que depende del tiempo está descrita por ecuaciones diferenciales parabólicas o hiperbólicas. También pueden describir problemas en que la dependencia del tiempo toma una forma supuesta, tal como sinusoidal en el tiempo.

Un ejemplo del último caso es la ecuación de Helmholtz dada por

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + m^2 \phi = 0 \tag{48}$$

en la que m es una frecuencia adimensional y constante. Esta ecuación describe, por ejemplo, las oscilaciones sinusoidales de la superficie del agua en un puerto. Si m^2 es cero, tenemos la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \tag{49}$$

que describe fenómenos de transmisión de calor en estado estacionario, de electrostática y de mecánica de fluidos.

Para formular el problema por medio del método integral, usaremos un procedimiento similar al usado en el caso de problemas unidimensionales. Primero, dividamos la región sobre la cual la función está definida en elementos finitos. Supondremos, para simplicidad, que los elementos son rectangulares. Los elementos no necesitan ser cuadrados. Segundo, en el centro de cada elemento, definamos el punto x_i, y_j de la malla donde se calculará la función $\phi_{i,j}$ (véase la Figura 4). Los puntos en las esquinas del elemento de volumen correspondiente a la función $\phi_{i,j}$ se denotarán por ABCD.

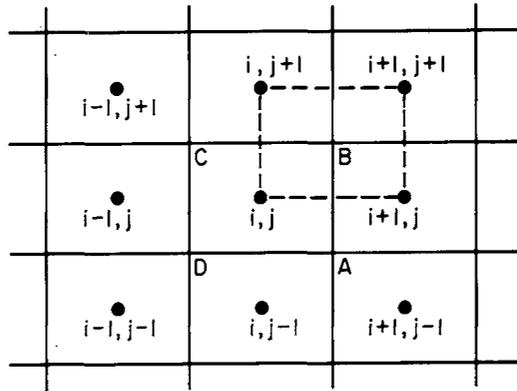


Fig. 4.— Malla numérica y elementos rectangulares para ecuaciones elípticas.

La ecuación básica se integra ahora sobre cada elemento. Para evaluar las cantidades que aparecen en esta integración, debemos determinar una solución local aproximada de la ecuación. Esta solución aproximada deberá determinarse en cada elemento de la malla definido por los puntos de la malla, ej., el elemento definido por (i,j) , $(i+1,j)$, $(i+1,j+1)$, $(i,j+1)$; la solución se determina en función de valores de ϕ en los puntos de la malla. Este procedimiento conduce a las ecuaciones de diferencias apropiadas.

Un método simple

Una formulación simplificada del método integral para la ecuación de Helmholtz es la siguiente. Primero, integramos la ecuación de Helmholtz formalmente sobre el elemento ABCD lo que da

$$\int_{i-1/2}^{i+1/2} \int_{j-1/2}^{j+1/2} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + m^2 \phi \right] dx dy = 0 \quad (50)$$

El último término en esta integral (la integral de ϕ) se puede aproximar suponiendo que ϕ es constante en el elemento e igual a su valor en el centro del elemento, i.e.,

$$m^2 \iint \phi dx dy = m^2 \phi_{ij} \Delta x \Delta y \quad (51)$$

Para los dos primeros términos de la ecuación (50), el teorema de Green nos permite escribir

$$\iint \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right] dx dy = \int \frac{\partial \phi}{\partial n} d\sigma \quad (52)$$

en que $\partial\phi/\partial n$ es la derivada de ϕ en la dirección de la normal exterior n y la integración es en el sentido positivo.

El lado derecho de la ecuación (52) es sólo el flujo debido a difusión entre dos celdas adyacentes. Se puede aproximar suponiendo que el flujo es igual a la diferencia en los valores de ϕ en cada celda, dividido por la distancia entre los puntos de la malla. Esto es equivalente a aproximar las derivadas por medio de diferencias centrales que luego se suponen constantes a lo largo de cada cara. El resultado es

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_{AB} d\sigma = \frac{[\phi_{i+1,j} - \phi_{ij}]}{\Delta x} \Delta y \tag{53}$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_{BC} d\sigma = \frac{[\phi_{i,j+1} - \phi_{ij}]}{\Delta y} \Delta x \tag{54}$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_{CD} d\sigma = \frac{[\phi_{i-1,j} - \phi_{ij}]}{\Delta y} \Delta y \tag{55}$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_{DA} d\sigma = \frac{[\phi_{i,j-1} - \phi_{ij}]}{\Delta x} \Delta x \tag{56}$$

Combinando las ecuaciones (50) a (56), encontramos que

$$(\phi_{i+1,j} - 2\phi_{ij} + \phi_{i-1,j})\frac{\Delta y}{\Delta x} + (\phi_{i,j+1} - 2\phi_{ij} + \phi_{i,j-1})\frac{\Delta x}{\Delta y} + m^2 \phi_{ij} \Delta x \Delta y = 0$$

Si $\Delta x = \Delta y$,

$$(4 - m^2 \Delta x^2)\phi_{ij} = \phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} \tag{57}$$

Estos son los mismos resultados que se obtienen por medio de la serie de Taylor.

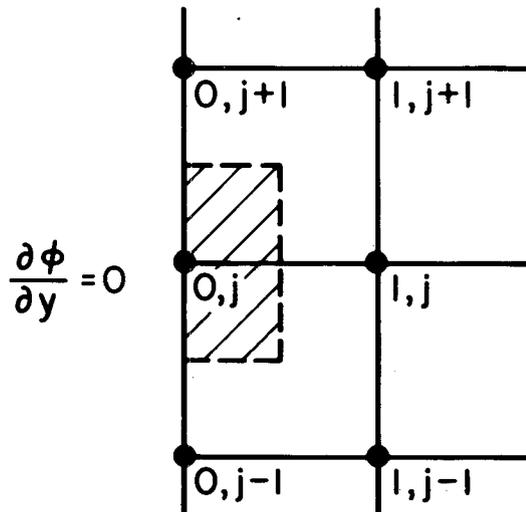


Fig. 5.— Elementos de borde en $x = 0$.

El método integral conduce a una manera natural de incluir las condiciones de contorno. Como ejemplo, consideremos la condición $\partial\phi/\partial y = 0$ en $x = 0$. La integración de la ecuación (48) sobre el elemento de contorno que se muestra en la Figura 5 definido por $(0 \leq x \leq x_{1/2}, y_{j-1/2} \leq y \leq y_{j+1/2})$ da la relación

$$(2 - 1/2 m^2 \Delta x^2) \phi_{0,j} = \phi_{1,j} + 1/2 (\phi_{0,j+1} + \phi_{0,j-1}) \quad (58)$$

Esta ecuación se usa entonces junto con las ecuaciones anteriores representadas por la ecuación (57) y con otras ecuaciones para el resto de las condiciones de contorno.

Un algoritmo más exacto

Algoritmos más exactos que aquellos obtenidos con el procedimiento anterior se pueden derivar suponiendo una forma más realista de la función ϕ . Un ejemplo simple es el siguiente:

Para cada elemento de la malla $(x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}, y_{j-1/2} \leq y \leq y_{j+1/2})$, la solución más simple definida por los puntos en las esquinas del elemento es

$$\phi = a + bx + cy + dxy \quad (59)$$

Las constantes a, b, c, d se pueden determinar de los valores de ϕ en los puntos de la malla. El resultado es

$$a = \phi_{ij}, \quad b = \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{ij}}{\Delta x}, \quad c = \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{ij}}{\Delta y},$$

$$d = \frac{1}{\Delta x \Delta y} [\phi_{ij} + \phi_{i+1,j+1} - \phi_{i+1,j} - \phi_{i,j+1}]$$

En esta aproximación

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = b + dy = f(y) \text{ solamente} \quad (60)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = c + dx = g(x) \text{ solamente} \quad (61)$$

Una vez que se ha supuesto la forma de la solución a la ecuación (59), se pueden realizar las integraciones indicadas en la ecuación (50). El resultado es el siguiente

$$\int_0^{\Delta x/2} \int_0^{\Delta y/2} \phi dx dy = \frac{\Delta x \Delta y}{4} \left[a + \frac{b}{4} \Delta x + \frac{c}{4} \Delta y + \frac{d}{16} \Delta x \Delta y \right]$$

$$= \frac{\Delta x \Delta y}{4} \left[\frac{9}{16} \phi_{ij} + \frac{3}{16} \phi_{i+1,j} + \frac{3}{16} \phi_{i,j+1} + \frac{1}{16} \phi_{i+1,j+1} \right] \quad (62)$$

La integral sobre el elemento completo es entonces

$$\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} \phi dx dy = \frac{\Delta x \Delta y}{4} \left[\frac{9}{4} \phi_{ij} + \frac{3}{8} \phi_{i+1,j} + \frac{3}{8} \phi_{i,j+1} + \frac{3}{8} \phi_{i-1,j} + \frac{3}{8} \phi_{i,j-1} + \frac{1}{16} (\phi_{i+1,j+1} + \phi_{i-1,j+1} + \phi_{i+1,j-1} + \phi_{i-1,j-1}) \right] \quad (63)$$

La integración de $\int (\partial\phi/\partial n) d\sigma$ a lo largo del lado AB da

$$\int_0^{\Delta y/2} \frac{\partial\phi}{\partial x} dy = \frac{b}{2} \Delta y + \frac{d}{8} \Delta y^2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} \left[\frac{3}{8} (\phi_{i+1,j} - \phi_{ij}) + \frac{1}{8} (\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i,j+1}) \right] \quad (64)$$

La integración de $\int (\partial\phi/\partial n) d\sigma$ alrededor del elemento entero nos da

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial\phi}{\partial n} d\sigma &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \left[\frac{3}{4} (\phi_{i+1,j} - 2\phi_{ij} + \phi_{i-1,j}) \right. \\ &+ \frac{1}{8} (\phi_{i+1,j+1} - 2\phi_{i,j+1} + \phi_{i-1,j+1}) + \frac{1}{8} (\phi_{i+1,j-1} - 2\phi_{i,j-1} + \phi_{i-1,j-1}) \\ &+ \frac{\Delta x}{\Delta y} \left[\frac{3}{4} (\phi_{i,j+1} - 2\phi_{ij} + \phi_{i,j-1}) + \frac{1}{8} (\phi_{i+1,j+1} - 2\phi_{i+1,j} + \phi_{i+1,j-1}) \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{8} (\phi_{i-1,j+1} - 2\phi_{i-1,j} + \phi_{i-1,j-1}) \right] \right] \quad (65) \end{aligned}$$

Combinando estas ecuaciones y simplificando para $\Delta x = \Delta y$ da

$$\begin{aligned} \left(3 - \frac{9}{16} m^2 \Delta x^2 \right) \phi_{ij} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{32} m^2 \Delta x^2 \right) [\phi_{i+1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j-1}] \\ &+ \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{64} m^2 \Delta x^2 \right) [\phi_{i+1,j+1} + \phi_{i-1,j+1} + \phi_{i+1,j-1} + \phi_{i-1,j-1}] \quad (66) \end{aligned}$$

Como una condición de borde típica, de nuevo consideremos $\partial\phi/\partial y = 0$ en $x = 0$. Integrando la ecuación (50) sobre un elemento del borde como se muestra en la Figura 5 nos da ahora

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2} - \frac{9}{32} m^2 \Delta x^2 \right) \phi_{0,j} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{32} m^2 \Delta x^2 \right) \phi_{1,j} + \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{64} m^2 \Delta x^2 \right) (\phi_{0,j-1} + \phi_{0,j+1}) \\ &+ \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{64} m^2 \Delta x^2 \right) (\phi_{1,j+1} + \phi_{1,j-1}) \quad (67) \end{aligned}$$

En muchos problemas de conducción de calor, difusión en aguas subterráneas, y física de reactores, las propiedades del medio pueden cambiar de forma discontinua, ej., en el límite entre dos materiales distintos. Esto conduce a la aparición de coeficientes que son continuos a intervalos en las ecuaciones que gobiernan el fenómeno. Este tipo de problemas se puede tratar directamente por medio del método integral, de hecho, fue la motivación en el desarrollo original del método^{1,2}.

El procedimiento se puede extender de inmediato para incluir la versión no homogénea de la ecuación de Helmholtz y a otras ecuaciones elípticas. Por otra parte, pueden utilizarse elementos rectangulares de tamaños variables, así como elementos triangulares¹⁰.

ECUACIONES PARABOLICAS

En esta sección, el método integral se aplica a la ecuación de calor en una dimensión con dependencia del tiempo, como un ejemplo representativo de una ecuación en derivadas parciales parabólica¹¹. La ecuación de calor está dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{68}$$

en que u es la temperatura y α es la difusividad térmica constante.

Para formar una ecuación en diferencias, primero discretizaremos el dominio x,t . Aunque no es necesario, supondremos que la distancia Δx entre puntos de la red en la dirección x es uniforme y que el intervalo de tiempo Δt es uniforme. El subíndice i denota valores de una cantidad en el punto x_i el índice n denota valores en el tiempo t^n .

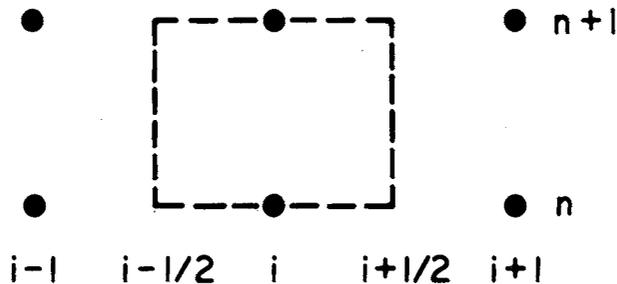


Fig. 6.— Red numérica y elementos de volumen para la ecuación de calor unidimensional con dependencia de tiempo.

Como la conducción de calor con dependencia del tiempo es un problema de valores de contorno en el espacio y un problema de valor inicial en el tiempo, necesitaremos un elemento de volumen como el que se muestra en la Figura 6 donde $x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}$ y $t^n \leq t \leq t^{n+1}$, en contraste con el elemento de volumen para ecuaciones elípticas que se muestra en la Figura 4. La integral de (68) sobre este elemento nos da

$$\int_{i-1/2}^{i+1/2} [u^{n+1} - u^n] dx = \alpha \int_n^{n+1} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i+1/2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i-1/2} \right] dt \tag{69}$$

Como en la sección anterior, el siguiente paso en este procedimiento es aproximar analíticamente lo mejor posible la solución de la ecuación diferencial sobre un pequeño intervalo. Como una primera aproximación cruda a los términos en el primer miembro de la ecuación, se puede suponer que u es independiente de x en cada elemento. Los términos en el segundo miembro representan el flujo de calor a través de las superficies $x_{i+1/2}$ y $x_{i-1/2}$ en el intervalo de tiempo de n a $n+1$. Estos términos se pueden aproximar de forma simple suponiendo que los flujos de calor son proporcionales a las diferencias de temperatura entre las celdas en el tiempo n .

Con estas aproximaciones, la ecuación (68) se convierte en

$$u_i^{n+1} = (1 - 2\omega) u_i^n + \omega(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) \quad (70)$$

donde $\omega = \alpha\Delta t/\Delta x^2$. Esta es la forma central en el espacio y hacia adelante en el tiempo (FTCS), algoritmo standard que se obtiene generalmente usando la serie de Taylor. De su construcción, se deduce que las hipótesis implican un flujo de calor que es independiente del tiempo durante un intervalo de tiempo Δt . Cuando se aumenta el intervalo de tiempo, el calor continúa abandonando el elemento, hasta que para intervalos de tiempo suficientemente grandes ($\omega > 1/2$), la temperatura del elemento puede hacerse negativa. Esta condición generalmente conduce a inestabilidades numéricas.

Algoritmos explícitos estables

Para obtener ecuaciones de diferencias mejoradas para la ecuación (68), debemos aproximar mejor los términos de la ecuación (69). Una aplicación simple de estas ideas conduce a ecuaciones de diferencias estables para todo ω , y es la siguiente. Consideremos la ecuación (69) y, como antes, supongamos que u es independiente de x en cada elemento. El primer miembro queda entonces determinado como antes. Para aproximar el segundo miembro, supongamos que el flujo de calor es proporcional a la diferencia de temperatura entre las celdas como en la derivación de FTCS, pero también supongamos que las temperaturas son funciones del tiempo, o sea

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i+1/2} = \frac{1}{\Delta x} [u_{i+1}(t) - u_i(t)] \quad (71)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i-1/2} = \frac{1}{\Delta x} [u_i(t) - u_{i-1}(t)] \quad (72)$$

En general, esto conducirá a un conjunto acoplado de ecuaciones diferenciales ordinarias para las variables u_i , conocido como el método de líneas¹². Para obtener ecuaciones independientes y algoritmos simples, explícitos, se pueden hacer diversas aproximaciones para desacoplar estas ecuaciones.

Consideremos primero un caso simple en que $u_i^n \neq 0$ pero $u_{i\pm 1}^n = 0$ y supongamos que el flujo de calor desde la celda i es proporcional a la temperatura en esa celda. Se deduce que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i+1/2} = -\frac{u_i(t)}{\Delta x} \quad (73)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i-1/2} = \frac{u_i(t)}{\Delta x} \quad (74)$$

Con estas suposiciones, la ecuación (69) se convierte en

$$[u_i^{n+1} - u_i^n] \Delta x = -\frac{2\alpha}{\Delta x} \int_n^{n+1} u_i(t) dt \quad (75)$$

El tamaño del intervalo de tiempo Δt es por supuesto arbitrario y u_i^{n+1} se puede interpretar como $u_i(t^n + \Delta t)$, donde t^n es el tiempo al comienzo del intervalo y Δt es el incremento de tiempo. Con esta interpretación, y diferenciando con respecto a $\tau \equiv \Delta t$, se obtiene

$$\frac{\partial u_i}{\partial \tau} = -\frac{2\alpha}{\Delta x^2} u_i \quad (76)$$

Inmediatamente se ve que la solución es

$$u_i^{n+1} = \delta u_i^n \quad (77)$$

donde $\delta = \exp(-2\alpha \Delta t / \Delta x^2)$.

Si suponemos que todo el calor que abandona la celda i se va a las dos celdas adyacentes y no más allá, el aumento en la temperatura en esas dos celdas está dado por

$$u_{i\pm 1}^{n+1} = \left(\frac{1-\delta}{2}\right) u_i^n \quad (78)$$

Para el caso general en que $u_{i\pm 1}^n \neq 0$, podemos aplicar consideraciones similares. El efecto en la temperatura de la celda i debido a $u_{i\pm 1}^n$ está dado por la fórmula (78) con el cambio pertinente en los índices, así

$$u_i^{n+1} = \left(\frac{1-\delta}{2}\right)(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) \quad (79)$$

El efecto resultante en la temperatura de la celda i debido a temperaturas distintas de cero en las celdas i e $i\pm 1$ en el tiempo n está dado por la suma de las ecuaciones (77) y (79), o

$$u_i^{n+1} = \delta u_i^n + \left(\frac{1-\delta}{2}\right)(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) \quad (80)$$

y es el algoritmo de cuatro puntos apropiado para la ecuación (68). Nótese que este algoritmo tiene la misma forma que el algoritmo FTCS, ecuación (70), y difiere de él sólo en el valor de los coeficientes. Por lo tanto, ambos algoritmos requieren el mismo número de evaluaciones por intervalo de tiempo. En el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$ y $\Delta x \rightarrow 0$ de modo que $\omega = \alpha \Delta t / \Delta x^2 \rightarrow 0$, δ aproxima $1 - 2\alpha \Delta t / \Delta x^2$ y la ecuación (80) se reduce a la ecuación (70) y es consistente con la ecuación (68). En el otro límite cuando $\Delta t \rightarrow \infty$ con Δx fijo (o $\omega \rightarrow \infty$), $\delta \rightarrow 0$ y

$$u_i^{n+1} = 1/2 (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) \quad (81)$$

La estabilidad de la ecuación (80) se puede investigar por el método de análisis de von Neumann. Se puede demostrar de inmediato que la ecuación (80) es estable

para $\delta \leq 1$. Esto es cierto para todo valor de ω , aunque la exactitud de la fórmula decrece para $\omega > 1/2$ como se ilustra con un simple cálculo más adelante.
un simple cálculo más adelante.

La fórmula de cuatro puntos (80) se obtuvo permitiendo transferencia de calor de la celda i a las celdas $i \pm 1$ pero no más allá. La exactitud de esta fórmula se deteriora para intervalos de tiempo grandes porque numéricamente al calor no se le permite avanzar por difusión tan rápidamente como debería basándose en consideraciones físicas. Fórmulas más exactas para intervalos de tiempo grandes se pueden derivar permitiendo que el calor se transmita más lejos en cada intervalo de tiempo. De esta forma se han derivado algoritmos de seis, ocho y diez puntos que por razones de brevedad no se presentarán aquí. El procedimiento se puede extender a un número arbitrario de puntos.

Para verificar este procedimiento, presentamos un cálculo. La ecuación gobernante sobre el intervalo $0 \leq x \leq 1$ es la ecuación (68) con las condiciones de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 \tag{82}$$

Se eligió una red espacial $\Delta x = 0.1$ ($i = 0$ a 10) y la condición inicial se especificó como $u_5 = 1$ y $u_i = 0$ para $i \neq 5$. Los algoritmos utilizados en los cálculos fueron FTCS y los algoritmos de cuatro puntos, seis puntos, ocho puntos y diez puntos obtenidos por medio del método integral.

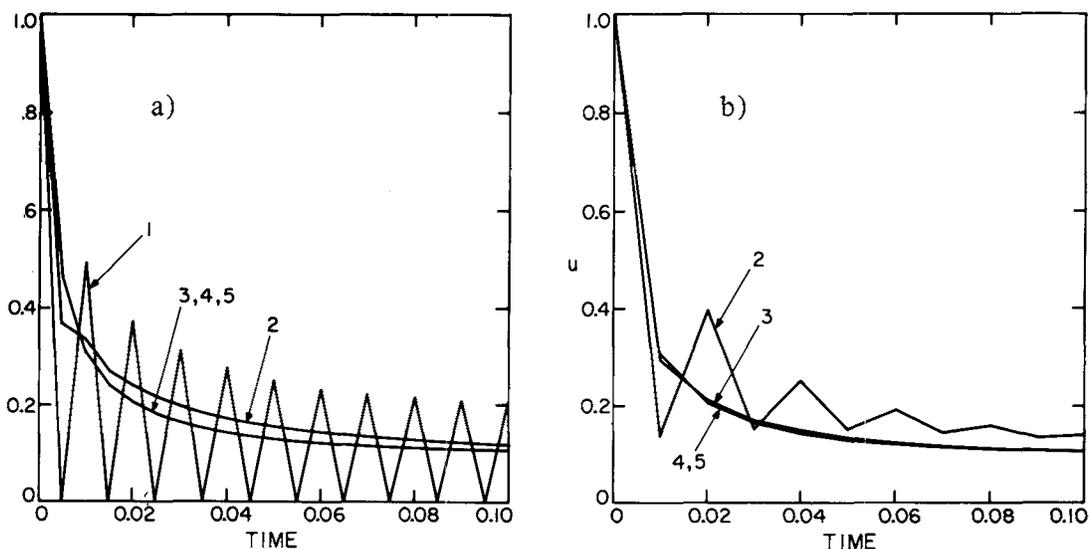


Fig. 7.— Temperatura en el centro como función del tiempo. (1) FTCS; (2) Algoritmo de cuatro puntos, ecuación (13); (3) Algoritmo de seis puntos; (4) Algoritmo de ocho puntos; (5) Algoritmo de diez puntos. (a) $\omega = 0.5$, (b) $\omega = 1.0$.

De los cálculos se deducen los siguientes resultados. (a) Para $\omega < 0.5$, los algoritmos de seis, ocho y diez puntos son extremadamente exactos, el algoritmo de cuatro puntos es menos exacto para tiempos más grandes, mientras el algoritmo FTCS es el que tiene menos exactitud. (b) Para $\omega = 0.5$ (véase la Figura 7a), FTCS es marginalmente estable, es oscilatorio, y la solución no es buena. El algoritmo de cuatro puntos está comenzando a oscilar pero todavía es adecuado, aunque la solución es un poco mayor que

el valor correcto. Los otros algoritmos dan resultados correctos. (c) Para $\omega = 1.0$ (véase la Figura 7b), FTCS es inestable y no se muestra. El algoritmo de cuatro puntos da una solución estable pero oscilatoria y no es una buena solución. Los otros algoritmos dan resultados exactos. (d) Para $\omega = 2.0$, el algoritmo de cuatro puntos nuevamente da una solución que es estable, oscilatoria, y no es buena. El algoritmo de seis puntos da una solución estable pero que comienza a oscilar y no es muy exacta. Los otros algoritmos dan soluciones exactas. (e) Para $\omega = 5.0$, los algoritmos de cuatro, seis y ocho puntos dan soluciones que son estables, oscilatorias y sin exactitud. El algoritmo de diez puntos da una solución que es estable, recién comenzando a oscilar, pero que todavía es razonablemente exacta.

Algoritmos implícitos

Usando el método integral, también se pueden derivar algoritmos implícitos. En vez de resolver un problema de valor inicial para deducir los coeficientes apropiados en la ecuación de diferencias como se hizo en la sección previa, la forma de la solución se puede suponer de tal forma que dependa de los valores de la función tanto en el tiempo $n+1$ como en el tiempo n . Esto produce un algoritmo implícito en vez de explícito.

Varios algoritmos de este tipo han sido derivados por Lick¹¹ y esta referencia debe consultarse para detalles. Los algoritmos derivados son estables para todo ω y son de la misma forma que el algoritmo usual de Crank-Nicolson pero son más exactos, especialmente para valores grandes de ω . Para todo ω , generalmente los algoritmos implícitos son algo más exactos que los algoritmos explícitos dados por la ecuación (80). Por supuesto, la desventaja de los algoritmos implícitos es que para cada intervalo de tiempo necesitamos resolver un sistema de ecuaciones lineales simultáneas.

ECUACIONES HIPERBOLICAS

Para ondas linealizadas en un fluido compresible isentrópico, las ecuaciones de continuidad y momento no-dimensionales se pueden escribir como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (83)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (84)$$

en que u es la velocidad y ρ la perturbación en la densidad.

Estas ecuaciones se pueden combinar en una sola ecuación gobernante que es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (85)$$

o en una ecuación similar para ρ . Esta ecuación se conoce como la ecuación lineal de onda.

La solución general de esta ecuación se puede escribir como

$$u = f(x-t) + g(x+t) \quad (86)$$

donde f y g son funciones arbitrarias. Esta solución describe la superposición de dos ondas: una propagándose desde la derecha con velocidad $c = 1$ y sin cambiar su forma, $u = f(x-t)$; y otra propagándose desde la izquierda con velocidad $c = 1$ y sin cambiar su forma, $u = g(x+t)$.

En forma similar, la solución general para ρ se puede escribir como

$$\rho = F(x-t) + G(x+t) \tag{87}$$

donde F y G son funciones arbitrarias. Las funciones en las ecuaciones (86) y (87) se relacionan a través de las ecuaciones (83) y (84). Por medio de estas ecuaciones, se puede demostrar que $f = F$ y $g = -G$ y por lo tanto la solución general para ρ puede escribirse como

$$\rho = f(x-t) - g(x+t) \tag{88}$$

Para referencia más adelante, la suma y resta de las ecuaciones (86) y (87) da

$$f = 1/2 (u + \rho) \tag{89}$$

$$g = 1/2 (u - \rho) \tag{90}$$

Un método simple

Ahora derivaremos algoritmos numéricos para describir la propagación lineal de ondas usando el método integral. En vez de trabajar con la ecuación (85), es mejor trabajar directamente con las ecuaciones (83) y (84) porque estas últimas están escritas en forma conservativa. Considérese primero la ecuación (83). La integración de esta ecuación sobre el mismo volumen de control utilizado para la ecuación de calor (véase la Figura 6) da

$$\int_{i-1/2}^{i+1/2} [\rho^{n+1} - \rho^n] dx + \int_n^{n+1} [u_{i+1/2} - u_{i-1/2}] dt = 0 \tag{91}$$

que es por supuesto, exacta.

Supongamos ahora que ρ y u para los tiempos n y $n+1$ son independientes de x en el intervalo, $x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}$. La primera integral de la ecuación (91) se puede evaluar como

$$\int_{i-1/2}^{i+1/2} [\rho^{n+1} - \rho^n] dx = [\rho_i^{n+1} - \rho_i^n] \Delta x \tag{92}$$

Para evaluar la segunda integral en la ecuación (91) nótese que

$$u_{i+1/2} = f_{i+1/2} + g_{i+1/2} \tag{93}$$

Más aún, como $f = f(x-t)$ y $g = g(x+t)$, se deduce que $f_{i+1/2}(t) = f_i^n$ y $g_{i+1/2}(t) = g_{i+1}^m$. Entonces pueden hacerse las siguientes substituciones.

$$\int_n^{n+1} u_{i+1/2} dt = \int_n^{n+1} [f_{i+1/2} + g_{i+1/2}] dt$$

$$\begin{aligned}
 &= f_i^n \Delta t + g_{i+1}^n \Delta t \\
 &= \frac{\Delta t}{2} [u_i^n + \rho_i^n + u_{i+1}^n - \rho_{i+1}^n] \quad (94)
 \end{aligned}$$

donde hemos utilizado las ecuaciones (89) y (90) para obtener la última relación. De forma similar, se deduce que

$$\int_n^{n+1} u_{i-1/2} dt = \frac{\Delta t}{2} [u_{i-1}^n + \rho_{i-1}^n + u_i^n - \rho_i^n] \quad (95)$$

Substituyendo las ecuaciones (92), (94) y (95) en la ecuación (91), se obtiene

$$\rho_i^{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \rho_i^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\rho_{i+1}^n + \rho_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \quad (96)$$

Para la ecuación (89), el mismo procedimiento da

$$u_i^{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) u_i^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\rho_{i+1}^n - \rho_{i-1}^n) \quad (97)$$

Estas ecuaciones son las ecuaciones de diferencias que gobiernan en el interior y son equivalentes a las derivadas por Gudonov¹³. El método integral también nos permite tratar las condiciones de contorno directamente. Consideremos primero la condición simple de que en el contorno derecho existe una superficie perfectamente reflectante y ahí $u = 0$. Construyamos un elemento de contorno como se muestra en la Figura 8 de modo que el borde está en $x_{I+1/2}$. Integrando la ecuación (83) sobre este elemento da

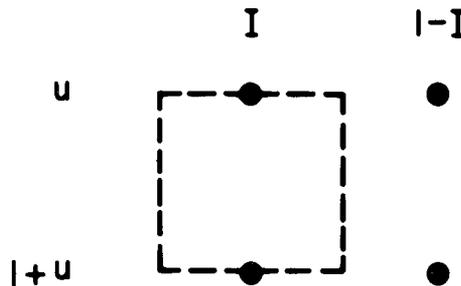


Fig. 8.—Elemento de borde para la ecuación de onda con borde en $x_{I+1/2}$.

$$(\rho_I^{n+1} - \rho_I^n) \Delta x + \int_n^{n+1} [u_{I+1/2} - u_{I-1/2}] dt = 0 \quad (98)$$

Pero $u_{I+1/2} = 0$ por definición, y

$$\begin{aligned}
 u_{I-1/2} &= f_{I-1/2} + g_{I-1/2} = f_{I-1}^n + g_I^n \\
 &= 1/2 (u_{I-1}^n + \rho_{I-1}^n) + 1/2 (u_i^n - \rho_i^n) \quad (99)
 \end{aligned}$$

La ecuación (98) se transforma en

$$\rho_I^{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\right)\rho_I^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_I^n + u_{I-1}^n + \rho_{I-1}^n) \quad (100)$$

De forma similar, integrando la ecuación (84) sobre el elemento de contorno da

$$u_I^{n+1} = \left(1 - \frac{3\Delta t}{2\Delta x}\right)u_I^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{I-1}^n - \rho_I^n + \rho_{I-1}^n) \quad (101)$$

Un contorno más interesante es un contorno abierto donde se supone que las ondas se propagan fuera de la región pero que ninguna perturbación se puede propagar hacia el interior de la región desde la derecha. Que no hay propagación de ondas hacia la izquierda del borde simplemente significa que $g_{I+1/2} = 0$. Con esta condición, la integral de la ecuación (83) sobre un elemento de borde da

$$\rho_I^{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\rho_I^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{I-1}^n + \rho_{I-1}^n) \quad (102)$$

La condición $g_{I+1/2} = 0$ implica que g_{I+1} y por lo tanto $u_{I+1} - \rho_{I+1} = 0$. Esta condición se puede usar en la ecuación interior (96), para obtener la ecuación (102) directamente.

De forma más general, si el contorno está abierto a ondas que salen pero también hay ondas entrantes, la ecuación apropiada es

$$\rho_I^{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\rho_I^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{I-1} + \rho_{I-1}) - \frac{\Delta t}{\Delta x}g_{I+1} \quad (103)$$

donde $g_{I+1} = 1/2(u_{I+1} - \rho_{I+1})$ es una cantidad especificada. La ecuación hermana para u_I se puede obtener de forma similar y es

$$u_I^{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)u_I^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{I-1} + \rho_{I-1}) + \frac{\Delta t}{\Delta x}g_{I+1} \quad (104)$$

Un contorno también puede producir reflexión parcial. En este caso, la onda reflejada $g_{I+1/2}$ está dada por $g_{I+1/2} = Rf_{I+1/2}$, donde R es el coeficiente de reflexión, $-1 \leq R \leq 1$, y $R = -1$ corresponde a $u_{I+1/2} = 0$. Como antes, $f_{I+1/2} = f_I^n$ y $g_{I+1/2} = g_{I+1}$, de modo que $g_{I+1} = Rf_I^n$. Esta condición se puede usar en las ecuaciones (103) y (104) para obtener dos ecuaciones para u y ρ en los contornos. Si una onda incidente g_{I+1} se especifica, además de la onda reflejada, la onda hacia la izquierda en $I+1/2$ es la suma de la onda reflejada y la onda incidente, de modo que $g_{I+1} = Rf_I^n + g_{I+1}$.

Algoritmos más exactos

Las ecuaciones descritas anteriormente tienen sólo exactitud de primer orden y el error se manifiesta en forma de una amortiguación artificial o numérica, similar a la que se encuentra en esquemas de diferencias contra la dirección de flujo¹⁴. Ecuaciones de diferencias más exactas se pueden obtener de la siguiente manera. Consideremos primero la ecuación (83) para la que la relación integral es la ecuación (90). Al evaluar los términos de flujo (la segunda integral de la ecuación (91)), se supondrá

que todas las funciones dependientes (u , ρ , f y g) para el tiempo n varían en forma lineal con x entre los puntos de la red, en vez de variar como funciones escalonadas como se puso antes. En particular, para $x_i \leq x \leq x_{i+1}$,

$$f^n = f_i^n + (f_{i+1}^n - f_i^n) \frac{(x - x_i)}{\Delta x} \quad (105)$$

$$g^n = g_i^n + (g_{i+1}^n - g_i^n) \frac{(x - x_i)}{\Delta x} \quad (106)$$

De aquí y sabiendo que $f = f(x-t)$, se deduce que

$$f_{i+1/2} = f_{i+1/2}^n - \frac{t}{\Delta x} (f_{i+1}^n - f_i^n) \quad (107)$$

$$g_{i+1/2} = g_{i+1/2}^n - \frac{t}{\Delta x} (g_{i+1}^n - g_i^n) \quad (108)$$

donde $f_{i+1/2}^n = 1/2(f_{i+1}^n + f_i^n)$ y $g_{i+1/2}^n = 1/2(g_{i+1}^n + g_i^n)$. Estas ecuaciones se pueden integrar en el tiempo para dar

$$\int_0^{\Delta t} f_{i+1/2} dt = \left(\frac{\Delta t}{2} - \frac{\Delta t^2}{2\Delta x}\right) f_{i+1}^n + \left(\frac{\Delta t}{2} + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x}\right) f_i^n \quad (109)$$

$$\int_0^{\Delta t} g_{i+1/2} dt = \left(\frac{\Delta t}{2} + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x}\right) g_{i+1}^n + \left(\frac{\Delta t}{2} - \frac{\Delta t^2}{2\Delta x}\right) g_i^n \quad (110)$$

Como antes, aproximemos la primera integral de la ecuación (91) por

$$\int_{i-1/2}^{i+1/2} [\rho^{n+1} - \rho^n] dx = [\rho_i^{n+1} - \rho_i^n] \Delta x \quad (111)$$

Con estas aproximaciones, la ecuación (91) se transforma en

$$\begin{aligned} [\rho_i^{n+1} - \rho_i^n] \Delta x &= - \int_n^{n+1} [u_{i+1/2} - u_{i-1/2}] dt \\ &= - \int_n^{n+1} [f_{i+1/2} + g_{i+1/2} - f_{i-1/2} - g_{i-1/2}] dt \\ &= \frac{\Delta t}{2} [-f_{i+1}^n - g_{i+1}^n + f_{i-1}^n + g_{i-1}^n] \\ &\quad + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x} [f_{i+1}^n - g_{i+1}^n - 2(f_i^n - g_i^n) + f_{i-1}^n - g_{i-1}^n] \\ &= \frac{\Delta t}{2} [-u_{i+1}^n + u_{i-1}^n] + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x} [\rho_{i+1}^n - 2\rho_i^n + \rho_{i-1}^n] \end{aligned} \quad (112)$$

Reordenando esta ecuación, se obtiene

$$\rho_i^{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\right) \rho_i^n + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} (\rho_{i+1}^n + \rho_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \quad (113)$$

En forma similar, para la ecuación (84), se obtiene

$$u_i^{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\right) u_i^n + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\rho_{i+1}^n - \rho_{i-1}^n) \quad (114)$$

Estas ecuaciones poseen exactitud de segundo orden y la amortiguación artificial se ha reducido considerablemente en comparación con las ecuaciones (96) y (97). Las ecuaciones (113) y (114) son similares a las derivadas por Osher¹⁵ aunque la forma de obtención es muy diferente.

Las condiciones de contorno se pueden tratar como en el caso anterior excepto que ahora es más conveniente usar la mitad de los elementos en el borde. El procedimiento también se puede extender de inmediato al caso de ecuaciones de onda no homogéneas, a mayor número de dimensiones, y a ecuaciones hiperbólicas generales o sistemas de ecuaciones hiperbólicas. Asimismo, se pueden derivar tanto ecuaciones explícitas como implícitas.

OBSERVACIONES FINALES

El objetivo de este artículo ha sido el de dar una breve reseña sobre el uso del método integral para derivar ecuaciones de diferencias a partir de ecuaciones diferenciales. Las ecuaciones que hemos considerado eran relativamente simples. Sin embargo, son ejemplos representativos de tipos característicos e importantes de ecuaciones y, por esto, los procedimientos descritos aquí se pueden extender directamente a ecuaciones generales y a sistemas de ecuaciones. Para problemas más complejos, el procedimiento sigue siendo el mismo descrito aquí. Esto es, primero se integra la ecuación diferencial formalmente (ej., las ecuaciones de conservación de masa, momento, y energía) sobre un elemento. Luego, se aproximan las soluciones lo más exactamente posible en el elemento. La substitución de estas soluciones aproximadas en las ecuaciones integradas (exactas) conduce a las ecuaciones de diferencias apropiadas.

Como se indicó en la introducción, el método integral se ha utilizado ampliamente sin reconocimiento formal, o sin saber que se estaba usando. Roache¹⁴ se refiere a él explícitamente en su texto. El grupo de Los Alamos (por ejemplo, Harlow y Welch¹⁶, Welch et al.¹⁷, Amsden y Harlow^{18,19} han usado las ideas básicas en forma implícita en sus métodos MAC y SMAC. Estos métodos han sido utilizados ampliamente por otros investigadores (por ejemplo, Daly²⁰, Daly y Pracht²¹, Donovan²², Crowley²³, Heinrich et al.²⁴). El uso de soluciones aproximadas es similar al procedimiento sugerido por Roscoe^{25,26} pero difiere en los detalles. Comparado con este método, el procedimiento de Roscoe es equivalente a suponer soluciones de tipo exponencial, lo que es un caso especial de este método.

La ventaja principal del método integral con sus extensiones como se han descrito aquí es que con él, uno puede combinar formas analíticas con aproximaciones numéricas. Esto conduce a ventajas decisivas de este método en términos de generalidad, consistencia y exactitud.

El procedimiento es general como se muestra en este artículo por medio de su aplicación a ecuaciones diferenciales ordinarias (tanto a problemas de valores de

contorno como a problemas de valor inicial) y a la ecuación de Helmholtz, la ecuación de calor, y la ecuación de onda como ejemplos representativos de ecuaciones elípticas, parabólicas e hiperbólicas respectivamente. Debido a que el método está íntimamente relacionado, y motivado, por la física del problema, los detalles del método difieren en función del tipo de ecuación que se está resolviendo. Así, para cada tipo de ecuación, se obtienen ecuaciones de diferencias que representan el problema físico de la forma más adecuada.

El procedimiento es consistente desde un punto de vista físico y matemático. Las ecuaciones gobernantes se satisfacen en promedio, ej., la primera integral de las ecuaciones (por ejemplo, las ecuaciones de conservación de masa, momento y energía) se satisface en forma exacta sobre un elemento. Una aproximación mejor a la ecuación diferencial sobre un elemento conduce en forma consistente a una ecuación de diferencias mejor. Para los ejemplos ilustrados aquí, tomando el límite apropiado, las ecuaciones de diferencias se reducen a aquellas obtenidas usando series de Taylor pero esto no es una regla general. Por medio del método integral, el tratamiento de las condiciones de contorno se mejora enormemente, y en especial se consigue que las condiciones de contorno matemáticas sean consistentes con la descripción física de las condiciones en el contorno.

El procedimiento posee exactitud. En general, la exactitud depende de cuán bien la forma de la solución que se supone en un elemento aproxima a la solución exacta. Cuando se conoce una buena solución aproximada dentro de un elemento, la exactitud se puede aumentar considerablemente sobre la que se alcanza por medio de las aproximaciones standard usando series de Taylor. Alternativamente, para la misma exactitud, el tamaño de la red y la eficiencia computacional se pueden aumentar considerablemente en comparación con aproximaciones usando series de Taylor.

Debemos destacar que el uso de soluciones analíticas aproximadas de la ecuación diferencial para derivar ecuaciones de diferencias mejoradas no está limitado al método integral. La idea central se extiende a cualquiera de los métodos de elementos finitos, o al método de ecuaciones integrales de contorno.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación ha sido realizada con la ayuda parcial de la United States Environmental Protection Agency como parte de un esfuerzo para desarrollar modelos numéricos para el transporte de sedimentos y materias contaminantes. Los responsables del proyecto fueron el Sr. Dave Dolan y el Dr. Louis S. Swaby. La mayor parte de los cálculos fueron realizados por Karuna Rajagopal y Kirk Ziegler.

REFERENCIAS

1. A. N. Tikhonov y A. A. Samarskii, On Finite Difference Methods for Equations with Discontinuous Coefficients. *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, **108**, 393-396, (1956).
2. R. S. Varga, *Matrix Iterative Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, (1962).
3. B. A. Finlayson, *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*. Academic Press, New York, (1972).
4. O. C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method*. McGraw-Hill Book Co., London, (1977).
5. L. Lapidus y G. F. Pinder, *Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering*. John Wiley and Sons, New York, (1982).
6. C. A. Brebbia, J. C. F. Telles y L. C. Wrobel, *Boundary Element Techniques*. Springer Verlag, Berlín, (1984).

7. W. Lick y T. Gaskins, A Consistent and Accurate Procedure for Obtaining Difference Equations from Differential Equations. *Int. J. for Num. Methods in Eng.*, Vol. **20**, 1433-1441, (1984).
8. P. A. Lagerstrom, *Methods Asymptotiques pour l'etude des Equations de Navier-Stokes*, Lecture Notes, Institute Henri Poincare, Paris, 1961; translated by T. J. Tyson, California Institute of Technology, Pasadena, CA, (1965).
9. J. Kevorkian y J. D. Cole, *Perturbation Methods in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, Berlín, (1981).
10. A. M. Winslow, Numerical Solution of the Quasilinear Poisson-Equation in a Nonuniform Triangle Mesh. *J. of Computational Physics*, Vol. **2**, pp. 149-172, (1967).
11. W. Lick, Improved Difference Approximations for the Heat Equation, *Int. J. for Num. Methods in Eng.*, en impresión, (1985).
12. V. Vemuri y W. J. Karplus, *Digital Computer Treatment of Partial Differential Equations*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, (1981).
13. S. D. Godunov, Finite Difference Method for Numerical Computation of Discontinuous Solutions of the Equations of Fluid Dynamics. *Mathematicheskii Sboenik*, Vol. **47**, No. 3, pp. 271-306, (1959).
14. P. J. Roache, *Computational Fluid Dynamics*. Hermosa Publishers, Albuquerque, New Mexico, (1972).
15. S. Osher, Numerical Solution of Singular Perturbation Problems and Hyperbolic Systems of Conservation Laws. *North-Holland Mathematical Studies* **47**, pp. 179-205, North-Holland, Amsterdam, (1981).
16. F. H. Harlow y J. W. Welch, Numerical Calculations of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface. *Physics of Fluids*, Vol. **8**, No. 12, pp. 2.182-2.189, (1966).
17. J. E. Welch, F. H. Harlow, J. P. Shannon y B. J. Daly, The MAC Method, LASL Report No. **LA-3425**, Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, New Mexico, (1966).
18. A. A. Amsden y F. H. Harlow, The SMAC Method: A Numerical Technique for Calculating Incompressible Fluid Flows. **LA-4370**, Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, New Mexico, (1970).
19. A. A. Amsden y F. H. Harlow, A Simplified MAC Technique for Incompressible Fluid Flow Calculations. *J. of Computational Physics*, Vol. **6**, pp. 322-325, (1970).
20. B. J. Daly, Numerical Study of the Effect of Surface Tension on Interface Instability. *Physics of Fluids*, Vol. **12**, No. 7, pp. 1.340-1.354, (1969).
21. B. J. Daly y W. E. Pracht, Numerical Study of Density-Current Surges. *Physics of Fluids*, Vol. **11**, No. 1, pp. 15-30, (1968).
22. L. F. Donovan, A Numerical Solution of Unsteady Flow in a Two-Dimensional Square Cavity. *AIAA Journal*, Vol. **8**, No. 3, pp. 524-529, (1970).
23. J. P. Crowley, A Numerical Model for Viscous, Nondivergent, Barotropic, Wind-Driven Ocean Circulations. *J. of Computational Physics*, Vol. **6**, pp. 183-199, (1970).
24. J. Heinrich, W. Lick y J. Paul, The Temperatures and Currents in a Stratified Lake: A Two-Dimensional Analysis. *J. Great Lakes Research*, Vol. **7**, pp. 264-275, (1981).
25. D. F. Roscoe, New Methods for the Derivation of Stable Difference Representations for Differential Equations. *J. Inst. Maths. Applics.*, Vol. **16**, pp. 291-301, (1975).
26. D. F. Roscoe, The Solution of the Three-Dimensional Navier-Stokes Equations Using a New Finite Difference Approach. *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. **10**, pp. 1.299-1.308, (1976).