

EFFECTOS ELÉCTRICOS EN LA EFICIENCIA DE COLISIÓN ENTRE GOTAS: UNA PARAMETRIZACIÓN

SERGIO MASUELLI
CARLOS M. SCAVUZZO
y
GIORGIO M. CARANTI

*Facultad de Matemática, Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba
Ciudad Universitaria, 5000 Córdoba, Argentina
Tel: + 54-51-334051 Fax: + 54-51-334054
E-mail: masuelli@roble.fis.uncor.edu*

RESUMEN

Mediante cálculos de las trayectorias de gotitas en el flujo de aire perturbado por la presencia de una partícula mayor se deduce la eficiencia de colisión en función tanto de los parámetros mecánicos como eléctricos. El rango de valores tanto de carga de las gotas y gotitas como del campo eléctrico cubren la mayor parte de los valores esperados en nubes. La dependencia con el tamaño de la gotita resulta ser la dominante y para el rango de gotas colectoras de radio igual o menor a $100 \mu\text{m}$ los parámetros eléctricos se vuelven muy importantes. A partir de estos resultados se escribió una parametrización para ser usada en modelos numéricos de nube de tipo *bulk* que permita el acoplamiento de la electricidad con los aspectos microfísicos.

ELECTRIC EFFECTS IN THE COLLISION EFFICIENCY BETWEEN DROPLETS: A PARAMETRIZATION

SUMMARY

The collision efficiency of droplets by larger drops is obtained calculating trajectories of the small droplets in the perturbed flow as a function of mechanical and electrical parameters. The range of values for the charge of the drops and droplets as well as the electric field cover most of the expected values in clouds. The size of the small droplets is the dominant parameter and for large drops with radius equal or less than $100 \mu\text{m}$ the electrical variables became very important. From these results a parametrization was written in order to be used in numerical cloud models allowing to couple the electricity and the microphysical aspects.

Recibido: Noviembre 1996

INTRODUCCIÓN

Un importante mecanismo para la formación de precipitación y limpiado de aerosoles dentro de nubes convectivas es la colisión entre sus partículas constituyentes debido a su diferente velocidad de caída.

Es así como muchos investigadores han trabajado en la determinación de las eficiencias de colisión de gotitas o aerosoles por parte de gotas más grandes¹. En estos trabajos se intenta calcular numéricamente la eficiencia de colisión sobre la base de flujos de aire alrededor de las partículas obtenidos en forma numérica.

Las tormentas severas presentan un importante desarrollo eléctrico y con ello los campos eléctricos internos en la nube pueden alcanzar valores de hasta 300 kV/m (ref.²). Este campo eléctrico polariza las partículas de la nube con la consiguiente variación en sus posibilidades de interacción. Más aún, las partículas de nube, así como las de precipitación están en general cargadas con una carga que depende de su tamaño. En muchas circunstancias es razonable considerar estas cargas como proporcionales al cuadrado de los radios³, haciendo que los efectos de atracción o repulsión eléctrica sean presumiblemente aún más importantes.

Sin embargo, hoy hay muchos trabajos en donde la influencia de los parámetros eléctricos haya sido tenida en cuenta en los cálculos de las trayectorias de partículas de nubes alrededor de colectores (partículas de precipitación). Alguna referencia puede encontrarse en el libro de Prupacher y Klett³.

Así como la falta de estudios sobre este tema lleva a que es común encontrar que esta influencia de los parámetros eléctricos no es tenida en cuenta tanto en modelos de nubes de actualidad como en modelos de crecimientos de granizos y de electrificación de tormentas. Esto se da aún en trabajos recientes que estudian la evolución del espectro de gotas⁴.

Con el objetivo de construir parametrizaciones simples de los efectos del campo eléctrico externo y de la carga de las partículas sobre la eficiencia de colisión, para incorporarlas en modelos dinámicos y eléctricos de nube y en modelos de cargado de hidrometeoros, se presentan en este trabajo los resultados de un modelo que calcula la trayectoria de gotitas en un flujo de aire alrededor de un obstáculo esférico que simula la partícula colectora donde se tiene en cuenta la presencia de un campo eléctrico externo vertical y que ambas partículas, la colectora y la eventualmente colectada, están cargadas.

DESCRIPCIÓN DEL MODELO

A los fines de entender como funciona el modelo, se presenta en las Figuras 1a y 1b un diagrama de flujo del mismo, separando entre la parte en donde se calculan las trayectorias y la parte que busca el parámetro de impacto crítico para definir la eficiencia de colisión.

El fluido es tratado como una superposición entre flujo potencial y de Stokes, teniendo en cuenta la teoría de la capa límite^{3,5}. La relación de tamaños elegida

($R_G/R_c > 5$, donde R_G es el radio de la gota, R_C es el radio de la gotita) nos permite considerar que el flujo alrededor de la gota colectora no es perturbado significamente por la partícula pequeña.

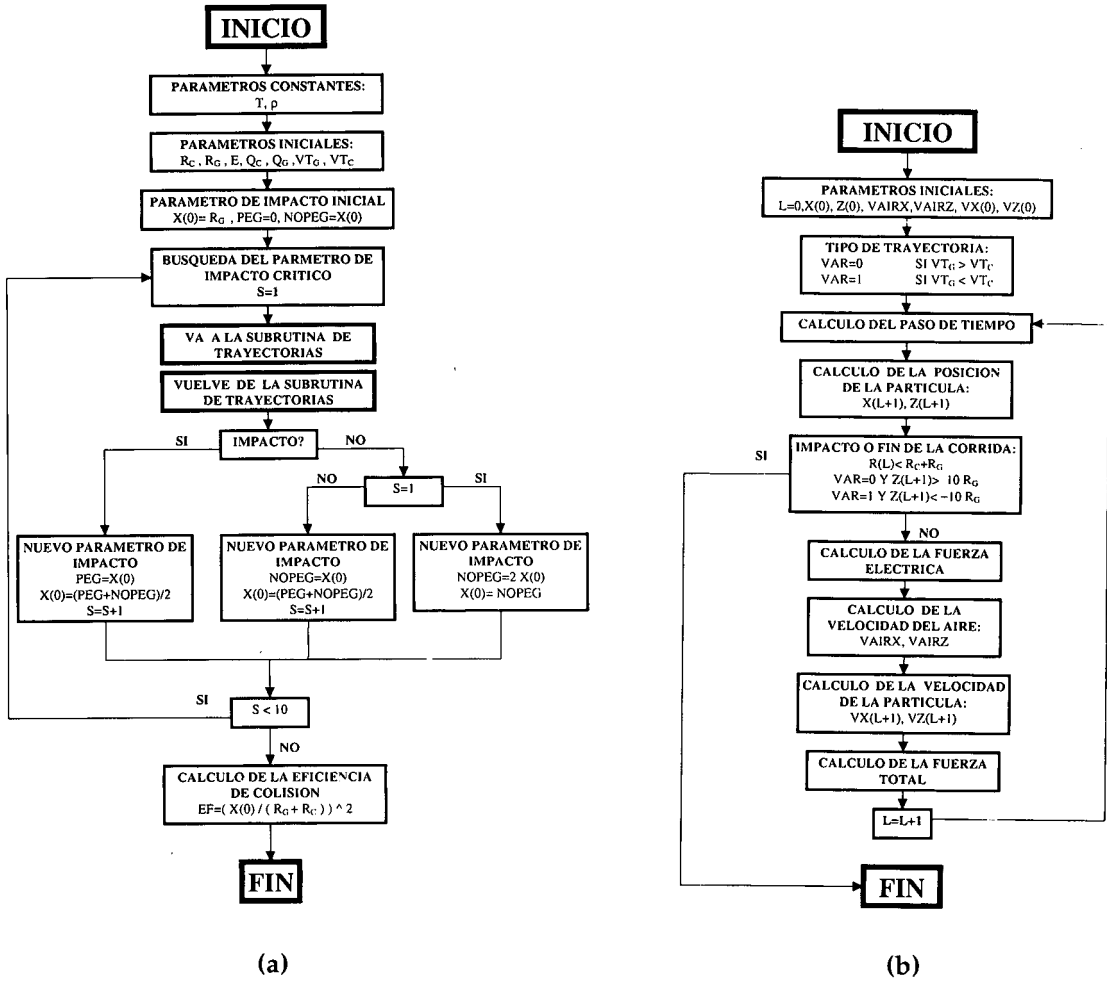


Figura 1. a) Diagrama de flujo. El programa de eficiencia. b) Diagrama de flujo. La subrutina de trayectorias

En la Figura 2 se muestran las líneas de flujo resultantes para una gota 300 micrones de radio en condiciones de nube, cayendo a velocidad terminal no perturbada por la influencia eléctrica. La Figura 3 muestra la gran similitud entre la eficiencia de colisión obtenida por nuestro modelo, sin influencia de la parte eléctrica, y los correspondientes usando la parametrización de Beard y Grover¹. Este resultado apoya la validez del flujo utilizado para este problema.

Por razones de simplicidad sólo se considera un campo eléctrico vertical y apuntando hacia abajo como en la región de fase mezclada de las nubes y similarmente al planteo de Chiu y Klett⁶ para modelar la colección de iones por gotas. Los valores

máximos de carga de las gotas y del campo eléctrico fueron elegidos de modo de que sean representativos de los observados en nubes de tormentas^{2,3}. Para el cálculo de la fuerza eléctrica se considera a la gota colectora como un conductor esférico. El campo eléctrico con el cual interactúa la gotita, resulta de la superposición de los campos solución de un conductor esférico inmerso en un campo uniforme, el de una carga puntual en el centro de la gota y el de la carga imagen de la carga de la gotita frente a la gota conductora⁷. La gotita es considerada como si fuera puntual desde el punto de vista eléctrico.

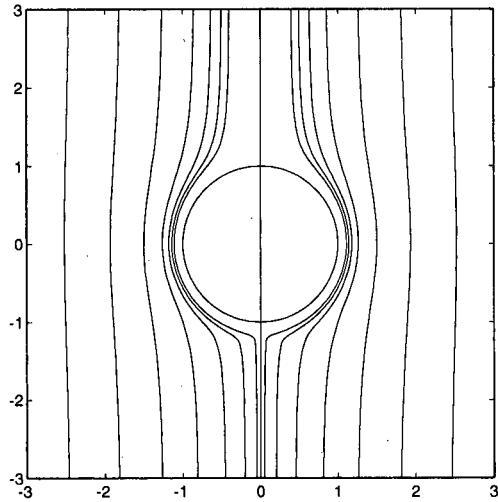


Figura 2. Líneas de flujo para una partícula esférica sin carga de 300 micrones de radio cayendo a velocidad terminal

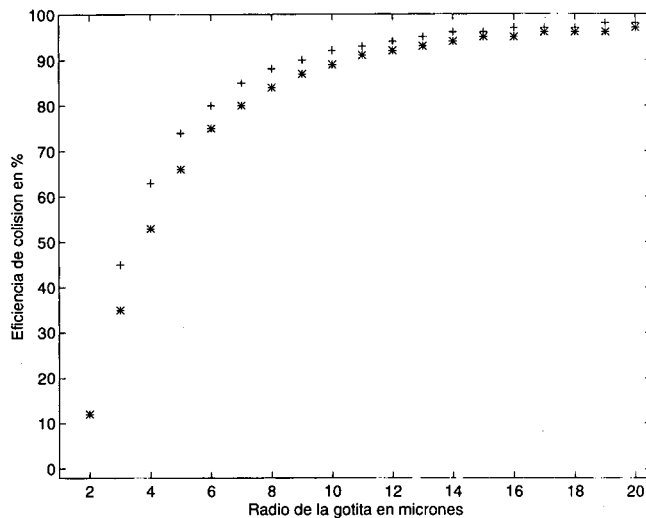


Figura 3. Comparación entre eficiencias de colisión versus R_C según Beard y Grover (*) y el presente modelo (+), con $R_G = 300$ micrones y sin influencia de los parámetros eléctricos

Cálculo de la velocidad terminal

La velocidad terminal es calculada mediante un método iterativo, utilizando la expresión de Abraham para el coeficiente de Drag e incluyendo la fuerza eléctrica en el balance entre las fuerzas que sufre la partícula⁸. Existen trabajos que han parametrizado la velocidad terminal de gotas cargadas en presencia de un campo eléctrico externo⁸. Sin embargo, para que el cálculo de la acreción sea simple (integrable en forma analítica), la velocidad terminal debe expresarse en forma de suma de potencias del radio, o bien como exponenciales del radio.

Elección de la posición inicial y del paso de tiempo

Para definir el parámetro de impacto crítico, las partículas pequeñas deben ser lanzadas desde una distancia infinita de la colectora a velocidad terminal. En la práctica, esto es equivalente a elegir una posición para la cual las variaciones en las velocidades debido a la influencia de la partícula grande sean despreciables numéricamente. Para asegurar que se cumple esta condición, una subrutina calcula el z correspondiente para un parámetro de impacto elegido.

El paso de tiempo se elige de modo que el segundo y el tercer término de la ecuación (3) no superen 0,001 de la distancia precedente. Este valor de 0,001 surgió como óptimo de las pruebas de sensibilidad. La razón de elegir un paso de tiempo variable se debe a que las gotitas deben ser lanzadas desde considerables distancias ($z > 400$) y las fuerzas en juego crecen en su influencia a medida que la gotita se acerca a la gota colectora.

Cálculo de la trayectoria

Partimos de la siguiente ecuación adimensionalizada que corresponde al movimiento de una partícula en el fluido determinado por una esfera de radio unidad y con velocidad del fluido en el infinito igual a 1 (ref.⁸).

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{1}{K}(\vec{V}_{TC} - (\vec{V} - \vec{U})) + \gamma\vec{E} \quad (1)$$

con

$$\frac{1}{K} = \frac{9\eta R_G}{2R_C^2 \rho_w V_{TG}} \quad \text{y} \quad \gamma = \frac{3R_G Q_C}{4\pi R_C^3 \rho_w V_{TG}^2}$$

donde η es la viscosidad dinámica del aire, Q_C es la carga de la gotita, ρ_w es la densidad del agua, V_{TG} es la velocidad terminal de la gota. V_{TC} es la velocidad terminal adimensional de la gotita, V es la velocidad adimensional de la gotita, U es la velocidad adimensional del aire. Con respecto al campo eléctrico E cabe señalar que se trata del campo eléctrico que ve la gotita menos el campo externo uniforme, cuya contribución ya es tenida en cuenta en la velocidad terminal.

Para hallar la nueva posición, se supone que la fuerza es constante en el intervalo

en el cual se calcula la diferencia finita centrada

$$\left. \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right|_1 = \frac{d}{dt} \left(\left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_1 \right) = \frac{1}{\Delta t} \left(\left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{1+1/2} - \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{1-1/2} \right) = \frac{1}{\Delta t_1} \left(\frac{\vec{r}_{1+1} - \vec{r}_1}{\Delta t_1} - \vec{V}_{1-1/2} \right) \quad (2)$$

Con esto puede obtenerse

$$\boxed{\vec{r}_{1+1} = \vec{r}_1 + \vec{V}_{1-1/2} \Delta t_1 + \left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_1 \Delta t_1^2} \quad (3)$$

Debe observarse que $\vec{V}_{1-1/2}$ no es exactamente el promedio entre \vec{V}_1 y \vec{V}_{1-1} , por cuanto el lapso de tiempo es variable. La expresión para $\vec{V}_{1-1/2}$ es la siguiente

$$\vec{V}_{1-1/2} = \frac{1}{\Delta t_{1-1}} \left(\vec{V}_1 \left(\Delta t_{1-1} - \frac{\Delta t_1}{2} \right) + \vec{V}_{1-1} \frac{\Delta t_1}{2} \right) \quad (4)$$

Cálculo de la velocidad

Nuevamente se supone que la fuerza es constante en el intervalo de tiempo considerado. Discretizando en forma de una diferencia finita centrada en el intervalo $[1, 1 + 1]$ puede hallarse la nueva velocidad, es decir \vec{V}_{1+1} de la siguiente forma

$$\left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_{1+1/2} = \frac{\vec{V}_{1+1} - \vec{V}_1}{\Delta t_1} = \frac{1}{2} \left(\left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_{1+1} + \left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_1 \right) \quad (5)$$

Reemplazando (1) en (5) se tiene

$$\frac{\vec{V}_{1+1} - \vec{V}_1}{\Delta t_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{K} (\vec{V}_{TC} - (\vec{V}|_{1+1} - \vec{U}|_{1+1})) + \gamma \vec{E}|_{1+1} + \left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_1 \right) \quad (6)$$

Despejando obtenemos finalmente

$$\boxed{\vec{V}_{1+1} = \left[\vec{V}_1 + \frac{\Delta t_1}{2} \left(\frac{1}{K} (\vec{V}_{TC} + \vec{U}|_{1+1}) + \gamma \vec{E}|_{1+1} + \left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_1 \right) \right] \left(1 + \frac{\Delta t_1}{2K} \right)^{-1}} \quad (7)$$

RESULTADOS

En las Figuras 4a, 4b, 4c y 4d se muestran trayectorias para cuatro situaciones diferentes, siendo el hemisferio inferior de la gota grande el de ataque y las gotitas inciden desde abajo (excepto expresa mención de lo contrario). En las mismas se puede observar el efecto de los parámetros viscosos y eléctricos sobre la trayectoria de una gotita, siendo muchas de éstas sumamente complicadas. En las Figuras 4a, 4b y 4c puede observarse cómo los parámetros eléctricos pueden hacer que se colecten gotitas cargadas con un signo y no con el otro. También puede observarse que hay situaciones para las cuales las gotitas pegan en el hemisferio contrario al de ataque de la gota

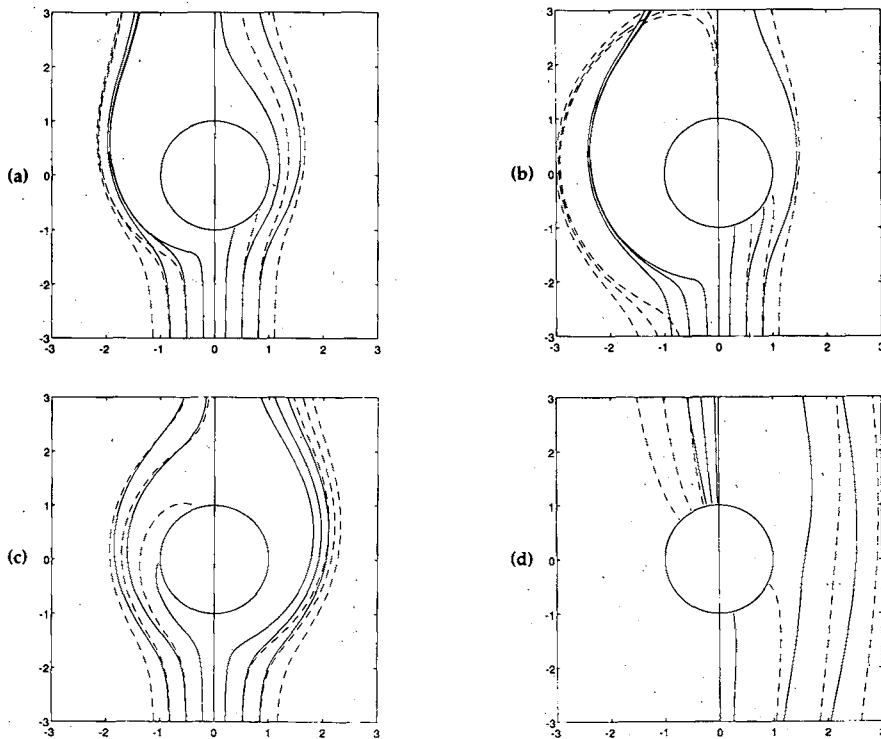


Figura 4. Trayectoria para gotitas de 2 micrones de radio en un flujo determinado por una gota de 60 micrones de radio que se mueve a velocidad terminal. El sistema de coordenadas es solidario con la gota. El campo eléctrico externo apunta hacia abajo. Las trayectorias del lado derecho corresponden a valores negativos de la carga eléctrica de la gotita y las trayectorias del lado izquierdo corresponden a valores positivos, con tres parámetros de impacto diferentes. En todos los casos las gotitas inciden desde abajo a excepción de las gotitas del lado izquierdo de la Figura 4d, las cuales inciden desde arriba. Las trayectorias con líneas de trazo corresponden a cargas eléctricas de las gotitas iguales al doble de las cargas correspondientes a las de líneas llenas, las cuales son las de referencia. Casos: 4a) $E = 200$ kV/m, $Q_G = 40$ fC, $Q_C = \pm 0, 2$ fC, 4b) $E = 200$ kV/m, $Q_G = 0$ fC, $Q_C = \pm 0, 43$ fC, 4c) $E = 200$ kV/m, $Q_G = -42$ fC, $Q_C = \pm 0, 2$ fC, 4d) $E = 10$ kV/m, $Q_G = -100$ fC, $Q_C = \pm 0, 2$ fC

colectora (Figuras 4b y 4c), contrariamente a lo que ocurre para partículas descargadas. Por otra parte, también es posible que la gotita incida por arriba de la gota colectora, al tener una velocidad terminal mayor que la de la gota colectora y tener una diferencia de colisión mucho mayor que el 100 %, tal como es el caso de las gotitas con carga positiva de la Figura 4c.

Para parametrizar la eficiencia de colisión, se efectuó un barrido en las diferentes variables cuyos rangos fueron

$$100 \mu\text{m} \leq R_G \leq 500 \mu\text{m}$$

$$1 \mu\text{m} \leq R_C \leq 20 \mu\text{m}$$

$$|E| \leq 200 \text{ kV/m}$$

$$|Q_G| \leq 1 \text{ pC}$$

$$|Q_C| \leq 1 \text{ fC}$$

Los valores de la carga corresponden a los radios de 300 y 10 micrones para las gotas y para las gotitas, respectivamente. Para los otros tamaños de gotas y gotitas la carga cumple la siguiente relación³

$$Q(r) = Q(r_0) \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \quad (8)$$

donde r_0 refiere al radio de referencia mencionado anteriormente, según corresponda a su categoría.

En las Figuras 5a ($R_G = 100$ micrones) y 5b ($R_G = 500$ micrones) se muestra la influencia de los parámetros eléctricos en la eficiencia de colisión. Puede observarse que para gotas de 100 micrones los parámetros eléctricos pueden producir cambios notables en la eficiencia de colisión, especialmente para gotitas pequeñas, mientras que para gotas grandes y usando los mismos parámetros eléctricos la influencia de éstos puede ser despreciada, en principio para este tipo de estudios.

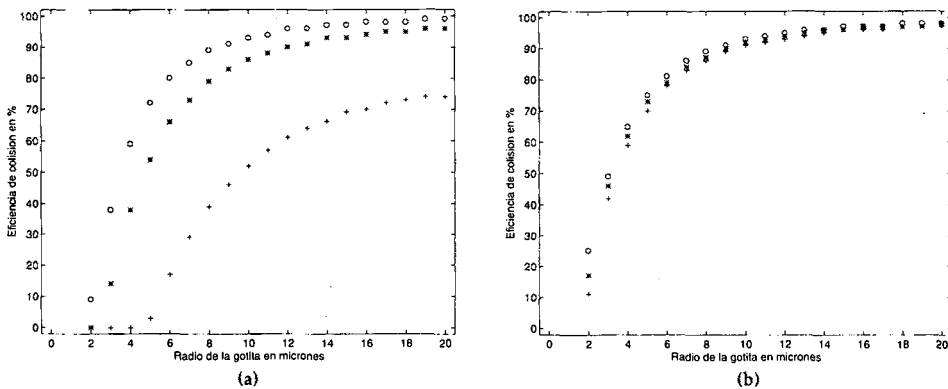


Figura 5. Influencia de los parámetros eléctricos en la eficiencia de colisión, donde (*) $E = 0$, $Q_G = 0$, $Q_C = 0$; (+) $E = 200 \text{ kV/m}$, $Q_G = -1 \text{ pC}$, $Q_C = 1 \text{ fC}$, (o) $E = 200 \text{ kV/m}$, $Q_G = 1 \text{ pC}$, $Q_C = -1 \text{ fC}$. La Figura 5a corresponde a $R_G = 100$ micrones y la 5b) corresponde a $R_G = 500$ micrones. Las cargas consignadas son las correspondientes a $R_G = 300$ micrones y $R_C = 10$ micrones cumpliéndose la relación (8) para las cargas correspondientes a otros tamaños

Parametrización

Es fácil ver la enorme dificultad que representa parametrizar la eficiencia de colisión entre gotas en término de todas las variables en juego, por lo que nos restringimos a los casos que consideramos más representativos en las nubes. De la ecuación (1) puede verse que sería posible parametrizar la eficiencia de colisión en términos de K, γ y E . Sin embargo, para el cálculo de la acreción (masa de gotas de nube que pasan a la categoría de gotas de precipitación por unidad de tiempo, debido a colisiones entre ellas) es necesario resolver un doble integral en R_C y R_G , por lo que es necesario que la eficiencia de colisión esté expresada en términos de estas dos variables.

Es importante tener en cuenta que, si se desea usar la parametrización en modelos del tipo *bulk*⁹, es una condición indispensable que la expresión final sea lo suficientemente sencilla como para que sea integrable cuando se calcule la acreción. Del análisis de los resultados se puede ver que la variable dominante es el radio de la gotita y que la eficiencia puede expresarse de modo relativamente sencillo como

$$Ef(R_c) = \begin{cases} a(1 - \exp(b(R_c - c))) & R_c \geq c \\ 0 & R_c < c \end{cases} \quad (9)$$

donde los parámetros a, b y c son funciones de las otras cuatro variables (R_G, E, Q_G y Q_C). De un análisis similar se puede ver que estos parámetros pueden expresarse como función de R_G . A su vez los parámetros que caracterizan este nuevo ajuste se pueden parametrizar con las variables eléctricas, pero para este caso se adopta una combinación de las variables eléctricas, que son las más representativas de las fuerzas involucradas. Ellas son

$$e = E/E_0, \quad qq = Q_G Q_C / (Q_{G_0} Q_{C_0}), \quad eqg = Q_G E / (Q_{G_0} E_0), \quad eqc = Q_C E / (Q_{C_0} E_0)$$

El subíndice 0 se refiere a los valores máximos consignados anteriormente.

Finalmente, las parametrizaciones de los parámetros a, b y c obtenidas son las siguientes

$$\begin{cases} a = a_1 + a_2 \exp(-2R_G) \\ b = b_1 + b_2 R_G + b_3 \exp(-2R_G) \\ c = 1 + c_1 \exp(c_2 R_G) + c_3 \exp(-2R_G) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 96,3 - 0,1qq + \begin{cases} -0,2 eqg(1 - eqc) & \text{si } eqc < 0 \\ -0,3 eqg(1 - 2 eqc) & \text{si } eqc \geq 0 \end{cases} \\ a_2 = -8 - 2,6qq + \begin{cases} eqg(57,5 + 76,8 eqc) & \text{si } eqg < 0 \\ eqg(6,9 - 2,3 eqc) & \text{si } eqc \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 = -0,50 + 0,005|qq|(1 - qq) + \begin{cases} -eqg(0,12 + 0,03 eqc) & \text{si } eqg < 0 \\ -eqg(0,01 + 0,01 eqc) & \text{si } eqc \geq 0 \end{cases} \\ b_2 = 0,024 - 0,001|qq| + \begin{cases} eqg(0,022 + 0,011 eqc) & \text{si } eqg < 0 \\ -eqg(0,002 + 0,003 eqc) & \text{si } eqc \geq 0 \end{cases} \\ b_3 = 1,14 - 0,075|qq|(1 - qq) + \begin{cases} -eqg(0,19 - 0,17 eqc) & \text{si } eqg < 0 \\ eqg(0,27 + 0,22 eqc) & \text{si } eqc \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 1,27 + |qq|(-0,02 + 0,05 qq) + \begin{cases} eqg(0,37 + 0,28 eqc) & \text{si } eqg < 0 \\ -eqg(0,34 - 0,15 eqc) & \text{si } eqc \geq 0 \end{cases} \\ c_2 = -0,226 - |qq|(0,015 - 0,016 qq) + \begin{cases} -eqg(0,137 + 0,154 eqc) & \text{si } eqg < 0 \\ eqg(-0,01 + 0,024 eqc) & \text{si } eqc \geq 0 \end{cases} \\ c_3 = 3,36 + |qq|(0,37 - 0,15 qq) + \begin{cases} -eqg(11,83 + 8,36 eqc) & \text{si } eqg < 0 \\ -eqg(2,78 - 0,45 eqc) & \text{si } eqc \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

La Figura 6 muestra cómo ajusta la parametrización propuesta los resultados obtenidos para dos casos.

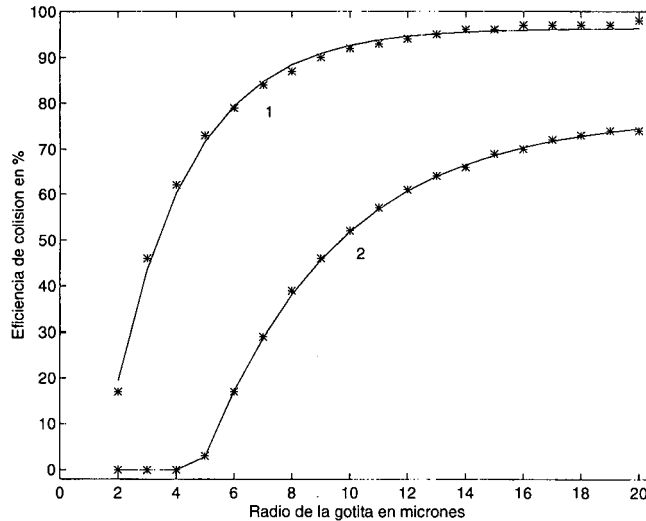


Figura 6. Ajustes de los resultados del modelo con la parametrización propuesta para dos casos. La curva 1 corresponde a $R_G = 500$ micrones, $E = 200$ kV/m, $Q_G = 1$ pC, $Q_C = 1$ fC. La curva 2 corresponde a $R_G = 100$ micrones, $E = 200$ kV/m, $Q_G = -1$ pC, $Q_C = 1$ fC. Las cargas consignadas son las correspondientes a $R_G = 300$ micrones y $R_C = 10$ micrones cumpliéndose la relación (8) para las cargas correspondientes a otros tamaños

La acreción puede calcularse de la siguiente manera

- 1) Calcular la integral en R_G . Parametrizando la velocidad en forma de potencias de R_G , la integral resultante da una función gamma incompleta, tomando a la eficiencia de colisión como constante en términos de R_G .
- 2) Calcular los coeficientes $a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2$ y c_3 .
- 3) Calcular a, b y c usando el radio medio de la partícula grande.
- 4) Calcular la integral en R_C . Al usar una expresión como la (9) y distribuciones del tipo enunciado en la introducción, la integral puede calcularse analíticamente y da funciones gamma incompleta.

En caso de que se requiera mayor precisión, puede tomarse la dependencia de la eficiencia de colisión como función del radio de la partícula grande subdividiendo el intervalo de integración de esta variable y tomando en cada uno un radio medio para realizar la integración en R_C . Esto podría ser aplicado a estudios de evolución de espectros de gotas.

DISCUSIÓN

Como se ha mostrado, se ha conseguido una parametrización bastante razonable y susceptible de ser usada en modelos de nube de tipo *bulk* para el cálculo de la acreción o cualquier otro proceso en el cual esté involucrada la eficiencia de colisión como sea el cargado de gotas por polarización. Por otra parte, es necesario recordar al lector que estas parametrizaciones valen estrictamente sólo en el rango de variables consignados. Sin embargo, para $R_G > 0,5$ mm, las parametrizaciones obtenidas pueden usarse sin problemas, tal como se puede ver en la Figura 5b.

No es recomendable usar estas parametrizaciones para $R_G < 0,1$ mm y valores de los parámetros eléctricos cercanos o mayores que los valores límites usados, por cuanto el comportamiento de la eficiencia como función R_C puede que no sea el dado por la ecuación (9). Por ejemplo existen situaciones como las observadas en la Figura 4d para la cual la eficiencia de colisión para gotitas cargadas positivas es mucho mayor que el 100 %.

Estas parametrizaciones se realizaron con el objeto de ser incluídas en un modelo de nube de manera que la parte eléctrica quede acoplada con la parte dinámica del mismo.

REFERENCIAS

1. K.V. Bear y S.N. Grover, "Numerical Collision Efficiencies for Small Raindrops Colliding with Micron Size Particles", *Jour. Atmos. Sci.*, Vol. **31**, pp. 543-550, (1974).
2. B.J. Mason, "*The Physics of Clouds*", Oxford University Press, (1971).
3. H.R. Prupacher y J.D. Klett, "*Microphysics of Clouds and Precipitation*", Reidel Pub. Com., (1980).
4. Z. Hu y R.C. Scrivastava, "Evolution of Raindrop Size Distribution by Coalescence, Breakup and Evaporation: Theory and Observation", *Jour. Atmos. Sci.*, Vol. **52**, pp. 1761-1783, (1995).
5. L.D. Landau y E.M. Lifshitz, "*Fluid Mechanics*", Pergamon Press, (1986).
6. S.C. Chiu, "Numerical Study of Cloud Electrification in an Axisymmetric, Time-Dependent Cloud Model", *J. Geophys. Res.*, Vol. **83**, pp. 5025-5049, (1978).
7. J.D. Jackson, "*Electrodinámica Clásica*", Editorial Alhambra, (1980).
8. K.V. Beard, "The Effects of Altitude and Electrical Force on the Terminal Velocity of Hydrometeors", *Jour. Atmos. Sci.*, Vol. **37**, pp. 1363-1374, (1980).
9. C. Wang y J.S. Chang, "A Three-Dimensional Numerical Model of Cloud Dynamics, Microphysics and Chemistry, I. Concepts and Formulation", *J. Geophys. Res.*, Vol. **98**, pp. 14827-14844, (1993).