

Evaluación de métodos para la optimización de sistemas acoplados

Joseabel Cegarra Conde

Universidad del Zulia, Facultad de Ingeniería
División de Postgrado
Apartado 526, Maracaibo, Estado Zulia, Venezuela
Tel.: 58 418 6753119; Fax: 58 261 7354831
e-mail: joseabelcegarra@hotmail.com

Resumen

La optimización de sistemas complejos en industrias tan diversas como la de componentes electrónicos, aeroespacial y petrolera tiene como denominador común, que los sistemas considerados están compuestos por elementos acoplados de distintas disciplinas. Existen diferentes enfoques para resolver estos problemas de diseño multidisciplinario pero su evaluación ha sido muy limitada y su desempeño relativo poco estudiado. En este trabajo, se codifican los enfoques Simple-SAND-SAND y Simple-SAND-NAND (SAND: Análisis y Diseño Simultáneo y NAND: Análisis y Diseño Anidado); así como la técnica de optimización denominada Objetivos en Cascada. Posteriormente, se evalúa su desempeño relativo utilizando casos de estudio seleccionados de optimización multidisciplinaria. El trabajo presenta los resultados obtenidos de la aplicación de los enfoques codificados sobre casos de estudio seleccionados y representa un primer paso hacia una mejor comprensión de los métodos para la solución de problemas de diseño multidisciplinario.

Palabras clave: *Multidisciplinario, Optimización, Sistemas acoplados.*

EVALUATION OF METHODS FOR COUPLED SYSTEM OPTIMIZATION

Summary

The coupled systems optimization in so diverse industries as the electronics components, aeronautical and oil have like common denominator that the systems considered are made up of coupled elements from different disciplines. There are different approaches to solve these multidisciplinary design problems but its evaluation has been too limited and its relative performance not very studied. In this paper, the Single-SAND-SAND and Single-SAND-NAND approaches are codified (SAND: Simultaneous Analysis and Design and NAND: Nested Analysis and Design), as well as the optimization technique denominated Target Cascading. Afterwards, its relative performance is evaluated by using selected test cases from multidisciplinary optimization. The paper shows the results obtained from the application of the codified approaches about selected test cases and represents a first step to a best understanding of the methods to be used for the solution of multidisciplinary design problems.

Keywords: *Multidisciplinary, Optimization, Coupled systems.*

INTRODUCCIÓN

A partir de la década pasada la competencia económica y la complejidad de los sistemas de ingeniería han promovido el rápido crecimiento de la optimización de diseño multidisciplinario. La optimización de sistemas complejos en industrias tan diversas como la de componentes electrónicos, específicamente el diseño de circuitos impresos, la industria aeroespacial con el diseño de aviones, y la industria petrolera en los sistemas de producción incluyen elementos acoplados de diferentes disciplinas.

Hay diferentes enfoques para resolver estos problemas de diseño multidisciplinario entre los cuales destacan Simple-SAND-SAND, Simple-SAND-NAND, Múltiple-SAND-SAND y Múltiple-SAND-NAND. Cada uno de estos enfoques tiene tres nombres: el primero indica si el enfoque es una optimización de múltiple nivel o de un sólo nivel; el segundo denota SAND vs. NAND en el nivel de sistema; y el tercero señala SAND vs. NAND en el nivel de disciplina, donde las siglas SAND y NAND hacen referencia a Simultaneous ANalysis and Design (Análisis y Diseño Simultáneo) y Nested ANalysis and Design (Análisis y Diseño Anidado), respectivamente.

Cramer et al.¹ presentan una clasificación para resolver problemas de diseño multidisciplinario de un sólo nivel; Sobieszczanski-Sobieski², presentan una clasificación de enfoques para múltiples niveles. Sin embargo, no se ha evaluado suficientemente el desempeño relativo de los diferentes enfoques.

En este trabajo se codifican dos de los enfoques descritos en el trabajo de Balling y Sobieszczanski-Sobieski³, el Simple-SAND-SAND y el Simple-SAND-NAND, y una técnica propuesta recientemente por Michelena et al.⁴ conocida como Objetivos en Cascada (Target Cascading) evaluando su desempeño relativo, mediante casos de estudio seleccionados de optimización multidisciplinaria.

DEFINICIÓN CONCEPTUAL

Previo a la explicación de las estrategias citadas es necesario precisar los siguientes conceptos:

- **Evaluadores disciplinarios:** Determinan los residuales en las ecuaciones de estado. El esfuerzo computacional requerido por el evaluador disciplinario es significativamente menor que el requerido por el analizador disciplinario.
- **Analizadores disciplinarios:** Determinan los valores de las variables de estado los cuales reducen los residuales a cero.
- **Optimizadores disciplinarios:** Resuelven los problemas de optimización disciplinaria. Estos optimizadores llaman a los analizadores o evaluadores disciplinarios para calcular los valores de la función objetivo y sus restricciones.
- **Optimizador de sistema:** Resuelve el problema de optimización de sistema multidisciplinario. Este optimizador puede llamar a los optimizadores, analizadores y/o evaluadores disciplinarios.

Enfoque Simple-SAND-SAND

En este enfoque todas las variables de diseño son determinadas simultáneamente por el optimizador de sistema y los evaluadores de disciplina son llamados en cada iteración para calcular todas las funciones (Figura 1). Formalmente, el enfoque puede expresarse de la siguiente manera:

Encontrar $x, x_1, x_2, x_3, y_{12}, y_{13}, y_{21}, y_{23}, y_{31}, y_{32}, s_1, s_2, s_3$
Que minimice

$$f \quad (1)$$

Sujeto a las siguientes restricciones

$$g_1 < 0, g_2 < 0, g_3 < 0, \quad (2)$$

$$f_1 < f_1^*, f_2 < f_2^*, f_3 < f_3^*, \quad (3)$$

$$r_1 = 0, r_2 = 0, r_3 = 0, \quad (4)$$

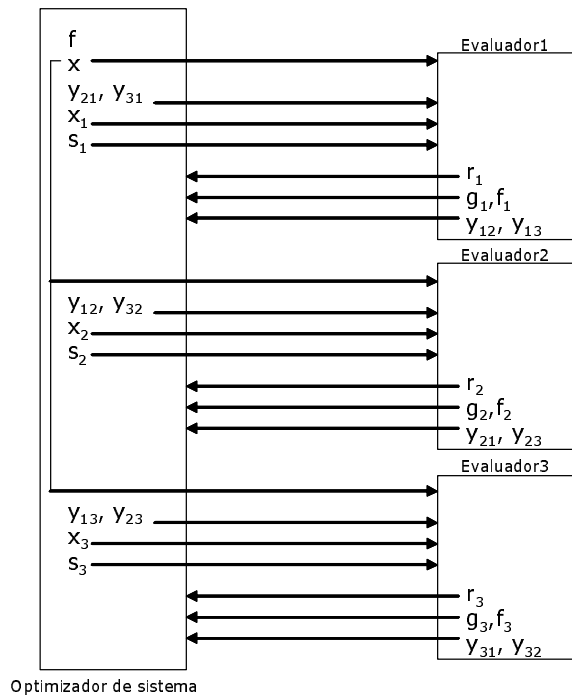


Figura 1. Ilustración de enfoque Simple-SAND-SAND

Enfoque Simple-SAND-NAND

Como se muestra en la Figura 2, este enfoque es como el Simple-SAND-SAND, excepto que los analizadores disciplinarios en vez de los evaluadores disciplinarios, son llamados en cada iteración del optimizador de sistema. Formalmente, el enfoque puede expresarse de la siguiente manera:

Encontrar $x, x_1, x_2, x_3, y_{12}, y_{13}, y_{21}, y_{23}, y_{31}, y_{32}$
Que minimice

$$f \quad (5)$$

Sujeto a las siguientes restricciones

$$g_1 < 0, g_2 < 0, g_3 < 0, \quad (6)$$

$$f_1 < f_1^*, f_2 < f_2^*, f_3 < f_3^*, \quad (7)$$

Note la desaparición de las variables de estados y los residuales en vista de que pasan a ser internos a los analizadores disciplinarios. Los analizadores disciplinarios corresponden a residuales iguales a cero.

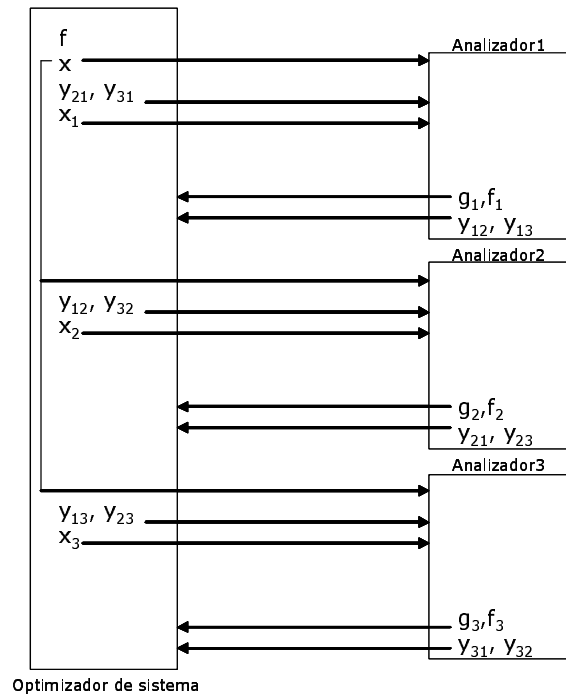


Figura 2. Ilustración de enfoque Simple-SAND-NAND

Descripción de las variables

x : es el vector que contiene las variables de diseño del sistema pertenecientes a más de una disciplina

f : representa la función objetivo del sistema

f_i : es la función objetivo de diseño de cada disciplina

f_i^* : es el límite impuesto a la función objetivo de la disciplina i

x_i : es el vector que representa las variables de diseño de la disciplina i

g_i : es el vector que contiene las funciones de restricciones de diseño de la disciplina i

s_i : es el vector que contiene las variables de estado de la disciplina i

r_i : es el vector que contiene los valores de los residuales de la disciplina i

y_{ij} : es el vector que contiene aquellas variables de acoplamiento calculadas en la disciplina i , las cuales son necesarias como entrada para la disciplina j

Formalmente, el problema de interés consiste en determinar los valores de las variables de diseño, de las variables de estado y de acoplamiento que satisfagan las ecuaciones de estado y las restricciones y que minimicen la función objetivo del sistema.

De manera general, al nivel de disciplina, SAND significa que tanto las variables de diseño disciplinario como las variables de estado son determinados simultáneamente por el optimizador de disciplina. Los evaluadores disciplinarios son llamados en cada iteración del optimizador de disciplina. El término NAND significa que las variables de diseño disciplinario son determinadas por el optimizador de disciplina. Los analizadores disciplinarios

son llamados en cada iteración del optimizador de disciplina para determinar las variables de estado.

Al nivel de sistema, SAND implica que tanto las variables de diseño del sistema como las variables de acoplamiento son determinadas simultáneamente por el optimizador de sistema. El término NAND implica que el optimizador de sistema determina las variables de diseño de sistema mientras que las variables de acoplamiento en cada iteración son determinadas por los analizadores de sistema.

Optimización por Objetivos en Cascada

En este método de optimización, se establece una estructura jerárquica para la solución de problemas de diseño multidisciplinario donde la función objetivo es proyectada hasta el nivel más bajo de la jerarquía del modelado, dividiendo el problema de diseño original en un conjunto de subproblemas. Para cada conjunto de subproblemas de diseño en un determinado nivel se formula un problema de optimización.

Las variables de diseño son clasificadas en variables de vinculación (común a más de un subproblema) y variables locales (pertenecientes a un subproblema). Las variables de vinculación y las respuestas identifican las interacciones verticales y horizontales entre los subproblemas en múltiples niveles.

Para el caso del diseño de un vehículo, se requiere determinar los valores de un gran número de parámetros del supersistema (vehículo), sistema (transmisión, electrónica, carrocería, chasis, control climático), subsistema (vidrios, armazón) y componente (juntas) en un resultado final que satisfaga al cliente, a la corporación y ciertos requerimientos regulatorios de seguridad, ergonómicos, aerodinámicos y económicos.

Formalmente, el problema de diseño puede ser formulado como un problema de optimización, y puede expresarse de la siguiente manera:

Determinar los parámetros del supersistema, sistema, subsistemas y componentes que minimicen la desviación entre las respuestas producidas y las funciones objetivo de cada nivel sujeto a las restricciones de diseño.

Intentar resolver un problema de optimización de tal magnitud como un todo puede ser impráctico debido a: i) el extenso número de parámetros de diseño y de restricciones, ii) la necesidad de simulaciones y modelos computacionalmente costosos y iii) su carácter multiobjetivo.

Una propuesta para reducir la dimensionalidad y complejidad en el problema de diseño es permitir que la función objetivo del nivel tope, se proyecte hasta el nivel más bajo de la jerarquía del modelado, de esta forma, el sistema, subsistema y el componente pueden estar aislados uno del otro con una formulación de optimización propia.

Una típica partición utilizando el método de Objetivos en Cascada para el diseño de un vehículo, se muestra en la Figura 3.

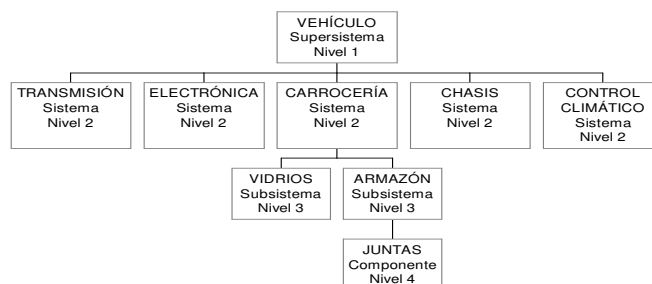


Figura 3. Descomposición del problema de diseño de un vehículo utilizando el método de optimización por Objetivos en Cascada

La formulación matemática del enfoque Objetivos en Cascada para los niveles del supersistema, sistema, subsistema y componente se expresa en el trabajo de Michelena et al. ⁴.

Los pasos a seguir para la aplicación de este método de optimización son los siguientes:

1. Se asume la existencia de modelos analíticos o experimentales de bajo costo computacional para establecer la respuesta de los elementos del supersistema, sistema, subsistema y componente. Si un modelo no está disponible es necesario desarrollar uno de baja fidelidad (e.g. modelos de regresión) a partir de simulaciones o experimentos.
2. Descomposición del sistema utilizando una matriz o una representación gráfica, derivada de los modelos actuales para encontrar una partición, con un balance apropiado desde el punto de vista computacional. La selección de la partición depende de la disponibilidad de los modelos, por lo tanto, debería ser hecha cuidadosamente y sujeta a revisiones durante el proceso de implementación.
3. Después de dividir el problema original en subproblemas de múltiples niveles, deben ser identificadas las variables de vinculación entre los subproblemas de un mismo nivel y las variables de respuestas de los subproblemas en diferentes niveles. Además, se formulan los problemas de Objetivos en Cascada para cada elemento de la partición.
4. Resolver el problema dividido a través de una estrategia de coordinación que asegure la convergencia de la solución generada por la optimización de los subproblemas.

Algoritmo de solución

El método de optimización por Objetivos en Cascada incluye la ejecución de los siguientes pasos:

1. Resolver el problema de optimización para el nivel supersistema donde se obtienen y_s (variable de acoplamiento) y R_s (respuesta) que representan valores objetivos para el nivel sistema.
2. Resolver el problema de optimización para el nivel sistema donde se obtienen y_{ss} (variable de acoplamiento) y R_{ss} (respuesta) que representan valores objetivos para el nivel subsistema.
3. Resolver el problema de optimización para el nivel subsistema donde se obtienen y_c (variable de acoplamiento) y R_c (respuesta) que representan valores objetivos para el nivel componente.
4. Resolver el problema de optimización para el nivel componente donde se obtienen los valores calculados de y_c (variable de acoplamiento) y R_c (respuesta).
5. Resolver el problema de optimización para el nivel subsistema con los valores calculados de y_c (variable de acoplamiento) y R_c (respuesta) y se obtienen los valores calculados de y_{ss} (variable de acoplamiento) y R_{ss} (respuesta).
6. Resolver el problema de optimización para el nivel sistema con los valores calculados de y_{ss} (variable de acoplamiento) y R_{ss} (respuesta) y se obtienen los valores calculados de y_s (variable de acoplamiento) y R_s (respuesta).
7. Resolver el problema de optimización para el nivel supersistema con los valores calculados de y_s (variable de acoplamiento) y R_s (respuesta) y se obtiene el valor calculado de R_{sup} (respuesta).

8. Comparar los resultados con el criterio de parada. Si el criterio de parada no se satisface volver al paso 2.

EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Ejemplo 1

En la Figura 4, se muestra un ejemplo de un sistema gobernado por múltiples disciplinas correspondiente al de un ala de avión donde las disciplinas 1, 2 y 3 están asociadas con el rendimiento, el comportamiento aerodinámico y estructural del ala, respectivamente.

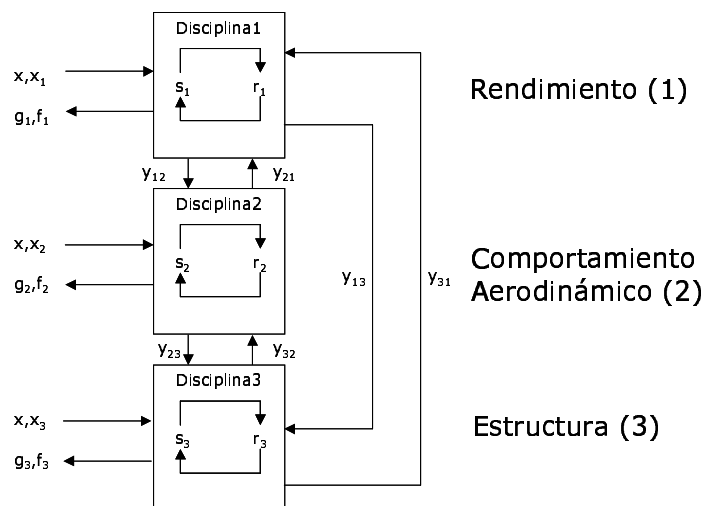


Figura 4. Ilustración del problema de diseño multidisciplinario de un ala de avión. Balling y Sobieszczanski-Sobieski³

La descripción de las variables y funciones del problema de diseño multidisciplinario de un ala de avión se presenta a continuación:

Sistema

f : función objetivo del sistema

x : geometría del diseño del ala, relación entre la superficie de sustentación y la profundidad de la cuerda del ala

Disciplina 1

f_1 : peso bruto

x_1 : perfil de vuelo

g_1 : límite de la longitud recorrida en el despegue y el aterrizaje, velocidad de ascenso requerida, rango requerido para una carga útil específica

s_1 : combustible requerido para volar en una misión específica

y_{12} : ángulos de ataque para varios regímenes de vuelo

y_{13} : volumen de combustible contenido en las alas

Disciplina 2

f_2 : resistencia aerodinámica

x_2 : geometría de la superficie de sustentación de la caja estructural

g_2 : límite de distribución de presión aerodinámica, límite del ángulo de ataque

s_2 : campo de velocidades de flujo

y_{21} : resistencia aerodinámica para un ángulo de ataque específico y número MACH

y_{23} : cargas aerodinámicas

Disciplina 3

f_3 : peso estructural

x_3 : dimensiones transversales de la caja estructural del ala

g_3 : límite de desplazamiento y tensión, velocidad de vibración requerida

s_3 : desplazamientos nodales

y_{31} : peso estructural

y_{32} : desplazamientos que alteran la forma aerodinámica

El ejemplo correspondiente al diseño de un ala de avión puede expresarse de la siguiente manera:

Encontrar x , x_1 , x_2 , x_3 , y_{12} , y_{13} , y_{21} , y_{23} , y_{31} , y_{32}

Tal que se minimice la función objetivo

$$f \tag{8}$$

Sujeto a las siguientes restricciones

$$g_1 < 0, g_2 < 0, g_3 < 0, \tag{9}$$

$$f_1 < f_1^*, f_2 < f_2^*, f_3 < f_3^*, \tag{10}$$

$$r_1 = 0, r_2 = 0, r_3 = 0. \tag{11}$$

Ejemplo 2

En la Figura 5 se presenta un ejemplo para ilustrar el método optimización por Objetivos en Cascada es el de un sistema mecánico simple compuesto por: tres resortes modelando subsistemas que corresponden a la carrocería (*body*), buje (*bushing*) y chasis (*chassis*) de un vehículo. Formalmente, el problema puede expresarse de la siguiente manera:

Minimizar

$$\|d - T\|, \tag{12}$$

Con respecto a $F_1, d_1, d_2, d_c, k_1, k_2, k_c, d$

Sujeto a las siguientes restricciones

$$h_1 = d_c - d_2 + d_1 = 0 \quad (13)$$

$$h_2 = d - d_2 = 0 \quad (14)$$

$$h_3 = F_1 - k_2 d_2 = 0 \quad (15)$$

$$h_4 = F - F_1 - k_1 d_1 = 0 \quad (16)$$

$$h_5 = F_1 + k_C d_C = 0 \quad (17)$$

$$k_2^l \leq k_2 \leq k_2^u, k_c^l \leq k_c \leq k_c^u, k_1^l \leq k_1 \leq k_1^u \quad (18)$$

El objetivo del sistema es calcular el desplazamiento vertical “d” debido a la aplicación de una fuerza externa “F”. Los objetivos de diseño del subsistema son los desplazamientos d_1 , d_2 , d_c y fuerza F_1 .

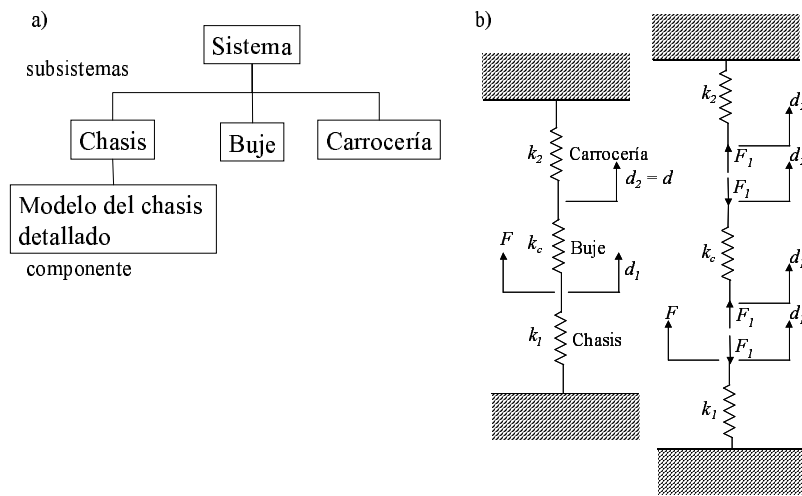


Figura 5. Ilustración del problema de diseño multidisciplinario de un sistema mecánico simple: a) Estructura jerárquica y, b) Diagrama esquemático. Michelena et al.⁴

A continuación, se presenta la formulación jerárquica de optimización (sistema, subsistema y componente) por el método de Objetivos en Cascada para el problema de diseño multidisciplinario de un sistema mecánico simple.

Sistema

Encontrar F_1 , d_1 , d_2 , d , ϵ

Que minimice

$$\|d - T\| + \epsilon \quad (19)$$

Sujeto a

$$h_2 = d - d_2 = 0, \|F_1 - F_1^L\| \leq \epsilon, \|d_1 - d_1^L\| \leq \epsilon, \|d_2 - d_2^L\| \leq \epsilon \quad (20)$$

Subsistema**Carrocería**

Encontrar F_1, d_2, k_2

Que minimice

$$\|d_2 - d_2^U\| + \|F_1 - F_1^U\| \quad (21)$$

Sujeto a

$$h_3 = F_1 - k_2 d_2 = 0, k_2^l \leq k_2 \leq k_2^u \quad (22)$$

Buje

Encontrar F_1, d_1, d_2, d_c, k_c

Que minimice

$$\|d_1 - d_1^U\| + \|d_2 - d_2^U\| + \|F_1 - F_1^U\| \quad (23)$$

Sujeto a

$$h_5 = F_1 + k_c d_c = 0, h_1 = d_c - d_2 + d_1 = 0, k_c^l \leq k_c \leq k_c^u \quad (24)$$

Chasis

Encontrar F_1, d_1, k_1, ϵ

Que minimice

$$\|d_1 - d_1^U\| + \|F_1 - F_1^U\| + \epsilon \quad (25)$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} h_4 = F - F_1 - k_1 d_1 = 0, \|F_1 - F_1^L\| \leq \epsilon, \\ \|d_1 - d_1^L\| \leq \epsilon, \|k_1 - k_1^L\| \leq \epsilon, k_1^l \leq k_1 \leq k_1^u \end{aligned} \quad (26)$$

Componente

Encontrar F_1, d_1, k_1, C, d_w

Que minimice

$$\|k_1 - k_1^U\| + \|d_1 - d_1^U\| + \|F_1 - F_1^U\| \quad (27)$$

Sujeto a

$$g_1 : 2,571 \cdot 10^4 C^{-1} d_w^2 k_1^{-1} \leq 1, g_2 : 3,64 \cdot 10^5 (F_1 k_1^{-2} + 0,5 k_1^{-1} d_1) C^{-5} \leq 1 \quad (28)$$

$$g_3 : 4,138 \cdot 10^{-6} C^3 d_w^{-1} k_1 \leq 1, g_4 : 0,05 C \leq 1, g_5 : 4 C^{-1} \leq 1 \quad (29)$$

$$g_6 : 8,12 \cdot 10^5 C^{-3} d_w^2 k_1^{-1} + 1,6 d_w \leq 1, g_7 : 0,05 (C d_w + d_w) \leq 1 \quad (30)$$

$$g_8 : C^{-1} + 0,75 C^{-1} d_w^{-1} \leq 1, g_9 : 0,004 d_w^{-1} \leq 1, \quad (31)$$

$$g_{10} : 4 d_w \leq 1, g_{11} : 3,448 \cdot 10^{-7} C^3 d_w^{-2} k_1 d_1 \leq 1 \quad (32)$$

Donde:

F_1 : fuerza interna

d_1 : desplazamiento del chasis

d_2 : desplazamiento de la carrocería. $d_2 = d$

d_c : desplazamiento relativo del buje. $d_c = d_2 - d_1$

k_1 : rigidez del chasis

k_c : rigidez del buje

k_2 : rigidez de la carrocería

d : desplazamiento de interés

C : índice de elasticidad del resorte del chasis

d_w : diámetro del alambre del resorte del chasis

U: upper level (nivel superior)

L: lower level (nivel inferior)

PARTE EXPERIMENTAL

Se estudian dos casos: el primero presenta un sistema gobernado por dos disciplinas acopladas (Cegarra, J., 2003) el cual es resuelto aplicando los enfoques Simple-SAND-SAND y Simple-SAND-NAND. El segundo caso consiste en un problema de programación geométrica presentado por Beightler, C and Phillips⁵, formada por una función objetivo cuadrática de catorce variables de diseño, cuatro restricciones de igualdad y seis restricciones de desigualdad. Este se resuelve por la técnica de optimización llamada Objetivos en Cascada comparando los resultados con los obtenidos por el enfoque AAO (All-At-Once: Simultáneo) propuesto por Cramer et al.¹.

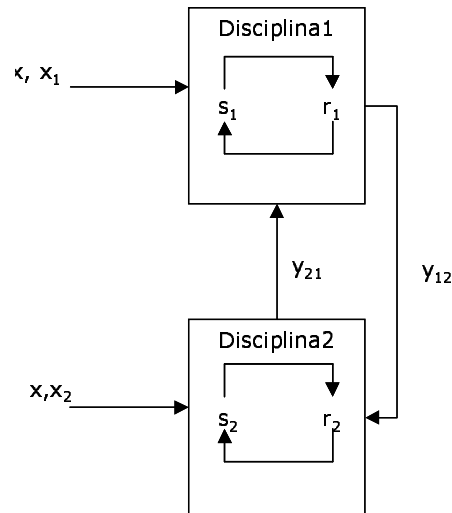


Figura 6. Sistema acoplado con dos disciplinas

Problema con dos disciplinas acopladas

La Figura 6 ilustra el problema considerado.

Formalmente, el problema puede expresarse de la siguiente manera:

Encontrar $x, x_1, x_2, y_{12}, y_{21}$

Tal que se minimice

$$f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (S_{oij} - S_{ij})^2 \quad (33)$$

Sujeto a las siguientes restricciones

$$g_1 < 0, \quad g_2 < 0, \quad (34)$$

$$f_1 < f_1^*, \quad f_2 < f_2^*, \quad (35)$$

$$r_1 = 0, \quad r_2 = 0, \quad (36)$$

Donde:

S_{oij} : elemento objetivo j del vector de variables de estado de la disciplina i

s_{ij} : elemento calculado j del vector de variables de estado de la disciplina i

m : número de iteraciones

x : variables globales a las dos disciplinas

f : función objetivo del sistema

f_1^* : es el límite impuesto a la función objetivo de la disciplina 1

f_2^* : es el límite impuesto a la función objetivo de la disciplina 2

x_1 : variables locales a la disciplina 1

x_2 : variables locales a la disciplina 2

s_1 : variables de estado de la disciplina 1

s_2 : variables de estado de la disciplina 2

r_1 : residual correspondiente a la solución de las ecuaciones de estado de la disciplina 1

r_2 : residual correspondiente a la solución de las ecuaciones de estado de la disciplina 2

y_{12}, y_{21} : son los vectores que contienen las variables de acoplamiento

El sistema inicial asociado a la disciplina 1 se representa de la forma: $A_1^*S_1 = B_1$. La matriz A_1 y el vector B_1 son generados aleatoriamente utilizando una función de MATLAB (rand) que genera una matriz de $n \times m$ componentes de números aleatorios; esto es, una secuencia de números, que aunque han sido establecidos determinísticamente tienen la apariencia de ser distribuidas al azar en un intervalo.

Esta matriz es descompuesta utilizando la Descomposición de Valores Singulares SVD (Singular Value Decomposition) para obtener el producto de matrices: $Q_1 * \Sigma_1 * Q_2^T$. La descomposición se lleva a cabo mediante la función svd de MATLAB de la forma $[Q_1, \Sigma_1, Q_2] = \text{svd}(A_1)$ donde se produce una matriz diagonal Σ_1 de la misma dimensión que A_1 , con elementos diagonales no negativos en orden descendente, y matrices unitarias Q_1 y Q_2 tal que $A_1 = Q_1 * \Sigma_1 * Q_2^T$.

Los elementos que componen las matrices Q_1 y Q_2^T representan las variables globales (comunes) a las dos disciplinas; este es el vector de variables x .

Las variables locales a la disciplina 1 (x_1), se encuentran representadas por los elementos de la matriz diagonal Σ_1 . El vector B_1 representa las variables de acoplamiento y_{21} ; en este caso, se considera constituido por las variables de estado correspondientes a la solución del sistema lineal asociado con la disciplina 2.

El sistema lineal asociado a la disciplina 2 se representa de la forma: $A_2^*S_2 = B_2$. La matriz A_2 igualmente se descompone como las matrices Q_1, Σ_2, Q_2^T , donde las variables locales a esta disciplina corresponden a los elementos de la matriz Σ_2 . El vector B_2 representa las variables de acoplamiento y_{12} ; en este caso, se considera constituido por las variables de estado correspondiente a la solución del sistema lineal asociado con la disciplina 1.

La solución de referencia (“solución óptima”) correspondiente a este problema se construye de la siguiente manera:

1. Fije la dimensión de los sistemas lineales.
2. Genere la matriz A_1 de manera aleatoria y obtenga las matrices: Q_1, Σ_1, Q_2^T .
3. Genere el vector S_1 de manera aleatoria.
4. Obtenga el vector $B_1 = A_1^*S_1$. Este vector se hace igual a S_2 .
5. Obtenga $\Sigma_2 = Q_1^T * S_1 * S_2^{-1} * Q_2$ de manera que se cumpla $Q_1^T * \Sigma_2 * Q_2^T * S_2 \cong S_1$.

Los valores de la variable x , x_1, x_2 , se encuentran en las matrices Q_1, Σ_1 y Σ_2 , respectivamente.

Construcción de la solución

$$1. \quad n = 2 \quad (37)$$

2.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0,2567 & -0,9665 \\ 0,9665 & 0,2567 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 8,5311 & 0 \\ 0 & 0,4689 \end{pmatrix}$$

$$Q_2^T = \begin{pmatrix} 0,2567 & 0,9665 \\ -0,9665 & 0,2567 \end{pmatrix}$$

3.

$$S_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

4.

$$S_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 36 \end{pmatrix} = B_1$$

5.

$$\Sigma_2 = \begin{pmatrix} 0,2301 & 0 \\ 0 & 0,0811 \end{pmatrix}$$

En la Tabla I se muestran los valores óptimos (V_o) y los valores iniciales (V_i) de las variables para la solución del problema, donde $V_i = V_o + 0,3*V_o$ si i es impar y $V_i = V_o - 0,3*V_o$ si i es par.

| | Variables | Valores Óptimos(V_o) | Valores Iniciales(V_i) |
|----|------------|--------------------------|----------------------------|
| 1 | x_1 | 0,2567 | 0,3337 |
| 2 | x_2 | -0,9665 | -0,6766 |
| 3 | x_3 | 0,9665 | 1,2565 |
| 4 | x_4 | 0,2567 | 0,1797 |
| 5 | x_1^1 | 8,5311 | 11,0904 |
| 6 | x_2^1 | 0,4689 | 0,3282 |
| 7 | x_1^2 | 0,2301 | 0,2991 |
| 8 | x_2^2 | 0,0811 | 0,0568 |
| 9 | y_{12}^1 | 2,0000 | 3,0000 |
| 10 | y_{12}^2 | 4,0000 | 3,0000 |
| 11 | y_{21}^1 | 10,0000 | 13,0000 |
| 12 | y_{21}^2 | 36,0000 | 25,0000 |

Tabla I. Valores óptimos y valores iniciales de las variables

Las Figuras 7 y 8 representan los diagramas de flujo asociados a los enfoques Simple-SAND-SAND y Simple-SAND-NAND aplicados al problema considerado. Los diagramas referidos a dichos enfoques se pueden detallar en los pasos siguientes:

1. Inicialización de las variables (V_i).
2. Calcular s_1^1 y s_1^2 , es decir el vector S_1 que representa variables de estado de la disciplina 1.
3. Calcular s_2^1 y s_2^2 , es decir el vector S_2 que representa variables de estado de la disciplina 2.
4. Calcular la función objetivo $f = \sum \sum (s_{oij} - s_{ij})^2$
5. Comparar: Si el valor absoluto de la diferencia entre f y f_{ant} (valor anterior de la función objetivo) es menor a ϵ (error) entonces mostrar solución y finalizar, de lo contrario, actualizar los valores de las variables, calcular la matriz gradiente para obtener nuevos valores de las variables e ir al paso 2.

Para el cálculo de la matriz gradiente se recurrió a una función de MATLAB (`fminu`) que consiste en minimizar una función sin restricciones utilizando el método del gradiente. En este caso, el gradiente de la función g en un punto P viene dado por el vector que sale del punto P y sus componentes son las derivadas parciales de la función en dicho punto.

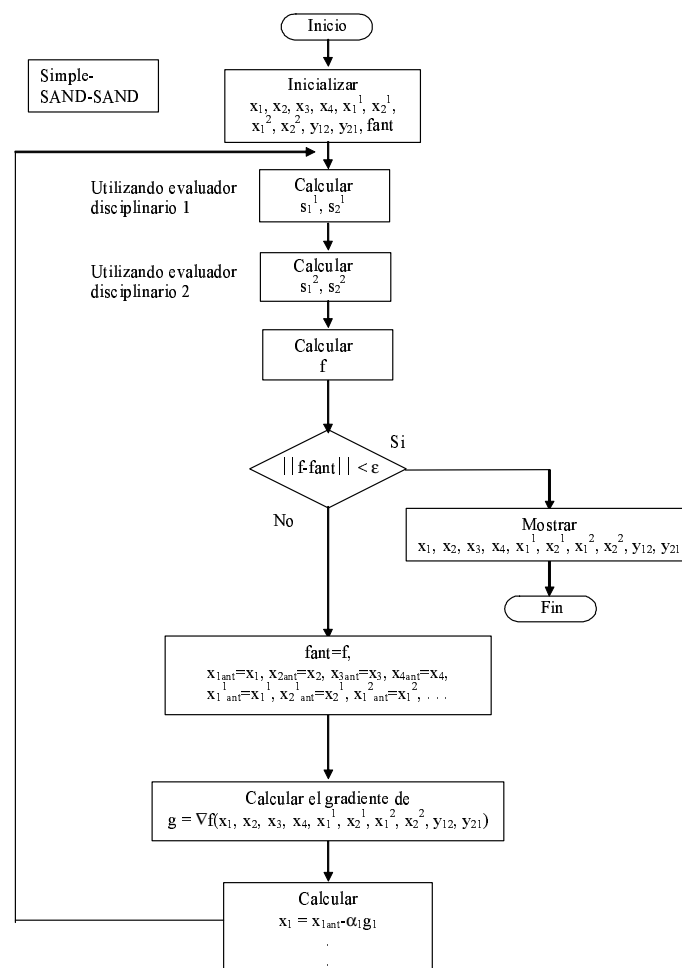


Figura 7. Diagrama de flujo del enfoque Simple-SAND-SAND

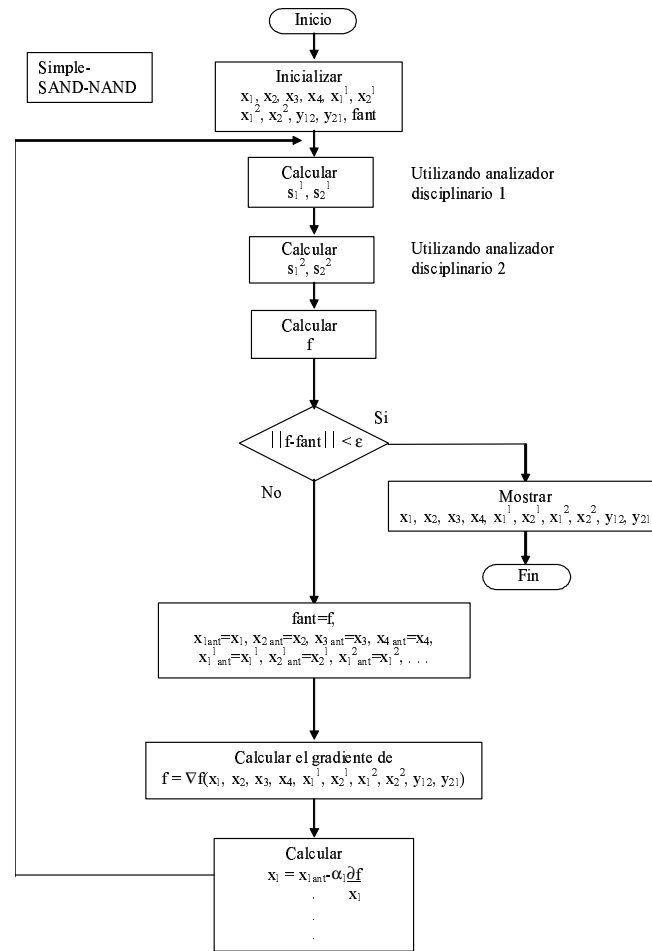


Figura 8. Diagrama de flujo del enfoque Simple-SAND-NAND

Los analizadores y evaluadores disciplinarios de ambos enfoques Simple-SAND-SAND y Simple-SAND-NAND son modelados utilizando sistemas lineales. Los analizadores corresponden a soluciones exactas del sistema lineal con un residual igual a cero, mientras que los evaluadores corresponden a soluciones aproximadas. Esto hace que el esfuerzo computacional requerido por el evaluador disciplinario sea significativamente menor que el necesitado por el analizador disciplinario, debido al número de iteraciones que requiere ejecutar para obtener soluciones exactas del sistema lineal.

Problema de programación geométrica

El problema de programación geométrica considerado tiene una función objetivo cuadrática de catorce variables de diseño, cuatro restricciones de igualdad “h” y seis restricciones de desigualdad “g”.

El problema antes mencionado se representa de la siguiente manera:

Encontrar x_1, x_2, \dots, x_{14}
 De manera que se minimice

$$f = x_1^2 + x_2^2 \tag{38}$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

$$g_1 : \frac{x_3^{-2} + x_4^2}{x_5^2} \leq 1 \quad g_2 : \frac{x_5^2 + x_6^{-2}}{x_7^2} \leq 1 \quad (39)$$

$$g_3 : \frac{x_8^2 + x_9^2}{x_{11}^2} \leq 1 \quad g_4 : \frac{x_8^{-2} + x_{10}^2}{x_{11}^2} \leq 1 \quad (40)$$

$$g_5 : \frac{x_{11}^2 + x_{12}^{-2}}{x_{13}^2} \leq 1 \quad g_6 : \frac{x_{11}^2 + x_{12}^2}{x_{14}^2} \leq 1 \quad (41)$$

$$h_1 : x_1^2 = x_3^2 + x_4^{-2} + x_5^2 \quad (42)$$

$$h_2 : x_2^2 = x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 \quad (43)$$

$$h_3 : x_3^2 = x_8^2 + x_9^{-2} + x_{10}^2 + x_{11}^2 \quad (44)$$

$$h_4 : x_6^2 = x_{11}^2 + x_{12}^2 + x_{13}^2 + x_{14}^2 \quad (45)$$

$$x_1, x_2, \dots, x_{14} \geq 0$$

La Figura 9 muestra una partición del problema original para su solución bajo el método de optimización por Objetivos en Cascada (*Target Cascading*).

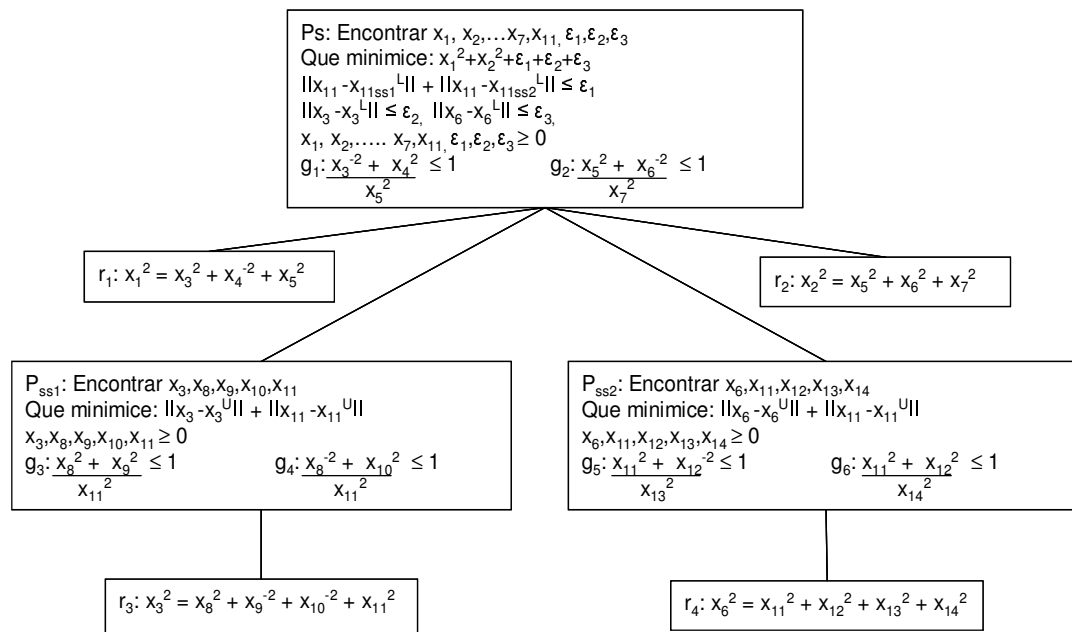


Figura 9. Partición del problema de programación geométrica para la aplicación del método de optimización por Objetivos en Cascada

El nivel superior corresponde al sistema y los niveles inferiores a los subsistemas. Los modelos de análisis del nivel de sistema toman las variables de diseño x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 de los subsistemas y retornan la respuesta x_1, x_2 . Los modelos de análisis del nivel de los subsistemas toman las variables de diseño $x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}$ del componente, y retornan la respuesta x_3, x_6 . La variable de acoplamiento entre el nivel de sistema y los subsistemas es x_{11} . Los valores de tolerancias son $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$.

RESULTADOS

En las Tablas II y III se muestran los resultados de la solución del problema con dos disciplinas acopladas utilizando los métodos Simple-SAND-SAND y Simple-SAND-NAND, respectivamente. Las Tablas IV y V muestran la evolución de las soluciones obtenidas bajo los enfoques Simple-SAND-SAND y Simple-SAND-NAND.

| | ÓPTIMOS | SOLUCIÓN OBTENIDA |
|------------|---------|-------------------|
| x_1 | 0,2567 | 0,2171 |
| x_2 | 0,9665 | 1,1793 |
| x_3 | -0,9665 | -1,5051 |
| x_4 | 0,2567 | 0,4307 |
| x_1^1 | 8,5311 | 11,0272 |
| x_2^1 | 0,4689 | 0,6719 |
| x_1^2 | 0,2301 | 0,2993 |
| x_2^2 | 0,0811 | 0,0555 |
| y_{12}^1 | 2,0000 | 2,0000 |
| y_{12}^2 | 4,0000 | 4,0000 |
| y_{21}^1 | 10,0000 | 10,0010 |
| y_{21}^2 | 36,0000 | 36,0035 |

Tabla II. Solución obtenida por el método Simple-SAND-SAND Luego de 119 iteraciones con $\epsilon = 0,001$

| | ÓPTIMOS | SOLUCIÓN OBTENIDA |
|------------|---------|-------------------|
| x_1 | 0,2567 | 0,1101 |
| x_2 | 0,9665 | 1,2516 |
| x_3 | -0,9665 | -0,7900 |
| x_4 | 0,2567 | 0,2138 |
| x_1^1 | 8,5311 | 11,0867 |
| x_2^1 | 0,4689 | 0,4546 |
| x_1^2 | 0,2301 | 0,2991 |
| x_2^2 | 0,0811 | 0,0568 |
| y_{12}^1 | 2,0000 | 2,0000 |
| y_{12}^2 | 4,0000 | 4,0000 |
| y_{21}^1 | 10,0000 | 10,0000 |
| y_{21}^2 | 36,0000 | 36,0000 |

Tabla III. Solución obtenida por el método Simple-SAND-NAND Luego de 96 iteraciones con un $\epsilon = 0,001$

| No Iteración | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_1^1 | x_2^1 | x_1^2 | x_2^2 | y_{12}^1 | y_{12}^2 | y_{21}^1 | y_{21}^2 |
|--------------|---------|---------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|------------|------------|------------|------------|
| 1 | 0,3370 | -0,6766 | 1,2565 | 0,1797 | 11,0904 | 0,3282 | 0,2991 | 0,0568 | 3,0000 | 3,0000 | 13,0000 | 25,0000 |
| 19 | -1,9773 | -1,8293 | 1,2070 | 0,5256 | 11,0524 | 1,6107 | 0,2987 | 0,0587 | 2,9983 | 3,0021 | 13,0036 | 25,0230 |
| 20 | -0,7503 | -1,2182 | 1,2333 | 0,3422 | 11,0726 | 0,9308 | 0,2989 | 0,0577 | 2,9992 | 3,0010 | 13,0017 | 25,0108 |
| 21 | -0,1336 | -0,9110 | 1,2464 | 0,2500 | 11,0827 | 0,5890 | 0,2990 | 0,0572 | 2,9996 | 3,0004 | 13,0007 | 25,0047 |
| 38 | -0,1255 | -0,9192 | 1,2464 | 0,2506 | 11,0824 | 0,5970 | 0,2990 | 0,0572 | 2,9992 | 3,0008 | 12,9996 | 25,0092 |
| 39 | -0,1038 | -0,9410 | 1,2464 | 0,2522 | 11,0817 | 0,6182 | 0,2990 | 0,0572 | 2,9982 | 3,0019 | 12,9965 | 25,0212 |
| 40 | -0,0403 | -1,0050 | 1,2462 | 0,2567 | 11,0795 | 0,6804 | 0,2990 | 0,0573 | 2,9950 | 3,0051 | 12,9875 | 25,0564 |
| 41 | 0,0944 | -1,1405 | 1,2458 | 0,2664 | 11,0748 | 0,8122 | 0,2990 | 0,0574 | 2,9883 | 3,0119 | 12,9685 | 25,1309 |
| 42 | 0,3649 | -1,4126 | 1,2450 | 0,2857 | 11,0655 | 1,0769 | 0,2989 | 0,0577 | 2,9748 | 3,0254 | 12,9303 | 25,2807 |
| 43 | 0,9864 | -2,0380 | 1,2432 | 0,3302 | 11,0442 | 1,6852 | 0,2988 | 0,0584 | 2,9438 | 3,0565 | 12,8424 | 25,6248 |
| 44 | 0,2427 | -1,2897 | 1,2454 | 0,2770 | 11,0697 | 0,9573 | 0,2990 | 0,0576 | 2,9809 | 3,0193 | 12,9475 | 25,2130 |
| 61 | 0,2411 | -1,3027 | 1,2413 | 0,2863 | 11,0671 | 0,9400 | 0,2990 | 0,0575 | 2,9195 | 3,0807 | 12,7633 | 25,8892 |
| 62 | 0,2120 | -1,5384 | 1,1676 | 0,4549 | 11,0200 | 0,6258 | 0,2994 | 0,0553 | 1,8079 | 4,1917 | 9,4292 | 38,1242 |
| 63 | 0,1566 | -1,9867 | 1,0273 | 0,7757 | 10,9303 | 0,0280 | 0,3002 | 0,0512 | -0,3072 | 6,3057 | 3,0850 | 61,4053 |
| 64 | 0,2166 | -1,5011 | 1,1792 | 0,4282 | 11,0275 | 0,6755 | 0,2993 | 0,0556 | 1,9837 | 4,0160 | 9,9564 | 36,1895 |
| 81 | 0,2168 | -1,5029 | 1,1792 | 0,4293 | 11,0273 | 0,6738 | 0,2993 | 0,0555 | 1,9910 | 4,0090 | 9,9744 | 36,1035 |
| 82 | 0,2171 | -1,5059 | 1,1793 | 0,4311 | 11,0271 | 0,6712 | 0,2993 | 0,0555 | 2,0028 | 3,9977 | 10,0033 | 35,9648 |
| 83 | 0,2181 | -1,5146 | 1,1794 | 0,4364 | 11,0266 | 0,6634 | 0,2993 | 0,0554 | 2,0371 | 3,9647 | 10,0877 | 35,5604 |
| 119 | 0,2171 | -1,5051 | 1,1793 | 0,4307 | 11,0272 | 0,6719 | 0,2993 | 0,0555 | 2,0000 | 4,0000 | 10,0010 | 36,0035 |

Tabla IV. Evolución de la solución bajo el enfoque Simple-SAND-SAND

| No Iteración | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_1^1 | x_2^1 | x_1^2 | x_2^2 | y_{12}^1 | y_{12}^2 | y_{21}^1 | y_{21}^2 |
|--------------|---------|---------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|------------|------------|------------|------------|
| 1 | 0,3370 | -0,6766 | 1,2565 | 0,1797 | 11,0904 | 0,3282 | 0,2991 | 0,0568 | 3,0000 | 3,0000 | 13,0000 | 25,0000 |
| 19 | -4,0915 | -2,8824 | 1,1619 | 0,8414 | 11,0178 | 2,7830 | 0,2991 | 0,0568 | 2,6298 | 3,3702 | 11,8982 | 29,0796 |
| 20 | -0,0446 | -0,8667 | 1,2483 | 0,2367 | 11,0841 | 0,5397 | 0,2991 | 0,0568 | 2,9681 | 3,0319 | 12,9051 | 25,3516 |
| 21 | 0,0212 | -0,8339 | 1,2498 | 0,2269 | 11,0852 | 0,5032 | 0,2991 | 0,0568 | 2,9736 | 3,0264 | 12,9214 | 25,2909 |
| 22 | -0,0446 | -0,8667 | 1,2483 | 0,2367 | 11,0841 | 0,5397 | 0,2991 | 0,0568 | 2,9681 | 3,0319 | 12,9051 | 25,3516 |
| 39 | -0,0221 | -0,8554 | 1,2488 | 0,2334 | 11,0845 | 0,5272 | 0,2991 | 0,0568 | 2,8259 | 3,1741 | 12,4782 | 26,9158 |
| 40 | 0,1396 | -0,7749 | 1,2523 | 0,2092 | 11,0872 | 0,4376 | 0,2991 | 0,0568 | 1,8064 | 4,1936 | 9,4186 | 38,1296 |
| 41 | 0,4713 | -0,6097 | 1,2594 | 0,1597 | 11,0926 | 0,2538 | 0,2991 | 0,0568 | -0,2848 | 6,2848 | 3,1429 | 61,1300 |
| 42 | 0,1137 | -0,7878 | 1,2517 | 0,2131 | 11,0867 | 0,4520 | 0,2991 | 0,0568 | 1,9700 | 4,0300 | 9,9096 | 36,3299 |
| 43 | 0,1148 | -0,7878 | 1,2517 | 0,2131 | 11,0867 | 0,4520 | 0,2991 | 0,0568 | 1,9700 | 4,0300 | 9,9096 | 36,3299 |
| 59 | 0,1132 | -0,7886 | 1,2517 | 0,2133 | 11,0867 | 0,4529 | 0,2991 | 0,0568 | 1,9801 | 4,0199 | 9,9401 | 36,2191 |
| 60 | 0,1091 | -0,7907 | 1,2516 | 0,2139 | 11,0866 | 0,4552 | 0,2991 | 0,0568 | 2,0060 | 3,9940 | 10,0185 | 35,9341 |
| 61 | 0,0987 | -0,7958 | 1,2514 | 0,2155 | 11,0865 | 0,4608 | 0,2991 | 0,0568 | 2,0709 | 3,9291 | 10,2145 | 35,2219 |
| 62 | 0,1101 | -0,7902 | 1,2516 | 0,2138 | 11,0867 | 0,4546 | 0,2991 | 0,0568 | 2,0000 | 4,0000 | 10,0004 | 36,0001 |
| 63 | 0,1105 | -0,7902 | 1,2516 | 0,2138 | 11,0867 | 0,4546 | 0,2991 | 0,0568 | 2,0000 | 4,0000 | 10,0004 | 36,0001 |
| 64 | 0,1101 | -0,7900 | 1,2516 | 0,2138 | 11,0867 | 0,4546 | 0,2991 | 0,0568 | 2,0000 | 4,0000 | 10,0004 | 36,0001 |
| 96 | 0,1101 | -0,7900 | 1,2516 | 0,2138 | 11,0867 | 0,4546 | 0,2991 | 0,0568 | 2,0000 | 4,0000 | 10,0000 | 36,0000 |

Tabla V. Evolución de la solución bajo el enfoque Simple-SAND-NAND

En la Tabla VI, se presentan las soluciones obtenidas del problema de programación geométrica utilizando los métodos AAO (All-At-Once) y Objetivos en Cascada.

| Variabes | AAO | TC | TC2 |
|-----------------|-------|--------|--------|
| x ₁ | 2,84 | 2,23 | 2,23 |
| x ₂ | 3,09 | 2,04 | 2,04 |
| x ₃ | 2,36 | 2,25 | 2,30 |
| x ₄ | 0,76 | 0,76 | 0,76 |
| x ₅ | 0,87 | 1,02 | 1,02 |
| x ₆ | 2,81 | 1,68 | 2,10 |
| x ₇ | 0,94 | 1,34 | 1,34 |
| x ₈ | 0,97 | 0,95 | 0,95 |
| x ₉ | 0,87 | 1,00 | 0,99 |
| x ₁₀ | 0,80 | 0,89 | 0,88 |
| x ₁₁ | 1,30 | 1,38 | 1,37 |
| x ₁₂ | 0,84 | 0,84 | 0,84 |
| x ₁₃ | 1,76 | 1,19 | 1,37 |
| x ₁₄ | 1,55 | 0,84 | 1,10 |
| f | 17,52 | 15 | 16,01 |
| ε ₁ | N/A | 1,3766 | 0,6901 |
| ε ₂ | N/A | 0,7915 | 0,7916 |
| ε ₃ | N/A | 0,5290 | 0,9070 |

Tabla VI. Soluciones obtenidas bajo el enfoque de AAO (All-At-Once) y Objetivos en Cascada (TC)

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En el problema con dos disciplinas acopladas, la solución bajo el enfoque Simple-SAND-NAND resulta en una mejor aproximación a la solución real cuando se le compara con la correspondiente al enfoque Simple-SAND-SAND.

En la primera aplicación del método de optimización en cascada (TC) en el problema de programación geométrica, los valores iniciales de las variables x_1, x_2, \dots, x_{14} son iguales a cero. En la segunda aplicación (TC2) los valores iniciales de las variables x_1, x_2, \dots, x_{14} son los resultados de la primera aplicación. Note que la solución mejora para una segunda aplicación del método de optimización por Objetivos en Cascada con un valor de la función objetivo igual a 16.01, haciendo que la solución óptima se acerque más a la solución real; la cual es óptima, única y global de acuerdo al teorema fundamental de la programación convexa de Tuy⁶ y Luenberger⁷. El error correspondiente al valor de la función objetivo obtenido por el método Objetivos en Cascada es del 8.62%.

CONCLUSIONES

En este trabajo, se codificaron dos de los enfoques descritos en el trabajo de Balling y Sobieszczanski-Sobieski³, Simple-SAND-SAND y Simple-SAND-NAND; así como, la técnica de optimización propuesta por Michelen et al.⁴ denominada Objetivos en Cascada. Posteriormente, se evaluó su desempeño relativo utilizando casos de estudio seleccionados de optimización multidisciplinaria.

El trabajo presenta los resultados obtenidos de la aplicación de los enfoques codificados sobre casos de estudio seleccionados y representa un primer paso hacia una mejor comprensión de los métodos para la solución de problemas de diseño multidisciplinario.

Futuros trabajos en esta área deben codificar el resto de los enfoques descritos para optimización multidisciplinaria y evaluar su desempeño relativo sobre un conjunto de casos de estudios más amplio.

AGRADECIMIENTOS

A los profesores del Instituto de Cálculo Aplicado (ICA), Postgrado de Ingeniería, por sus excelentes asesorías.

REFERENCIAS

- 1 E. Cramer, J. Dennis, P. Frank, R. Lewis, y G. Shubin, "Problem Formulation for Multidisciplinary Optimization", *SIAM Journal of Optimization*, USA, (1994).
- 2 J. Sobieszczanski-Sobieski, "*Optimization by Decomposition: A Step from Hierarchic to Non-Hierarchic Systems*", NASA, USA, (1989).
- 3 J. Sobieszczanski-Sobieski, R. Balling, "*Optimization of coupled system: a critical overview of approach*", NASA, USA, (1996).
- 4 M. Michelena, H. Min, T. Jiang y P. Papalambros, "Target Cascading in optimal System design", *Proceedings of DETC 2000, 26th Design Automation Conference*, USA, (2000).
- 5 C. Beightler y D. Phillips, "*Applied Geometric Programming*", John Wiley and Sons, Inc., New York, USA, (1976).
- 6 H. Tuy, "Convex Analysis and Global Optimization. Kluwer Academia", (1998).
- 7 D. Luenberger, "*Introduction to Linear and Nonlinear Programming*", 2da. Edición, Addison Wesley, (1984).