

# CÁLCULO DE FACTORES DE INTENSIDAD DE TENSIÓN ESTÁTICOS Y DINÁMICOS MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO CON FORMULACIÓN HIPERSINGULAR

FRANCISCO CHIRINO GODOY\*  
y  
RAMÓN ABASCAL GARCÍA\*\*

\* *Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales  
Carretera de Tarifa Baja s/n  
35017 Las Palmas de Gran Canaria, España  
E-mail: chirino@cicei.ulpgc.es*

\*\* *Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales  
Grupo de Estructuras  
Camino de los Descubrimientos s/n, 41092 Sevilla, España  
Tel: + 34-95-448 7293/94, Fax: + 34-95-448 7295  
E-mail: abascal@cica.es*

## RESUMEN

En el presente trabajo se propone y estudia una metodología de cálculo de *Factores de Intensidad de Tensión* dinámicos, en el dominio de la frecuencia, basada en el *Método de los Elementos de Contorno Mixto*, es decir en la mezcla de ecuaciones correspondientes a las representaciones integrales de los desplazamientos y las tracciones. Se comienza presentando las expresiones de los núcleos hipersingulares y separando sus partes singular y no singular; a continuación se construye un elemento *Singular Quarter Point* discontinuo; y se termina realizando estudios paramétricos a aplicaciones que ponen de manifiesto la sencillez y exactitud del método propuesto tanto en problemas estáticos como dinámicos.

### **Palabras clave:**

Factor de intensidad de tensión, formulación hipersingular, mecánica de la fractura, método de los elementos de contorno mixto, dinámica.

## STATIC AND DYNAMIC STRESS INTENSITY FACTORS COMPUTATIONS BY THE HIPERSINGULAR ELEMENT METHOD

### SUMMARY

The Mixed Boundary Element Method, a combination of the equations corresponding to the integral representations of displacements and tractions, is used to propose and evaluate

Recibido: Abril 1997

a new methodology for computing dynamic Stress Intensity Factors in the frequency domain. The paper starts presenting the hypersingular fundamental solution, extracting their singular parts, and constructing a new discontinuous *Singular Quarter Point* element. Finally, various parametric computations and applications are described to illustrate the simplicity and accuracy of the proposed method as applied to both static and dynamic problems.

## INTRODUCCIÓN

La determinación de los *Factores de Intensidad de Tensión (FIT)*, estáticos y dinámicos es de gran interés en la actualidad en la mecánica de la fractura. Muchos esfuerzos investigadores se han realizado en este campo tanto desde el punto de vista teórico como numérico. Desde la perspectiva numérica se han desarrollado distintas aproximaciones sobre todo basadas en el *Método de los Elementos Finitos (MEF)* y en el *Método de los Elementos de Contorno (MEC)*, siendo ambas alternativas válidas y potentes para el análisis de estos problemas.

El *MEC* posee una serie de características que lo hacen especialmente adecuado para el cálculo de *FIT* en materiales frágiles con comportamiento lineal, existiendo en la actualidad una extensa literatura al respecto<sup>1,2,3</sup>, siendo en este método en el que se basan los trabajos aquí presentados.

El desarrollo de elementos con funciones de forma específicas que permiten representar muy aproximadamente la variación de los desplazamientos y tracciones en las cercanías de los vértices de la grieta, tales como los elementos *Quarter Point (QP)* y *Singular Quarter Point (SQP)*, ha permitido un avance considerable en la aplicabilidad del *MEC* al cálculo de *FIT*. Los primeros elementos de este tipo dentro del *MEC* fueron desarrollados en estática por Martínez y Domínguez<sup>4</sup>, que se basaron en desarrollos anteriores realizados en el *MEF* e incorporaron la representación singular de las tracciones. Posteriormente fueron usados para resolver problemas dinámicos en el dominio de la frecuencia por Chirino y Domínguez<sup>5</sup> y para problemas transitorios por Domínguez y Gallego<sup>6</sup>. Estos elementos también han sido utilizados con el *Método de la Reciprocidad Dual*, mostrándose una comparación entre resultados de problemas transitorios en el trabajo de Chirino, Gallego, Sáez y Domínguez<sup>7</sup>.

Recientemente el auge de las formulaciones hipersingulares ha permitido desarrollar nuevas posibilidades dentro del *MEC*. Sáez Gallego y Domínguez<sup>8</sup> calcularon *FIT* en problemas estáticos mediante una formulación mixta similar a la propuesta por Portela, Aliabadi y Rooke<sup>9</sup> y desarrollaron un elemento *QP* hipersingular discontinuo que permite modelar el problema sin el uso de elementos *SQP*. Esta técnica mixta consiste en utilizar la representación integral de los desplazamientos para un borde de la grieta y de las tracciones, formulación hipersingular, para el otro, generándose ecuaciones similares, pero no iguales, para cada par de puntos de colocación de la grieta, que permiten resolver el problema; además como los elementos discontinuos que se utilizan tienen un punto de colocación muy cercano al vértice de la grieta, se puede calcular el *FIT* a partir de sus desplazamientos, apertura de grieta, con mucha exactitud y sin necesidad de conocer las tensiones en la parte interna del material, datos imprescindibles para prácticamente todas las formulaciones existentes hasta entonces.

Este método mixto, llamado también dual al usar las dos representaciones integrales

simultáneamente, ha sido usado recientemente por Fedelinski, Aliabadi y Rooke para resolver problemas dinámicos transitorios en el dominio del tiempo directamente<sup>10</sup> o mediante la transformada de Laplace<sup>11</sup>. En esta última referencia se presenta una solución similar a la propuesta aquí, habiendo sido publicada cuando este trabajo ya estaba finalizado.

En el presente artículo se propone una formulación hipersingular para problemas dinámicos bidimensionales en el dominio de la frecuencia y se realiza el aislamiento de la parte singular de sus núcleos. También se presenta el elemento discontinuo *SQP* para ella, que es sobre todo de utilidad cuando la grieta está a lo largo de una interfase y en problemas de propagación. Estudios paramétricos sobre problemas estáticos y dinámicos de mecánica de la fractura complementan la formulación y proporcionan criterios para su uso, dando idea de su fácil uso y de la exactitud que proporciona.

### REPRESENTACIÓN INTEGRAL DE LOS DESPLAZAMIENTOS

Los desplazamientos de un punto  $\xi$  de un dominio  $\Omega$  correspondientes a un problema armónico pueden ser representados en forma integral para cada frecuencia  $\omega$  como

$$c_{ik}(\xi)u_k(\xi; \omega) + \int_{\Gamma} p_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi; \omega)u_k(\mathbf{x}; \omega)d\Gamma(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} u_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi; \omega)p_k(\mathbf{x}; \omega)d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (1)$$

supuesto que las fuerzas de volumen son nulas.

La integración en la ecuación anterior ha de entenderse en el sentido de valor principal de Cauchy y en ella  $u_k(\mathbf{x}; \omega)$  y  $p_k(\mathbf{x}; \omega)$  son las componentes  $k$  de los desplazamientos y tracciones, respectivamente, de un punto cualquiera  $\mathbf{x}$  del contorno para una frecuencia  $\omega$ ;  $c_{ik}(\xi) = \delta_{ik}$  si el punto  $\xi$  es interno al dominio  $\Omega$ ,  $c_{ik}(\xi) = 1/2\delta_{ik}$  si  $\xi$  pertenece al contorno y éste es suave y  $c_{ik}(\xi) = 0$  si  $\xi$  es exterior al dominio.

Las funciones  $p_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi; \omega)$  y  $u_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi; \omega)$  son las soluciones fundamentales del problema elástico correspondiente a una carga puntual armónica de frecuencia  $\omega$  situada en el punto  $\xi$  en la dirección  $i$ , siendo sus expresiones para el caso bidimensional

$$u_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi; \omega) = \frac{1}{2\pi u} [\psi \delta_{ik} - \chi r_{,i} r_{,k}] \quad (2)$$

$$p_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi; \omega) = \frac{1}{2\pi} \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\chi}{r} \right) \left( \delta_{ik} \frac{\partial r}{\partial \eta} + r_{,k} \eta_i \right) - 2 \frac{\chi}{r} \left( r_{,i} \eta_k - 2 r_{,i} r_{,k} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) - \right. \\ \left. - 2 \frac{\partial \chi}{\partial r} r_{,i} r_{,k} \frac{\partial r}{\partial \eta} + \left( \frac{c_p^2}{c_s^2} - 2 \right) \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial \chi}{\partial r} + -\frac{\chi}{r} \right) r_{,i} \eta_k \right] \quad (3)$$

donde  $\psi$  y  $\chi$  son

$$\psi = K_0(z_s) + \frac{1}{z_s} \left[ K_1(z_s) - \frac{c_s}{c_p} K_1(z_p) \right] \quad (4)$$

$$\chi = \left[ K_0(z_s) + \frac{2}{z_s} K_1(z_s) \right] - \frac{c_s^2}{c_p^2} \left[ K_0(z_p) + \frac{2}{z_p} K_1(z_p) \right] \tag{5}$$

$$z_s = \frac{i\omega r}{c_s}; \quad z_p = \frac{i\omega r}{c_p}; \quad i = \sqrt{-1} \tag{6}$$

siendo  $\mu$  el módulo de elasticidad transversal  $c_s$  y  $c_p$  las velocidades de las ondas  $S$  y  $P$  respectivamente,  $r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$  es el radio vector entre el punto de aplicación de la carga  $\boldsymbol{\xi}$  y el punto de cálculo  $\mathbf{x}$ ;  $r_{,i}$  su derivada respecto de la coordenada  $x_i$ ;  $\eta_k$  la componente  $k$  de la normal al contorno en el punto  $\mathbf{x}$  y  $K_\alpha(z)$  son funciones modificadas de Bessel, cuyos desarrollos para  $z \rightarrow 0$  se pueden expresar por

$$K_0(z) = f_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ f_0(z) + \sum_{n=1}^{n=k} \frac{1}{n} \right] \frac{1}{(k!)^2} \left( \frac{z}{2} \right)^{2k} \tag{7}$$

$$K_1(z) = f_1(z) - \sum_{k=1}^{\infty} \left[ f_0(z) + \frac{1}{2(k+1)} + \sum_{n=1}^{n=k} \frac{1}{n} \right] \frac{1}{k!(k+1)!} \left( \frac{z}{2} \right)^{2k} \tag{8}$$

donde las partes iniciales de los desarrollos son

$$f_0(z) = -\ln \frac{z}{2} - \gamma, \quad f_1(z) = \frac{1}{z} - \frac{z}{2} \left( f_0(z) + \frac{1}{2} \right) \tag{9}$$

siendo  $\gamma$  la constante de Euler.

En el caso estático, la solución fundamental es

$$u_{ik}^* \text{estático} = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \ln \left( \frac{1}{r} \right) \delta_{ik} + r_{,i} r_{,k} \right] \tag{10}$$

$$p_{ik}^* \text{estático} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial r}{\partial \eta} \left( (1-2\nu)\delta_{ik} + 2r_{,i} r_{,k} \right) - (1-2\nu)(r_{,i} \eta_k - r_{,k} \eta_i) \right] \tag{11}$$

siendo  $\nu$  el módulo de Poisson.

El tratamiento numérico a dar a los núcleos  $u_{ik}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}; \omega)$  y  $p_{ik}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}; \omega)$  ha sido estudiado por diversos autores, habiéndose concluido que una de las formas más ventajosas de tratarlos es descomponerlos en su parte singular y no singular, sobre todo para realizar su integración, pudiendo encontrarse en la literatura diversas propuestas entre las que podemos destacar la de la Dominguez<sup>1</sup>.

### REPRESENTACIÓN INTEGRAL DE LAS TRACCIONES

La representación integral de las tracciones de un problema armónico puede ser calculada a partir de la derivación de la representación integral de los desplazamientos de un punto  $\xi$  del interior del dominio  $\Omega$ , ecuación (1), el cálculo a partir de estas derivadas del tensor de tensiones  $\sigma_{ij}(\xi)$  por medio de la ley de Hooke, y la determinación de las tracciones referidas a la normal  $N_j(\xi)$ . El proceso se completa con un proceso al límite que permite determinar la matriz  $c_{ik}(\xi)$ . De esta forma para cada frecuencia  $\omega$  se obtiene la siguiente representación integral de las tracciones

$$\begin{aligned} \hat{c}_{ik}(\xi)p_k(\xi; \omega) + N_j(\xi) \int_{\Gamma} s_{ijk}^*(\mathbf{x}, \xi; \omega) u_k(\mathbf{x}; \omega) d\Gamma(\mathbf{x}) = \\ = N_j(\xi) \int_{\Gamma} d_{ijk}^*(\mathbf{x}, \xi; \omega) p_k(\mathbf{x}; \omega) d\Gamma(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{12}$$

donde de nuevo se han supuesto fuerzas de volumen nulas.

La integral en el primer miembro debe ser entendida en el sentido de Parte Finita de Hadamard y la del segundo miembro en el sentido de Valor Principal de Cauchy, siendo los núcleos  $d_{ijk}^*(\mathbf{x}, \xi; \omega)$  y  $s_{ijk}^*(\mathbf{x}, \xi; \omega)$  combinaciones lineales de las derivadas de  $u_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi; \omega)$  y  $p_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi; \omega)$ , respectivamente; por último  $\hat{c}_{ik}(\xi) = \delta_{ik}$  si el punto  $\xi$  es interno al dominio  $\Omega$ ,  $\hat{c}_{ik}(\xi) = 1/2 \delta_{ik}$  si  $\xi$  pertenece al contorno y éste es suave y  $\hat{c}_{ik}(\xi) = 0$  si  $\xi$  es exterior al dominio.

La interpretación como parte finita de Hadamard condiciona la formulación numérica al obligar a ser diferenciable a la función de desplazamientos en el punto de colocación, satisfaciendo su primera derivada la condición de Hölder  $u_k(\xi; \omega) \in C^1$ , lo cual necesariamente conduce al elegir dichos puntos de colocación en el interior del elemento.

También es conveniente resaltar que no es posible obtener para un punto no suave del contorno la representación integral de las tracciones en función sólo de los desplazamientos y tracciones sobre el contorno si se realiza un proceso al límite a partir de un punto interno, sino que es preciso realizar primero el proceso al límite con las derivadas y posteriormente el cálculo de la representación integral de las tracciones.

Por las características de los núcleos implicados, a esta solución suele llamársele *hipersingular*. Pasemos a continuación a estudiar las expresiones de estos núcleos.

La expresión del núcleo  $d_{ijk}^*(\mathbf{x}, \xi; \omega)$  para problemas bidimensionales es

$$d_{ijk}^*(\mathbf{x}, \xi; \omega) = \lambda \delta_{ij} u_{mk,m}^* + \mu (u_{ik,j}^* + u_{jk,i}^*) \tag{13}$$

en la que puede substituir  $u_{ij}^*$  para obtener

$$\begin{aligned} d_{ijk}^*(\mathbf{x}, \xi; \omega) = & - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \psi}{\partial r} \left[ \frac{\lambda}{\mu} \delta_{ij} r_{,k} + (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) \right] + \\ & + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \chi}{\partial r} \left[ \frac{\lambda}{\mu} \delta_{ij} r_{,k} + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] + \\ & + \frac{1}{2\pi} \frac{\chi}{r} \left[ \frac{\lambda}{\mu} \delta_{ij} r_{,k} + (2\delta_{ij} r_{,k} + \delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i} - 4r_{,i} r_{,j} r_{,k}) \right] \end{aligned} \tag{14}$$

siendo  $\lambda$  constante de Lamé

$$\lambda = \frac{2\nu}{1-2\nu}\mu \quad (15)$$

mientras que el del problema estático es

$$d_{ijk}^* \text{estático} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{1}{r} [(1-2\nu)(\delta_{jk}r_{,i} + \delta_{ik}r_{,j} - \delta_{ij}r_{,k}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \quad (16)$$

Por comparación con este último, el núcleo correspondiente al problema dinámico se expresará de la siguiente forma

$$d_{ijk}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}; \omega) = Q_1 \delta_{ij}r_{,k} + Q_2 \delta_{ik}r_{,j} + Q_3 \delta_{jk}r_{,i} + Q_4 r_{,i}r_{,j}r_{,k} \quad (17)$$

siendo

$$Q_1 = \frac{1}{2\pi} \left[ \left( -\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial\chi}{\partial r} + \frac{\chi}{r} \right) \frac{\lambda}{\mu} + \frac{2\chi}{r} \right] \quad (18)$$

$$Q_2 = Q_3 = \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\chi}{r} \right] \quad (19)$$

$$Q_4 = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\partial\chi}{\partial r} - 2\frac{\chi}{r} \right] \quad (20)$$

donde

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{c_p^2}{c_s^2} - 2 \quad (21)$$

El estudio de la parte singular se hace a partir de la determinación de las singularidades existentes en los términos que aparecen en las funciones  $Q_i$  al substituir en ellas las funciones  $f_0(z)$  y  $f_1(z)$  correspondientes la primera parte de los desarrollos de las funciones de Bessel. De esta forma la solución dinámica se puede expresar como

$$d_{ijk}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}; \omega) = d_{ijk}^* \text{sing} + d_{ijk}^* \text{nosing} \quad (22)$$

siendo la parte singular

$$d_{ijk}^* \text{sing} = Q_1 \text{sing} \delta_{ij}r_{,k} + Q_2 \text{sing} \delta_{ik}r_{,j} + Q_3 \text{sing} \delta_{jk}r_{,i} + Q_4 \text{sing} r_{,i}r_{,j}r_{,k} \quad (23)$$

donde

$$Q_1 \text{sing} = \frac{1}{4\pi r} \left[ -\frac{1-2\nu}{(1-\nu)} - \left( 1 - 2\frac{c_s^2}{c_p^2} \right) z_p^2 \left( f_0(z_p) + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (24)$$

$$Q_2 \text{sing} = Q_3 \text{sing} = \frac{1}{4\pi r} \left[ \frac{1-2\nu}{(1-\nu)} - z_s^2 \left( f_0(z_s) + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (25)$$

$$Q_4)_{\text{sing}} = \frac{1}{4\pi r} \left[ \frac{2}{(1-v)} + 2z_s^2 \left( f_0(z_s) + \frac{1}{2} \right) - 2\frac{c_s^2}{c_p^2} z_p^2 \left( f_0(z_p) + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (26)$$

comprobándose que

$$d_{ijk}^*)_{\text{sing}} = d_{ijk}^*)_{\text{estatico}} + d_{ijk}^*)_{\text{adicional}} \quad (27)$$

y cumpliéndose

$$\lim_{z_s \rightarrow 0, z_p \rightarrow 0} [d_{ijk}^*)_{\text{adicional}}] = 0 \quad (28)$$

es decir cuando  $r \rightarrow 0$  ó  $\omega \rightarrow 0$ , el núcleo del problema dinámico tiende al del problema estático, y por lo tanto las integrales singulares de ambos núcleos son análogas pudiéndose hacer de forma similar.

La expresión del núcleo  $s_{ijk}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}; \omega)$ , también para el caso bidimensional, se puede poner como

$$s_{ijk}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}; \omega) = \lambda \delta_{ij} p_{mk,m}^* + \mu (p_{ik,j}^* + p_{jk,i}^*) \quad (29)$$

donde  $p_{ij,k}^*$  es

$$\begin{aligned} p_{ij,k}^* = & -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \left[ \frac{\lambda}{\mu} r_{,i} r_{,k} \eta_j + \left( \delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial \eta} r_{,k} + \eta_i r_{,j} r_{,k} \right) \right] - \\ & -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \left[ \frac{\lambda}{\mu} (\eta_j \delta_{ik} - \eta_j r_{,i} r_{,k}) + (\delta_{jk} \eta_i + \delta_{ij} \eta_k) - \right. \\ & - \left. \left( \delta_{ij} r_{,k} \frac{\partial r}{\partial \eta} + \eta_i r_{,j} r_{,k} \right) \right] + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \left[ \frac{\lambda}{\mu} r_{,i} r_{,k} \eta_j + 2 \frac{\partial r}{\partial \eta} r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] + \\ & + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} \left[ \frac{\lambda}{\mu} \eta_j \delta_{ik} + \left( 2r_{,i} r_{,k} \eta_j + \delta_{ij} r_{,k} \frac{\partial r}{\partial \eta} + 2\delta_{jk} r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) + \right. \\ & + \left. \left( 2\delta_{ik} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial \eta} - 10r_{,i} r_{,j} r_{,k} \frac{\partial r}{\partial \eta} + \eta_i r_{,j} r_{,k} + 2r_{,i} r_{,j} \eta_k \right) \right] - \\ & - \frac{1}{2\pi} \frac{\chi}{r^2} \left[ \frac{\lambda}{\mu} (2r_{,i} r_{,k} \eta_j - \delta_{ik} \eta_j) + 2\eta_j (-\delta_{ik} + 2r_{,i} r_{,k}) + \right. \\ & + \left. \left( \eta_i (-\delta_{jk} + 2r_{,j} r_{,k}) + \delta_{ij} \left( -\eta_k + 2r_{,k} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) - 16r_{,i} r_{,j} r_{,k} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) + \right. \\ & + \left. \left( 4\delta_{ik} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial \eta} + 4\delta_{jk} r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \eta} + 4r_{,i} r_{,j} \eta_k \right) \right] \end{aligned} \quad (30)$$

que sustituida proporciona

$$\begin{aligned} s_{ijk}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}; \omega) = & P_1 \frac{\partial r}{\partial \eta} \delta_{ij} r_{,k} + P_2 \frac{\partial r}{\partial \eta} (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) + \\ & + P_3 \frac{\partial r}{\partial \eta} r_{,i} r_{,j} r_{,k} + P_4 (r_{,i} r_{,k} \eta_j + r_{,j} r_{,k} \eta_i) + \\ & + P_5 r_{,i} r_{,j} \eta_k + P_6 (\delta_{ik} \eta_j + \delta_{jk} \eta_i) + P_7 \delta_{ij} \eta_k \end{aligned} \quad (31)$$

siendo

$$P_1 = P_5 = \frac{\lambda}{\pi} \left( -\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - 2 \frac{\chi}{r^2} \right) + \frac{2\mu}{\pi r} \left( \frac{\partial \chi}{\partial r} - 2 \frac{\chi}{r} \right) \tag{32}$$

$$P_2 = P_4 = \frac{\mu}{2\pi} \left( -\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + 3 \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} - 6 \frac{\chi}{r^2} \right) \tag{33}$$

$$P_3 = \frac{2\mu}{\pi} \left( -\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - 5 \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + 8 \frac{\chi}{r^2} \right) \tag{34}$$

$$P_6 = \frac{\mu}{\pi r} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\chi}{r} \right) \tag{35}$$

$$P_7 = \frac{\lambda^2}{2\pi\mu} \left( -\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + 2 \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) + \frac{2\lambda}{\pi r} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{\chi}{r} \right) + \frac{2\mu}{\pi} \frac{\chi}{r^2} \tag{36}$$

para el caso dinámico, siendo el núcleo estático

$$s_{ijk}^* \text{estático} = \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \left[ 2 \frac{\partial r}{\partial \eta} ((1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) - 4r_{,i}r_{,j}r_{,k}) + 2\nu(r_{,i}r_{,k}\eta_j + r_{,j}r_{,k}\eta_i) + (1-2\nu)(2r_{,i}r_{,j}\eta_k + \delta_{ik}\eta_j + \delta_{jk}\eta_i) - (1-4\nu)\delta_{ij}\eta_k \right] \tag{37}$$

De igual forma a como se hizo anteriormente se puede ahora escribir

$$s_{ijk}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}; \omega) = s_{ijk}^* \text{sing} + s_{ijk}^* \text{nosing} \tag{38}$$

donde la parte singular de  $s_{ijk}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}; \omega)$  se puede obtener de forma análoga a como se hizo con  $d_{ijk}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}; \omega)$ , utilizando los primeros términos del desarrollo de las funciones de Bessel

$$s_{ijk}^* \text{sing} = P_1 \text{sing} \frac{\partial r}{\partial \eta} \delta_{ij}r_{,k} + P_2 \text{sing} \frac{\partial r}{\partial \eta} (\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) + P_3 \text{sing} \frac{\partial r}{\partial \eta} r_{,i}r_{,j}r_{,k} + P_4 \text{sing} \frac{\partial r}{\partial \eta} (r_{,i}r_{,k}\eta_j + r_{,j}r_{,k}\eta_i) + P_5 \text{sing} r_{,i}r_{,j}\eta_k + P_6 \text{sing} (\delta_{ik}\eta_j + \delta_{jk}\eta_i) + P_7 \text{sing} \delta_{ij}\eta_k \tag{39}$$

donde

$$P_1 \text{sing} = P_5 \text{sing} = \frac{\mu}{\pi r^2} \left[ \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)} - \frac{3}{2} \frac{c_s^2}{c_p^2} z_p^2 + \frac{(z_s^2 + z_p^2)}{2} + z_s^2 f_0(z_s) - \frac{c_s^2}{c_p^2} z_p^2 f_0(z_p) \right] \tag{40}$$



$$P_2)_{\text{sing}} = P_4)_{\text{sing}} = \frac{\mu}{\pi r^2} \left[ \frac{\nu}{(1-\nu)} - \frac{1}{2} \frac{c_s^2}{c_p^2} z_p^2 + \frac{3}{4} z_s^2 + z_s^2 f_0(z_s) - \frac{c_s^2}{c_p^2} z_p^2 f_0(z_p) \right] \quad (41)$$

$$P_3)_{\text{sing}} = \frac{\mu}{\pi r^2} \left[ -\frac{4}{(1-\nu)} + 4 \frac{c_s^2}{c_p^2} z_p^2 - 4z_s^2 + 6 \frac{c_s^2}{c_p^2} z_p^2 f_0(z_p) - 6z_s^2 f_0(z_s) \right] \quad (42)$$

$$P_6)_{\text{sing}} = \frac{\mu}{\pi r^2} \left[ \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} - \frac{z_s^2}{2} \left( f_0(z_s) + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (43)$$

$$P_7)_{\text{sing}} = \frac{\mu}{\pi r^2} \left[ -\frac{(1-4\nu)}{2(1-\nu)} - z_p^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{c_p^2}{c_s^2} \right) + f_0(z_p) \left( z_p^2 - \frac{z_s^2}{2} \right) \right] \quad (44)$$

comprobándose también que

$$s_{ijk}^*)_{\text{sing}} = s_{ijk}^*)_{\text{estatico}} + s_{ijk}^*)_{\text{adicional}} \quad (45)$$

siendo

$$\lim_{z_s \rightarrow 0, z_p \rightarrow 0} [s_{ijk}^*)_{\text{adicional}}] = 0 \quad (46)$$

es decir de nuevo cuando  $r \rightarrow 0$  ó  $\omega \rightarrow 0$ , el núcleo de problema dinámico tiende al del problema estático, y por lo tanto las integraciones singulares de ambos núcleos son análogas pudiéndose hacer de la misma forma.

### DISCRETIZACIÓN DE LAS REPRESENTACIONES INTEGRALES

La discretización se ha llevado a cabo por medio de funciones cuadráticas tanto para la aproximación de la geometría como para la de los desplazamientos y tracciones. No obstante, haber realizado una aproximación similar, la situación de los nodos utilizados para aproximar la geometría y las variables no va a ser la misma en todos los casos.

La geometría del contorno se aproximará utilizando elementos con dos nodos en sus extremos, N1 y N3 y otro intermedio N2 (Figura 1a), es decir

$$x_k = x_k^1 \phi_{1G} + x_k^2 \phi_{2G} + x_k^3 \phi_{3G} \quad (47)$$

donde  $x_k^m$  es la coordenada  $x_k$  del nodo  $m$  y  $\phi_{mG}$  su función de forma asociada

$$\phi_{1G} = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi), \quad \phi_{2G} = (1-\xi^2), \quad \phi_{3G} = \frac{1}{2}\xi(1+\xi) \quad (48)$$

siendo  $\xi$  la coordenada adimensional ( $\xi = -1$  en el nodo N1,  $\xi = 0$  en el nodo N2 y  $\xi = 1$  en el nodo N3).

Los desplazamientos y tracciones sobre el contorno serán aproximados a partir de sus valores en los puntos de colocación NC1, NC2, NC3 (Figura 1b), que en general no

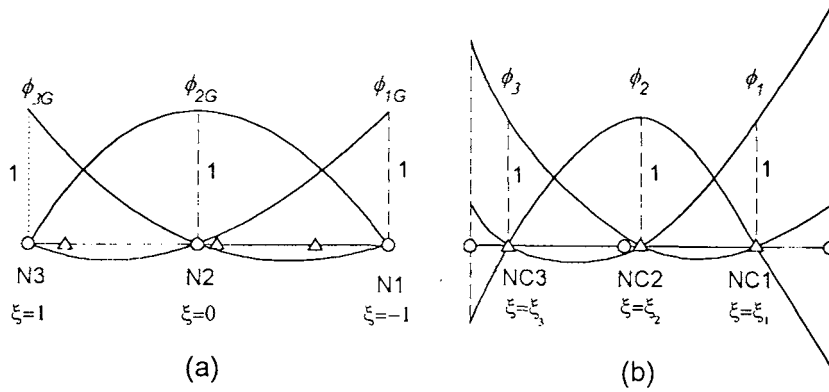


Figura 1. Funciones de forma usadas para la representación de la geometría y las variables

coincidirán con los utilizados para la representación de la geometría. Si NC1 y NC3 están situados en los extremos del elemento, se cumplirá la continuidad interelemental, y por lo tanto serán *elementos continuos*, mientras que si son interiores dicha continuidad no se cumplirá y se tratará de *elementos discontinuos*.

La aproximación de las variables será pues

$$u_k = u_k^1 \phi_1 + u_k^2 \phi_2 + u_k^3 \phi_3 \tag{49}$$

$$p_k = p_k^1 \phi_1 + p_k^2 \phi_2 + p_k^3 \phi_3 \tag{50}$$

donde  $u_k^m$  y  $p_k^m$  son los desplazamientos y tracciones en la dirección  $k$  en el punto de colocación  $m$ , siendo  $\phi_m$  la función de forma asociada a dicho punto

$$\phi_1 = \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)}, \quad \phi_2 = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)}, \quad \phi_3 = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)} \tag{51}$$

habiéndose llamado  $\xi_m$  a la coordenada natural asociada al punto de colocación  $m$ .

La utilización de los elementos discontinuos es obligada en la discretización de la representación integral de las tracciones, ya que es preciso que exista la primera derivada y satisfaga la condición de Hölder, mientras que en la representación integral de los desplazamientos se pueden usar elementos continuos y discontinuos.

De acuerdo con esta aproximación, los desplazamientos y tracciones del elemento cuadrático podrán escribirse en forma matricial como

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_1^2 \\ u_2^1 \\ u_2^2 \\ u_3^1 \\ u_3^2 \end{Bmatrix}^j = \Phi \mathbf{u}^j \tag{52}$$

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_1^2 \\ p_2^2 \\ p_1^3 \\ p_2^3 \end{Bmatrix}^j = \Phi \mathbf{p}^j \quad (53)$$

que sustituidas en las representaciones integrales discretizadas quedarán como

$$\hat{\mathbf{c}}^i \mathbf{u}^i + \sum_{j=1}^{NE} \left[ \int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \Phi d\Gamma \right] \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{NE} \left[ \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \Phi d\Gamma \right] \mathbf{p}^j \quad (54)$$

$$\hat{\mathbf{c}}^i \mathbf{p}^i + \sum_{j=1}^{NE} \left[ \int_{\Gamma_j} \mathbf{s}^* \mathbf{N} \Phi d\Gamma \right] \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{NE} \left[ \int_{\Gamma_j} \mathbf{d}^* \mathbf{N} \Phi d\Gamma \right] \mathbf{p}^j \quad (55)$$

ecuaciones que pueden plantearse para cualquiera de los puntos de colocación, de modo que si entre las de uno u otro tipo se generan tantas ecuaciones como desplazamientos o tracciones se definen sobre el total de los puntos de colocación, se obtiene un sistema de ecuaciones del tipo

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{p} \quad (56)$$

que permite resolver el problema una vez impuestas las condiciones de contorno.

### ELEMENTOS *QUARTER POINT* Y *SINGULAR QUARTER POINT*

Las tensiones y los desplazamientos en las cercanías del vértice de una grieta, supuesto un comportamiento lineal elástico, pueden representarse aproximadamente<sup>12</sup> por

$$\sigma = a_0 \frac{1}{\sqrt{r}} + a_1 + a_2 \sqrt{r} + \dots \quad (57)$$

$$u = b_0 + b_1 \sqrt{r} + b_2 r + \dots \quad (58)$$

siendo  $r$  la distancia desde el vértice de la grieta al punto.

Para obtener este comportamiento se van a usar dos tipos de elementos sobre los que se van a definir funciones de forma particulares. El primero de ellos será el utilizado para representar la parte de los labios de la grieta junto a su vértice, mientras que el segundo tipo se utilizará sobre un contorno interior, separando en dos partes al sólido (Figura 2).

En el primer caso, sólo es preciso representar el comportamiento de los desplazamientos, al ser las tracciones conocidas, bastando para ello situar el nodo central del elemento, ya sea éste continuo o discontinuo, a un cuarto de su longitud, del lado del vértice de la grieta. Puede comprobarse fácilmente que si el elemento es de geometría recta y se denomina  $L$  a su longitud,  $\bar{r}$  a la distancia desde el vértice de

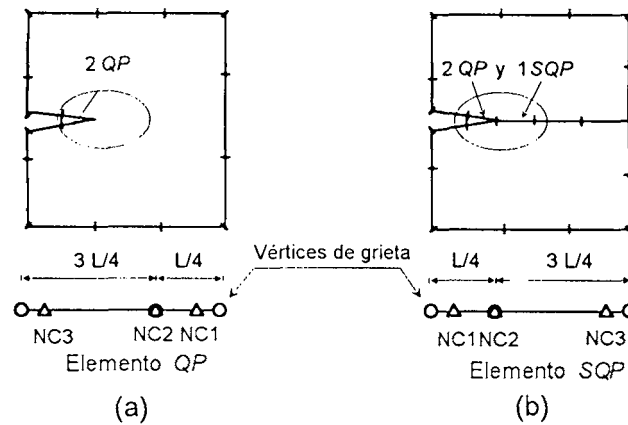


Figura 2. Uso de los elementos *Quarter Point* y *Singular Point*

la grieta a un punto cualquiera del elemento, y  $\xi = \xi_0 = \pm 1$  a la coordenada natural del vértice de grieta, despejando  $\xi$  de la ecuación (47) se obtiene

$$\xi = \xi_0 \left( 1 - 2\sqrt{\frac{\bar{r}}{L}} \right) \tag{59}$$

cuya substitución en la representación de los desplazamientos, (49) proporciona

$$u_k = \alpha_k + \beta_k \sqrt{\frac{\bar{r}}{L}} + \delta_k \frac{\bar{r}}{L} \tag{60}$$

que tiene la misma forma que la expresión teórica (58) y donde los parámetros  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$  y  $\delta_k$  dependen de la posición de los puntos de colocación sobre el elemento y de los valores nodales de los desplazamientos, de modo que si  $\xi_2 = 0$ , es decir N2 y NC2 coincidentes (lo cual se supondrá en adelante), se tiene

$$\alpha_k = \frac{1 - \xi_0 \xi_3}{\xi_1 (\xi_1 - \xi_3)} u_k^1 + \frac{(\xi_0 - \xi_3)(\xi_0 - \xi_1)}{\xi_3 \xi_1} u_k^2 - \frac{1 - \xi_0 \xi_1}{(\xi_1 - \xi_3) \xi_3} u_k^3 \tag{61}$$

$$\beta_k = \frac{2(2 - \xi_0 \xi_3)}{\xi_1 (\xi_1 - \xi_3)} u_k^1 - \frac{2(2 - \xi_0 \xi_1 - \xi_0 \xi_3)}{\xi_3 \xi_1} u_k^2 + \frac{2(2 - \xi_0 \xi_1)}{(\xi_1 - \xi_3) \xi_3} u_k^3 \tag{62}$$

$$\delta_k = \frac{4}{\xi_1 (\xi_1 - \xi_3)} u_k^1 + \frac{4}{\xi_3 \xi_1} u_k^2 - \frac{4}{(\xi_1 - \xi_3) \xi_3} u_k^3 \tag{63}$$

De esta forma se consigue una representación de los desplazamientos análoga a la existente en las cercanías de la grieta. Este elemento habitualmente se denomina *Quarter Point (QP)*, por la situación del nodo y punto de colocación central. La representación de las tracciones en él es similar a la dada en la ecuación (60), sólo que al ser los valores nodales conocidos no condiciona el resultado.

El segundo tipo de elemento es el llamado *Singular Quarter Point (SQP)*, que permite representar no sólo el comportamiento de los desplazamientos, sino también el

de las tracciones en las cercanías del vértice de la grieta. Si al igual que anteriormente se supone que el elemento es recto y se sitúa el nodo central a una distancia de un cuarto de su longitud hacia el vértice de la grieta, se obtendrá que  $\xi$  y  $u_k$  se podrán expresar por las ecuaciones (59) y (60), respectivamente. A continuación, aprovechando que en el *Método de los Elementos de Contorno* se aproximan de forma independiente los desplazamientos y las tracciones, se realiza una aproximación de las tracciones que proporciona un comportamiento similar al teórico (57)

$$p_k = \bar{p}_k^1 \bar{\phi}_1 + \bar{p}_k^2 \bar{\phi}_2 + \bar{p}_k^3 \bar{\phi}_3 \quad (64)$$

donde se ha multiplicado por  $\sqrt{L/\bar{r}}$  y normalizado a la unidad en los puntos de colocación, es decir

$$\bar{\phi}_m = \phi_m \sqrt{\frac{L}{\bar{r}}} = \phi_m \frac{2\xi_0}{(\xi_0 - \xi)}, \quad \bar{p}_k^m = p_k^m \frac{(\xi_0 - \xi_m)}{2\xi_0} \quad (65)$$

La denominación *singular* proviene de que la función de aproximación de las tracciones  $\bar{\phi}_m$  tiene una singularidad en el vértice de la grieta ( $\xi = \xi_0$ ), del mismo tipo que la que posee el campo de tensiones (57).

En el caso de un elemento continuo el parámetro nodal correspondiente debe ser entendido como el resultado de un límite

$$\bar{p}_k^{1,3} = \lim_{\bar{r} \rightarrow 0} \left( p_k^{1,3} \sqrt{\frac{\bar{r}}{L}} \right) \quad (66)$$

## CÁLCULO DE LOS FACTORES DE INTENSIDAD DE TENSIÓN

Los elementos descritos anteriormente *QP* y *SQP* pueden ser usados en ambas representaciones integrales (1) y (12) y permiten el cálculo de los *Factores de Intensidad de Tensión (FIT)* con facilidad y exactitud.

Los *FIT* asociados a los modos I y II se pueden aproximar a partir del tensor de tensiones<sup>13</sup>  $\sigma_{ij}$  en el vértice de la grieta. Si la grieta está en dirección  $x_1$  los *FIT* serán

$$K_I = \lim_{\bar{r} \rightarrow 0} (\sigma_{22} \sqrt{2\pi\bar{r}}), \quad K_{II} = \lim_{\bar{r} \rightarrow 0} (\sigma_{12} \sqrt{2\pi\bar{r}}) \quad (67)$$

Otras aproximaciones pueden hacerse a partir de los desplazamientos

$$K_I = \frac{\mu}{4(1-\nu)} \Delta u_2 \sqrt{\frac{2\pi}{\bar{r}}}, \quad K_{II} = \frac{\mu}{4(1-\nu)} \Delta u_1 \sqrt{\frac{2\pi}{\bar{r}}} \quad (68)$$

siendo  $\Delta u_1$  y  $\Delta u_2$  los desplazamientos relativos, longitudinal y transversal respectivamente, de los labios de la grieta en un punto muy cercano a su vértice.

El límite anterior puede ser aproximado por su valor en cualquier punto cercano al vértice de grieta. Para un punto genérico de coordenada natural  $\xi_i$  se tiene

$$\lim_{\bar{r} \rightarrow 0} (\sigma_{k2} \sqrt{2\pi\bar{r}}) \simeq p_k(\xi_i) \sqrt{2\pi\bar{r}(\xi_i)} = \sqrt{2\pi L} \sum_{m=1}^3 (\bar{p}_k^m \phi_m(\xi_i)) \quad (69)$$

pudiéndose calcular la apertura de grieta también en ese punto

$$\Delta u_k \sqrt{\frac{2\pi}{\bar{r}}} = \Delta u_k(\xi_i) \sqrt{\frac{2\pi}{\bar{r}(\xi_i)}} = \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \frac{2\xi_0}{(\xi_0 - \xi_i)} \sum_{m=1}^3 (\Delta u_k^m \phi_m(\xi_i)) \quad (70)$$

De esta forma en los elementos *SQP* se puede asociar un *FIT* a cada punto de colocación NCm, en función de los parámetros nodales  $\bar{p}_k^m$

$$K_I^{NCm} = \bar{p}_2^m \sqrt{2\pi L}, \quad K_{II}^{NCm} = \bar{p}_2^m \sqrt{2\pi L} \quad (71)$$

mientras que en los elementos *QP* se asocian otros valores calculados a partir de las aperturas de grieta en ellos

$$K_I^{NCm} = \Delta u_2^m \frac{\mu}{2(1-\nu)} \frac{\xi_0}{(\xi_0 - \xi_m)} \sqrt{\frac{2\pi}{L}}, \quad K_{II}^{NCm} = \Delta u_1^m \frac{\mu}{2(1-\nu)} \frac{\xi_0}{(\xi_0 - \xi_m)} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \quad (72)$$

pudiéndose comprobar que los valores más aproximados de los *FIT* se obtienen a partir los valores extrapolados de las tensiones justo en el vértice de la grieta  $\xi_i = \xi_0$  en la ecuación (69) y con las aperturas de grieta de los dos puntos de colocación más cercanos a dicho vértice, es decir NC1 y NC2.

Aproximaciones similares a las anteriores han sido usadas con la representación integral de los desplazamientos por diversos autores en problemas estáticos<sup>14,4</sup>, en problemas dinámicos en el dominio de la frecuencia<sup>5</sup> y en problemas dinámicos transitorios<sup>6</sup>. También han sido usados con la representación integral de las tracciones solución fundamental hipersingular en problemas estáticos<sup>8</sup>, en problemas dinámicos transitorios en el dominio del tiempo directamente<sup>10</sup> o mediante la transformada de Laplace<sup>11</sup>, pero sólo la correspondiente al elemento *QP discontinuo*, no habiéndose usado hasta la fecha el elemento *SQP discontinuo* ni en problemas estáticos ni dinámicos.

## EVALUACIÓN DE LAS INTEGRALES

La integración de las expresiones discretizadas de las representaciones integrales, ecuaciones (54) y (55), implica la resolución de integrales singulares e hipersingulares en el caso de que el punto de colocación pertenezca al elemento sobre el que se está integrando; integrales cuasisingulares, cuando el elemento sobre el que se integra está muy cercano al punto de colocación, e integrales no singulares. Para resolver cada una de ellas se ha utilizado un procedimiento diferente.

Las integraciones singulares e hipersingulares correspondientes al problema estático se han realizado usando procedimientos analíticos, obteniéndose expresiones concretas para cada una de ellas en los casos singular e hipersingular, siempre que la geometría

fuese rectilínea. En el problema dinámico para estas integrales se ha utilizado un esquema de integración que sigue la división en partes de los núcleos mostrada en las ecuaciones (22), (27), (38) y (45), de forma que las singularidades se concentran en los núcleos estáticos y las integrales de las llamadas parte *adicional* y *no singular*, ambas con variación suave sobre el elemento, se llevan a cabo mediante cuadraturas de Gauss. Esta división de los núcleos es análoga a la utilizada por Domínguez<sup>1</sup> y por Sáez et al<sup>8</sup> para la integración de la representación integral de los desplazamientos.

Las integrales cuasisingulares que aparecen a menudo cuando se usan elementos discontinuos, han sido resueltas integrando numéricamente las expresiones completas de los núcleos, mediante una subdivisión del intervalo de integración, variable en función de la distancia, y usando cuadraturas con un número fijo de puntos sobre cada subintervalo. Esta técnica permite aumentar el número de puntos de integración en las cercanías de la singularidad y realizar las integrales con suficiente precisión.

Cuando se trata de realizar una integral sobre un elemento alejado se ha utilizado una cuadratura con un número de puntos fijo para todos los elementos.

En el caso de elementos *QP* el esquema de integración explicado anteriormente no se altera, siendo su tratamiento análogo al de cualquier otro elemento. En los elementos *SQP* es preciso distinguir entre las integrales que contienen la función de forma de desplazamientos, ecuación (60), cuya integración sigue el procedimiento general, de las integrales que contienen las funciones de forma singular (64) para las que se han obtenido unas expresiones específicas de sus integrales singulares, siguiendo los otros tipos de integrales el esquema general.

## ESTUDIOS PARAMÉTRICOS Y EJEMPLOS NUMÉRICOS

En este apartado se presentan estudios paramétricos relativos a problemas estáticos y dinámicos que permitirán determinar la aproximación conseguida en el cálculo de los *FIT* mediante los elementos *QP* y *SQP* continuos y discontinuos y elegir las discretizaciones adecuadas a cada problema. En el estudio se comparan las distintas posibilidades de cálculo, la variación de los resultados con la discretización y la influencia de la separación de los nodos extremos de los vértices del elemento, la cual se considerará idéntica en ambos extremos.

En adelante a los *FIT* calculados en elementos discontinuos *SQP*, a partir de las tracciones extrapoladas al vértice de grieta según la ecuación (69), se denominarán EDT0, mientras que los calculados en elementos *QP* discontinuos a partir de los desplazamientos en los puntos de colocación más cercanos al vértice de grieta NC1 y en NC2 (72), se denominarán EDU1 y EDU2, respectivamente.

### Placa con dos grietas laterales. *FIT* estático

El primer estudio paramétrico se va a realizar sobre una placa rectangular (Figura 3) de dimensiones  $w = 3,6$  cm y  $h = 10,8$  cm, que tiene dos grietas laterales de longitud  $a = 1,8$  cm, y está sometida a una tracción  $\sigma$  en ambos extremos, habiéndose elegido una relación módulo de elasticidad-tracción aplicada,  $E/\sigma$  de 5250, y un módulo de Poisson  $\nu = 0,20$ . El valor de  $K_{IN} = K_I(\sigma\sqrt{\pi a})$  tomado como referencia es 1,163,

obtenido de Murakami<sup>15</sup>, que a su vez la obtuvo de Nisitani<sup>16</sup> para el caso  $h/w = \infty$ , con error estimado de  $\pm 0,5\%$ .

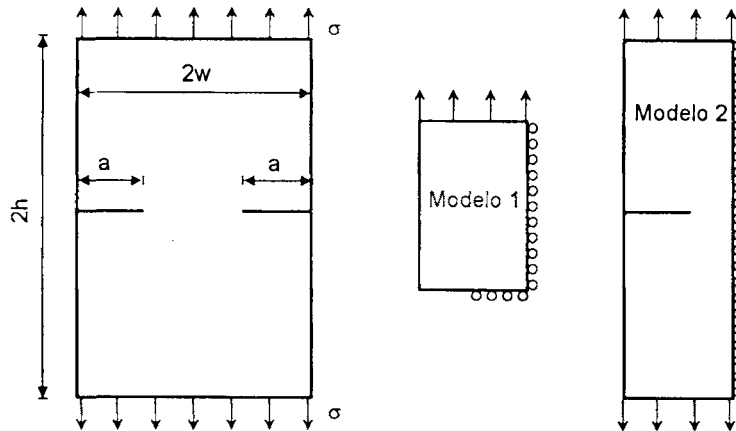


Figura 3. Placa rectangular con dos grietas laterales

Estudios paramétricos en problemas estáticos similares al que aquí se presenta, han sido llevados a cabo sobre el elemento *SQP* continuo<sup>4</sup> y sobre el elemento *QP* discontinuo<sup>8</sup>, aunque en este último se fija el valor de  $\xi = \pm 0,75$  para los nodos extremos. Por ello se va a presentar la variación de los resultados con el parámetro  $\xi$  citado, con la longitud del elemento relativa al tamaño de grieta  $L/a$  y con el método de cálculo empleado.

La discretización se ha llevado a cabo de dos formas distintas dependiendo si se emplean o no elementos *SQP*. Si existen estos elementos se modela el cuarto superior izquierdo de la placa, Modelo 1 de la Figura 3, en el que se ha situado un contorno interno que une los vértices de ambas grietas, sobre el cual se obliga a una variación cuadrática de tracciones y desplazamientos, excepto en el elemento *SQP*; mientras que si no existen elementos *SQP*, se modela la mitad de la placa, Modelo 2. El modelado de la grieta se hace en función del parámetro  $L/a$ , siendo  $L$  la longitud del elemento *QP* o *SQP*, de tal modo que se utilizan en cada labio 10, 5, 3 y 2 elementos según sea  $L/a = 0, 1, 0, 2, 0, 3$  ó  $0, 4$  y  $0, 5$ , graduándose la longitud de los elementos en los bordes de modo que no haya cambios bruscos de longitud. La discretización más fina emplea 60 elementos para un cuarto de placa, mientras que la más grosera emplea sólo 38.

En la Figura 4a se muestra la evolución de  $K_{IN}$  calculado en el elemento *QP* del Modelo 1 en el que se han utilizado sólo ecuaciones generadas a partir de la solución fundamental hipersingular, es decir con la ecuación (12). La representación de los valores se hace en función de la posición de los nodos extremos NC1 y NC3, dada por el valor de la coordenada  $\xi$  de ambos, y del tamaño  $L$  de los elementos *QP* y *SQP* utilizados. En ella puede comprobarse que el cálculo del *FIT* a partir de los desplazamientos es convergente a medida que la discretización se hace más pequeña, siendo esta convergencia distinta dependiendo del nodo que se utilice para los cálculos. En el caso del punto de colocación NC1, EDU1, el acercamiento es dependiente del



valor de  $\xi$ , pudiéndose comprobar que para valores  $\xi = 0,80; 0,85$  se obtiene casi una independencia del tamaño del elemento. Para NC2, EDU2, no hay una dependencia de  $\xi$ , pero la influencia del tamaño de la discretización es mayor. En ambos casos los resultados son buenos y se mantienen en  $\pm 3\%$ , si  $L/a \leq 0,8$ .

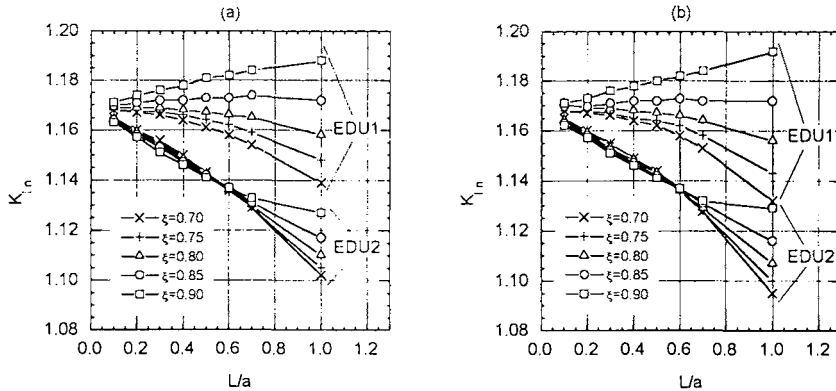


Figura 4. Placa con doble grieta. Variación del *FIT* con la discretización.  
 a) Modelo 1 con *QP* y *SQP*; b) Modelo 2 sólo con *QP*

Si se efectúa un cálculo análogo al anterior pero usando una discretización del tipo de la del Modelo 2 (Figura 3) sin elementos *SQP* y usando la solución fundamental hipersingular para uno de los labios de la grieta y la solución fundamental habitual para el otro labio, se obtienen los resultados representados en la Figura 4b. Como puede comprobarse  $K_{IN}$  toma valores muy parecidos a los del Modelo 1, siendo su evolución del mismo tipo, por lo que las conclusiones anteriores le son aplicables, obteniéndose una precisión similar y mostrando que no es obligatorio el uso de elementos *SQP* para la obtención de buenos resultados.

La evolución de los valores de  $K_{IN}$  obtenidos mediante extrapolación de los parámetros nodales al vértice de la grieta del elemento *SQP* (Modelo 1) se muestran en la Figura 5. En ella se pueden observar unos valores y evolución similar a los que se obtenían cuando se calculaba a partir de los desplazamientos en NC1. En la gráfica se incluye también el caso continuo  $\xi = 1$ , ECT0, para completar la visión de conjunto de los resultados, pudiendo comprobarse que sigue la tendencia en la variación de  $\xi$  y que no necesariamente proporciona mejores resultados que los correspondientes EDU1 o EDU2.

**Placa con una grieta lateral. *FIT* estático**

Para completar el estudio anterior e intentar generalizar algunas conclusiones se ha hecho un estudio paramétrico similar sobre una placa con una grieta lateral (Figura 6). Las dimensiones utilizadas han sido  $a = 3\text{ mm}$ ,  $w = 3\text{ mm}$  y  $h = 3\text{ mm}$ , siendo la relación  $E/\sigma$  de  $2 \times 10^{11}$  y el módulo de Poisson 0,3. Sobre ella se han realizado discretizaciones similares a las descritas sobre el problema anterior. El valor de referencia para comparaciones es de 3,010 valor obtenido por Civelek et al<sup>17</sup>.

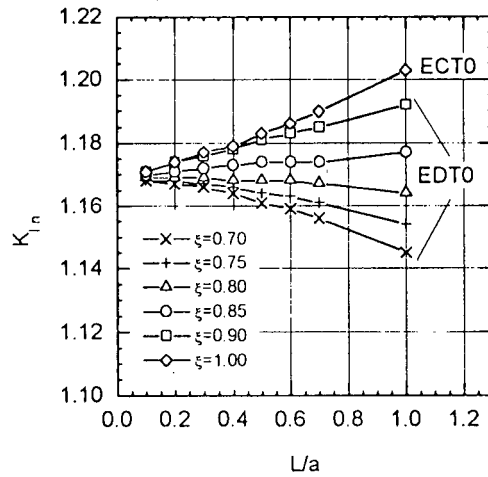


Figura 5. Placa con doble grieta. Variación del *FIT* calculado a partir de tracciones extrapoladas al vértice de grieta

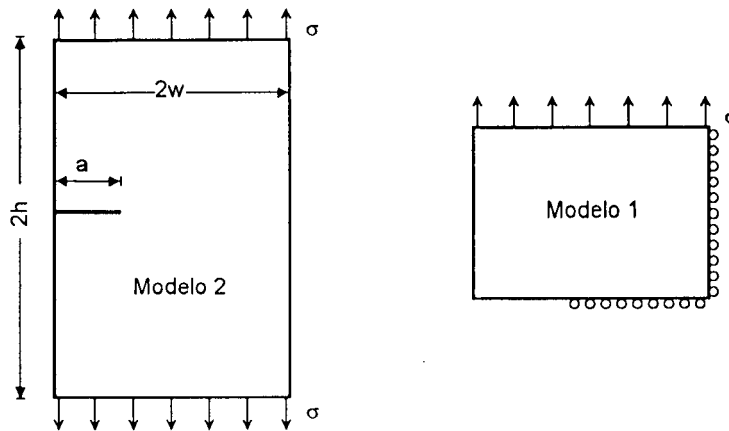


Figura 6. Placa con grieta lateral

En la Figura 7a se muestra la evolución de  $K_{IN}$  con el tamaño del elemento y la situación de los puntos de colocación NC1 y NC2. El cálculo se realiza sobre un Modelo 1, con elementos *QP* y *SQP*. En ella se puede ver cómo ahora es en EDU1 donde la influencia de  $\xi$  es pequeña, mientras que en EDU2 es mayor, realizándose la aproximación con el tamaño del elemento también en forma distinta.

Algo similar ocurre con los resultados si se utiliza un Modelo 2, sin elementos *SQP*, para el que se obtienen resultados análogos (Figura 7b), o si se calcula el *FIT* a partir de la extrapolación de las tracciones al vértice (Figura 8). Pudiéndose concluir que la convergencia es buena en todos los casos, siendo el modo en el que los diferentes métodos de cálculo se acercan al resultado tomado como referencia dependiente del problema, aunque para valores en el entorno de  $\xi = 0,8$  y  $L/a \leq 0,4$  todos los resultados tienen una buena precisión, siendo los métodos más recomendables los denominados EDT0 y EDU1 que tienen una precisión equivalente.

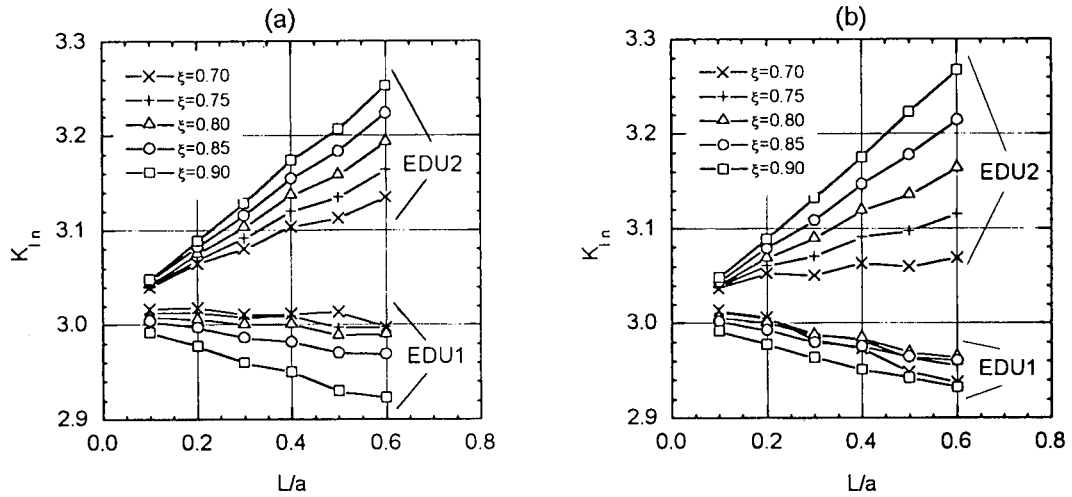


Figura 7. Placa con simple grieta. Estudio de la variación del *FIT* con la discretización, a) Modelo 1 con *QP* y *SQP*, b) Modelo 2 sólo con *QP*

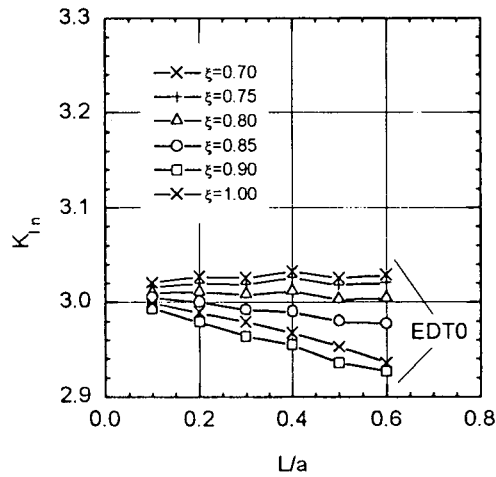


Figura 8. Placa con una grieta. Variación del *FIT* calculado a partir de tracciones extrapoladas al vértice de grieta

**Difracción de ondas por una grieta en un medio infinito. *FIT* dinámicos**

Realizando el estudio de la influencia de la discretización sobre problemas estáticos se va a analizar a continuación un problema dinámico en el dominio de la frecuencia que permitirá obtener algunas conclusiones adicionales sobre la influencia de ésta y de su variación con la frecuencia.

El problema elegido para realizar este estudio es el de una grieta finita en un medio infinito sobre la cual inciden trenes de ondas planas *P* o *SV* (Figura 9), provocando unos campos incidentes de desplazamientos y tensiones que derivan de los potenciales

complejos

$$\phi = \phi_0 \exp \left[ -\frac{i\omega}{c_p} (x \cos \gamma + y \sin \gamma + tc_p) \right]; \quad \psi = 0; \quad i = \sqrt{-1} \quad (73)$$

para ondas  $P$  y

$$\phi = 0; \quad \psi = \psi_0 \exp \left[ -\frac{i\omega}{c_s} (x \cos \gamma + y \sin \gamma + tc_s) \right] \quad (74)$$

para ondas  $SV$ , donde se ha llamado  $\gamma$  al ángulo de incidencia (Figura 9), calculándose  $\phi_0$  y  $\psi_0$  de modo que la tensión normal o tangencial sean la unidad en el origen.

El análisis del problema de difracción se lleva a cabo superponiendo al campo incidente anterior otro campo formado por unas distribuciones de tracciones sobre los bordes de la grieta, iguales y opuestas a las incidentes, de modo que la suma de ambos proporcione tracciones nulas en dichos bordes. La representación integral de las tracciones y desplazamientos (1) y (12) sólo se plantean para el segundo de los problemas al ser éste el que cumple las condiciones de radiación en el infinito y sólo ser necesario discretizar la grieta y su entorno<sup>5</sup>.

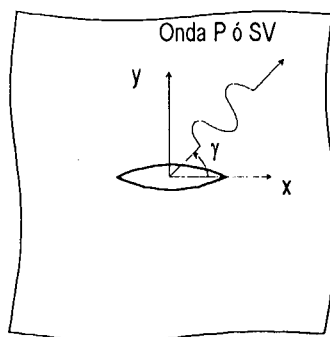


Figura 9. Difracción de ondas por una grieta en un medio infinito

La mitad simétrica de las discretizaciones utilizadas para el estudio paramétrico se muestra en la Figura 10, en la que se puede observar el caso (a) (ver Figura) en el que es preciso discretizar dos contornos semiinfinitos a ambos lados de la grieta, aunque es suficiente con discretizar una cierta distancia igual a quince veces el semiancho de grieta para simular la mitad del problema y utilizar elementos  $QP$  y  $SQP$  en los vértices de ésta. Esta discretización fue utilizada con éxito por uno de los autores<sup>5</sup> para el mismo problema resuelto con elementos continuos, mientras que aquí se van a utilizar elementos discontinuos y solución hipersingular. La Figura 10b muestra la segunda de las discretizaciones utilizadas; en ella sólo se han discretizado los bordes de la grieta utilizando solución hipersingular para uno de los bordes y solución normal para el otro y situando en cada vértice dos elementos  $QP$ . En ambas discretizaciones la grieta se ha modelado con diez elementos en cada labio, cinco en cada mitad simétrica  $L/a = 0, 2$  y  $\xi$  de  $0, 8$  para los nodos extremos. La discretización del contorno infinito se

ha hecho aumentando gradualmente las longitudes de los elementos utilizando un total de 29 elementos en cada lado, excluidos los de la grieta. Como puede comprobarse, el número de elementos es bastante menor en la discretización (b), evitándose además el problema del contorno infinito.

En primer lugar se van a presentar los *FIT* obtenidos a partir de la discretización de la Figura 10b, supuesto un módulo de Poisson de 0,25, calculados a partir de los desplazamientos del punto de colocación más cercano al vértice de la grieta, EDU1, para distintos ángulos de incidencia.

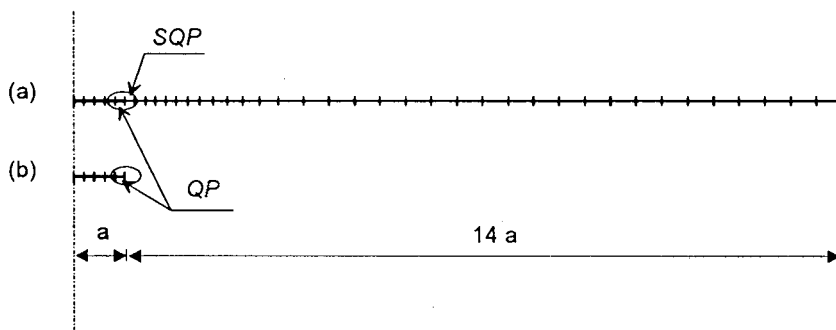


Figura 10. Mitad simétrica de las discretizaciones usadas para la grieta en el espacio infinito. a) Con elementos  $QP$  y  $SQP$ , b) Método mixto con sólo  $QP$

En la Figura 11 se representan en función de la frecuencia adimensional  $\omega a/c_p$  los valores normalizados con su valor estático, del módulo de *FIT* en el caso de incidencia de ondas  $P$  y se comparan con los calculados por Chen y Sih<sup>18</sup>, y, Sih y Loeber<sup>19</sup>. Como se puede comprobar la concordancia es muy buena para todos los ángulos de incidencia.

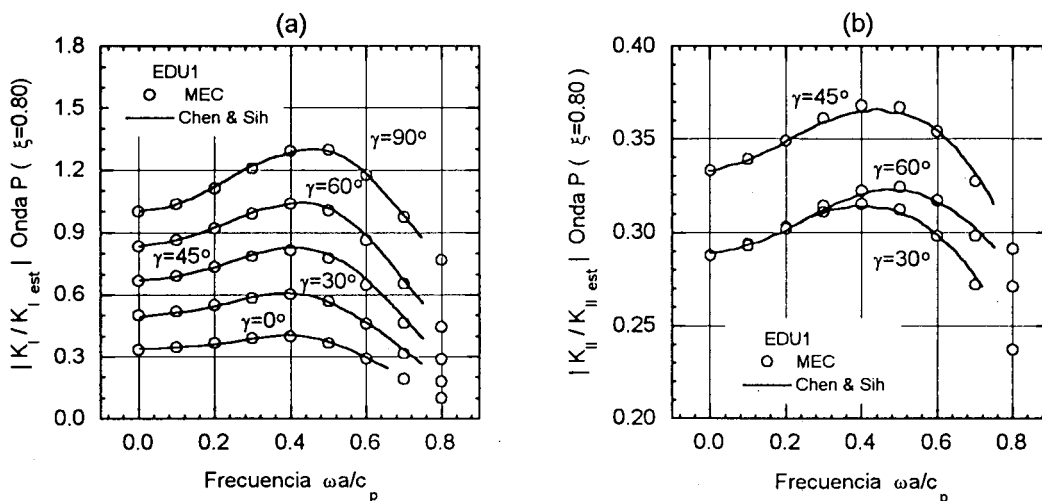


Figura 11. *FIT* debidos a la difracción de ondas  $P$  por una grieta en un medio infinito. Discretización (b)

Los valores de *FIT* correspondientes a la incidencia de ondas *SV* se representan en la Figura 12. También en este caso los resultados son muy buenos, por lo que se puede concluir que la discretización efectuada es adecuada y el método utilizado suficientemente exacto, habiéndose ganado en rapidez y sencillez respecto de metodologías de cálculo anteriores.

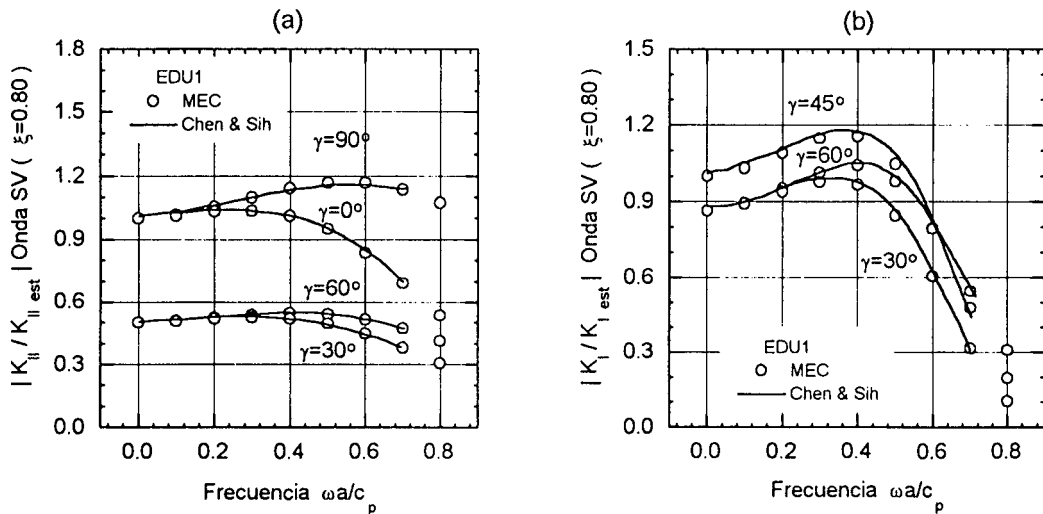


Figura 12. *FIT* debidos a la difracción de ondas *SV* por una grieta en un medio infinito. Discretización (b)

Comprobada la exactitud del método propuesto se va a realizar su comparación con los resultados obtenidos con la discretización representada en la Figura 10a y comprobar la variación que experimentan con el método de cálculo del *FIT*, con cuatro valores  $\xi$  distintos de separación de los extremos de los puntos de colocación NC1 y NC3, y con la frecuencia adimensional.

En la Tabla I se muestran los valores del *FIT* en el caso de incidencia de ondas *P* con  $\gamma = 90^\circ$  (Figura 9). En ella se comparan las dos discretizaciones, los tres métodos EDT0, EDU1 y EDU2 y cuatro posiciones de NC1 y NC3, todo ello para dos frecuencias distintas.

Los valores se representan con cuatro dígitos y en tablas debido a la similitud entre ellos, lo cual es debido a que se ha escogido una discretización adecuada para todas las frecuencias, en función de los criterios discutidos en problemas estáticos, ya que el tamaño de elemento necesario para representar adecuadamente el *FIT* es suficiente normalmente para representar adecuadamente una amplia gama de frecuencias, por ejemplo con el criterio de que haya al menos cuatro elementos por cada longitud de onda.

Conclusiones similares pueden extraerse de la observación de la Tabla II en la que se comparan los resultados para el caso de incidencia de ondas *SV* a  $90^\circ$ . En ambos casos se comprueba que los métodos EDT0 y EDU1 proporcionan resultados idénticos, suministrando EDU2 resultados algo diferentes aunque muy cercanos.

$ K_I/K_{Iest} $ Onda $P$ $90^\circ$										
$\omega a/c_p$	0,2					0,8				
Discr.	(a)			(b)		(a)			(b)	
$\xi$	EDT0	EDU1	EDU2	EDU1	EDU2	EDT0	EDU1	EDU2	EDU1	EDU2
0,75	1,1068	1,1082	1,0990	1,1082	1,0990	0,7714	0,7705	0,7809	0,7705	0,7809
0,80	1,1083	1,1093	1,0978	1,1093	1,0978	0,7692	0,7686	0,7807	0,7686	0,7807
0,85	1,1108	1,1116	1,0968	1,1116	1,0968	0,7661	0,7657	0,7804	0,7657	0,7804
0,90	1,1142	1,1147	1,0952	1,1147	1,0952	0,7625	0,7622	0,7800	0,7622	0,7800

Tabla I. Incidencia de ondas  $P$ . Comparación de los  $FIT$  obtenidos con distintos métodos, discretizaciones y frecuencias

$ K_I/K_{Iest} $ Onda $SV$ $90^\circ$										
$\omega a/c_p$	0,2					0,8				
Discr.	(a)			(b)		(a)			(b)	
$\xi$	EDT0	EDU1	EDU2	EDU1	EDU2	EDT0	EDU1	EDU2	EDU1	EDU2
0,75	1,0520	1,0534	1,0440	1,0534	1,0440	1,0741	1,0739	1,0749	1,0739	1,0749
0,80	1,0536	1,0546	1,0430	1,0546	1,0430	1,0732	1,0730	1,0738	1,0730	1,0738
0,85	1,0560	1,0567	1,0419	1,0567	1,0419	1,0742	1,0740	1,0745	1,0740	1,0745
0,90	1,0595	1,0600	1,0405	1,0600	1,0405	1,0727	1,0725	1,0723	1,0725	1,0723

Tabla II. Incidencia de ondas  $SV$ . Comparación de los  $FIT$  obtenidos con distintos métodos, discretizaciones y frecuencias

## CONCLUSIONES

En este artículo se presentan en primer lugar las expresiones de los núcleos hipersingulares que utiliza la representación integral de las tracciones en el *Método de los Elementos de Contorno* en problemas dinámicos en el dominio de la frecuencia, estudiándose su descomposición en sus partes singular y no singular, la cual permite su tratamiento numérico con mayor facilidad y el posible uso de técnicas de integración avanzadas. Esta formulación ha sido utilizada para la elaboración de un programa de ordenador basado en elementos discontinuos cuadráticos, que ha permitido analizar problemas de fractura estáticos y dinámicos.

También se ha desarrollado un elemento del tipo *Singular Quarter Point*, discontinuo e hipersingular, para el cálculo de los *Factores de Intensidad de Tensión* de grietas, que hasta la fecha no había sido utilizado. Este elemento es de gran interés sobre todo en problemas en los que existan interfases coincidentes con el vértice de grieta.

A partir de esta formulación se han realizado estudios paramétricos que han permitido discutir la versatilidad y potencia del método propuesto y la idoneidad del uso del *Método de los Elementos de Contorno Mixto*, utilizando en un labio de la grieta la representación integral de las tracciones y en el otro la de los desplazamientos, para el cálculo de los *FIT* estáticos y dinámicos.

En los estudios paramétricos estáticos se ha puesto de manifiesto como no hay pérdida de precisión por el uso de elementos discontinuos, en los que no se impone la continuidad interelemental, sino que producen resultados excelentes para los *FIT*, tanto si se calculan a partir de los desplazamientos de uno de estos puntos de colocación, el más cercano al vértice de grieta en el elemento *QP*, o a partir de los valores de las tracciones extrapolados al vértice de la grieta en elementos *SQP*.

Los estudios relativos al tamaño de la discretización a emplear en este tipo de problemas han demostrado que usando para los elementos *QP* y *SQP* tamaños iguales menores que 0,4 veces de dimensión de la grieta y retranqueos de los puntos de colocación extremos NC1 y NC3 entre 0,75 y 0,90, se obtienen excelentes resultados con todos los métodos de cálculo del *FIT* utilizados.

En problemas dinámicos se ha puesto de manifiesto que las discretizaciones estáticas necesarias para el cálculo del *FIT* son suficientes para el análisis de un amplio intervalo de frecuencias y que no es preciso en la mayoría de los casos un refinamiento de malla adicional, habiéndose estudiado con estos criterios el problema de difracción de ondas *P* y *SV* por una grieta en un espacio infinito y comparando con éxito con los resultados obtenidos por otros autores para problemas similares.

Como conclusión final puede decirse que la formulación hipersingular presentada constituye una herramienta numérica muy poderosa para el estudio de problemas de mecánica de la fractura, más si su uso se combina con la formulación tradicional en el modelado de los dos labios de la grieta coincidentes geoméricamente, no siendo necesario la introducción de contornos internos no existentes.

## AGRADECIMIENTOS

El soporte financiero de las investigaciones realizadas para la obtención de los presentes resultados y conclusiones fue parcialmente aportado por la DGICYT del Gobierno Español, mediante los proyectos PB 93-1184 y PB 93-1191.

## REFERENCIAS

1. J. Domínguez, "*Boundary Elements in Dynamics*", Computational Mechanics Publications and Elsevier, (1993).
2. M.H. Aliabadi y D.P. Rooke, "*Numerical Fracture Mechanics*", Computational Mechanics Publications and Kluwer Academic Publishers, (1991).
3. M.H. Aliabadi, C.A. Brebbia y V.Z. Parton (Eds.), "*Static and Dynamic Fracture Mechanics*", Computational Mechanics Publications, (1994).
4. J. Martínez y J. Domínguez, "On the Use of Quarter Point Boundary Elements for Stress Intensity Factor Computations", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 20, pp. 1941-1950, (1984).



5. F. Chirino y J. Domínguez, "Dynamic Analysis of Cracks Using Boundary Element Method", *Engng. Fract. Mech.*, Vol. **34-5**, pp. 1051-1061, (1989).
6. J. Domínguez y R. Gallego, "Time Domain Boundary Element Method for Dynamic Stress Intensity Factor Computations", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **33**, pp. 635-647, (1992).
7. F. Chirino, R. Gallego, A. Sáez y J. Domínguez, "A Comparative Study of Three Boundary Element Approaches to Transient Dynamic Crack Problems", *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol. **13**, pp. 11-19, (1994).
8. A. Sáez R. Gallego y J. Domínguez, "Hypersingular Quarter Point Boundary Elements for Crack Problems", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **38**, pp. 1681-1701, (1995).
9. A. Portela, M.H. Aliabadi y D.P. Rooke, "The Dual Boundary Element Method: Effective Implementation for Crack Problems", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **33**, 6, pp. 1269-1287, (1993).
10. P. Fedelinski, M.H. Aliabadi y D.P. Rooke, "A Single-Region Time Domain BEM for Dynamic Cracks Problems", *Int. J. Solids Structures*, Vol. **32**, 24, pp. 3555-3571, (1995).
11. P. Fedelinski, M.H. Aliabadi y D.P. Rooke, "The Laplace Transform DBEM for Mixed Mode Dynamic Analysis", *Computer & Structures*, Vol. **59**, 6, pp. 1021-1031, (1996).
12. M.L. Williams, "Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension", *J. Appl. Mech. ASME*, Vol. **19**, pp. 526-528, (1952).
13. G.R. Irwin, "Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing Plate", *J. Appl. Mech. ASME*, Vol. **24**, pp. 361-364, (1957).
14. G.E. Blandford, A.R. Ingraffea y J.A. Liggett, "Two-dimensional Stress Intensity Factor Computations Using the Boundary Element Method", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **17**, pp. 384-404, (1981).
15. Y. Murakami (Ed.), "*Stress Intensity Factors Handbook*", Vol. 1, Committee on Fracture Mechanics SMS Japan, Pergamon Press, (1987).
16. H. Nisitani, "Tension of a Strip with Symmetric Edge Cracks or Elliptical Notches", *Trans. Japan Soc. Mech. Engng.*, Vol. **49**, 349, pp. 2518-2526, (1975).
17. M.B. Civelek y F. Erdogan, "Crack Problems for a Rectangular Sheet and a Infinite Strip", *Int. J. Fract.*, Vol. **19**, pp. 139-159, (1982).
18. E.P. Chen y G.C. Sih, "*Scattering Waves about Stationary and Moving Cracks*", Chapter 3 in *Mechanics of Fracture 4: Elastodynamic Crack Problems*, G.C. Sih (Ed.), Noordhoff International Publ., (1977).
19. G.C. Sih y J.F. Loeber, "Wave Propagations in a Elastic Solid with a Line of Discontinuity or Finite Crack", *Q. Appl. Math.*, Vol. **27**, pp. 193-213, (1969).