Rev. Int. Mét. Num. Cálc. Dis. Ing.
Vol. **22**, **2**, 87–117 (2006)

**Revista Internacional de
Métodos Numéricos para
Cálculo y Diseño en Ingeniería**

Análise elasto-plástica de problemas anisotrópicos considerando o método livre de elementos de Galerkin

Jorge Belinha
Institute of Mechanical Engineering
Rua Dr. Roberto Frias, 4200-465 Porto
Faculty of Engineering of the University of Porto, FEUP
Rua Dr. Roberto Frias, 4200-465 Porto, Portugal
Tel.: 351 225 08 14 91/ 1571; Fax: 351 225 08 15 38

Lúcia M.J.S. Dinis
Faculty of Engineering of the University of Porto, FEUP
Rua Dr. Roberto Frias, 4200-465 Porto, Portugal
Tel.: 351 225 08 15 93/1716; Fax: 351 225 08 15 84
e-mail: ldinis@fe.up.pt

Sumário

Um método sem malha baseado na formulação de Galerkin, o Método Livre de Elementos de Galerkin (EFGM), é usado na análise elasto-plástica de sólidos bidimensionais e de laminados. Para os sólidos bidimensionais são considerados os estados planos de tensão e de deformação, em função do problema a modular, e para os laminados é considerada a teoria de Reissner-Mindlin de forma a obterem-se os campos de deslocamentos e de deformações. As funções de aproximação são calculadas considerando o método dos mínimos quadrados (MLS).
O método da rigidez inicial é usado na resolução do sistema de equações não-linear e é considerada a superfície de cedência anisotrópica de Hill. É ainda descrito o algoritmo de solução elasto-plástica aplicado ao EFGM. São analisados alguns problemas bidimensionais e alguns laminados sendo as soluções obtidas pelo EFGM comparadas com as soluções do Método dos Elementos Finitos (MEF) e com as soluções de referencias disponíveis.

Palavras chave:

método sem malha, método livre de elementos de Galerkin, análise elasto-plástica, anisotropia.

ELASTO-PLASTIC ANALYSIS OF ANISOTROPIC PROBLEMS CONSIDERING THE ELEMENT FREE GALERKIN METHOD

Summary

A meshless method based in a Galerkin Formulation, the Element-Free Galerkin Method (EFGM), has been extended for the use in the elastic and elasto-plastic analysis of 2D problems and anisotropic symmetric laminates. For 2D problems, plane stress and plane strain are considered. For the laminates a Reissner-Mindlin plate theory, which is a first-order shear deformation theory (FSDT) is considered in order to define the displacement field and the strain field. The approximation functions are calculated considering a moving least squares (MLS) approach which is consistent provided the basis is complete in the polynomials up to a desired order. The initial stiffness method is used for the solution of the nonlinear system of equations and an anisotropic yield surface, Hill yield surface, is considered. The elasto-plastic algorithm of solution is described. Several 2D problems and laminate problems are solved and the obtained solutions are compared with finite element solutions and with available reference solutions.

©Universitat Politècnica de Catalunya (España). ISSN: 0213–1315 Recibido: Abril 2005 Aceptado: Septiembre 2005

Keywords:

meshless methods, element-free Galerkin method, elastoplastic analysis, anisotropy.

INTRODUÇÃO

Nos últimos 15 anos os métodos sem malha têm sido objecto de estudo em inúmeros trabalhos e têm sido aplicados aos mais diversos problemas da mecânica dos sólidos. Vários métodos sem malha foram propostos, nomeadamente os métodos das partículas (SPH)[1] e o (RKPM)[2,3], o Método das Nuvens $h-p^4$, o Método de Petrov-Galerkin (MLPG)[5], o Método Livre de Elementos de Galerkin (EFGM)[6,7] e mais recentemente o Método de Galerkin dos Vizinhos Naturais (NEM)[8]. Neste trabalho o método sem malha utilizado é o EFGM, o qual utiliza na construção das funções de forma a aproximação pelo método dos mínimos quadrados, inicialmente proposta por Nayroles *et al*[9]. O estudo de problemas elásticos bidimensionais é iniciado na referência 6 e tem continuação na referência 10. Krysl *et al.*[11,12] procedeu a análise de placas finas recorrendo ao EFGM. A análise de placas espessas, com recurso ao EFGM, com a formulação de Reissner-Mindlin é apresentada por Donning *et al.*[13]. Esta formulação foi também considerada por Kanok-Nukulchai *et al.*[14] com algumas modificações de forma a evitar o fenómeno da retenção ao corte. A análise pelo EFGM de laminados simétricos é apresentada por Dinis *et al.*[15]. No âmbito da análise elasto-plástica o EFGM foi inicialmente aplicado a dinâmica da fractura[16,17], a problemas de fendas e sua evolução[18,19] e posteriormente a problemas bidimensionais[20] e tridimensionais[21−23].

Este trabalho pretende estender o EFGM a análise elasto-plástica de sólidos 2D, estados planos de tensão e de deformação, e de laminados simétricos com comportamento material anisotrópico. Apresentam-se aplicações do método para sólidos com comportamento material isotrópico e anisotrópico e comparam-se os resultados com soluções referenciadas e com as soluções obtidas com o MEF.

MÉTODO LIVRE DE ELEMENTOS DE GALERKIN

O EFGM é considerado um método sem malha pois apenas é necessário, para gerar as equações discretas, um conjunto de nós, aleatoriamente espalhados no domínio do problema, e uma descrição das fronteiras físicas e de carga do elemento. Este método fornece inteiramente a conectividade entre os nós e as funções de aproximação. O EFGM emprega os aproximadores do Método dos Mínimos Quadrados (MLS) na construção das funções de forma com vista a aproximar a função $u^h(\mathbf{x})$, campo de deslocamentos aproximado, da função $u(\mathbf{x})$, campo de deslocamentos real da peça. A forma fraca de Galerkin é usada para desenvolver o sistema discreto de equações. E´ usada uma malha de células de integração para efeitos de cálculo dos sistemas matriciais.

Aproximadores MLS

A aproximação pelo MMQ é construída a partir de três componentes:

1. uma função de peso de suporte compacto associada a cada nó,
2. uma base, usualmente um polinómio,
3. um conjunto de coeficientes dependentes da posição de cada nó.

A função de peso deve ser diferente de zero sobre um pequeno domínio na vizinhança de $\mathbf{x}_I$ e zero fora deste, denominado por domínio de suporte da função de peso. O que equivale a dizer que a função de peso tem suporte compacto. O domínio de suporte da função de peso define o domínio de influência de $\mathbf{x}_I$, que é o domínio sobre o qual o nó I contribui para a aproximação. É a sobreposição destes domínios que garante a conectividade entre nós. A aproximação $u^h(\mathbf{x})$ da função $u(\mathbf{x})$ é definida no domínio Ω como

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_i^m p_i(\mathbf{x}) a_i(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{p}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}) a(\mathbf{x}) \tag{1}$$

sendo $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ os monómios no espaço das coordenadas $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = (x, y)$ escolhidos de tal modo que a base seja completa[6]. Neste trabalho recorreu-se à base polinomial linear para a análise de problemas bidimensionais e à base quadrática para a análise de problemas de laminados.

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \{\, 1 \quad x \quad y \,\} \qquad m = 3 \tag{2}$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \{\, 1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \,\} \qquad m = 6 \tag{3}$$

Os coeficientes $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ saõ funções de $\mathbf{x}$ e podem ser representados por

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \{a_1(\mathbf{x}), a_2(\mathbf{x}), \ldots, a_m(\mathbf{x})\} \tag{4}$$

Estes coeficientes saõ obtidos, para qualquer ponto $\mathbf{x}$, minimizando a norma pesada discreta J

$$J = \sum_I^n w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)[u^h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) - u_I]^2 = \sum_I^n w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I[\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_I)\mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_I]^2 \tag{5}$$

onde n é o número de nós no interior do domínio de influência de $\mathbf{x}_I$, dentro do qual $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \neq 0$, e $\mathbf{u}_I$ é o parâmetro nodal de $\mathbf{u}$ em $\mathbf{x} = \mathbf{x}_I$. A minimização de J em relação a $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ leva à seguinte relação linear entre $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{u}_I$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})u \tag{6}$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{x})u \tag{7}$$

onde

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_I^n w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)\mathbf{p}(\mathbf{x}_I)\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_I) \tag{8}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \sum_I^n w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_I) \tag{9}$$

$$u = \sum_I^n u_I \tag{10}$$

Substituindo a equação (7) na equação (1), a função de aproximação do MLS para o campo de deslocamentos pode ser definida como

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_I^n \sum_j^m p_j(\mathbf{x}_I)(\mathbf{A}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{x}))_{jI} u_I = \sum_I^n \phi_I(\mathbf{x}) u_I \tag{11}$$

onde as funções de forma $\phi_I(\mathbf{x})$ são obtidas com

$$\phi_I(\mathbf{x}) = \sum_j^m p_j(\mathbf{x})(\mathbf{A}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{x}))_{jI} = \mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_I \quad (12)$$

As derivadas parciais da função de forma podem ser obtidas como

$$\phi_I(\mathbf{x})_{,x} = (\mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_I)_{,x} = \mathbf{p}^{\mathrm{T}}_{,x}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_I + \mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}_{,x}\mathbf{B}_I + \mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_{I,x} \quad (13)$$

onde $\mathbf{A}^{-1}_{,x}$ pode ser determinado com $\mathbf{A}^{-1}_{,x} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}_{,x}\mathbf{A}^{-1}$. O índice representa a derivação espacial.

Na escolha da função de peso é importante ter em atenção dois aspectos. É a função de peso que confere a continuidade a função de aproximação e a sua escolha afecta directamente os resultados obtidos pelo EFGM[10]. Neste trabalho são usadas duas funções de peso, a spline cúbica, com continuidade C^1, apresentada na equação (14) para problemas bidimensionais e a spline de sétima ordem, com continuidade C^3, apresentada na equação (15).

$$w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \equiv nw(r) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4r^2 + 4r^3 & r < 0,5 \\ \frac{4}{3} - 4r + 4r^2 - \frac{4}{3}r^3 & 0,5 < r \leq 1,0 \\ 0 & r > 1,0 \end{cases} \quad (14)$$

$$w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \equiv nw(r) = \begin{cases} 1 + \left(-\frac{47}{10}\right)r^2 + 12r^4 + (-10)r^5 + \frac{1}{2}r^6 + \frac{6}{5}r^7 & r \leq 1,0 \\ 0 & r > 1,0 \end{cases} \quad (15)$$

Definindo a distância entre o ponto de interesse $\mathbf{x}_I$ e o nó $\mathbf{x}$ no interior do domínio de influência do ponto de interesse como $d_I = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|$, então r, na equação (14), pode ser definido como $r = d_I/d_{mI}$, onde d_{mI} é o tamanho do domínio de influência do ponto de interesse I. De forma a obter-se a equação (13) é necessário determinar-se a derivada da função de peso.

Sistema de equações

Aplicando a forma fraca de Galerkin

$$\int_\Omega \delta(\mathbf{Lu})^{\mathrm{T}}\mathbf{c}(\mathbf{Lu})\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\Gamma - \delta\int_{\Gamma_u} \frac{1}{2}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)^{\mathrm{T}}\alpha(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)\,\mathrm{d}\Gamma = 0 \quad (16)$$

Como o último termo da equação (16) indica, o método usado na imposição das condições de fronteira essenciais é o método da penalidade[24]. Os factores de penalidade em α são constantes sobre todo o domínio, sendo $\alpha_{jj} = 1,0 \times 10^{10}\times$ (máximo elemento da diagonal da matriz de rigidez) onde j é o número de graus de liberdade por nó[25]. Com a equação (16) obtém-se o seguinte sistema matricial

$$[\mathbf{K} + \mathbf{K}^\alpha][\mathbf{U}] = [\mathbf{F} + \mathbf{F}^\alpha] \quad (17)$$

onde $\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez global assemblada usando

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_\Omega \mathbf{B}_I^{\mathrm{T}}\mathbf{e}\mathbf{B}_J\,\mathrm{d}\Omega \quad (18)$$

Para o caso do estado plano de deformação

$$\mathbf{c}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} - \frac{\nu_{31}^2}{E_3} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} - \frac{\nu_{32}\nu_{31}}{E_3} & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} - \frac{\nu_{12}\nu_{31}}{E_3} & \frac{1}{E_2} - \frac{\nu_{32}^2}{E_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \tag{19}$$

e para o caso do estado pano de tensão

$$\mathbf{c}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} - \frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 & \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \tag{20}$$

A matriz $\mathbf{B}$ é definida por

$$\mathbf{B}_i^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial y} & \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{21}$$

Para o caso dos laminados

$$\mathbf{c} = \sum_{j}^{n} \mathbf{T}_j^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_j \mathbf{T}_j \tag{22}$$

onde n é o número de camadas do laminado, $\mathbf{T}_j$ é a matriz de transformação da camada j e $\mathbf{Q}_j$ é a matriz material da camada j.

$$\mathbf{Q}_j = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_1\nu_{21}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_2\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31} \end{bmatrix} \tag{23}$$

$$\mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & -\sin^2\theta & 0 & 0 \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{24}$$

sendo θ a orientação da camada j. A matriz $\mathbf{B}$ é definida por

$$\mathbf{B}_i^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \phi_i}{\partial x} & 0 & -\frac{\partial \phi_i}{\partial y} & -\phi_i & 0 \\ 0 & -\frac{\partial \phi_i}{\partial y} & -\frac{\partial \phi_i}{\partial x} & 0 & -\phi_i \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial x} & \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{25}$$

onde ϕ_i é a função de forma do nó i. A matriz $\mathbf{K}^\alpha$ é a matriz dos factores de penalidade

$$\mathbf{K}_{IJ}^\alpha = \int_{\Gamma_u} \bar{\phi}_I^{\mathrm{T}} \alpha \bar{\phi}_J \, \mathrm{d}\Gamma \tag{26}$$

onde α é a matriz diagonal de $n \times n$ elementos (n é o número de graus de liberdade por nó) e $\bar{\phi}_I$ é também uma matriz diagonal $n \times n$, com os termos da diagonal iguais a um quando o respectivo grau de liberdade está condicionado e zero se contrário. O vector $\mathbf{F}^\alpha$ é definido por $\mathbf{F}_{IJ}^\alpha = \int_{\Gamma_u} \bar{\phi}_I^{\mathrm{T}} \alpha \mathbf{u}_0 \, \mathrm{d}\Gamma$ e representa as forças que resultam da imposição das condições de fronteira essenciais.

Integração numérica

A malha nodal a usar pelo EFGM pode ser constituída por nós aleatoriamente espalhados no domínio do problema, no entanto é necessário construir uma malha de fundo para efeitos de integração de forma a obterem-se as equações que regem o fenómeno em estudo. Neste trabalho utilizou-se uma malha de integração de pontos de quadratura de Gauss baseada na malha de nós, uma vez que apenas foram consideradas malhas nodais regulares. A relação entre o número de pontos de integração e o número de nós está dependente de diversos factores, tais como a ordem da base polinomial, a ordem da função de peso e o número de nós no interior do domínio de influência[26]. Assim no caso dos problemas bidimensionais usando um número mínimo de 20 nós no interior de cada domínio de influência, uma base polinomial linear e uma "spline" cúbica sugere-se o uso de 4×4 pontos de quadratura de Gauss dentro de cada célula de integração, tal como a Figura 1b indica. No caso da análise de laminados usando um número mínimo de 16 nós no interior de cada domínio de influência, uma base polinomial quadrática e uma "spline" de sétima ordem, o uso de 6×6 pontos de quadratura de Gauss dentro de cada célula de integração, tal como a Figura 1c indica, parece ser o mais adequado.

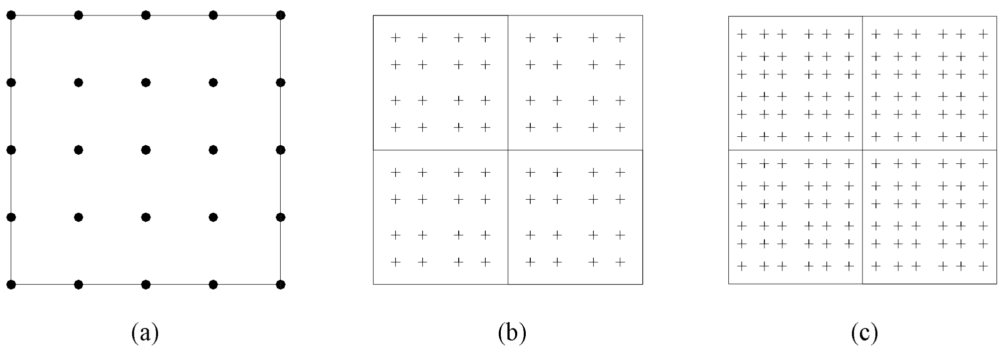


Figura 1. a) Malha nodal e correspondente; b) malha de fundo de integração de 4×4 pontos de quadratura de Gauss por célula de integração e de; c) 6×6 pontos de quadratura de Gauss por célula de integração

PLASTICIDADE APLICADA AO EFGM

A teoria da plasticidade requer três conceitos fundamentais[27], um critério de cedência, uma regra de encruamento e uma regra de escoamento plástico. A existência de uma superfície de cedência inicial define o limite elástico do material para um estado multiaxial de tensão. O critério de cedência depende do estado da tensão e da história do carregamento, podendo ser definido pela equação (27). A superfície de cedência é dependente de um parâmetro de encruamento k, no caso do material ser isotrópico, a superfície de cedência depende apenas da magnitude das tensões principais aplicadas e é independente das correspondentes orientações.

$$F(\sigma, k) = f(\sigma, k) - \sigma_Y(k) = 0 \tag{27}$$

sendo $f(\sigma, k)$ a função de cedência dependente do parâmetro de encruamento k e do estado de tensão. A tensão de cedência do material é também dependente de k e é definida por $\sigma_Y(k)$.

Superfície de cedência anisotrópica

O critério de cedência anisotrópico usado neste trabalho é o critério generalizado de Huber-Mises[27], também conhecido por critério de cedência de Hill, para materiais com comportamento anisotrópico. Tendo em conta que neste trabalho apresentam-se problemas de placas com a formulação de Reissner-Mindlin, a função de cedência generalizada é definida por

$$f(\sigma) = \bar{\sigma} = [a_1\sigma_{xx}^2 + a_{12}\sigma_{xx}\sigma_{yy} + a_2\sigma_{yy}^2 + a_3\tau_{xy}^2 + a_4\tau_{yz}^2 + a_5\tau_{zx}^2]^{\frac{1}{2}} \tag{28}$$

sendo a_i os parâmetros anisotrópicos do material. A equação (28) pode ser apresentada na forma

$$f(\sigma) = \bar{\sigma} = [\sigma^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_A\sigma]^{\frac{1}{2}} \tag{29}$$

onde σ é o vector das tensões e $\mathbf{M}_A$ é a matriz de parâmetros anisotrópicos definida por

$$\mathbf{M}_A = \begin{bmatrix} a_1 & \frac{a_{12}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_{12}}{2} & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 \end{bmatrix} \tag{30}$$

Os parâmetros de anisotropia iniciais, antes da ocorrência de encruamento, podem ser determinados recorrendo a seis testes de cedência independentes. Para cada um destes seis testes impõe-se o anulamento de todas as componentes da tensão, na função de cedência, a excepção da componente pretendida. Assim para a direcção principal 1, ensaia-se o material a tracção segundo essa direcção e obtém-se o parâmetro de anisotropia segundo essa mesma direcção.

$$a_{10} = \left[\frac{\bar{\sigma}_0}{\sigma_{Y_{10}}}\right]^2 \tag{31}$$

onde $\bar{\sigma}_0$ é a tensão de cedência uniaxial na direcção de referência e σ_{Y10} é a tensão de cedência uniaxial na direcção 1 antes da ocorrência de encruamento. Note-se que se a direcção 1 for considerada como direcção de referência, então $a_{10} = 1,0$. Da mesma forma é possível encontrar os restantes parâmetros anisotrópicos.

$$a_{20} = \left[\frac{\bar{\sigma}_0}{\sigma_{Y_{20}}}\right]^2; \quad a_{30} = \left[\frac{\bar{\sigma}_0}{\tau_{Y_{120}}}\right]^2; \quad a_{40} = \left[\frac{\bar{\sigma}_0}{\tau_{Y_{230}}}\right]^2; \quad a_{50} = \left[\frac{\bar{\sigma}_0}{\tau_{Y_{310}}}\right]^2 \tag{32}$$

Para se obter o parâmetro a_{120} é necessário recorrer-se a um novo teste de tracção uniaxial, onde o provete a ensaiar[28,29] é obtido considerando o plano material 1-2. Estando o eixo do provete orientado segundo um ângulo β em relação ao eixo 1 e denominando $\sigma_{Y\beta_0}$ como tensão de cedência uniaxial no plano 1-2 segundo uma orientação β, é possível estabelecer as seguintes relações

$$\left[\begin{array}{l} \sigma_1 = \sigma_{xx} = \sigma_{Y\beta_0}\cos^2(\beta) \\ \sigma_2 = \sigma_{yy} = \sigma_{Y\beta_0}\,\mathrm{sen}^2(\beta) \\ \tau_{12} = \tau_{xy} = \sigma_{Y\beta_0}\,\mathrm{sen}(\beta)\cos(\beta) \end{array}\right. \tag{33}$$

Introduzindo as equações (33) na equação (28) obtém-se

$$\bar{\sigma}_0 = \Big[a_{10}\left[\sigma_{Y\beta_0}\cos^2(\beta)\right]^2 + a_{120}\left[\sigma^2_{Y\beta_0}\,\mathrm{sen}^2(\beta)\cos^2(\beta)\right] + \\ + a_{20}\left[\sigma_{Y\beta_0}\,\mathrm{sen}^2(\beta)\right]^2 + a_{30}\left[\sigma_{Y\beta_0}\,\mathrm{sen}(\beta)\cos(\beta)\right]\Big]^{\frac{1}{2}} \tag{34}$$

e assim

$$a_{120} = \frac{\bar{\sigma}_0}{\sigma^2_{Y\beta_0}\,\mathrm{sen}^2(\beta)\cos^2(\beta)} - \frac{a_{10}\cos^4(\beta) + a_{20}\,\mathrm{sen}^4(\beta) + a_{30}\,\mathrm{sen}^2(\beta)\cos^2(\beta)}{\mathrm{sen}^2(\beta)\cos^2(\beta)} \tag{35}$$

Se o par de eixos principais do material (1,2) não coincidirem com os eixos (x, y) do referencial global, então os parâmetros de anisotropia deverão ser transformados para o referencial global. Supõe-se agora que uma dada camada do laminado tem uma orientação θ em relação ao referencial global, como indica a Figura 2. Então aplicando a matriz de transformação $\mathbf{T}$, equação (24), é possível escrever a tensão de cedência da seguinte forma

$$f(\sigma) = \bar{\sigma} = [\sigma^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{M}}_A\sigma]^{\frac{1}{2}} \tag{36}$$

onde

$$\bar{\mathbf{M}}_A = \mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_A\mathbf{T} \tag{37}$$

ou seja, actua-se directamente nos parâmetros de anisotropia, criando uma nova matriz de parâmetros anisotrópicos que já contabiliza a orientação da camada do laminado.

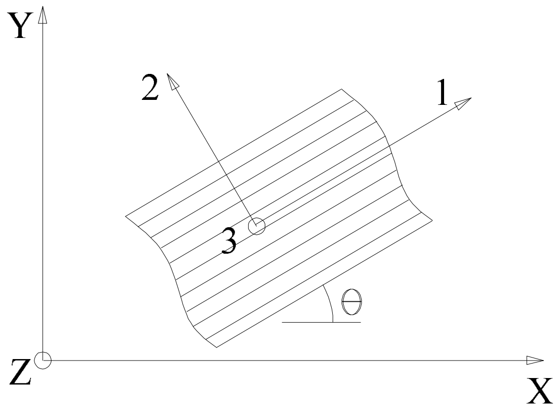


Figura 2. Orientação das direcções principais (1,2) de elasticidade do laminado em relação ao eixo do referencial global (x, y, z)

As equações (31) e (32) indicam que os parâmetros anisotrópicos são dependentes da superfície de cedência actualizada. Os parâmetros de anisotropia vão variar também ao longo do processo de deformação plástica. De forma a determinar os valores correntes dos parâmetros de anisotropia, supõe-se que o trabalho de deformação plástica realizado pelas tensões em cada uma das direcções, para uma dada variação da tensão efectiva $\bar{\sigma}$, é o mesmo[28,29]. Assim o trabalho desenvolvido pela tensão de cedência na direcção 1 supondo uma variação linear do encruamento no material é definido por

$$\frac{1}{2}\varepsilon_1^p(\sigma_{Y_{10}} + \sigma_{Y_1}) = \frac{1}{2}\varepsilon^{-p}(\bar{\sigma}_0 + \bar{\sigma}) \tag{38}$$

e sabendo que

$$\sigma_{Y_1} - \sigma_{Y_{10}} = E_{T_1} \varepsilon_1^p \tag{39}$$

$$\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_0 = E_T \bar{\varepsilon}^p \tag{40}$$

obtém-se

$$\sigma_{Y_1} = \frac{E_{T_1}}{E_T}(\bar{\sigma}^2 - \bar{\sigma}_0^2) + \bar{\sigma}_{Y_{10}}^2 \tag{41}$$

Desta forma o valor actualizado do parâmetro de anisotropia pode ser definido por

$$a_1 = \left[\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{Y_1}}\right]^2 = \frac{\bar{\sigma}^2}{\left[\frac{E_{T_1}}{E_T}\right](\bar{\sigma}^2 - \bar{\sigma}_0^2) + \bar{\sigma}_{Y_{10}}^2} \tag{42}$$

Seguindo o mesmo raciocínio para os restantes parâmetros

$$a_2 = \left[\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{Y_2}}\right]^2 = \frac{\bar{\sigma}^2}{\left[\frac{E_{T_2}}{E_T}\right](\bar{\sigma}^2 - \bar{\sigma}_0^2) + \bar{\sigma}_{Y_{20}}^2} \tag{43}$$

$$a_3 = \left[\frac{\bar{\sigma}}{\tau_{Y_{12}}}\right]^2 = \frac{\bar{\sigma}^2}{\left[\frac{G_{T_{12}}}{E_T}\right](\bar{\sigma}^2 - \bar{\sigma}_0^2) + \bar{\tau}_{Y_{120}}^2} \tag{44}$$

$$a_4 = \left[\frac{\bar{\sigma}}{\tau_{Y_{23}}}\right]^2 = \frac{\bar{\sigma}^2}{\left[\frac{G_{T_{23}}}{E_T}\right](\bar{\sigma}^2 - \bar{\sigma}_0^2) + \bar{\tau}_{Y_{230}}^2} \tag{45}$$

$$a_5 = \left[\frac{\bar{\sigma}}{\tau_{Y_{31}}}\right]^2 = \frac{\bar{\sigma}^2}{\left[\frac{E_{T_{31}}}{E_T}\right](\bar{\sigma}^2 - \bar{\sigma}_0^2) + \bar{\tau}_{Y_{310}}^2} \tag{46}$$

Repetindo o procedimento para o plano material 1-2 de forma a obter-se a_{12} chega-se à seguinte equação

$$a_{12} = \frac{\bar{\sigma}^2}{\left[\left[\frac{E_{T\beta}}{E_T}\right](\bar{\sigma}^2 - \bar{\sigma}_0^2)\right]\operatorname{sen}^2(\beta)\cos^2(\beta)} - \frac{a_1\cos^2(\beta) + a_2\operatorname{sen}^2(\beta) + a_3\operatorname{sen}^2(\beta)\cos^2(\beta)}{\operatorname{sen}^2(\beta)\cos^2(\beta)} \tag{47}$$

sendo E_{T_1}, E_{T_2} e $E_{T\beta}$, os módulos tangenciais segundo as direcções 1, 2 e β respectivamente. E_T é o módulo tangencial efectivo ou de referência. $G_{T_{12}}$, $G_{T_{23}}$ e $G_{T_{31}}$ representam as inclinações das curvas de tensão de corte/deformação plástica. Estas grandezas são independentes e obtidas experimentalmente.

Definindo o vector fluxo como

$$\mathbf{a} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma_{xx}}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{yy}}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{zz}}, \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}}, \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}, \frac{\partial f}{\partial \tau_{zx}}\right] \tag{48}$$

considerando a função de cedência apresentada em (29) obtém-se

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{xx}} = \frac{1}{\bar{\sigma}}[\bar{a}_{11}\sigma_{xx} + \bar{a}_{12}\sigma_{yy} + \bar{a}_{13}\tau_{xy}] \tag{49}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{yy}} = \frac{1}{\bar{\sigma}}[\bar{a}_{12}\sigma_{xx} + \bar{a}_{22}\sigma_{yy} + \bar{a}_{23}\tau_{xy}] \tag{50}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} = \frac{1}{\bar{\sigma}}[\bar{a}_{13}\sigma_{xx} + \bar{a}_{23}\sigma_{yy} + \bar{a}_{33}\tau_{xy}] \tag{51}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} = \frac{1}{\bar{\sigma}}[\bar{a}_{44}\tau_{yz} + \bar{a}_{45}\tau_{zx}] \tag{52}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{zx}} = \frac{1}{\bar{\sigma}}[\bar{a}_{45}\tau_{yz} + \bar{a}_{55}\tau_{zx}] \tag{53}$$

Retorno das tensões a superfície de cedência

Neste trabalho, tal como na referência 30, o comportamento material é modulado como uma relação incremental entre o vector do incremento de tensão $d\sigma$ e o incremento de deformação $d\varepsilon$. Assim o algoritmo de retorno à superfície de cedência assume que

1. O incremento de deformação total é a soma do incremento de deformação elástica com o de deformação plástica

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \tag{54}$$

onde $d\sigma^e = \mathbf{c}d\varepsilon^e$, sendo $d\sigma^e$ o incremento de tensão ainda no interior da superfície de cedência.

2. O critério de cedência é definido por $f(\sigma) \leq \sigma_Y^*$, onde a função $f(\sigma)$é definida genericamente pela equação (36) e σ_Y^* pode ser definido por

$$\sigma_Y^* = \sigma_Y + [E\bar{\varepsilon}_{i-1}^p] \tag{55}$$

sendo E o módulo de elasticidade de referencia, σ_Y a tensão de cedência de referencia e $\bar{\varepsilon}_{i-1}^p$ a deformação plástica acumulada efectiva da iteração anterior.

3. O factor de redução R é dado pela equação (56), onde $\bar{\sigma}_i^{\exp}$ é a tensão total efectiva da actual iteração obtida elasticamente pela equação (36) para $\sigma = \sigma_i^{\exp}$. A tensão efectiva da iteração anterior é designada por $\bar{\sigma}_{i-1}$.

$$R = \frac{\bar{\sigma}_i^{\exp} - \sigma_Y^*}{\bar{\sigma}_i^{\exp} - \bar{\sigma}_{i-1}} \tag{56}$$

4. A parte elástica e plástica são definidas por

$$\text{elástica} \qquad \sigma^e = (1 - R)\sigma_i^{\exp} \tag{57}$$

$$\text{plástica} \qquad \sigma^p = (R)\sigma_i^{\exp} \tag{58}$$

5. O vector normal a superfície de cedência, ou vector fluxo, é definido por

$$\mathbf{a} = \frac{\partial f(\sigma^e)}{\partial \sigma} \tag{59}$$

6. A projecção do vector σ^p no vector norma do vector fluxo $\mathbf{a}$, $\mathbf{e}_a$ é dada por

$$\Delta\sigma_a^p = \|\sigma^p\|[\mathbf{e}_{\sigma^p}|\mathbf{e}_a]\mathbf{e}_a \tag{60}$$

onde $\|\sigma^p\|$ é a norma do vector σ^p, $[\mathbf{e}_{\sigma^p}|\mathbf{e}_a]$ é o produto interno entre os vectores $\mathbf{e}_{\sigma^p}$ e $\mathbf{e}_a$, sendo $\mathbf{e}_{\sigma^p}$ o vector norma de σ^p.

7. A correcção da parte plástica da tensão é obtida por

$$\Delta\sigma^p = \sigma^p - \Delta\sigma_a^p \tag{61}$$

Assim

$$\sigma_i^{(1)} = \sigma^e + \Delta\sigma^p \tag{62}$$

No entanto, como é visível pelas Figuras 3a e 3b, ainda não se atingiu na realidade a superfície de cedência com a equação (62). Tem de se repetir todo o processo de (1) a (7), agora com $\sigma = \sigma_i^{(1)}$, até se atingir

$$f(\sigma_i^{(r)}) \leq \sigma_Y^* + \Delta e \tag{63}$$

onde Δe é uma tolerância de referência e (r) o número de vezes que o processo foi repetido.

Na Figura 3a é apresentada uma primeira tentativa de retorno do incremento de tensão de um dado ponto à superfície de cedência e na Figura 3b é apresentada a situação a que corresponde $R = 1,0$.

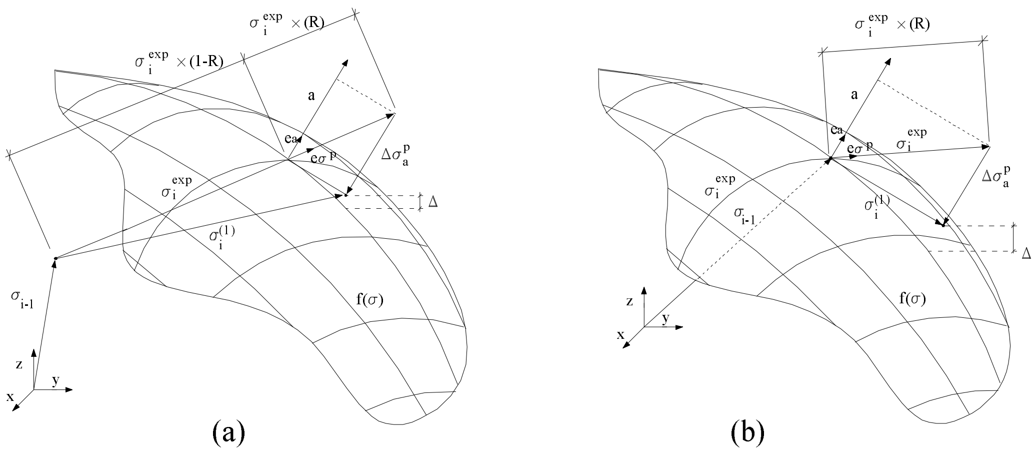


Figura 3. a) Retorno do incremento de tensão a um contínuo elasto-plástico no caso da cedência inicial e b) Retorno do incremento de tensão a um contínuo elasto-plástico no caso de continuação do processo de cedência

Algoritmo de solução elasto-plástica pelo EFGM

Neste trabalho o método de solução não-linear utilizado é o método da rigidez inicial[30]. Neste método a matriz de rigidez é calculada apenas uma vez, na primeira iteração do primeiro incremento de carga. O algoritmo de solução é apresentado na Figura 4.

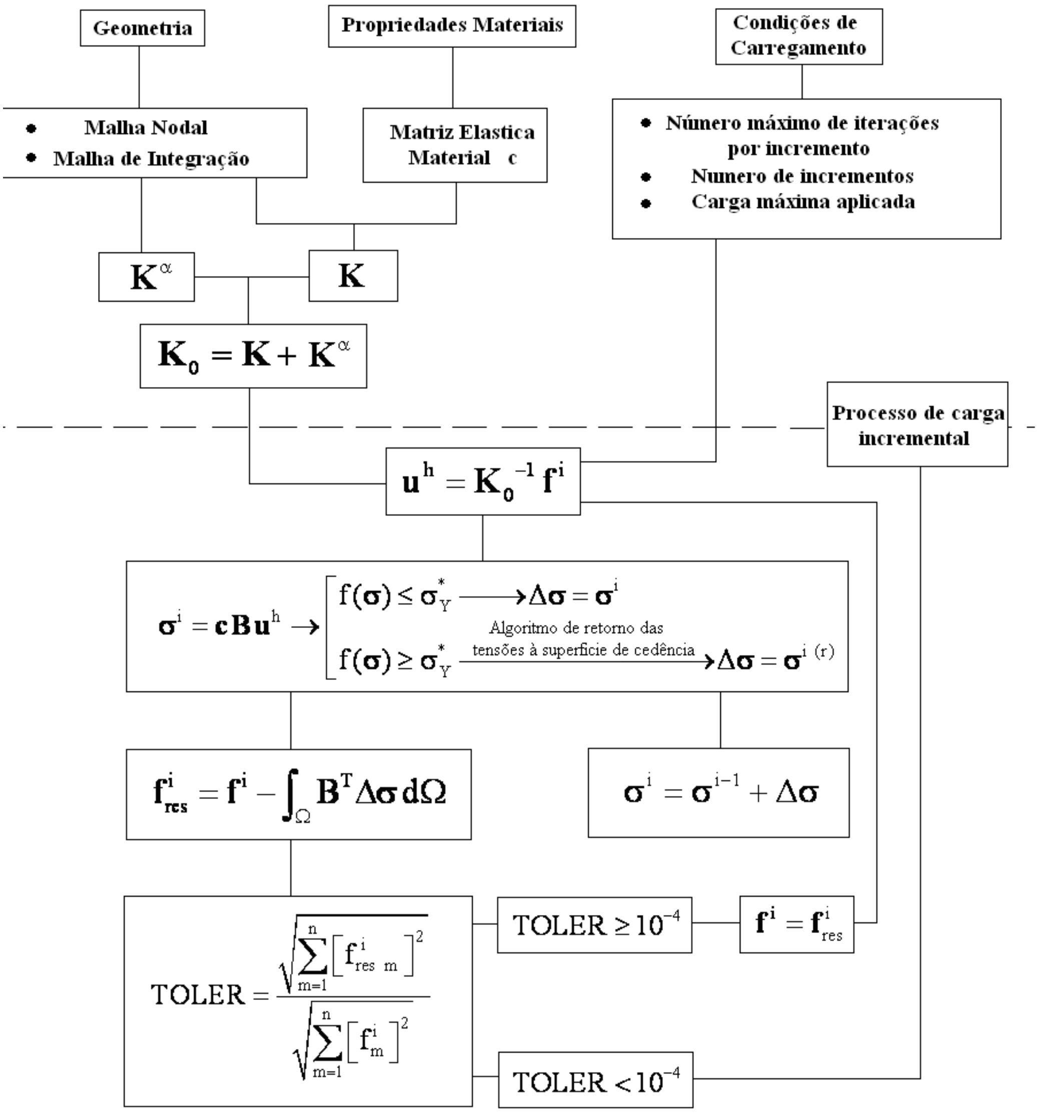


Figura 4. Algoritmo de solução não-linear utilizado na análise pelo EFGM

EXEMPLOS NUMÉRICOS

Membrana de Cook - isotrópica

Considere-se o sólido com as características mecânicas e geométricas e condições de fronteira essenciais representadas na Figura 5a. E considerado o estado plano de tensão.

Discretizou-se o problema numa malha regular de 357 nós, como indica a Figura 5b. Esta é a malha utilizada tanto na análise pelo EFGM como na análise pelo MEF. Utilizou-se na resolução do problema o algoritmo de solução não-linear de rigidez inicial - KT0. Na Figura 6 são apresentados os resultados referentes às componentes u e v, segundo x e y respectivamente, do deslocamento dos pontos P_1 e P_2, indicados na Figura 5, em função da carga f aplicada.

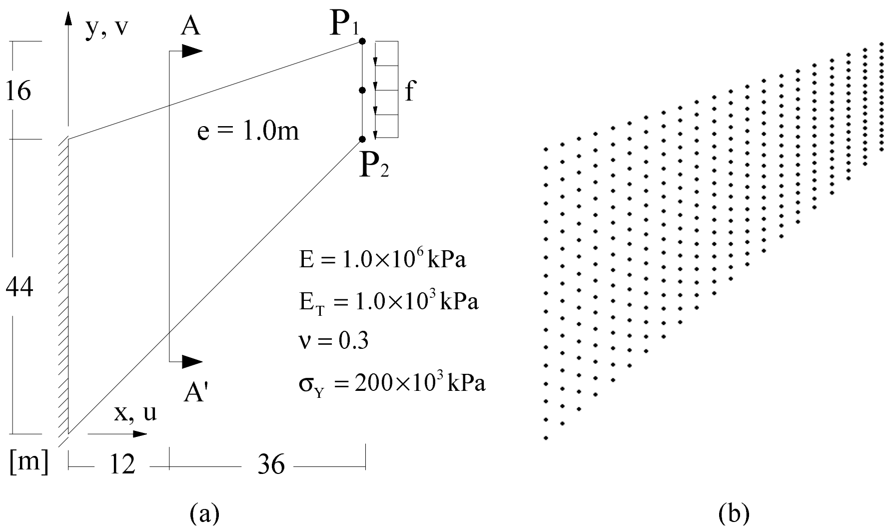


Figura 5. a) Características mecânicas e geométricas e condições de carregamento e de apoio do sólido; b) Malha nodal regular de 357 nós

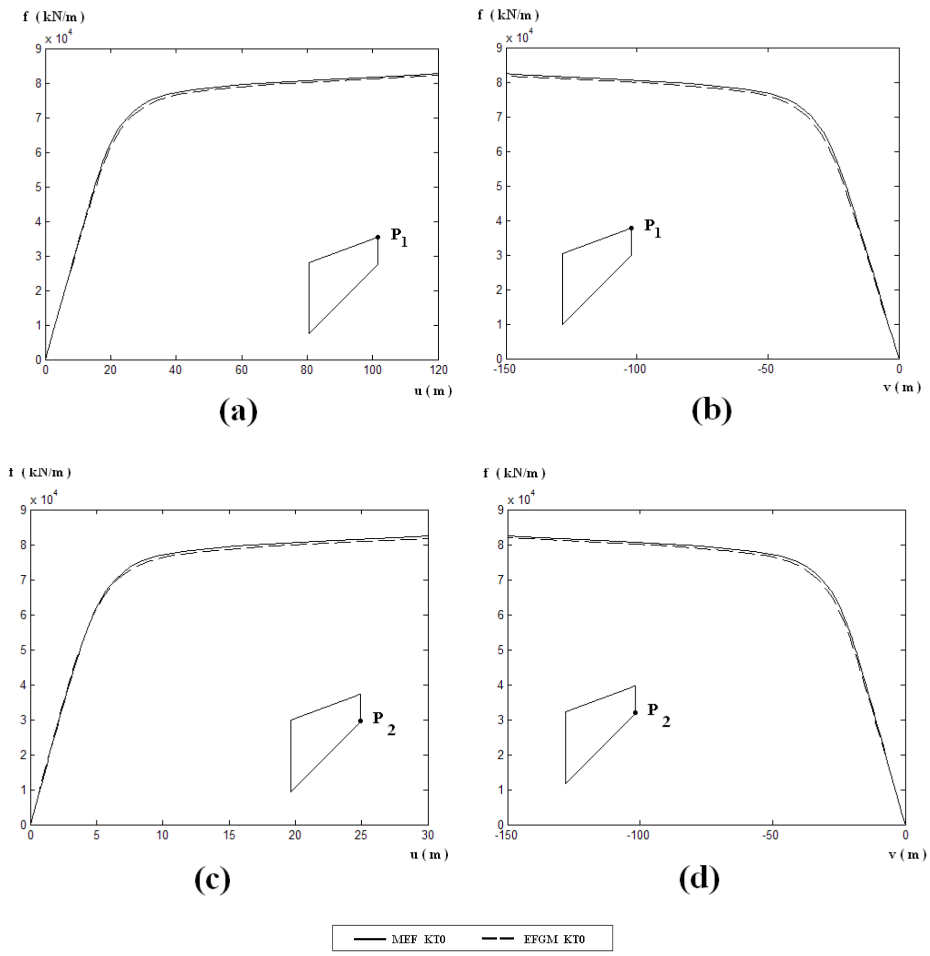


Figura 6. Diagramas carga/deslocamento. a) Componente u do deslocamento do ponto P_1; b) Componente v do deslocamento do ponto P_1; c) Componente u do deslocamento do ponto P_2; d) Componente v do deslocamento do ponto P_2

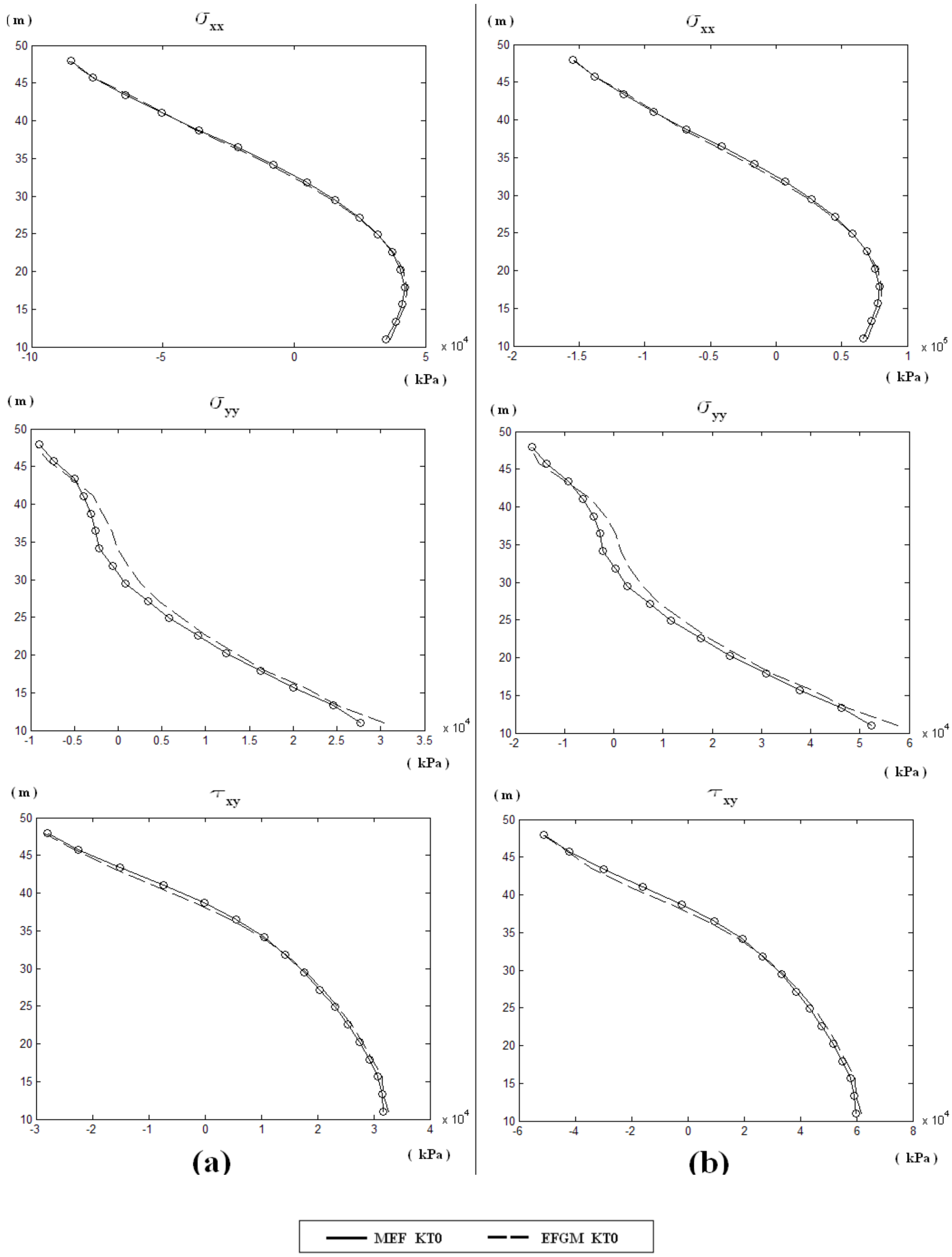


Figura 7. Diagramas das tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e de corte τ_{xy} para c) $f = 7,01255 \times 10^4$ kN/m e; d) $f = 8,55 \times 10^4$ kN/m

Apresentam-se seguidamente, na Figura 7, os diagramas das tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e da tensão de corte τ_{xy} ao longo da secção AA' para diferentes níveis crescentes de carga.

A Figura 7a refere-se a uma carga que ainda não provoca cedência em nenhum ponto do sólido. Os diagramas de tensões, representados na Figura 7b, são para uma carga que provoca a cedência de alguns pontos na secção da fronteira. Os diagramas das Figuras 7c e 7d referem-se respectivamente ao início da plastificação de alguns dos pontos da secção AA' e da plastificação total da secção AA'. É visível a boa concordância de resultados entre o EFGM e o MEF.

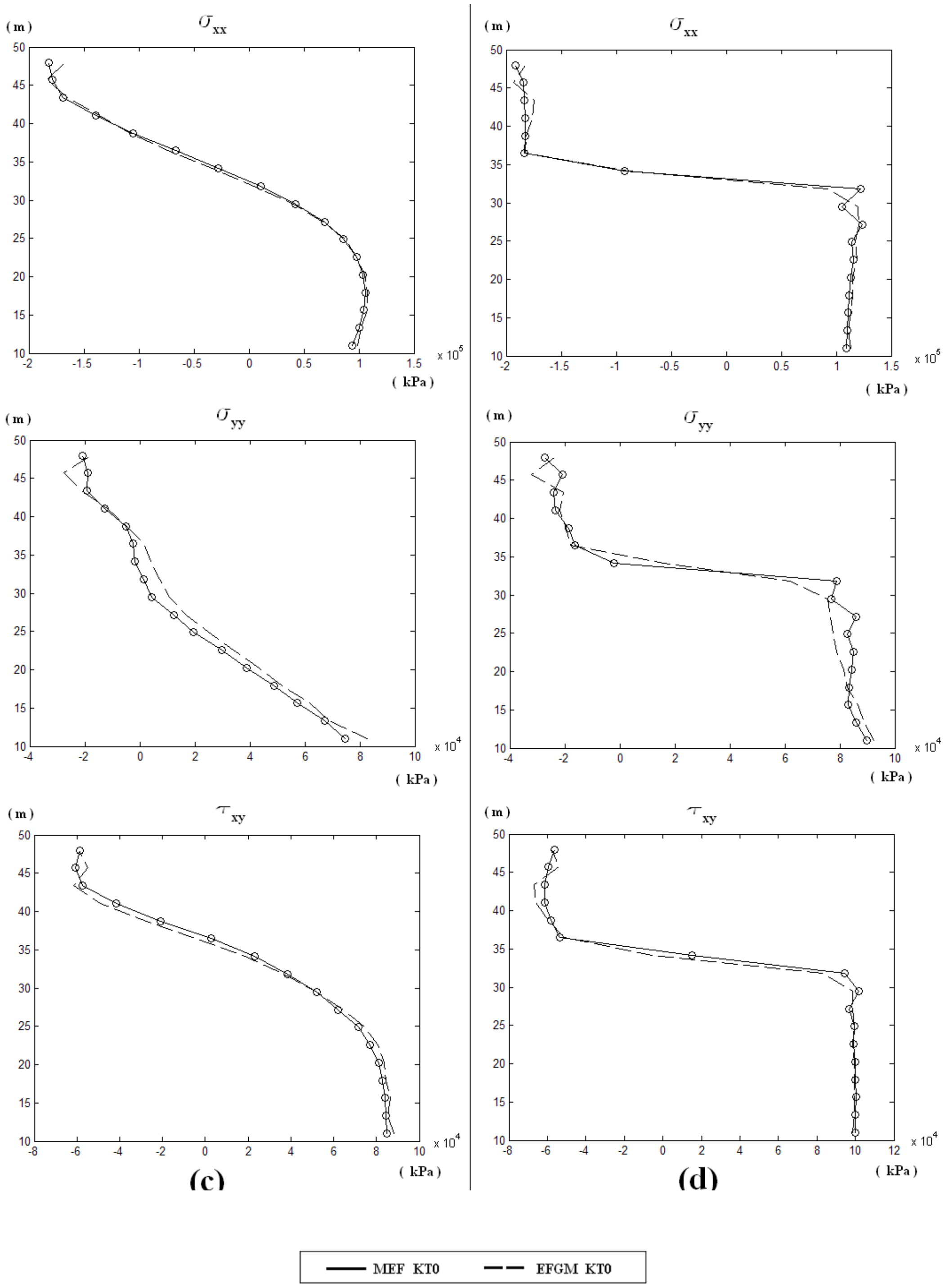


Figura 7. Diagramas das tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e de corte τ_{xy} para c) $f = 7,01255 \times 10^4$ kN/m e; d) $f = 8,55 \times 10^4$ kN/m

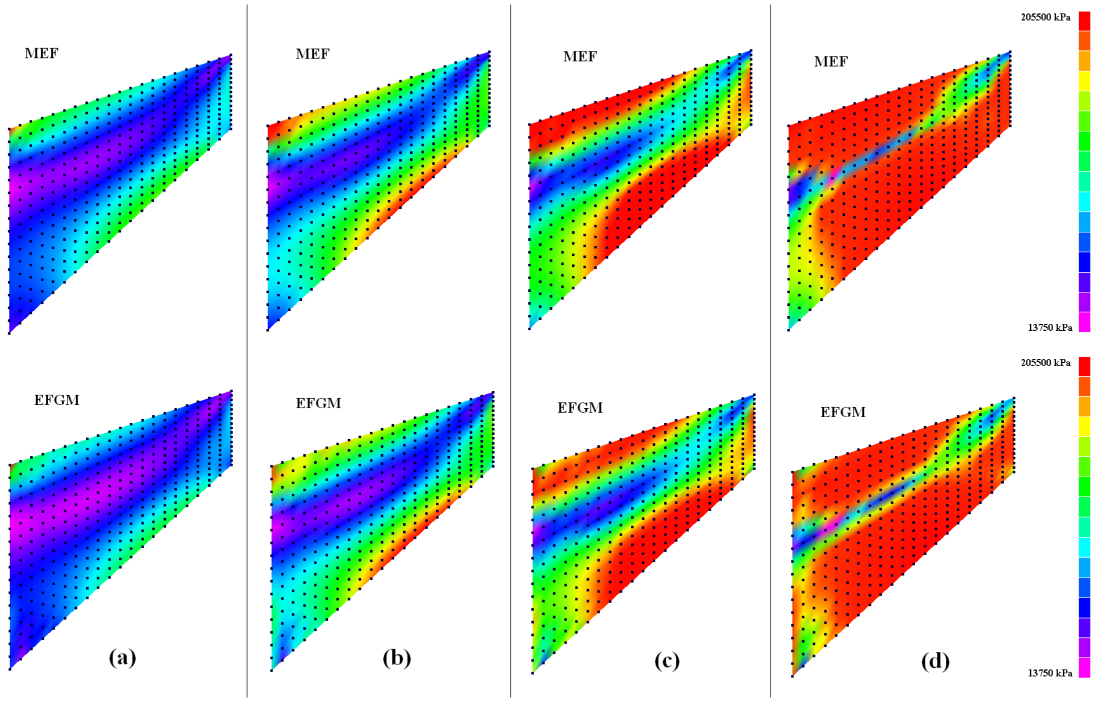
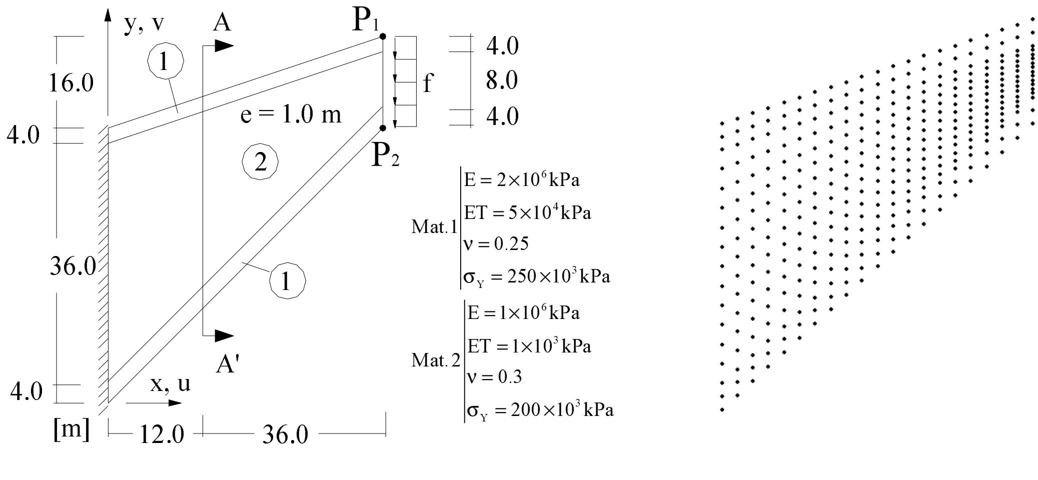


Figura 8. Mapas da distribuição da tensão efectiva obtida pelo MEF e pelo EFGM para a) $f = 2,7625 \times 10^4$ kN/m; b) $f = 5,1 \times 10^4$ kN/m; c) $f = 7,0125 \times 10^4$ kN/m e d) $f = 8,5 \times 10^4$ kN/m

De modo a evidenciar de forma clara esta boa concordância nos resultados apresentam-se, na Figura 8, os mapas da distribuição das tensões de efectivas, para os referidos níveis de carga, obtidos pelo EFGM KT0 e pelo MEF KT0.

Membrana de Cook - anisotrópica

Considere-se a membrana de Cook formada com dois tipos de materiais diferentes como indica a Figura 9a. São consideradas as hipóteses do estado plano de tensão.



(a) (b)

Figura 9. a) Características mecânicas e geométricas e condições de carregamento e de apoio do sólido; b) Malha nodal regular de 357 nós

Discretizou-se o problema com 357 nós como indica a Figura 9b e analisou-se o problema pelo EFGM KT0 e pelo MEF KT0. Na Figura 10 são apresentados os resultados relativos as componentes u e v do deslocamento dos pontos P_1 e P_2 em função da carga f aplicada. Tal como no ponto anterior é visível a boa concordância nos resultados entre o EFGM e o MEF.

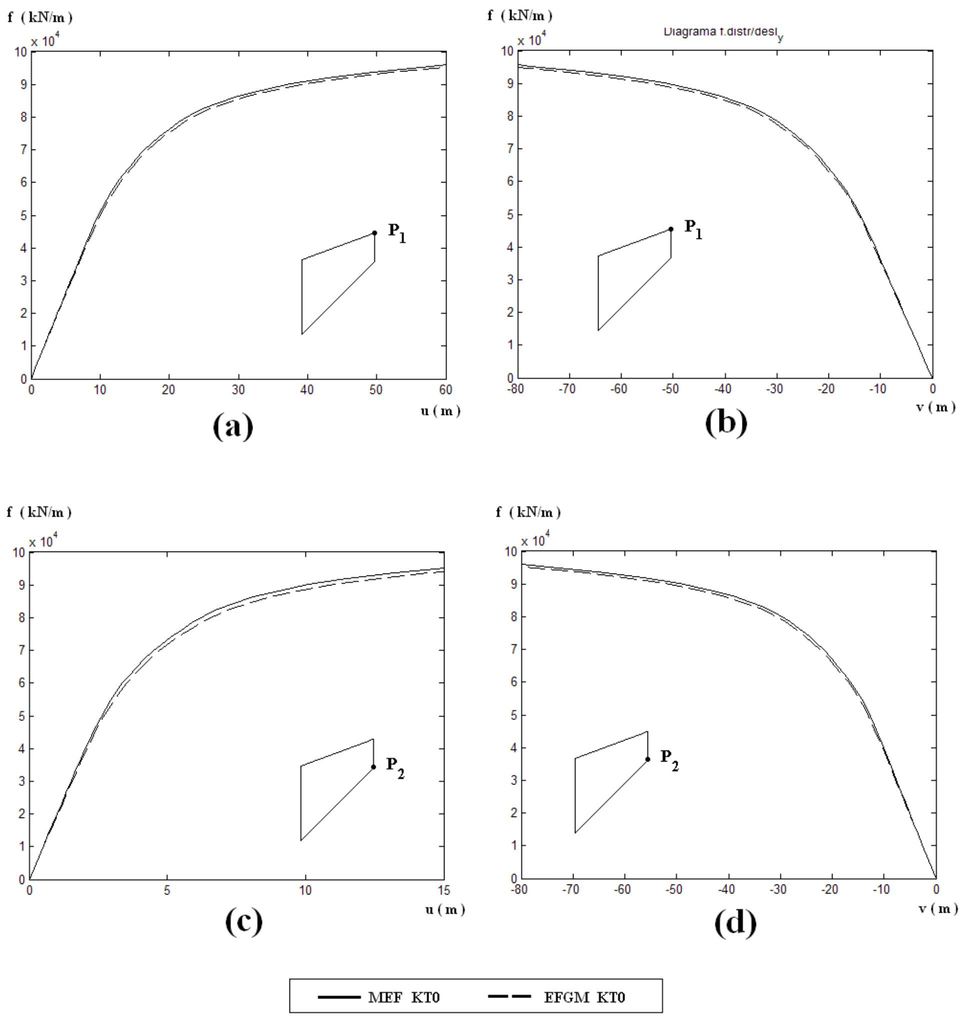


Figura 10. Diagramas carga/deslocamento: a) Componente u do deslocamento do ponto P_1; b) Componente v do deslocamento do ponto P_1; c) Componente u do deslocamento do ponto P_2; d) Componente v do deslocamento do ponto P_2

Apresentam-se de seguida, na Figura 11, os diagramas das tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e da tensão de corte τ_{xy} ao longo da secção AA' para diferentes níveis crescentes de carga.

A Figura 11a refere-se a uma carga que ainda não provoca cedência em nenhum ponto do sólido. Os digramas de tensões, representados na Figura 11b, são para uma carga que provoca o início da cedência em alguns pontos na secção da fronteira do problema. Os diagramas das Figuras 11c e 11d referem-se respectivamente ao início da plastificação de alguns dos pontos da secção AA' e a plastificação de grande parte dos pontos da secção AA'. É visível a boa concordância de resultados entre o EFGM e o MEF.

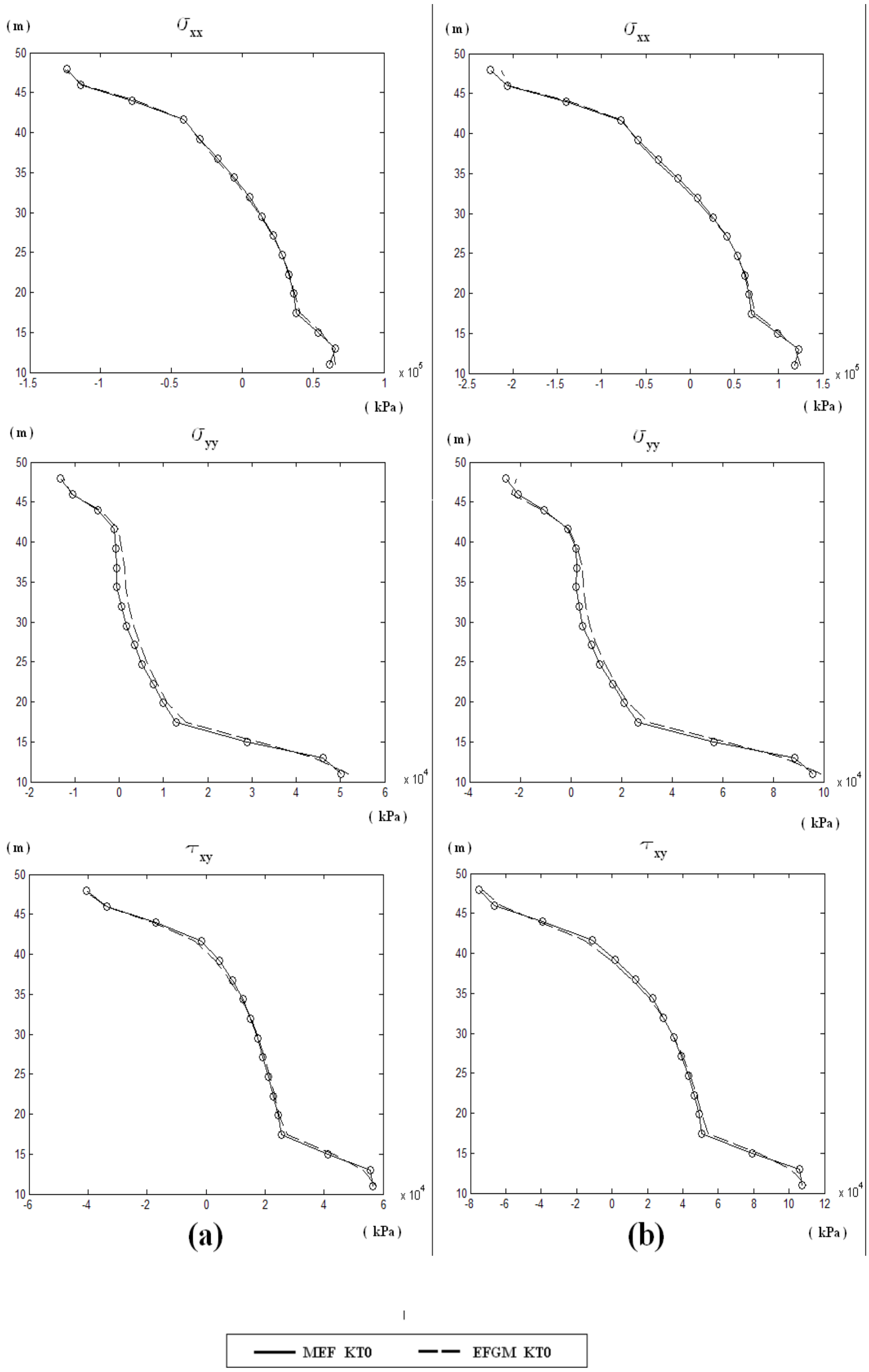


Figura 11. Diagramas das tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e de corte τ_{xy} para a) $f = 3,25 \times 10^4$ kN/m; b) $f = 6,0 \times 10^4$ kN/m

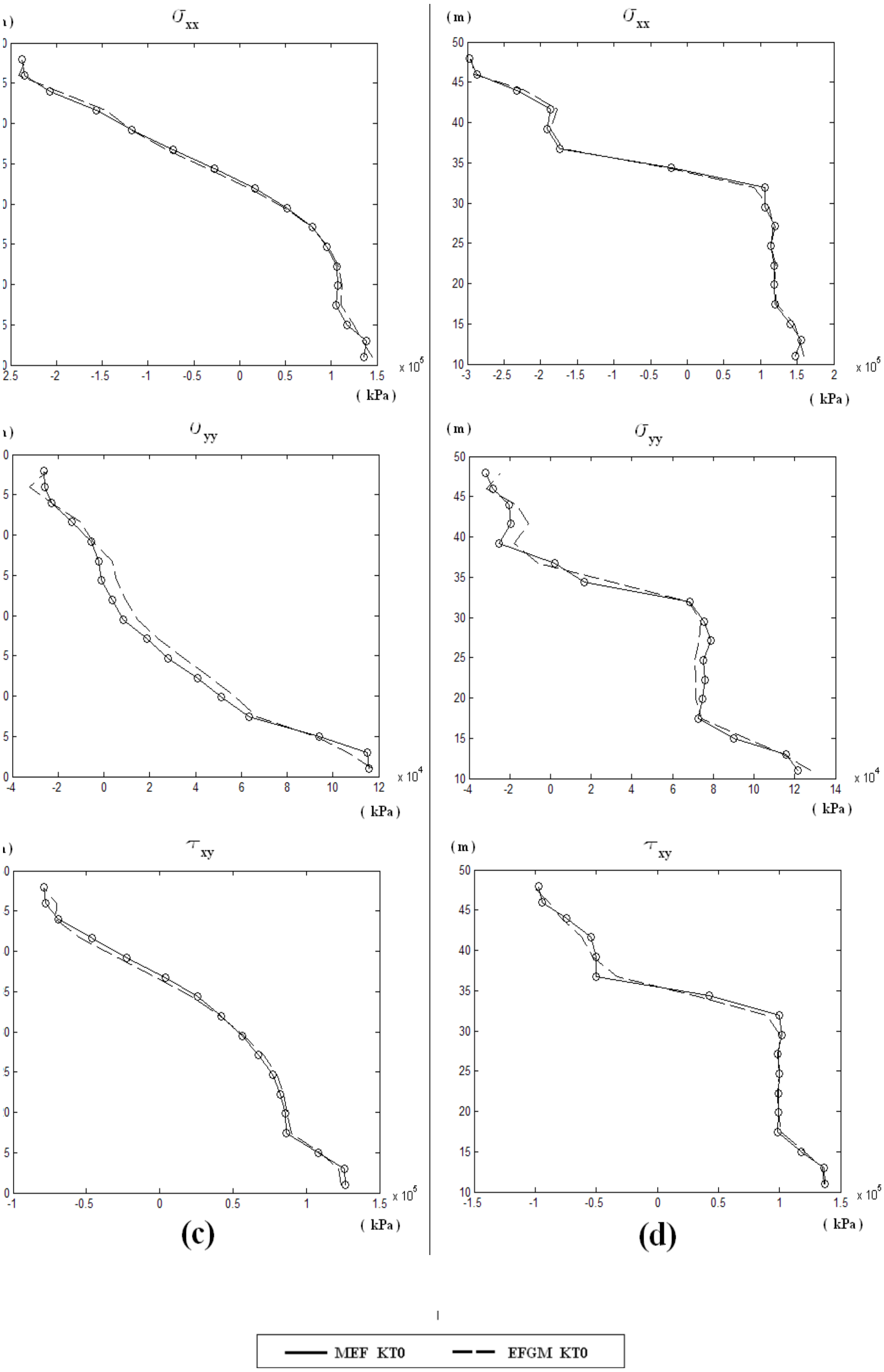


Figura 11. Diagramas das tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e de corte τ_{xy} para c) $f = 8,25 \times 10^4$ kN/m e d) $f = 10,0 \times 10^4$ kN/m

Apresentam-se na Figura 12 os mapas da distribuição das tensões efectivas obtidos pelo EFGM KT0 e pelo MEF KT0 para as cargas de $f = 3,25 \times 10^4$ e $f = 6,0 \times 10^4$, que correspondem respectivamente a um estado elástico de todo o problema e a um estado elasto-plástico.

Mais uma vez é visível a semelhança entre os dois métodos na distribuição das tensões ao longo do sólido.

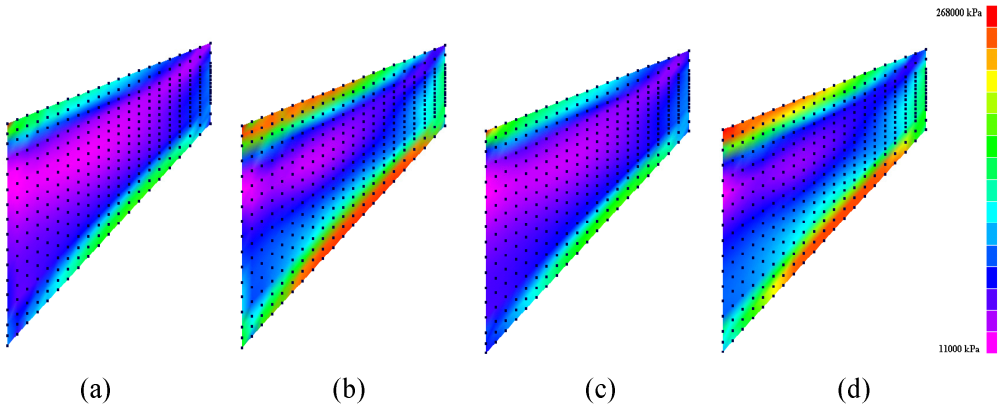


Figura 12. Mapas da distribuição da tensão efectiva obtida pelo EFGM para a) $f = 3,25 \times 10^4$ kN/m e b) $f = 6,0 \times 10^4$ kN/m e pelo MEF para c) $f = 3,25 \times 10^4$ kN/m e d) $f = 6,0 \times 10^4$ kN/m

Viga encastrada

O estudo prossegue com a análise elasto-plástica da viga encastrada com as características geométricas apresentadas na Figura 13a.

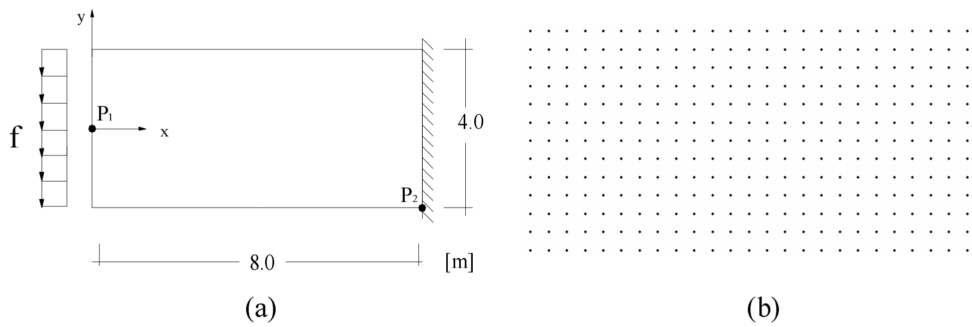


Figura 13. a) Características geométricas da viga encastrada; b) Malha nodal de 325 nós

Discretizou-se o problema numa malha regular de 325 nós, como indica a Figura 13b. As características mecânicas do material com encruamento anisotrópico são as seguintes

$$
\begin{array}{llll}
E_x = 3 \times 10^4\,\mathrm{kPa} & E_{T_x} = 3 \times 10^3\,\mathrm{kPa} & \sigma_{Y_x} = 40\,\mathrm{kPa} & \nu_{xy} = 0,3 \\
E_y = 3 \times 10^4\,\mathrm{kPa} & E_{T_y} = 3 \times 10^3\,\mathrm{kPa} & \sigma_{Y_y} = 30\,\mathrm{kPa} & \nu_{yx} = 0,3 \\
G_{xy} = 11538\,\mathrm{kPa} & G_{T_{xy}} = 11538\,\mathrm{kPa} & \tau_{Y_{xy}} = 17,3\,\mathrm{kPa} & \\
E = E_x & E_T = E_{T_x} & \sigma_Y = 3 \times 10^3\,\mathrm{kPa} &
\end{array}
$$

As características mecânicas do material com encruamento isotrópico são em tudo identicas excepto no que diz respeito a $\sigma_{Y_x} = 30$ kPa e $\tau_{Y_{xy}} = 21,4$ kPa. Os resultados obtidos são comparados com os apresentados em a referência 31. O deslocamento vertical do ponto P_1 em função do nível de carga aplicado é apresentado na Figura 14a. É perceptível pela figura que os resultados obtidos com o EFGM são bastante similares aos apresentados por Brünig[31] obtidos com o MEF, quer para o caso isotrópico quer para o caso anisotrópico. É bem visível como a cedência na viga com características anisotrópicas ocorre mais tarde.

Na Figuras 14b é apresentado o resultado da tensão normal σ_x no ponto P_2, da viga anisotrópica, em função do nível de carga normalizado em relação à carga limite elástica. Este resultado é comparado com os resultados obtidos com o MEF por Figueiras na referência 32 e por Brünig na referência 31.

A ligeira diferença entre a solução pelo EFGM e as apresentadas nas referências 31 e 32, deve-se possivelmente ao facto de a tensão obtida na análise pelo EFGM ser lida no ponto P_2 e a tensão obtida nos trabalhos[29,31] ser lida no ponto de integração mais próximo de P_2.

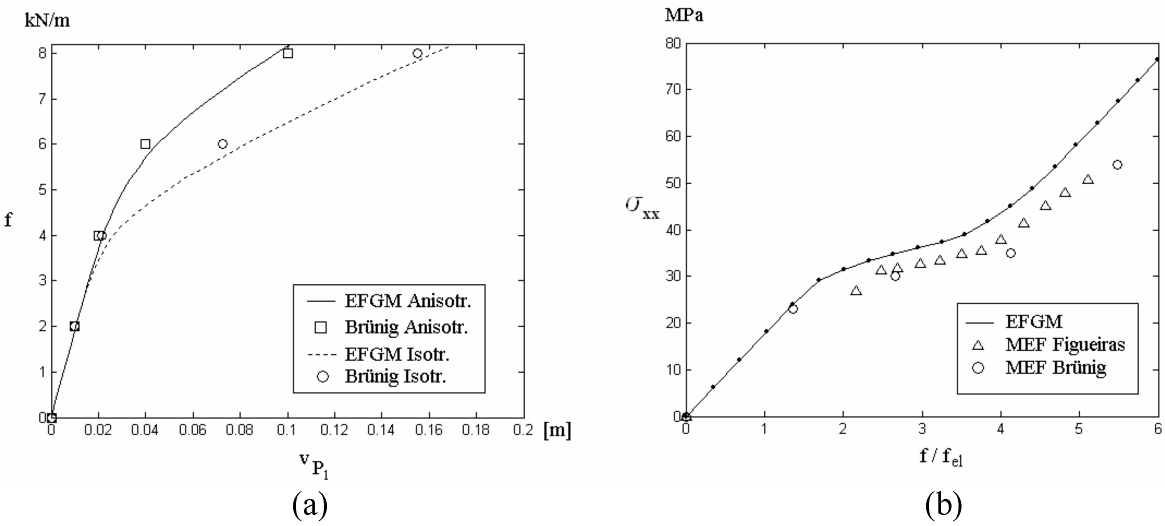


Figura 14. a) Diagrama carga/deslocamento do ponto P_1 e b) Diagrama carga/tensão normal no ponto P_2 da viga encastrada

Punção com bloco rigido

O próximo problema considera as hipóteses do estado plano de deformação. Um bloco, infinitamente rígido, é pressionado contra um sólido como indica a Figura 15a.

O material constituinte do sólido tem características de encruamento anisotrópico.

$$
\begin{array}{llll}
E_1 = 1\times 10^4\,\text{kPa} & E_{T_1} = 1\times 10^3\,\text{kPa} & \sigma_{Y_1} = 13\,\text{kPa} & \nu_{12} = 0,33 \\
E_2 = 1\times 10^4\,\text{kPa} & E_{T_2} = 1\times 10^3\,\text{kPa} & \sigma_{Y_2} = 17,4\,\text{kPa} & \nu_{23} = 0,33 \\
E_3 = 1\times 10^4\,\text{kPa} & E_{T_3} = 1\times 10^3\,\text{kPa} & \sigma_{Y_3} = 13\,\text{kPa} & \nu_{23} = 0,33 \\
G_{12} = 3750\,\text{kPa} & G_{T_{12}} = 333,3\,\text{kPa} & \tau_{Y_{12}} = 8,8\,\text{kPa} & \\
E = E_1 & E_T = E_{T_1} & \sigma_Y = \sigma_{Y_1} &
\end{array}
$$

Descretizou-se o problema numa malha nodal regular de 653 nós com refinamento na zona do bloco rígido, como indica a Figura 15b. Os resultados obtidos pelo EFGM são comparados com os resultados obtidos pelo MEF apresentados na referência 31. Na Figura 16a apresenta-se o diagrama normalizado do deslocamento δ obtido em função do nível de carga aplicado. Como é perceptível a análise elasto-plástica pelo EFGM fornece resultados muito próximos dos resultados referenciados na referência 31. Na Figura 16b é apresentado o diagrama da tensão normal σ_{yy} obtida no ponto P_1, indicado na Figura 15a, em função do deslocamento δ para esse nível de tensão.

É visível uma diferença entre os resultados obtidos pelo EFGM e os resultados obtidos pelo MEF. No que respeita às tensões essa diferença pode ser explicada com o facto de os resultados obtidos naa referência 31 serem para o ponto de integração mais próximo de P_1 enquanto que os resultados obtidos neste trabalho são obtidos no nó indicado na Figura 15b.

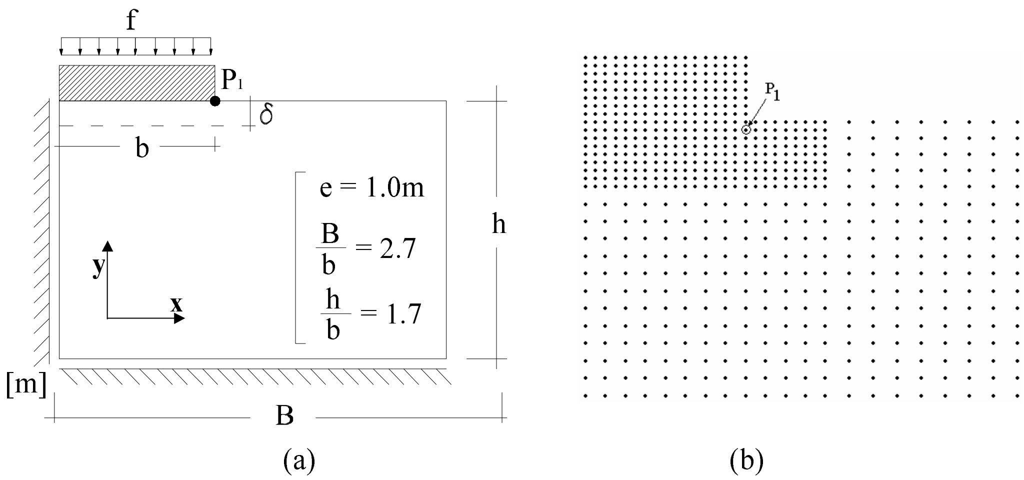


Figura 15. a) Características geométricas do sólido; b) Malha nodal de 653 nós

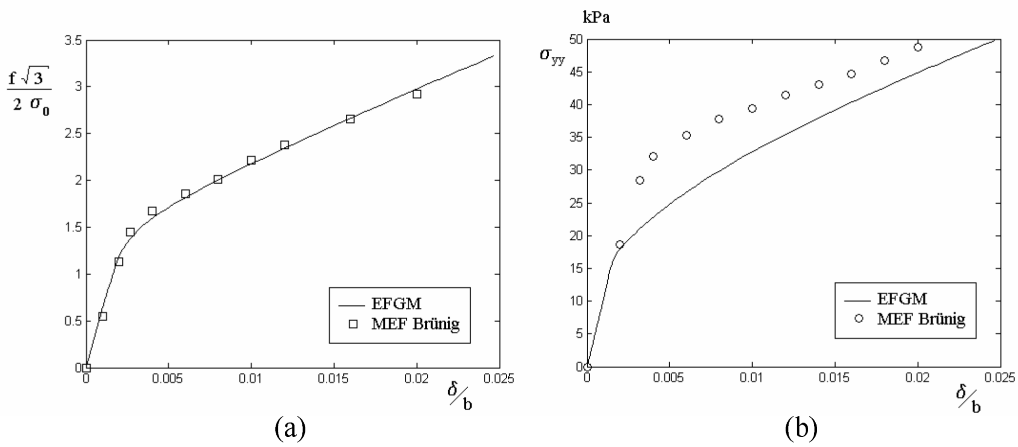


Figura 16. a) Diagrama carga/deslocamento na base do bloco rigido; b) Diagrama tensão normal σ_{yy}/deslocamento na base do bloco rigido

Laminado encastrado

Inicia-se o estudo dos laminados com um laminado encastrado em dois lados opostos sujeito a um carregamento uniformemente distribuído, como indica a Figura 17. O laminado é constituído por 3 camadas, como indica a Figura 17b, constituídas com o mesmo material anisotrópico orientado segundo direcções distintas.

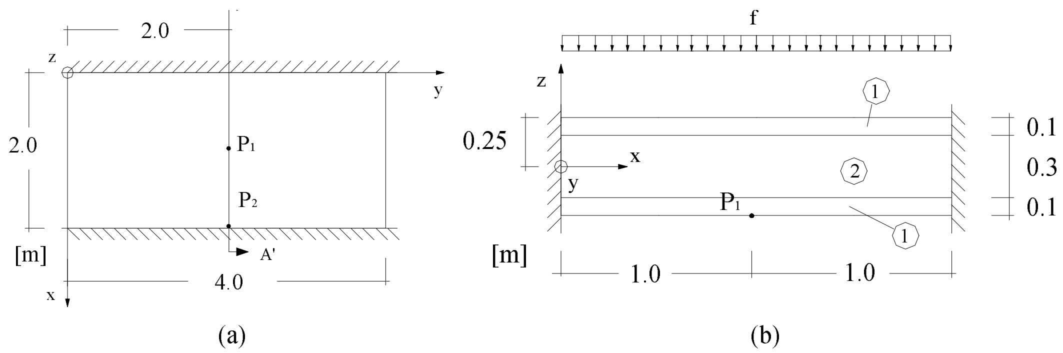


Figura 17. a) Características geométricas do laminado encastrado; b) Camadas constituintes do laminado

As características mecânicas do material 1, admitindo que os eixos principais de elasticidade (1,2,3) são coincidentes com o referencial global (x, y, z), são

$$
\begin{array}{llll}
E_1 = 200 \times 10^6\,\mathrm{kPa} & E_{T_1} = 200 \times 10^3\,\mathrm{kPa} & \sigma_{Y_1} = 200 \times 10^3\,\mathrm{kPa} & \nu_{12} = 0,30 \\
E_2 = 100 \times 10^6\,\mathrm{kPa} & E_{T_2} = 100 \times 10^3\,\mathrm{kPa} & \sigma_{Y_2} = 150 \times 10^3\,\mathrm{kPa} & \nu_{12} = 0,15 \\
G_{12} = 77 \times 10^6\,\mathrm{kPa} & G_{T_{12}} = 77 \times 10^3\,\mathrm{kPa} & \tau_{Y_{12}} = 115,47 \times 10^3\,\mathrm{kPa} & \\
G_{23} = G_{31} = G_{12} & G_{T_{23}} = G_{T_{31}} = G_{T_{12}} & \tau_{Y_{23}} = \tau_{Y_{31}} = \tau_{Y_{12}} & \\
 & E_{T_\varphi} = 200 \times 10^3\,\mathrm{kPa} & \sigma_\varphi = 200 \times 10^3\,\mathrm{kPa} & \varphi = 45^\circ \\
E = E_1 & E_T = E_{T_1} & \sigma_Y = \sigma_{Y_1} &
\end{array}
$$

O material 2 tem propriedades idênticas mas está rodado de 90°. É de notar que o material além de apresentar anisotropia material apresenta encruamento anisotrópico. Na análise do laminado pelo MEF, elemento finito de nove nós com integração reduzida (MEF 9n), e pelo EFGM, considerando a base polinomial quadrática e a spline de sétima ordem como função de peso (EFGM s7p2), considerou-se a teoria de Reissner-Mindlin. Em ambas as análises o laminado foi discretizado considerando a malha apresentada na Figura 18a.

Para obter resultados susceptíveis de comparação com os anteriores, considerou-se a placa em sandwich apresentada na Figura 17b, que corresponde ao corte pela secção AA' do laminado em estudo, sujeita a um carregamento uniformemente distribuído como indicado. Consideraram-se as hipóteses do estado plano de deformação e analisou-se o problema pelo EFGM. Como se trata de um problema Bidimensional utilizou-se como base o polinómio linear e como função de peso a spline cúbica (EFGM sp3p1). Tomando os eixos materiais 1, 2 e 3 coincidentes com os eixos globais x, z e y respectivamente, obtem-se as seguintes características mecânicas

Material 1

$E_1 = 200 \times 10^6\,\text{kPa}$	$E_{T_1} = 200 \times 10^3\,\text{kPa}$	$\sigma_{Y_1} = 200 \times 10^3\,\text{kPa}$	$\nu_{12} = 0,30$
$E_2 = 200 \times 10^6\,\text{kPa}$	$E_{T_2} = 200 \times 10^3\,\text{kPa}$	$\sigma_{Y_2} = 200 \times 10^3\,\text{kPa}$	$\nu_{23} = 0,15$
$E_3 = 100 \times 10^6\,\text{kPa}$	$E_{T_3} = 100 \times 10^3\,\text{kPa}$	$\sigma_{Y_3} = 150 \times 10^3\,\text{kPa}$	$\nu_{23} = 0,15$
$G_{12} = 77 \times 10^6\,\text{kPa}$	$G_{T_{12}} = 77 \times 10^3\,\text{kPa}$	$\tau_{Y_{12}} = 115,47 \times 10^3\,\text{kPa}$	
$G_{23} = G_{31} = G_{12}$	$G_{T_{23}} = G_{T_{31}} = G_{T_{12}}$	$\tau_{Y_{23}} = \tau_{Y_{31}} = \tau_{Y_{12}}$	
$E = E_1$	$E_T = E_{T_1}$	$\sigma_Y = \sigma_{Y_1}$	

Material 2

$E_1 = 100 \times 10^6\,\text{kPa}$	$E_{T_1} = 100 \times 10^3\,\text{kPa}$	$\sigma_{Y_1} = 150 \times 10^3\,\text{kPa}$	$\nu_{12} = 0,30$
$E_2 = 200 \times 10^6\,\text{kPa}$	$E_{T_2} = 200 \times 10^3\,\text{kPa}$	$\sigma_{Y_2} = 200 \times 10^3\,\text{kPa}$	$\nu_{23} = 0,30$
$E_3 = 200 \times 10^6\,\text{kPa}$	$E_{T_3} = 200 \times 10^3\,\text{kPa}$	$\sigma_{Y_3} = 200 \times 10^3\,\text{kPa}$	$\nu_{23} = 0,30$
$G_{12} = 77 \times 10^6\,\text{kPa}$	$G_{T_{12}} = 77 \times 10^3\,\text{kPa}$	$\tau_{Y_{12}} = 115,47 \times 10^3\,\text{kPa}$	
$G_{23} = G_{31} = G_{12}$	$G_{T_{23}} = G_{T_{31}} = G_{T_{12}}$	$\tau_{Y_{23}} = \tau_{Y_{31}} = \tau_{Y_{12}}$	
$E = E_1$	$E_T = E_{T_1}$	$\sigma_Y = \sigma_{Y_1}$	

Discretizou-se o problema como indica a Figura 18b e procedeu-se a análise elasto-plástica do problema pelo EFGM.

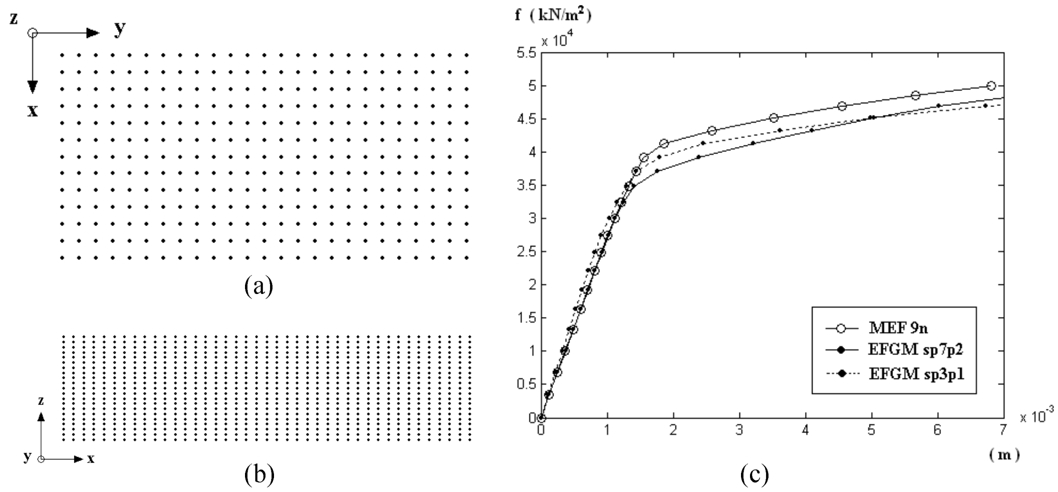


Figura 18. a) Malha utilizada na análise do laminado, 325 nós; b) Malha utilizada na análise da placa bidimensional em sandwich, 861 nós; c) Diagrama carga/deslocamento do centro do laminado encastrado

Os resultados referentes ao deslocamento no centro do laminado à flexão, ponto P_1, e ao deslocamento no centro da placa em sandwich, Estado Plano de Deformação, ponto P_3, em função do nível de carga aplicado são apresentados na Figura 18c. Apresentam-se de seguida na Figura 19 os resultados referentes a tensão normal σ_{xx} e à tensão de corte τ_{xy} ao longo da secção AA' obtidos pelo EFGM sp7p2 e pelo MEF na face superior da camada superior do laminado.

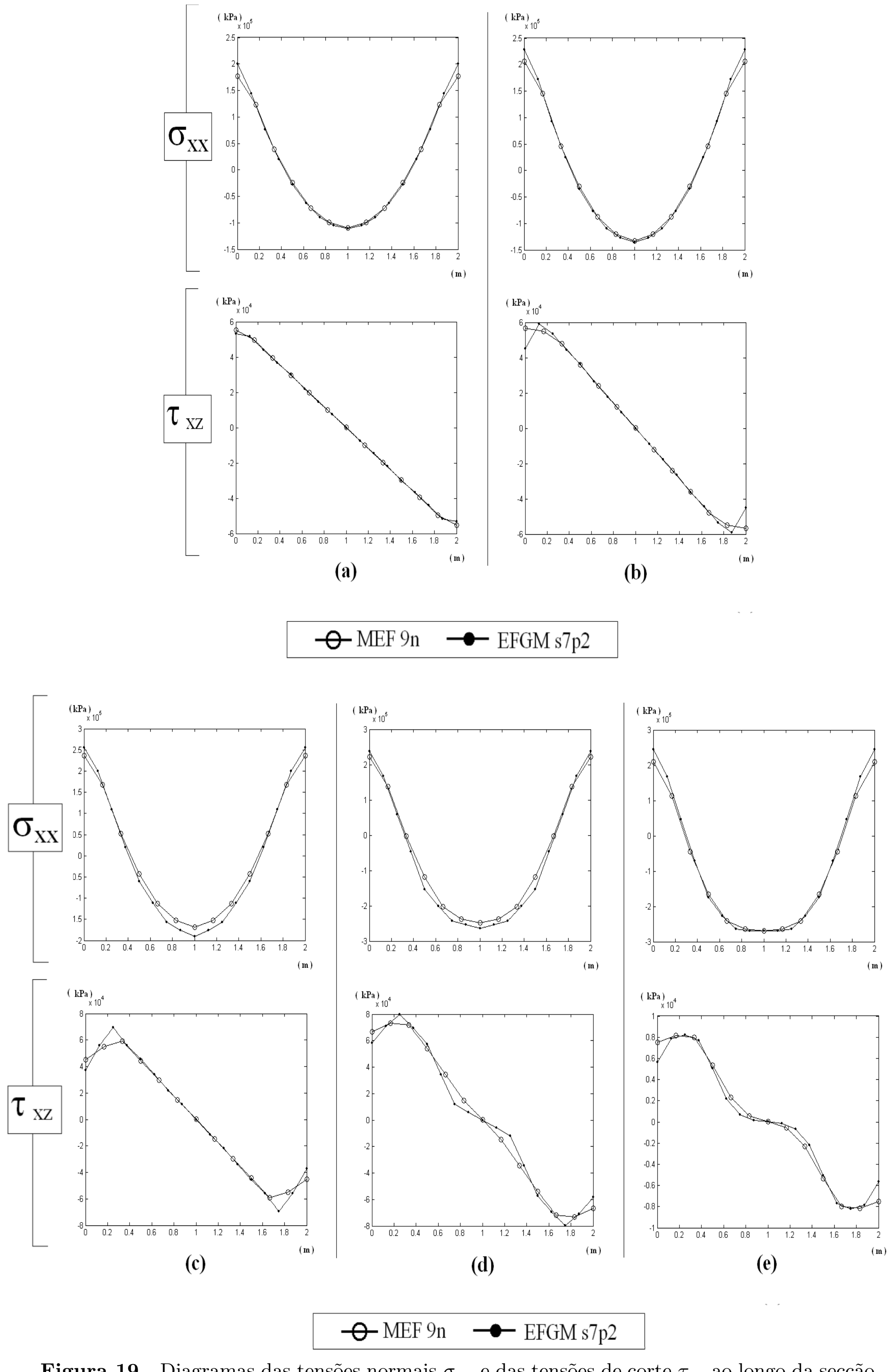


Figura 19. Diagramas das tensões normais σ_{xx} e das tensões de corte τ_{xz} ao longo da secção AA' para a) $f = 2,48 \times 10^4$ kN/m^2; b) $f = 3,0 \times 10^4$ kN/m^2; c) $f = 3,705 \times 10^4$ kN/m^2; d) $f = 4,505 \times 10^4$ kN/^{2} e e) $f = 5,0 \times 10^4$ kN/m^2

Os resultados de ambos os métodos ajustam-se bastante bem não havendo diferenças significativas a referir. Apresentam-se na Figura 20 os mapas da distribuição da tensão de cedência ao longo da secção AA' obtidos pelo EFGM sp3p1 considerando a formulação bidimensional, estado plano de deformação.

É visível para o nível de carga $f = 3,48 \times 10^4$ kPa o início da plastificação junto aos apoios.

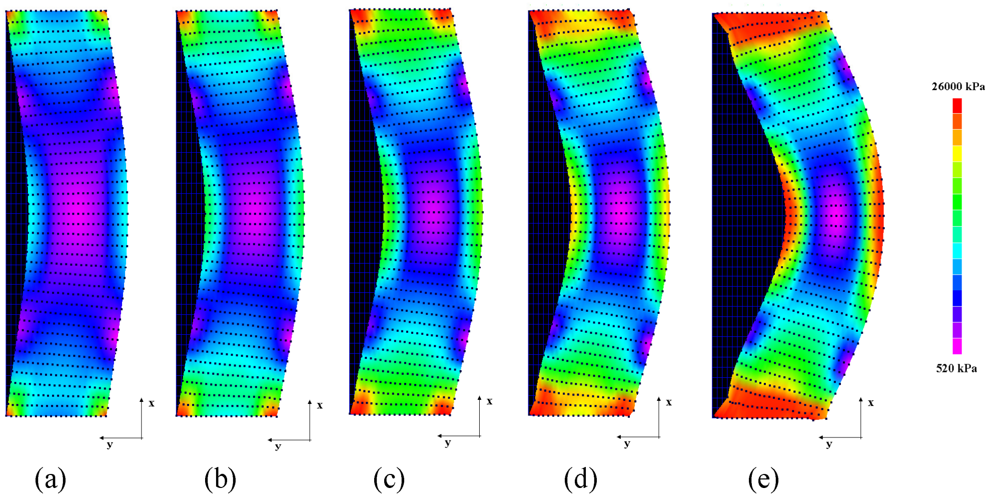


Figura 20. Mapas da distribuição da tensão efectiva obtida pelo EFGM para a) $f = 1,96 \times 10^4$ kN/m^2; b) $f = 2,48 \times 10^4$ kN/m^2; c) $f = 3,0 \times 10^4$ kN/m^2; d) $f = 3,48 \times 10^4$ kN/m^2 e (e) $f = 3,92 \times 10^4$ kN/m^2

Laminados simplesmente apoiados

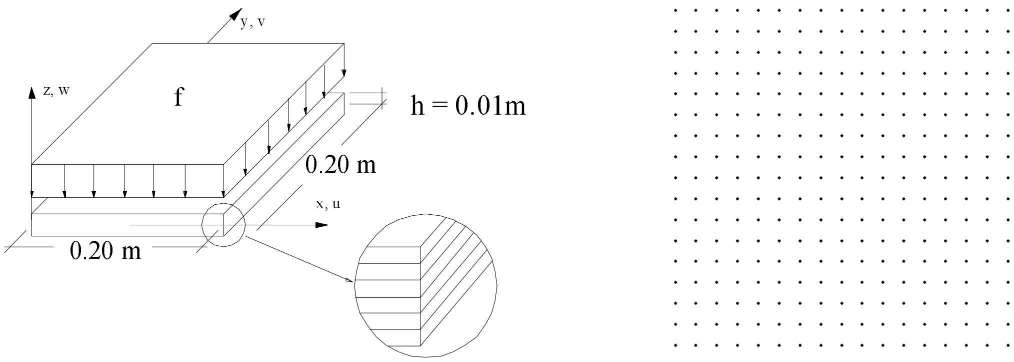
Considere-se o laminado genérico simplesmente apoiado em todo o contorno representado na Figura 21a.

São estudados três laminados distintos, com diferentes orientações por camada constituídas pelo mesmo material anisotrópico e com a mesma espessura. Todos os laminados têm uma espessura total l $h = 0,01$ m. As propriedades materiais para a camada genérica admitindo os eixos materiais coincidentes com os eixos globais são

$$
\begin{array}{llll}
E_1 = 250 \times 10^6\,\text{kPa} & E_{T_1} = 250 \times 10^3\,\text{kPa} & \sigma_{Y_1} = 200 \times 10^3\,\text{kPa} & \nu_{12} = 0,25 \\
E_2 = 10 \times 10^6\,\text{kPa} & E_{T_2} = 10 \times 10^3\,\text{kPa} & \sigma_{Y_2} = 200 \times 10^3\,\text{kPa} & \nu_{12} = 0,01 \\
G_{12} = 5 \times 10^6\,\text{kPa} & G_{T_{12}} = 5 \times 10^3\,\text{kPa} & \tau_{Y_{12}} = 115,47 \times 10^3\,\text{kPa} & \\
G_{23} = 2 \times 10^6\,\text{kPa} & G_{T_{23}} = 2 \times 10^3\,\text{kPa} & \tau_{Y_{23}} = 115,47 \times 10^3\,\text{kPa} & \\
G_{31} = 5 \times 10^6\,\text{kPa} & G_{T_{31}} = 5 \times 10^3\,\text{kPa} & \tau_{Y_{31}} = 115,47 \times 10^3\,\text{kPa} & \\
 & E_{T_\varphi} = 250 \times 10^3\,\text{kPa} & \sigma_\varphi = 200 \times 10^3\,\text{kPa} & \varphi = 45^\circ \\
E = E_1 & E_T = E_{T_1} & \sigma_Y = \sigma_{Y_1} &
\end{array}
$$

A malha nodal utilizada na análise elasto-plástica pelo EFGM e pelo MEF é a indicada na Figura 21b.

Os diagramas carga/deslocamento para o laminado com uma camada com orientação de 0°, para o laminado com 3 camadas com orientações 0/90/0 e para o laminado com 5 camadas com orientações 0/90/0/90/0 são apresentados respectivamente nas Figuras 22a,b,c.



(a) (b)

Figura 21. a) Representação do laminado; b) Malha nodal utilizada na análise

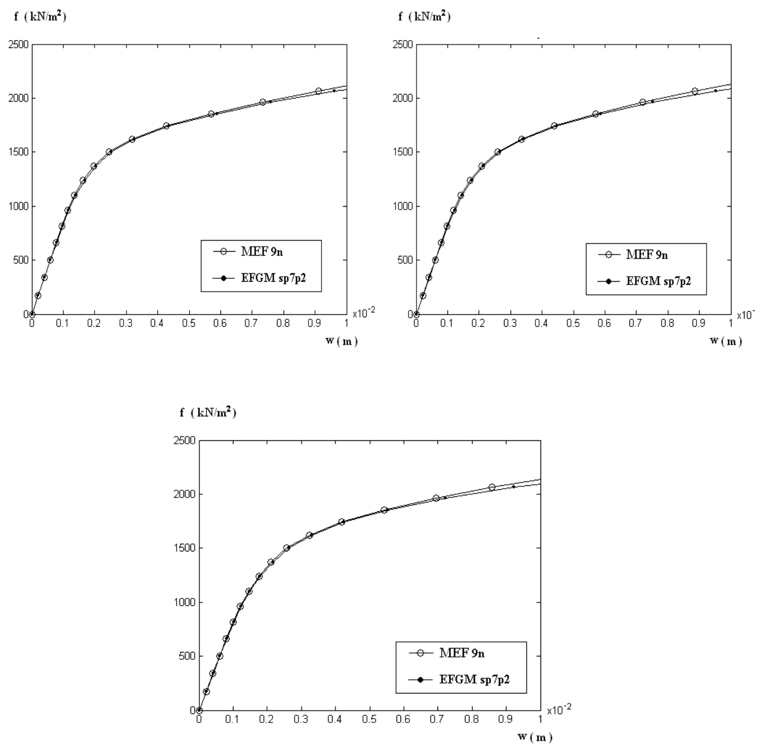


Figura 22. Diagramas carga/deslocamento para o a) laminado a 0°; b) laminado a 0°/ 90°/ 0° e c) laminado 0°/ 90°/ 0°/ 90°/ 0°

É visível o bom ajuste entre os resultados obtidos pelo EFGM e pelo MEF para os três laminados. Procede-se seguidamente a apresentação, na Figura 23, da distribuição das tensões normais σ_{xx}, ao longo da espessura, nos centros dos laminados, para crescentes níveis de carga. Como é visível existe uma concordância perfeita entre o EFGM e o MEF.

Na Figura 24 são apresentados os resultados referentes as tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} em função da carga aplicada na face superior da primeira camada no centro do laminado.

Como se pode constatar os resultados obtidos pelo EFGM são similares aos obtidos com o MEF.

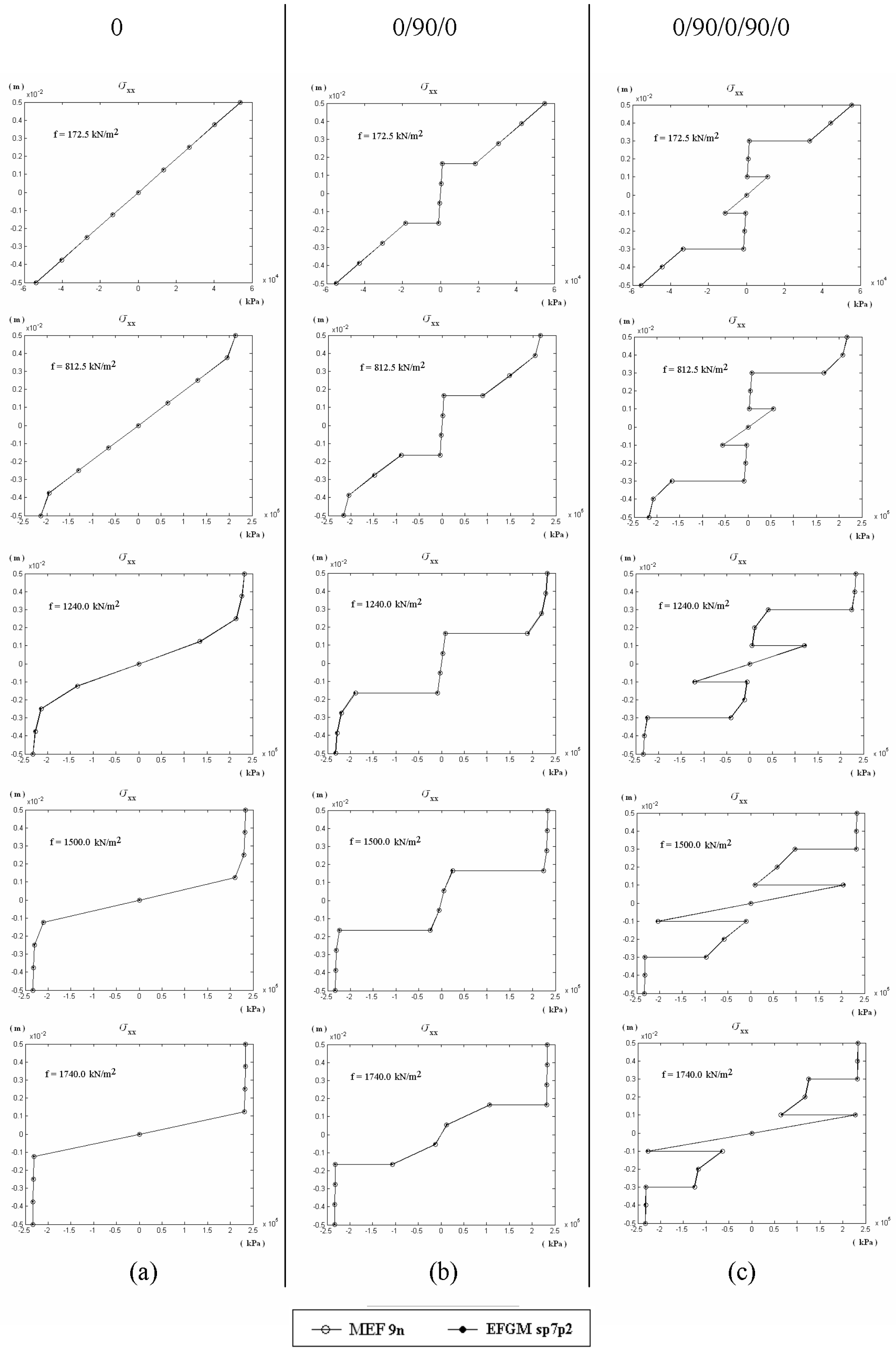


Figura 23. Diagramas da tensão normal σ_{xx} ao longo da espessura no centro dos laminados para a) 0°; b) 0°/ 90°/ 0° e c) 0°/ 90°/ 0°/ 90°/ 0°

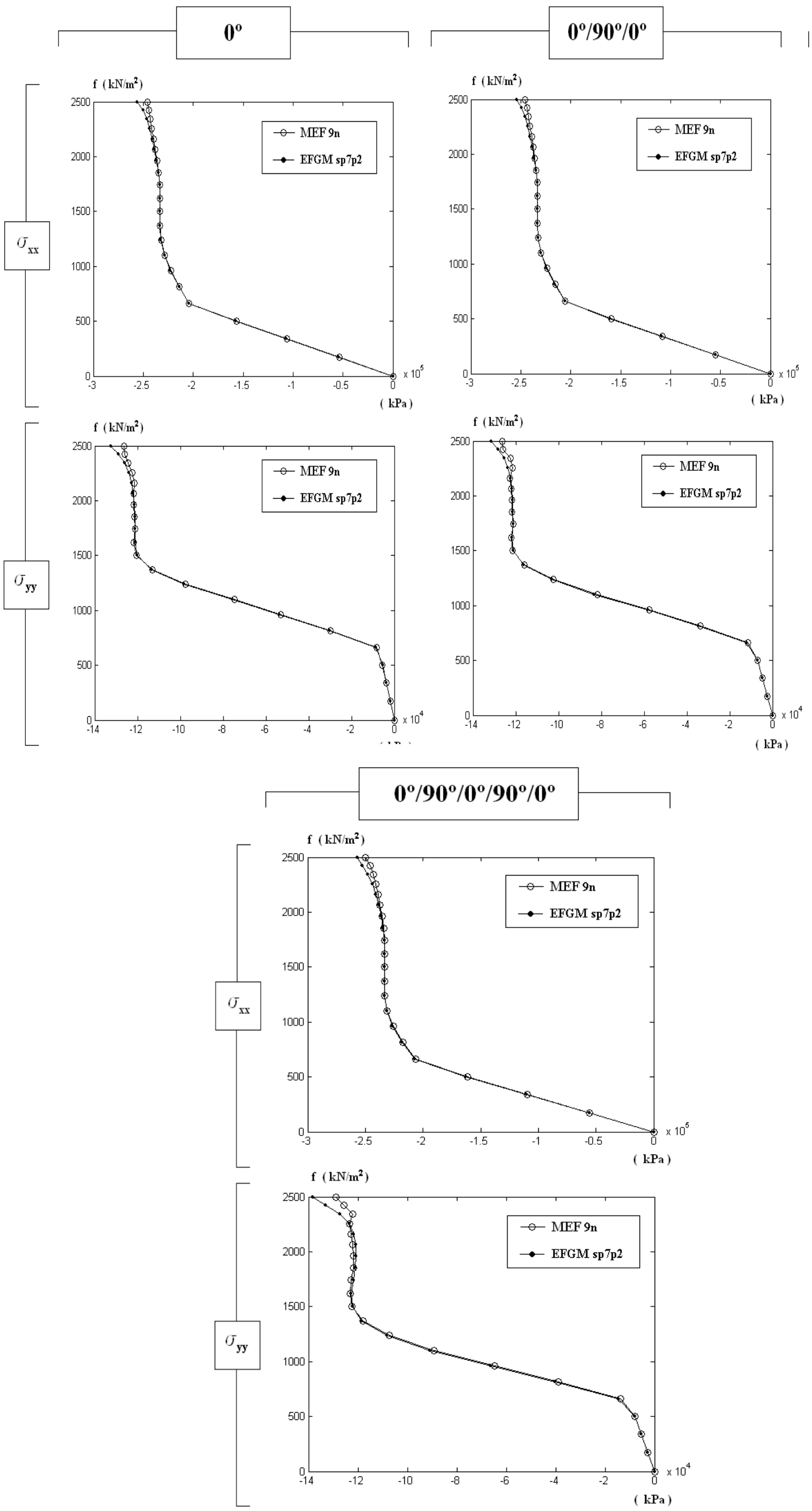


Figura 24. Diagramas carga/tensão para o laminado a 0°; laminado 0°/ 90°/ 0° e laminado 0°/ 90°/ 0°/ 90°/ 0°

CONCLUSÕES

Neste trabalho combinou-se o EFGM com um algoritmo elasto-plástico e os resultados obtidos para problemas 2D e problemas de laminados, com anisotropia material, foram comparados com os obtidos com o MEF. Os resultados obtidos pelo EFGM são muito similares aos obtidos pelo MEF, tanto para o campo de deslocamentos como para o campo de tensões, o que mostra que o algoritmo de solução não-linear e o critério de cedência anisotrópico foram aplicados ao EFGM com sucesso.

Conclui-se desta forma que o EFGM é uma boa alternativa ao MEF na análise elásto-plástica de problemas anisotrópicos 2D e laminados. O EFGM, em relação ao MEF apresenta algumas vantagens, nomeadamente no que respeita às possibilidades de remalhamento resultantes da inexistência de elementos e algumas desvantagens quanto ao tempo de execução e imposição das condições de fronteira.

REFERÊNCIAS

1 J.J. Monaghan, “An introduction to SPH”, *Computer physics comunications*, Vol. **48**, N° 1, pp. 89–96, (1988).

2 W.K. Liu, S. Jun e Y.F. Zhang, “Reproducing kernel particle methods”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **20**, N° 6, pp. 1081–1106, (1995).

3 W.K. Liu, Y. Chen, C.T. Chang e T. Belytschko, “Advances in multiple kernel particle methods”, *Computational mechanics*, Vol. **18**, N° 2, pp. 73–111, (1996).

4 C.A.M. Duarte e J.T. Oden, “H-p clouds- an h-p meshless method”, *Numerical methods for partial differential equations*, Vol. **12**, N° 7, pp. 673–705, (1996).

5 S.N. Atluri e T. Zhu, “A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics”, *Computational Mechanics*, Vol. **22**, N° 2, pp. 117–127, (1998).

6 T. Belytschko, Y.Y. Lu e L. Gu, “Element-Free Galerkin Method”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **37**, N° pp. 229–256, (1994).

7 T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming e P. Krysl, “Meshless methods: an overview and recent developments”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **139**, N° 1, pp. 3–47, (1996).

8 N. Sukumar, B. Moranx, A.Y. Semenov e V.V. Belikov, “Natural neighbour Galerkin methods”, *International Journal for Numeric Methods in Engineering*, Vol. **50**, pp. 1–27, (2001).

9 B. Nayroles, G. Touzot e P. Villon, “Generalizing the finite element method: Diffuse aproximation and diffuse elements”, *Computational mechanics*, Vol. **10**, pp. 307–318, (1992).

10 J. Dolbow y T. Belytschko, “An introduction to programming the meshless element free Galerkin method”, *Archives in Computational Mechanics*, Vol. **5**, N° 3, pp. 207–241, (1998).

11 T. Belytschko e P. Krysl, “Analysis of thin plates by the element-free Galerkin method”, *Computational Mechanics*, Vol. **17**, pp. 26–35, (1996).

12 T. Belytschko e P. Krysl, “Analysis of thin shells by the element-free Galerkin method”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. **33**, N° 22, pp. 3057–3080, (1996).

13 B. Donning e W.K. Liu, “Meshless methods for shear-deformable beams and plates”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **152**, pp. 47–72, (1998).

14 W. Nukulchai, W. Barry, K. Saranyasoontorn y P.H. Bouillard, “On elimination of shear locking in the element-free Galerkin method”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **52**, pp. 705–725, (2001).

15 J. Belinha e L.M.J.S. Dinis, “Analysis of laminates using the element free Galerkin method”, “*Proceedings of The Seventh International Conference on Computational Structures Technology*”, B.H.V. Topping y C.A. Mota Soares, (Eds.), Civil-Comp Press, Stirling, United Kingdom, paper 30. Lisboa 7-9 de Setembro de 2004.

16 T. Belytschko, Y.Y. Lu, L. Gu e M. Tabbara, “Element free Galerkin method for static and dynamic fracture”, *International Journal of Solid and Structures* , Vol. **32**, pp. 2547–2570, (1995).

17 T. Belytschko e M. Tabbara, “Dynamic fracture using element free Galerkin method”, *International Journal for Numeric Methods in Engineering*, Vol. **39**, pp. 923–938, (1996).

18 T. Belytschko, Y.Y. Lu e L. Gu, "Crack propagation by element free Galerkin method", *Engineering Facture Mechanics*, Vol. **95**, pp. 295–315, (1995).
19 Y. Xu e S. Saigal, "An element-free Galerkin formulation for stable crack growth in an elastic solid", *International Journal of Solid and Structures*, Vol. **36**, pp. 1045–1079, (1998).
20 M.H. Kargarnovin,H.E. Toussi e S.J. Fariborz, "Elasto-plastic element-free Galerkin method", *Computational Mechanics*, Vol. **33**, pp. 206–214, (2003).
21 T. Belytschko, N. Sukumar,B. Moran e T. Black, "An element free Galerkin method for three dimensional fracture mechanics", *Computational Mechanics*, Vol. **20**, pp. 170–175, (1997).
22 T. Belytschko e P. Krysl, "The element free Galerkin method for dynamic propagation of arbitrary 3-D cracks", *International Journal for Numeric Methods in Engineering*, Vol. **44**, pp. 767–800, (1999).
23 W. Barry e S. Saigal, "A three-dimensional element-free Galerkin elastic and elastoplastic formulation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **46**, pp. 671–693, (1999).
24 G.R. Liu e K.Y. Yang, "A penalty method for enforce essential boundary conditions in element free Galerkin method", *Proc. 3rd HPC Asia'98. Singapore*, (1998).
25 O.C. Zienkiewicz, "*The finite element method*", 4ª ed., McGraw-Hill, (1989).
26 J. Belinha, "Analise elasto-plástica considerando o método livre de elementos de Galerkin. Problemas bidimensionais, placas e laminados", Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, (2004).
27 R. Hill, "The mathematical theory of plasticity", *Oxford Engineering Sciences Series*, Oxford University Press, UK, (1950).
28 D.R.J. Owen e J.A. Figueiras, "Anisotopic elasto-plastic finite element analysis of thick and thin plates and shells", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **19**, pp. 541–566, (1983).
29 D.R.J. Owen e J.A. Figueiras, "Elasto-plastic analysis of anisotropic plates and shells by the semiloof element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **19**, pp. 521–539, (1983).
30 D. Owen e E. Hinton, "*Finite element in plasticity*", Pineridge press, UK, (1980).
31 Brünig, "M. Nonlinear analysis and elasto-plastic behavior of anisotropic structures", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. **20**, pp. 15–177, (1995).
32 J.A. Figueiras, "Ultimate load analysis of anisotropic and reinforced concrete plates and shells", Univ. of Wales, Ph. Thesis, C/Ph/72/83, Swansea, UK, (1983).