

Una formulación para el estudio, por el método de los elementos finitos, de la deformación de tuberías marinas durante su instalación^(*)

Por JAVIER OLIVER y EUGENIO OÑATE

Ingenieros de Caminos, C. y P.

La ejecución de emisarios submarinos para saneamiento y la instalación de tuberías para transporte de productos petrolíferos son ejemplos de la necesidad de conocer los esfuerzos y deformaciones que se producen en el tendido de tuberías submarinas, a cuyo estudio, mediante elementos finitos en diversas condiciones de instalación, se dedica este artículo, que permite la obtención de ábacos de cálculo o fórmulas sencillas aplicables en los distintos casos.

1. INTRODUCCION

La colocación de tuberías en el fondo del mar es un problema muy común dentro de diversos campos de la ingeniería. Ejemplos de ello son la construcción de emisarios submarinos, para la conducción de residuos desde la costa al mar abierto, y la instalación de tuberías para la conducción a tierra de los productos petrolíferos extraídos desde plataformas *off-shore*.

Con diversas variantes, los métodos de colocación de dichas tuberías pueden dividirse en dos grupos:

1. Colocación por *lanzamiento desde plataformas flotantes*, generalmente adasadas a barcos especialmente preparados para ello. Los sucesivos tramos de tubería se empalman y lanzan desde dicha plataforma, que tiene que estar calculada para resistir los esfuerzos que sobre ella ejerce el resto de la tubería sumergida (figura 1). Este es un método clásico

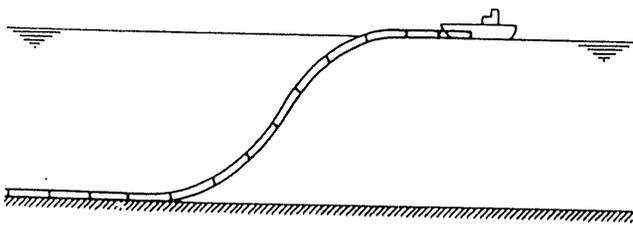


Fig. 1.—Colocación mediante lanzamiento desde una plataforma flotante.

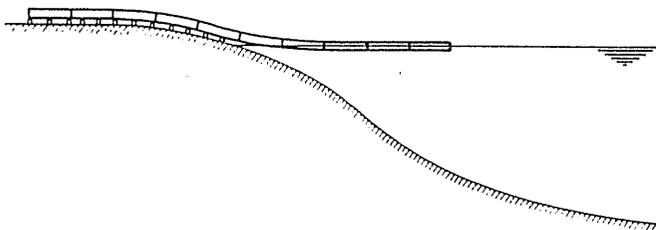
^(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo, que podrán remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 31 de diciembre de 1983.

para colocar tuberías metálicas y ha sido utilizado para la instalación de conducciones petrolíferas y emisarios submarinos.

2. Una técnica más reciente consiste en la colocación de la tubería mediante *la inundación progresiva* del interior de la misma, lo que provoca su hundimiento controlado. Este procedimiento, utilizado para la ejecución de emisarios submarinos a base de tuberías de polietileno (y sus derivados), lastradas por anillos de hormigón, consta fundamentalmente de tres fases (figura 2):
 - a) Elaboración en la costa de tramos herméticos de tubería, de 100 a 400 metros de longitud, provistos de válvulas de apertura regulable en sus dos extremos.
 - b) Transporte de cada tramo por flotación hasta la vertical de su línea de ubicación en el fondo marino.
 - c) Progresiva inundación de un extremo de la tubería mediante apertura de la consiguiente válvula. Regulación de la velocidad de inmersión mediante la apertura de la válvula del otro extremo, permitiendo mayor o menor salida de aire.

El proceso puede detenerse antes del hundimiento total de la tubería, para proceder al empalme de otro tramo, o bien continuarlo hasta la total inundación. En este último caso,

a) Elaboración en la costa.



b) Transporte.



c) Colocación por inundación progresiva.

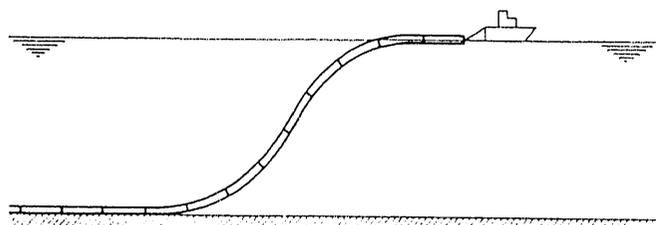


Fig. 2.—Fases del proceso de colocación por inundación progresiva.

cuando se desea empalmar otro tramo, se hace emerger de nuevo el extremo correspondiente de la tubería mediante insuflación por el mismo de aire comprimido.

La mayor parte de los estudios teóricos en relación con la instalación de tuberías marinas han estado centrados exclusivamente en procesos del primer tipo de los anteriormente citados, es decir, en tratar de predecir los esfuerzos y la deformación que se produce en tuberías lanzadas desde plataformas flotantes.

Por otra parte, los trabajos publicados se limitan casi en su totalidad al análisis de la tubería para formas predeterminadas de su deformada, generalmente cuando ésta adquiere una forma de «onda», como la de la figura 1, que si bien corresponden a una cierta fase del proceso de instalación, no lo representan en su totalidad. En general, cuatro han sido los procedimientos

corrientemente empleados para dicho análisis: el método de la curva catenaria rigidizada [1-3], el método del segmento de viga finito [4-6], el método de los elementos finitos [7-8] y el método de diferencias finitas [9-11].

En la solución de la catenaria se supone que la tubería se comporta como una catenaria en toda su longitud, excepto en los extremos, lo que conduce a soluciones conservativas poco fiables. La mayor parte de las soluciones que utilizan segmentos de viga necesitan un gran número de elementos rectos, y consideran el problema como uno de valores iniciales en movimiento, adoptando una técnica de integración hacia adelante comenzando desde el fondo. Las condiciones de contorno se satisfacen mediante un proceso iterativo de convergencia generalmente difícil. Las soluciones obtenidas hasta la fecha mediante elementos finitos usan formulaciones convencionales con elementos rectos y emplean un método iterativo para la solución del sistema de ecuaciones no lineales resultante, que generalmente es de gran tamaño. Los métodos que utilizan diferencias finitas operan a partir de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el equilibrio de un segmento de tubería, encontrándose con dificultades para tratar condiciones de contorno complicadas.

Como ya se ha indicado, dichos métodos se han aplicado a estudiar la tubería para una cierta forma «estática» de su deformada, no siendo, en consecuencia, muy adecuados para aplicarlos a procesos de instalación, como el de inundación progresiva, en los que se desconoce *a priori* la forma más desfavorable de la deformada de entre todas las que ésta adopta durante el proceso de colocación. Por otra parte, la gran flexibilidad de las tuberías de polietileno generalmente utilizadas en el procedimiento de inundación progresiva, hace que los desplazamientos que se producen a medida que la tubería se ve sometida a cargas de llenado crecientes sean de gran magnitud, lo que imposibilita su predicción mediante teorías sencillas de flexión de vigas.

El objeto de este artículo es presentar un procedimiento numérico que permite calcular las deformaciones y esfuerzos que aparecen en tuberías colocadas en el fondo del mar, tanto durante su instalación como en posteriores ma-

nipulaciones. Dicho procedimiento, pensado inicialmente para el estudio de tuberías de polietileno para emisarios submarinos instaladas por inundación progresiva, permite, debido a la generalidad de su enfoque, analizar muchos otros tipos de problemas relacionados con tuberías marinas y, en particular, los referentes a tuberías para conducciones petrolíferas instaladas desde plataformas flotantes.

La formulación matemática utilizada, basada en el uso del método de los elementos finitos, es una aplicación de la formulación más general desarrollada por Oliver [12] para el estudio de estructuras tales como láminas, placas o arcos en régimen no-lineal, incluyendo además, aquí, los efectos no-lineales producidos por las fuerzas de flotación (de carácter no-conservativo)* y las condiciones de contorno variables (motivadas por el contacto de la tubería con el fondo del mar).

En lo que sigue, se describen brevemente las características esenciales de dicha formulación, incidiendo únicamente en los aspectos más peculiares de la misma. Tras ello se presenta un ejemplo concreto de aplicación a la simulación del proceso de colocación de una tubería de polietileno por inundación progresiva, y otro de aplicación a un caso más sencillo de una tubería metálica colocada desde una plataforma flotante. En este último caso, se comparan los resultados obtenidos con otros ya existentes.

2. TEORIA BASICA

Se considera que la directriz de la tubería antes de la deformación constituye un arco plano (figura 3) contenido en el plano xz. La posición y forma inicial de dicha directriz puede ser cualquiera, aunque generalmente se tomará como una recta horizontal.

Sobre cada punto «O» de la directriz se considera un sistema cartesiano local x'z' y un sistema curvilínea S t, donde «s» es la «longitud de arco de la directriz» y «t» la longitud de la recta normal a la misma en el punto O. El ángulo que la directriz forma con la horizontal en cada uno

* Entenderemos aquí que una fuerza, actuante sobre una estructura, tiene carácter no-conservativo si su magnitud y/o dirección varían con la deformación de la estructura.

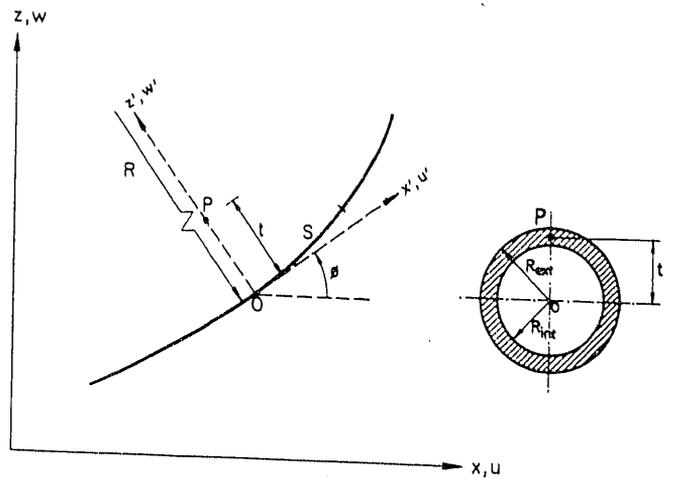


Fig. 3.—Definición de los ejes locales y globales.

de sus puntos y el radio de curvatura de la misma vienen designados, respectivamente, por ϕ y R.

Las ecuaciones del equilibrio de la tubería en forma matricial pueden obtenerse de forma sencilla a partir de la aplicación del método de los elementos finitos a la expresión general del principio de los trabajos virtuales, que, utilizando una descripción lagrangiana de la deformación [12], puede escribirse como:

$$\int_V \delta \underline{\epsilon}^T \cdot \underline{\sigma} dv - \int_V \rho \delta u^T \underline{b} dv - \int_{\Omega} \delta u^T \underline{f} d\Omega - \sum \delta u^T \underline{r}_i = \underline{C} \quad [1]$$

donde, para el caso particular que aquí consideramos, se tiene que:

$$\underline{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{x'} \\ \gamma_{xz'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w'}{\partial x'} \right)^2 \\ \frac{\partial w'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{1}{2} \frac{\partial u'}{\partial x'} \cdot \frac{\partial u'}{\partial z'} \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial w'}{\partial x'} \cdot \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{Bmatrix} \quad [2]$$

es el vector de deformación de Green, siendo u' y w' los desplazamientos de un punto P de la sección transversal de la tubería según las direcciones locales x' y z' respectivamente (ver figura 3),

$\underline{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \tau_{xz'} \end{Bmatrix}$ es el vector de tensiones de Piola-Kirchhoff (ver fig. 4), \underline{u} y \underline{b} , \underline{f} y \underline{r} son respecti-

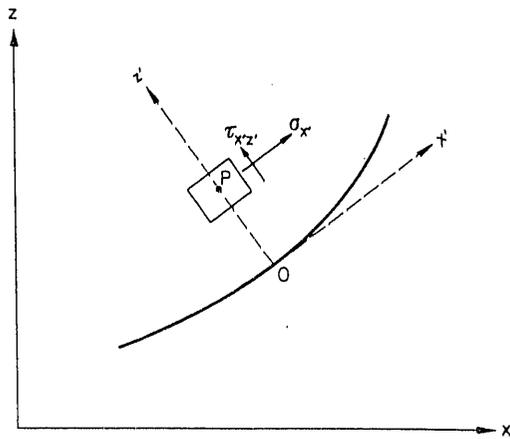


Fig. 4.—Definición de las tensiones de Piola-Kirchhoff en un punto P.

vamente los vectores de desplazamiento en cada punto, de fuerzas por unidad de masa, de fuerzas por unidad de superficie y de fuerzas puntuales, referidas todas a unos mismos ejes cartesianos globales x, z ; V es el volumen de la tubería, Ω su sección transversal y $\delta \underline{u}$ y $\delta \underline{\xi}$ son, respectivamente, la variación virtual de los vectores \underline{u} y $\underline{\xi}$.

El vector de desplazamiento \vec{u} en el punto P de la sección del arco (ver figura 5), puede obtenerse como la suma del desplazamiento del correspondiente punto O de la directriz (\vec{u}_0) más el desplazamiento debido al giro de la normal \vec{n} en dicho punto (\vec{u}_1), de tal forma que:

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + t\vec{u}_1 \quad [3]$$

Sean:

$$\underline{u}_0 = \begin{Bmatrix} u_0 \\ w_0 \end{Bmatrix}$$

las componentes del vector \vec{u}_0 en el *sistema global* (zx) y

$$\underline{u}_1' = \begin{Bmatrix} u_1' \\ w_1' \end{Bmatrix}$$

las componentes del vector \vec{u}_1 en el *sistema local* ($x'z'$). De la figura 5 es fácil observar que si la longitud de la normal no varía durante la deformación (permaneciendo constante su módulo $|\vec{n}| = 1$), se cumple que

$$\begin{aligned} u_1' &= \text{sen}\theta \\ w_1' &= \text{cos}\theta - 1 \end{aligned} \quad [4]$$

donde θ es la rotación que sufre la normal durante la deformación. Sobre la magnitud de esta rotación no se hace ninguna restricción, pudiendo ser, en consecuencia, muy grande (formulación para grandes rotaciones).

Definiendo ahora el vector de «corrimientos característicos»:

$$\underline{p} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ w_0 \\ u_1' \\ w_1' \end{Bmatrix}$$

y efectuando una discretización de la tubería en elementos finitos unidimensionales, se puede expresar el valor del vector \underline{p} en el interior de un elemento «e», como

$$\underline{p}^{(e)} = \sum_{i=1}^{n_e} N_i^{(e)} \cdot \underline{p}_i^{(e)} \quad [5]$$

donde

$$N_i^{(e)} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix}^{(e)}$$

siendo N_i funciones de interpolación polinómicas de una variable, y

$$\underline{p}_i^{(e)} = \begin{Bmatrix} u_{0i} \\ w_{0i} \\ u_{1i}' \\ w_{1i}' \end{Bmatrix}^{(e)}$$

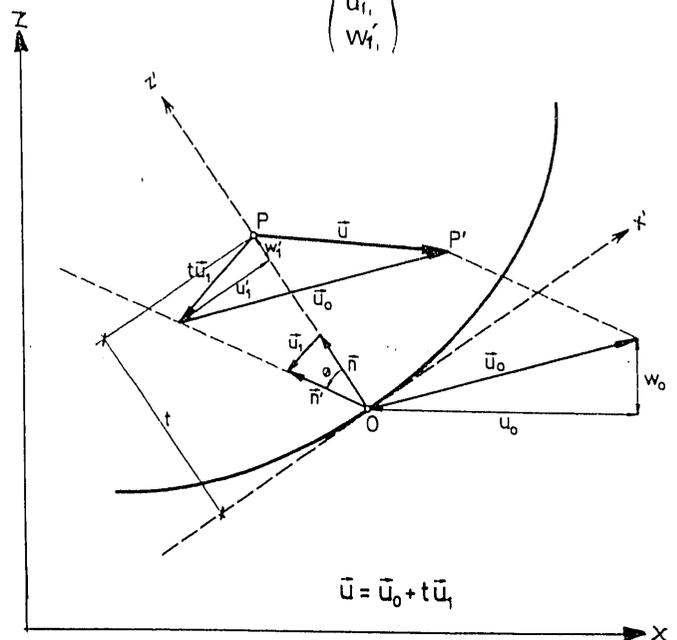
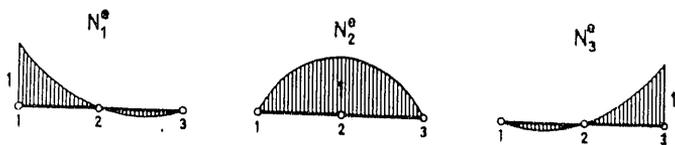
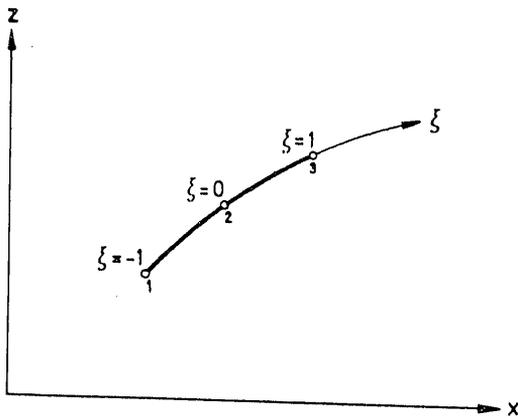


Fig. 5.—Vector de desplazamientos en un punto P.



$$N_1^e = \frac{\xi}{2} (\xi - 1) \quad N_2^e = (1 - \xi^2) \quad N_3^e = \frac{\xi}{2} (\xi + 1)$$

Fig. 6.—Funciones de interpolación del elemento isoparamétrico de tres nodos.

El índice «i» indica valores de las variables en el nodo i, y n_e es el número de nodos del elemento «e».

En este trabajo se han estudiado elementos isoparamétricos curvilíneos de 3 nodos ($n_e = 3$)

cuyas funciones de interpolación pueden verse en la figura 6. No obstante, cualquier otro elemento de la familia isoparamétrica unidimensional hubiese sido utilizable [13].

Asimismo se define en cada nodo «i» el vector de incógnitas nodales

$$a_i = \begin{Bmatrix} u_{0i} \\ w_{0i} \\ \theta_i \end{Bmatrix}$$

de tal forma que para los puntos de la directriz donde están situados los nodos ($t = 0, u = u_{0i}, w = w_{0i}$)

$$\delta u_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \delta a_i \quad [6]$$

De la definición del vector de deformaciones de Green de la ecuación [2] se puede obtener, utilizando las ecuaciones [3] a [6], la variación de dicho vector como [12]

$$\delta \epsilon^{(e)} = \sum_i B_i^{(e)} \delta a_i^{(e)} \quad [7]$$

La expresión de la matriz de deformación $B_i^{(e)}$ viene dada en la tabla 1, donde se puede apreciar la influencia de los términos no lineales de la deformación.

TABLA 1
Expresión de la matriz de deformación $B_i^{(e)}$

$$B_i^{(e)} = \begin{bmatrix} C_s \frac{dN_i^{(e)}}{ds} [(1 + g_1) \cos \Phi - g \text{ sen } \Phi] & C_s \frac{dN_i^{(e)}}{ds} [(1 + g_1) \text{ sen } \Phi + g_2 \cos \Phi] & -t C_s [(1 + g_1) A_i + g_2 B_i] \\ C_s \frac{dN_i^{(e)}}{ds} [g_3 \cos \Phi - (1 + g_4) \text{ sen } \Phi] & C_s \frac{dN_i^{(e)}}{ds} [g_3 \text{ sen } \Phi + (1 + g_4) \cos \Phi] & -t C_s [g_3 A_i + (1 + g_4) B_i] - N_i^{(e)} [(1 + g_1) \cos \theta_i + g_2 \text{ sen } \theta_i] \end{bmatrix}$$

$$A_i = \frac{dN_i^{(e)}}{ds} \cos \theta_i - \frac{N_i^{(e)}}{R} \text{ sen } \theta_i$$

$$B_i = \frac{dN_i^{(e)}}{ds} \text{ sen } \theta_i + \frac{N_i^{(e)}}{R} \cos \theta_i$$

$$C_s = \frac{1}{1 - t/R}$$

$$g_1 = C_s \left[\frac{du_0}{ds} \cos \Phi + \frac{dw_0}{ds} \text{ sen } \Phi + t \left(\frac{du_i}{ds} - \frac{w_i}{R} \right) \right]$$

$$g_2 = C_s \left[-\frac{du_0}{ds} \text{ sen } \Phi + \frac{dw_0}{ds} \cos \Phi + t \left(\frac{u_i}{R} + \frac{dw_i}{ds} \right) \right]$$

$$g_3 = u_i'$$

$$g_4 = w_i'$$

Sustituyendo las ecuaciones [6] y [7] en la expresión del principio de los trabajos virtuales [1] se obtiene, tras operar, la forma discretizada de las ecuaciones de equilibrio de la tubería como:

$$\Psi(\underline{a}) = \int_{\underline{V}} \underline{B}^T \underline{\sigma} dv - \underline{f} = \underline{0} \quad [8]$$

donde $\Psi(\underline{a})$ es el comúnmente denominado «vector de fuerzas residuales», \underline{f} es el «vector de fuerzas nodales», del que más tarde se darán detalles, y

$$\underline{B} = [\underline{B}_1, \dots, \underline{B}_n]$$

donde

$\underline{B}_i = \underline{B}_i^{(e)}$ si el punto pertenece al elemento «e».

$\underline{B}_i = \underline{0}$ si el punto no pertenece al elemento «e».

$n =$ número de nodos de la estructura.

El sistema de ecuaciones [8] se completa con la adecuada ley de comportamiento que relacione las tensiones con las deformaciones correspondientes. Admitiendo que se cumplen las leyes de la elasticidad lineal se tiene que

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\epsilon} \quad [9]$$

donde, para material isótropo,

$$\underline{D} = E \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2(1+\nu)} \end{bmatrix}$$

siendo E el módulo de elasticidad del material y ν su coeficiente de Poisson.

2.1. Cálculo del vector de fuerzas nodales

En el modelo que se propone se han considerado cuatro tipos de fuerzas exteriores.

a) *Fuerzas puntuales.* Constituidas por los eventuales lastres que pueda llevar la tubería, las posibles acciones puntuales en los extremos de la misma y por las reacciones en los puntos de contacto con el fondo del mar. Su contribución al vector \underline{f} se expresa por

$$\underline{f}_k = [f_{xk}, f_{zk}, m_{0k}]^T$$

donde \underline{f}_k es el vector de fuerzas nodales en el modo «k» evaluado en el sistema de coordenadas globales.

b) *Peso propio de la tubería.* El peso se considera una fuerza repartida de valor, por unidad de longitud,

$$\underline{t}_z = -\gamma\pi (R_{ext.}^2 - R_{int.}^2) \quad [10]$$

donde $R_{ext.}$ y $R_{int.}$ son los radios exterior e interior de la sección de tubería, respectivamente, y γ es la densidad del material de la misma. Así pues, su contribución al vector \underline{f} (vector de fuerzas nodales) de la expresión [8] en el nodo k viene dada por:

$$\underline{f}_k = \int_{l^{(e)}} N_k^{(e)} [0, \underline{t}_z, 0]^T ds \quad [11]$$

donde $l^{(e)}$ es la longitud del elemento «e» que contiene el nodo «k» y $N_k^{(e)}$ es la función de interpolación de dicho nodo.

c) *Peso del agua de llenado.* El agua contenida en el interior de la tubería manifiesta su acción en forma de presión sobre las paredes interiores de ésta. Si se establece la hipótesis de pequeños desplazamientos axiales, este tipo de acción puede ser sustituida [12] por una carga *vertical* uniformemente repartida de valor

$$\underline{t}_r = -\rho\pi R_{int.}^2 \quad [12]$$

donde ρ es la densidad del agua. La contribución de esta fuerza al vector de cargas es análoga a la obtenida en la expresión [11] para el caso de peso propio.

d) *Fuerzas de flotación.* Como en el caso del agua de llenado, estas fuerzas son consecuencia de la presión hidrostática del agua sobre las paredes *exteriores* de la tubería. También aquí, si los corrimientos axiales son pequeños, pueden ser sustituidos [12] por la componente vertical de su resultante en cada acción, originando una carga repartida sobre la directriz, de valor:

$$\underline{t}_r = \rho A \quad [13]$$

siendo A el área de la sección sumergida de la tubería (ver figura 7), cuyo valor es:

$$A = R_{ext.}^2 \left[\text{arc. cos} \left(1 - \frac{d}{R_{ext.}} \right) - \left(1 - \frac{d}{R_{ext.}} \right) \sqrt{1 - \left(1 - \frac{d}{R_{ext.}} \right)^2} \right] \quad [14]$$

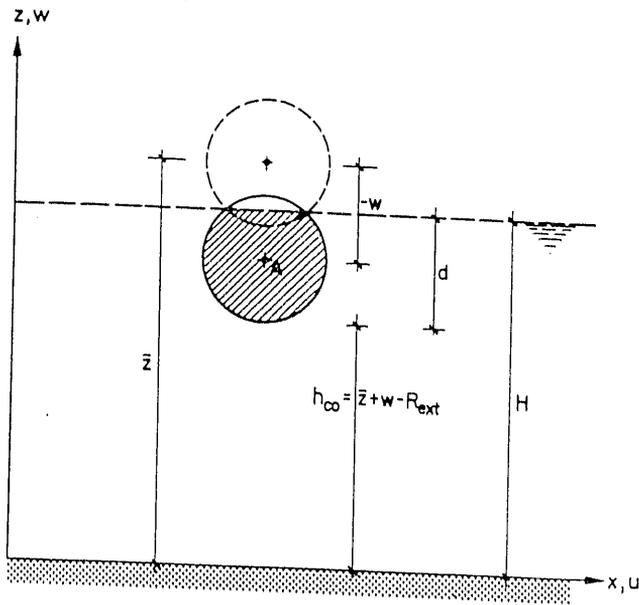


Fig. 7.—Definición de la altura de comparación.

donde «d» es la altura de sección sumergida:

$$d = H - (\bar{z} + w - R_{ext})^* \quad [15]$$

Estableciendo como altura de comparación, h_{co} , la distancia de la parte inferior de la tubería al fondo en cada estado de equilibrio:

$$h_{co} = \bar{z} + w - R_{ext} \quad [16]$$

se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \bar{t}_z &= 0 & \text{si } H \ll h_{co} \\ \bar{t}_z &= \rho A & \text{si } H - 2 R_{ext} \ll h_{co} < H \\ \bar{t}_z &= \rho \pi R_{ext}^2 & \text{si } h_{co} \ll H - 2 R_{ext} \end{aligned} \quad [17]$$

De [16] y [17] se puede observar que las fuerzas de flotación así definidas varían con la flecha «w», que se produzca durante la deformación y de ahí su carácter *no conservativo* ya mencionado.

Las distribuciones definidas por [17] adoptan una forma que, cualitativamente, es como la de la figura 8.

De ella se desprende que, para elementos que tengan secciones parcialmente sumergidas, la distribución de fuerzas de flotación a lo largo de la longitud del elemento será únicamente

* A partir de ahora suprimiremos los subíndices «o» para designar a los desplazamientos de los puntos de la directriz de la tubería.

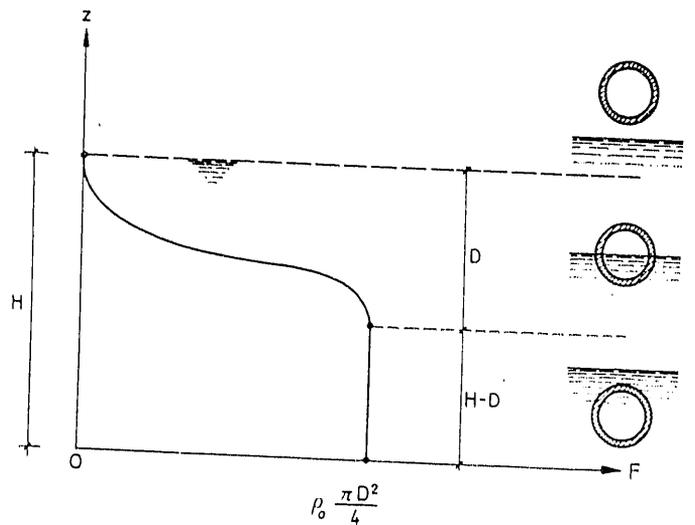
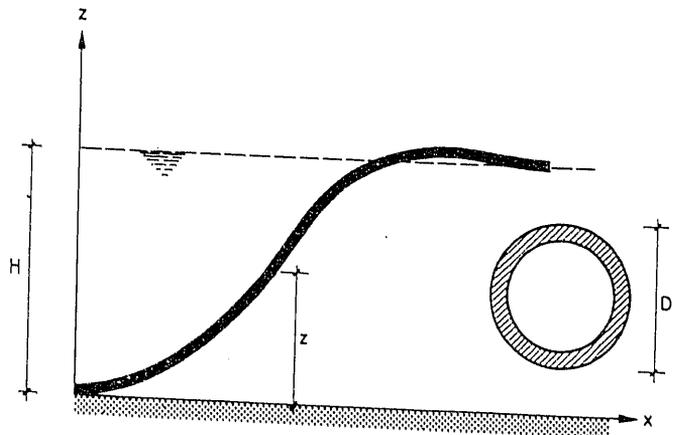


Fig. 8.—Variación, con la profundidad, de las fuerzas de flotación.

aproximable por un polinomio de alto grado, lo que obligaría a integraciones numéricas de un orden importante para evaluar correctamente las integrales correspondientes. En esta formulación, sin embargo, se ha acudido a interpolar las fuerzas de flotación mediante las funciones de interpolación del elemento isoparamétrico de tres nodos, de la forma

$$\bar{t}_z^{(e)} = \sum_i N_i^{(e)} \cdot \bar{t}_z^{(e)} \quad [18]$$

dando lugar a distribuciones parabólicas (ver figura 9), integrables exactamente mediante las reglas de Gauss-Legendre.

Esta interpolación sólo modifica la distribución real de fuerzas de flotación en los elementos parcialmente sumergidos, y aún en éstos, si su

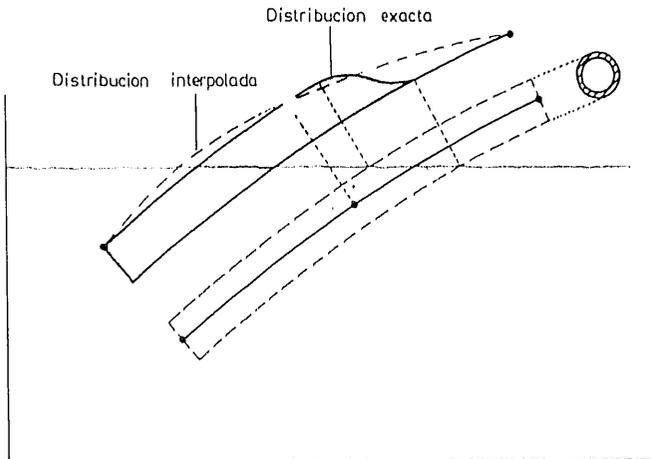


Fig. 9.—Distribución de las fuerzas de flotación sobre un elemento parcialmente sumergido.

inclinación es pequeña, la modificación es insustancial. De ahí que sólo afecte al estado de cargas de una zona muy localizada de la estructura.

Además, la progresiva discretización tiende a «afinar» cada vez más la aproximación. En consecuencia, una interpolación como la definida por [18] parece adecuada con vistas a una integración numérica del vector de fuerzas de flotación, que puede ser así evaluado exactamente mediante tres puntos de integración, o casi-exactamente, como se ha comprobado [12], con sólo dos puntos de integración.

Similares consideraciones pueden hacerse sobre el hecho de no tener en cuenta la inclinación de la sección a la hora de determinar la altura sumergida «d» de la misma [15] y la altura de comparación [16]. Este error sólo afecta a secciones cuyo eje esté situado a una distancia de $\pm R_{ext}$ de la superficie del agua, y que además tengan una inclinación significativa. Como se puede observar de las figuras 12 a 16, la parte de tubería afectada por esta simplificación queda reducida a una zona muy localizada, y su repercusión en los resultados debe ser despreciable.

La contribución de las fuerzas de flotación así definidas a la formación del vector de fuerzas residuales, se obtiene, pues, evaluando las fuerzas de flotación en los nodos mediante [17], interpolándolas mediante [18] y sustituyendo en [11].

3. RESOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES NO LINEALES. MATRIZ TANGENTE

Debido a la no linealidad del proceso de deformación y a la presencia de cargas no conservativas, la solución del sistema de ecuaciones [8] que se obtiene después de la discretización tiene que abordarse por un procedimiento iterativo. En este trabajo hemos escogido el conocido método de Newton-Raphson, que se basa en desarrollar en serie de Taylor, hasta el segundo término, el vector de fuerzas residuales $\psi(\underline{a})$ de la ecuación [8] como:

$$\psi(\underline{a} + \Delta \underline{a}) = \psi(\underline{a}) + \frac{\partial \psi}{\partial \underline{a}} \Delta \underline{a} \quad [19]$$

Suponiendo que la solución buscada fuese $\underline{a}^m + \Delta \underline{a}^m$ se cumplirá que

$$\psi(\underline{a}^m) + \frac{\partial \psi}{\partial \underline{a}} \cdot \Delta \underline{a}^m = 0 \quad [20]$$

y

$$\Delta \underline{a}^m = - \left[\underline{K}_T \right]^{-1} \psi(\underline{a}^m)$$

en donde $\underline{K}_T(\underline{a}^m) = \frac{\partial \psi(\underline{a}^m)}{\partial \underline{a}}$ se denomina *matriz tangente del sistema*.

Si se puede evaluar el valor de $\underline{K}_T(\underline{a}^m)$ y de $\psi(\underline{a}^m)$ en el punto \underline{a}^m , la expresión [20] es un sistema lineal de ecuaciones en $\Delta \underline{a}^m$ que nos permite, una vez calculados éstos, conocer la solución «mejorada» $\underline{a}^m + \Delta \underline{a}^m$. Tomando ahora este nuevo valor, y repitiendo el proceso, es «posible» que el proceso converja a valores de $\Delta \underline{a}$ cada vez más pequeños, de forma que para una determinada iteración sea $\Delta \underline{a} = 0$ y la expresión [20] se convierte en $\psi(\underline{a}) = 0$, con lo que el último valor de \underline{a} será la solución buscada.

3.1. Cálculo de la matriz tangente

De la definición de la matriz tangente dada más arriba, y de la expresión [8] se deduce que

$$\underline{K}_T = \frac{\partial}{\partial \underline{a}} \psi(\underline{a}^m) = \frac{\partial}{\partial \underline{a}} \left[\int_V \underline{B}^T \underline{\sigma} dv - \underline{h}(\underline{a}) - \underline{f} \right]^m$$

UNA FORMULACION PARA EL ESTUDIO, POR EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS...

En la ecuación anterior hemos distinguido los vectores de fuerzas no conservativas de flotación, $h(a)$, de las fuerzas conservativas, f . Por tanto

$$\begin{aligned} K_T^m = & \left[\int_V B^T \frac{\partial \sigma}{\partial a} dv + \right. \\ & \left. + \int_V B^T \left(\sigma \left(\frac{\partial}{\partial a} \right)^T \right) dv - \right. \\ & \left. - \frac{\partial h(a)}{\partial a} \right]^m = K_L^m + K_\sigma^m + K_f^m \end{aligned} \quad [21]$$

Para el cálculo de K_L^m es esencial conocer la relación incremental entre tensiones y deformaciones. Si ésta es lineal, como en la expresión [9], se tiene que

$$K_L^m = \left[\int_V B^T D B dv \right]^m$$

En caso de considerar relaciones tensión-deformación de tipo elastoplástico, el proceso es idéntico simplemente utilizando la expresión de la matriz D «elastoplástica» adecuada [12].

El cálculo de K_σ^m puede ser laborioso si se

incluyen todos sus términos. En este trabajo, por conveniencia, se ha obtenido una expresión de dicha matriz más simplificada como [12]:

$$K_\sigma^m \left[\int_V G^T \cdot S \cdot G dv \right]^m \quad G = [G_1, \dots, G_n] \quad [22]$$

donde las matrices G y S se muestran en la tabla 2. Para la obtención de la expresión [22] se ha supuesto que la matriz G es independiente de las incógnitas nodales, lo que no es totalmente cierto. No obstante, la utilización de dicha expresión en el proceso general de solución ha resultado, además de más económica en tiempo de cálculo, no afectar significativamente a la velocidad de convergencia de la solución [12].

Finalmente, la componente de la matriz tangente debida a las fuerzas no conservativas, K_f^m , se deduce de las ecuaciones [11] y [18], resultando:

$$K_f^m = \begin{bmatrix} K_{f_{11}} & \dots & K_{f_{1n}} \\ \vdots & & \vdots \\ K_{f_{n1}} & \dots & K_{f_{nn}} \end{bmatrix}^m \quad K_{f_{ij}}^m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^m \quad [23]$$

TABLA 2

Expresión de las matrices $G_i^{(e)}$ y S .

$$G_i^{(e)} = \begin{bmatrix} C_s \cos \Phi \frac{dN_i^{(e)}}{ds} & C_s \sin \Phi \frac{dN_i^{(e)}}{ds} & -tC_s \left(\frac{dN_i^{(e)}}{ds} \cos \theta_i - \frac{N_i^{(e)}}{R} \sin \theta_i \right) \\ -C_s \sin \Phi \frac{dN_i^{(e)}}{ds} & C_s \cos \Phi \frac{dN_i^{(e)}}{ds} & -tC_s \left(\frac{dN_i^{(e)}}{ds} \sin \theta_i + \frac{N_i^{(e)}}{R} \cos \theta_i \right) \\ 0 & 0 & -N_i^{(e)} \cos \theta_i \\ 0 & 0 & -N_i^{(e)} \sin \theta_i \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_x' & 0 & \tau_{xz} & 0 \\ 0 & \sigma_x' & 0 & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_s = \frac{1}{1 - t/R}$$

donde

$$H_{ij}^{(e)} = - \int_{j^{(e)}} N_i^{(e)} N_j^{(e)} \frac{\partial \bar{t}_{zi}}{\partial w_j} ds \quad [24]$$

y teniendo en cuenta las ecuaciones [13] a [17] se obtiene finalmente:

$$\begin{aligned} H_{ij}^{(e)} &= 0 \\ H_{ij}^{(e)} &= 2 \rho R_{\text{ext.}} \int_{j^{(e)}} \sqrt{1 - \left(\frac{d_j}{R_{\text{ext.}}}\right)^2} N_i N_j ds \\ H_{ij}^{(e)} &= 0 \end{aligned} \quad [25]$$

para $H \ll h_{\text{co}}$

para $H - 2R_{\text{ext.}} \ll h_{\text{co}} < H$

para $h_{\text{co}} < H - 2R_{\text{ext.}}$, respectivamente,

siendo $d_i = H - (\bar{z}_i + w_i - R_{\text{ext.}})$ la altura sumergida «d» de la expresión [15] correspondiente a la sección del nodo «j».

Se puede observar de [25] que K^m no es una matriz simétrica (en los nodos de los elementos parcialmente sumergidos $d_i \neq d_j$ y en consecuencia $H_{ij} \neq H_{ji}$). Sin embargo, para evitar tener que emplear un procedimiento especial para resolución de sistemas de ecuaciones no simétricas, y puesto que el fenómeno de no-simetría está localizado en unos cuantos elementos parcialmente sumergidos, se ha seguido en este trabajo el procedimiento de «obligar» a la simetría de la matriz (calculando únicamente los elementos del triángulo superior y simetrizando el inferior), con lo que el sistema lineal de ecuaciones en $\Delta \bar{q}^m$ resultante queda simétrico. Como ya se ha comentado anteriormente con relación al cálculo aproximado de la matriz K^m , la solución final del sistema no lineal, ecuación [8], no se ve afectada por las hipótesis hechas sobre la matriz tangente, que es únicamente un instrumento matemático utilizado con el objetivo de resolver iterativamente un sistema de ecuaciones no lineales.

4. CONDICIONES DE CONTORNO VARIABLE. METODOS DE RESOLUCION

Nos concentraremos aquí en el problema que suponen las condiciones de contorno variables del problema.

Es evidente que la parte inferior de la tubería no puede sobrepasar en ningún momento la profundidad delimitada por el fondo del mar. Sin embargo, para un determinado nivel de llenado de la tubería desconocemos *a priori* si un cierto punto de la misma tocará el fondo. En este caso, habría que establecer una condición de contorno (un corrimiento impuesto «w» igual a la distancia vertical entre la parte inferior de la sección de tubería y el fondo marino) para una serie de nodos cuyo número y situación nos es asimismo desconocido. Además, estas restricciones supondrán unas reacciones que en ningún caso pueden ser negativas, puesto que físicamente el fondo marino no puede retener a la tubería en un movimiento ascendente.

Para resolver este problema, se ha desarrollado un método de «predicción», de la deformada compatible con las condiciones de contorno variables.

El método consiste, en esencia, en predecir, para cada iteración del proceso de resolución, cuál es la deformada que satisface las condiciones de contorno, sin intentar proceder a otra iteración (ni aceptar, por consiguiente, una nueva deformada) hasta que ésta no presente contradicciones con dichas condiciones de contorno. Una vez conseguida esta «deformada compatible», se calculan las fuerzas residuales necesarias para equilibrarla, y se procede a otra iteración.

Evidentemente, cuando el proceso converja, es decir, cuando las fuerzas residuales sean nulas, estaremos ante una deformada que no sólo estará en equilibrio, sino que también será compatible con las condiciones de contorno y, por consiguiente, habremos obtenido la solución del problema para el correspondiente nivel de llenado de la tubería.

El método descrito implica un subproceso iterativo, esquematizado en la figura 10, que se expone a continuación:

1. El proceso de resolución nos lleva a una deformada compatible, con corrimientos \bar{q}^m , un vector de fuerzas residuales $\psi(\bar{q}^m)$ y una matriz tangente $K_T(\bar{q}^m)$.

2. Se procede a resolver el sistema de ecuaciones

$$K_T(\bar{q}^m) \Delta \bar{q}^m = \psi(\bar{q}^m)$$

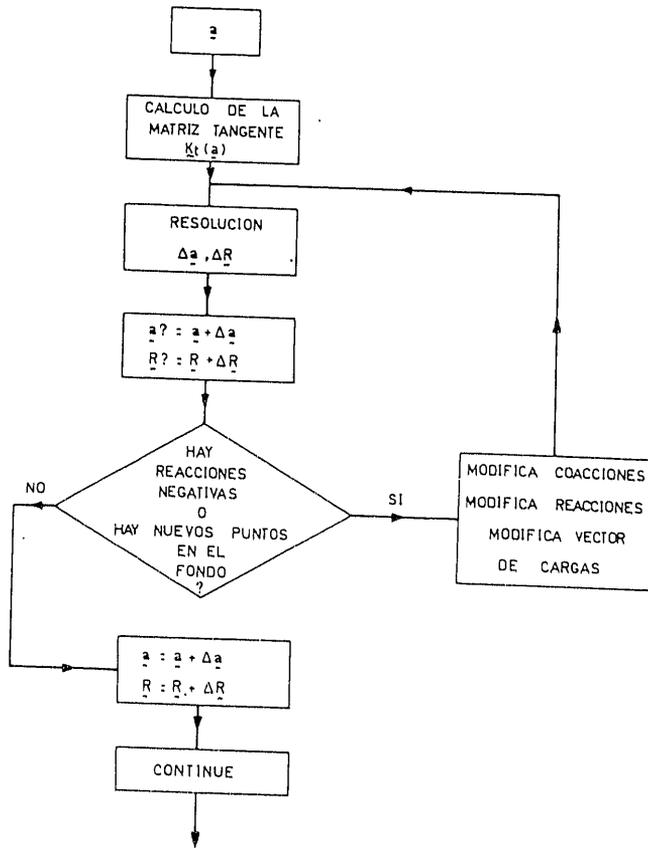


Fig. 10.—Sub-proceso iterativo para el ajuste de las condiciones de contorno.

con las condiciones de contorno procedentes de la anterior iteración, obteniéndose un incremento de las incógnitas nodales Δa^m , y, en los puntos en que éstas ya están impuestas, un incremento de las reacciones ΔR^m .

3. Se efectúa una predicción sobre la nueva deformada, consistente en incrementar los desplazamientos y reacciones en los valores obtenidos en el paso 2.

$$a^{m+1} = a^m + \Delta a^m$$

$$R^{m+1} = R^m + \Delta R^m$$

4. Se comprueba si la predicción es compatible, es decir, si conduce a que ningún nodo sobrepase el fondo, así como a que todas las reacciones sean positivas.

5. Si la predicción es compatible, se establece en firme y se continúa el proceso de resolución en el paso 7.

6. Si la predicción no es compatible se

actúa como sigue:

a) A los nodos no coaccionados que en la predicción sobrepasen el fondo, se les impone una coacción que les obligue en la próxima iteración a llegar al fondo, y a permanecer en él mientras no produzcan reacciones negativas.

b) Los nodos ya coaccionados que produzcan reacciones negativas, son liberados de su coacción y se suprime la correspondiente reacción R^m del vector de fuerzas residuales. Se vuelve al paso 2, continuando el proceso hasta obtener una predicción acertada.

7. Continúa el proceso general de resolución del problema con el cálculo de las fuerzas residuales correspondientes a la nueva deformada, aplicación del criterio de convergencia, etcétera.

Del proceso hasta aquí descrito hay que destacar dos características:

1. Mientras no se ha obtenido una predicción adecuada, la matriz tangente, K_T , no necesita ser calculada nuevamente, permaneciendo constante durante todo el subproceso iterativo de la figura 10. Esto es muy importante teniendo en cuenta que la evaluación de la matriz tangente consume un alto porcentaje del tiempo total de cálculo.

2. Por idénticas circunstancias, para la resolución del sistema de ecuaciones no es necesario «invertir», durante el subproceso iterativo, la matriz tangente. Sólo se efectúan modificaciones en el vector de fuerzas residuales y la resolución por el método frontal es prácticamente inmediato (con la consiguiente economía en tiempo de ordenador).

5. CALCULO NUMERICO DE LAS INTEGRALES. SECCION EQUIVALENTE

Las distintas integrales de volumen que aparecen a lo largo de la formulación, ver [8] y [21], proporcionan expresiones en función de las coordenadas curvilíneas «s» y «t» de la forma

$$\int_{|s|} \int_{-R_{ext.}}^{+R_{ext.}} \Phi(s, t) \cdot b(t) ds dt \quad [26]$$

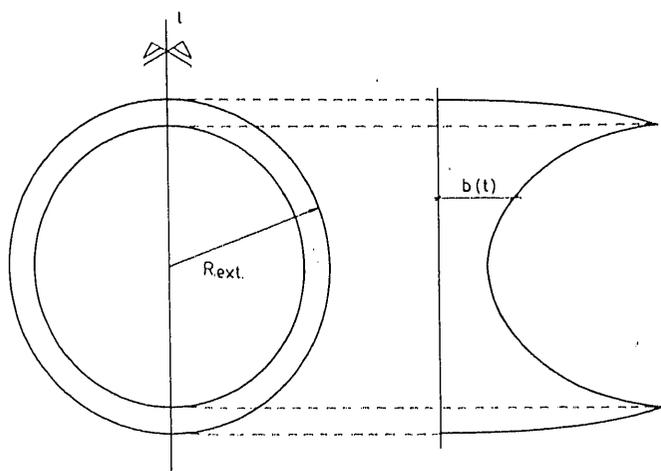


Fig. 11.—Variación del ancho efectivo, $b(t)$, de la sección anillo-circular.

donde $b(t)$ es el «ancho efectivo» de la sección de tubería cuya variación en función del canto puede verse en la figura 11. El cálculo explícito de integrales como la ecuación [26] es complicado y es más sencillo utilizar métodos de integración numérica como el de Gauss-Legendre, que sustituyen la evaluación directa de la integral anterior por la expresión siguiente:

$$\sum_{i=1}^{n_l} \sum_{j=1}^{n_c} \Phi(s_i, t_j) b(t_j) \cdot W_i W_j$$

donde n_l y n_c son el número de puntos de integración a lo largo de la longitud de la tubería y a lo largo del canto, respectivamente, y W_i y W_j son los pesos correspondientes a los puntos «i» y «j». La aparición de $b(t)$ altamente no lineal en «t», impide que una simple integración de dos puntos en el espesor (que da excelentes resultados para análisis elástico de piezas de sección rectangular [12]) proporcione aquí buenos resultados. Una buena aproximación obligaría en este caso a un alto número de puntos de integración y consecuentemente a un costo de cálculo elevado.

Resulta, por tanto, más sencillo y económico trabajar en función de lo que aquí se ha denominado «sección rectangular equivalente», que se define como aquella que, teniendo el mismo canto que la sección anillo-circular, tiene un ancho tal que el momento de inercia es igual en ambas secciones. Es fácil deducir que dicho

ancho se puede obtener por la expresión:

$$b_{eq.} = \frac{3 \pi}{8} \left[R_{ext.} - \frac{R_{int.}^4}{R_{ext.}^3} \right] \quad [27]$$

Puesto que en el proceso de deformación de la tubería el estado de flexión predomina sobre el de la membrana, parece lógico suponer que la variable geométrica fundamental de dicho proceso sea el módulo de inercia de la sección. Un estudio paramétrico realizado por Oliver [12] ha confirmado que la utilización de la sección rectangular equivalente con sólo dos puntos de integración en el canto produce idénticos resultados en el desplazamiento que utilizando la sección correcta con un alto número de puntos de integración.

Al ser los movimientos de la tubería las variables fundamentales del cálculo, la posible mala distribución de tensiones proporcionada por el uso de la sección equivalente no tiene aquí más importancia. De interesar efectivamente dicha distribución resulta muy fácil, una vez obtenida la correcta deformada en equilibrio, calcular las tensiones correspondientes a dicha deformada para la verdadera sección anillo-circular de la tubería.

6. EJEMPLOS

Ejemplo 1

Simulación del proceso de inmersión por inundación progresiva de una tubería de polietileno de 0,8 metros de diámetro y 120 metros de longitud.

En el primero de los dos ejemplos realizados para estudiar la validez de la formulación, se trata de predecir la deformada de una tubería de polietileno, lastrada con aros de hormigón, durante su proceso de colocación en el fondo del mar por el procedimiento de inundación progresiva (ver apartado 1).

Las características del problema consideradas son las siguientes:

Tubería de polietileno:

Radio exterior: 0,4 metros.

Radio interior: 0,375 metros.

UNA FORMULACION PARA EL ESTUDIO, POR EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS...

$E = 20.000$ toneladas m^2 .

$\nu = 0,0$.

Peso por metro lineal de tuberías: 0,06 toneladas/metro lineal.

Longitud = 120 metros.

Lastres de hormigón

Equivalentes a 0,20833 toneladas/metro lineal.

Discretización

10 elementos iguales de tres nodos/elemento.

Profundidad del fondo marino

30 metros.

En las figuras 12 a 16 se presentan las deformadas obtenidas para diversos niveles de llenado de la tubería.

El problema ha sido resuelto por «incrementos de longitudes de llenado» de forma que para cada nivel de llenado se considera como punto de partida para la primera iteración al proporcionado por los resultados obtenidos al final del proceso de llenado anterior. Esta circunstancia aligera mucho el cálculo, y por consiguiente proporciona una notable economía. Nótese que no se trata de cambiar la formulación Lagrangiana «total» por una «puesta al día» (la geometría de referencia siempre es la correspondiente antes del primer llenado), sino de partir, en la primera iteración de los distintos llenados, de un valor de las incógnitas nodales no nulo.

Los resultados correspondientes a las figuras 12 a 16 no han podido ser contrastados cuantitativamente. Sin embargo, de su observación se desprende que cualitativamente re-

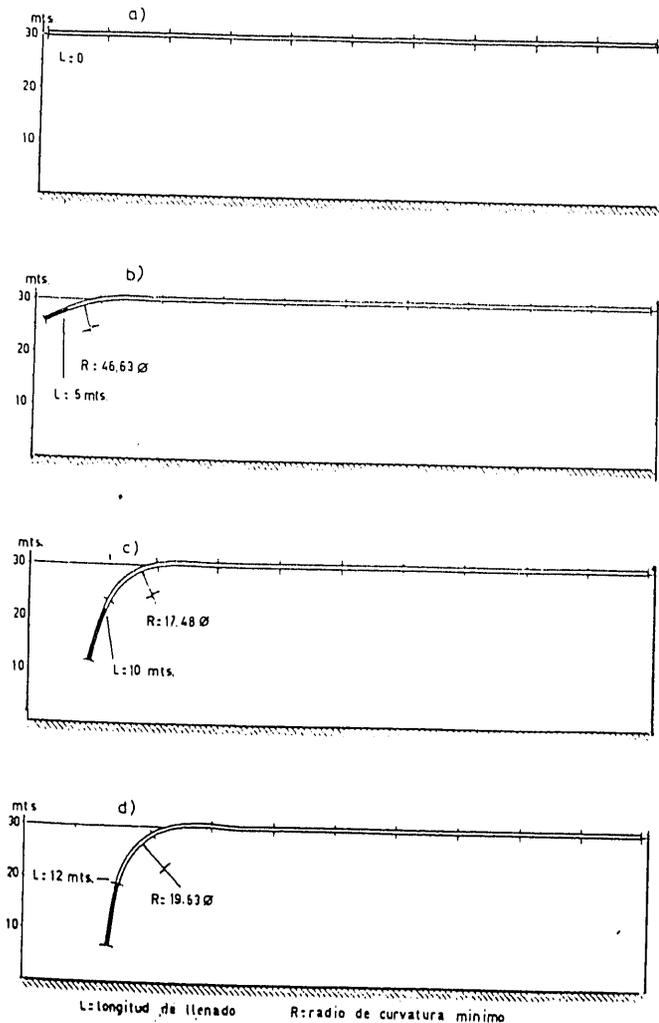


Fig. 12.—Inundación progresiva. Resultados.

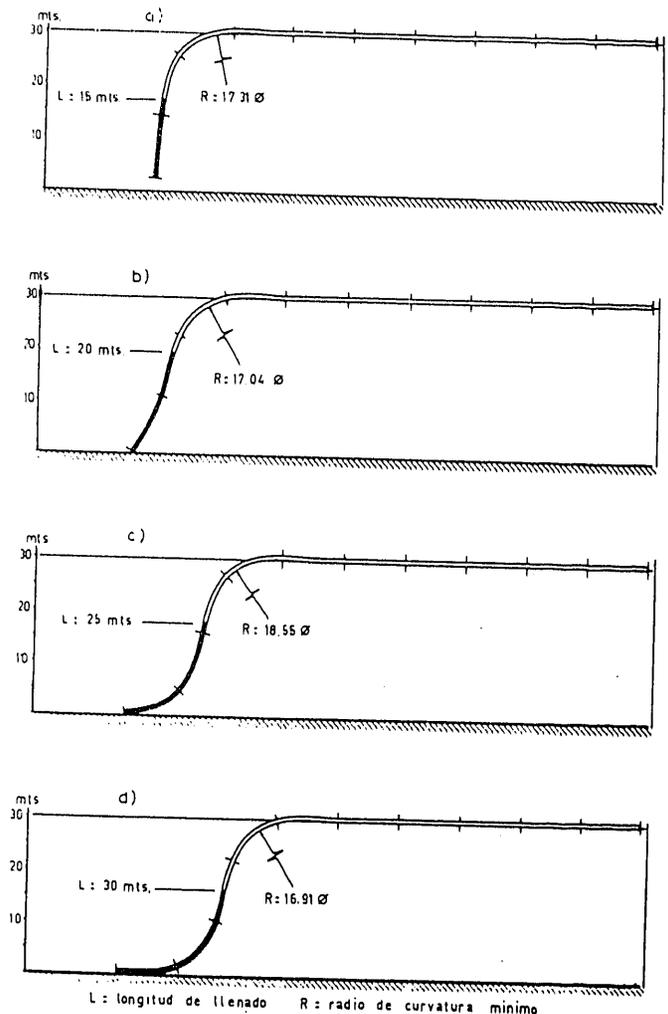


Fig. 13.—Inundación progresiva. Resultados.

presentan de forma muy coherente el proceso físico de hundimiento de la tubería. El modelo numérico simula muy bien una serie de fenómenos que se presentan en el proceso de colocación real de la tubería, como son:

- El ligero levantamiento de la tubería en la parte próxima a la zona sumergida de la misma (figuras 12, d; 13, a, b, c, d, y siguientes).
- El cambio de curvatura y formación de una «onda» en cuanto al extremo de la tubería toca el fondo (figuras 13, b, c y d).
- La programación de la onda hacia el extremo no sumergido de la tubería, en forma estacionaria (figuras 14, a, b, c, d, y 15, a, b, c).
- El brusco levantamiento del extremo no

sumergido de la tubería, en cuanto la onda llega al mismo (figura 15, d).

- La desaparición de la onda, y rápido hundimiento (pequeñas diferencias llenado proporcionan deformadas muy distintas), que culmina con el reposo de la tubería en el fondo marino (figuras 16, a, b, c, d).

El proceso de simulación que ha dado lugar a los resultados presentados es rápido, y proporciona información sobre cuándo y dónde se producen las máximas curvaturas, así como su valor. En consecuencia, permite realizar estudios paramétricos para determinar las características óptimas (tipo de tubería, nivel de lastrado, etcétera) para distintos valores de la profundidad y longitud del tramo a sumergir. También permite reproducir fenómenos de «ascenso» de

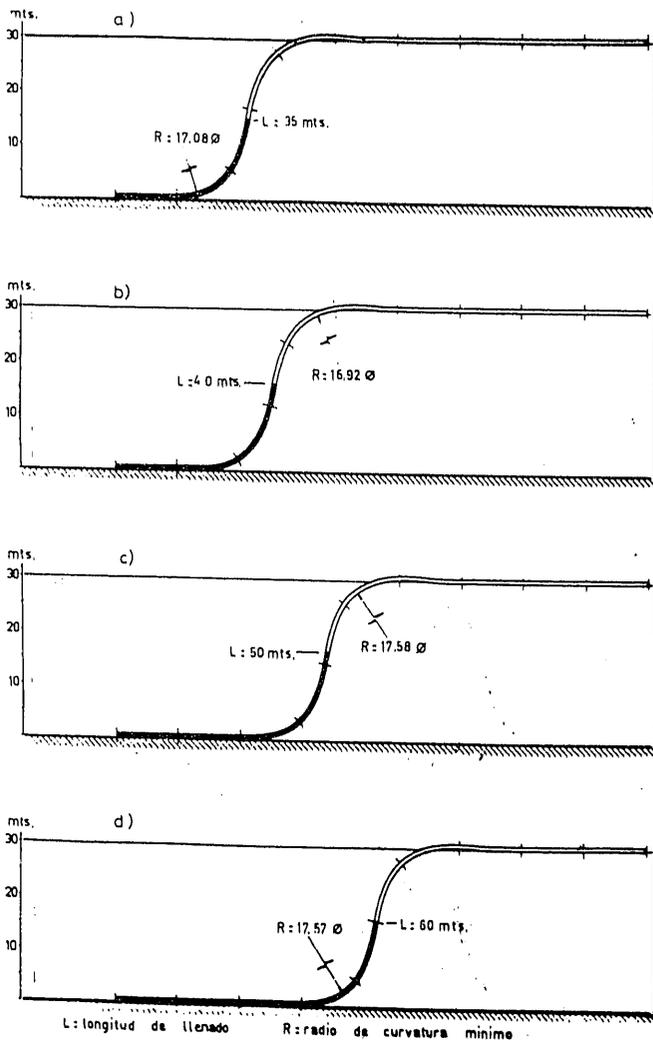


Fig. 14.—Inundación progresiva. Resultados.

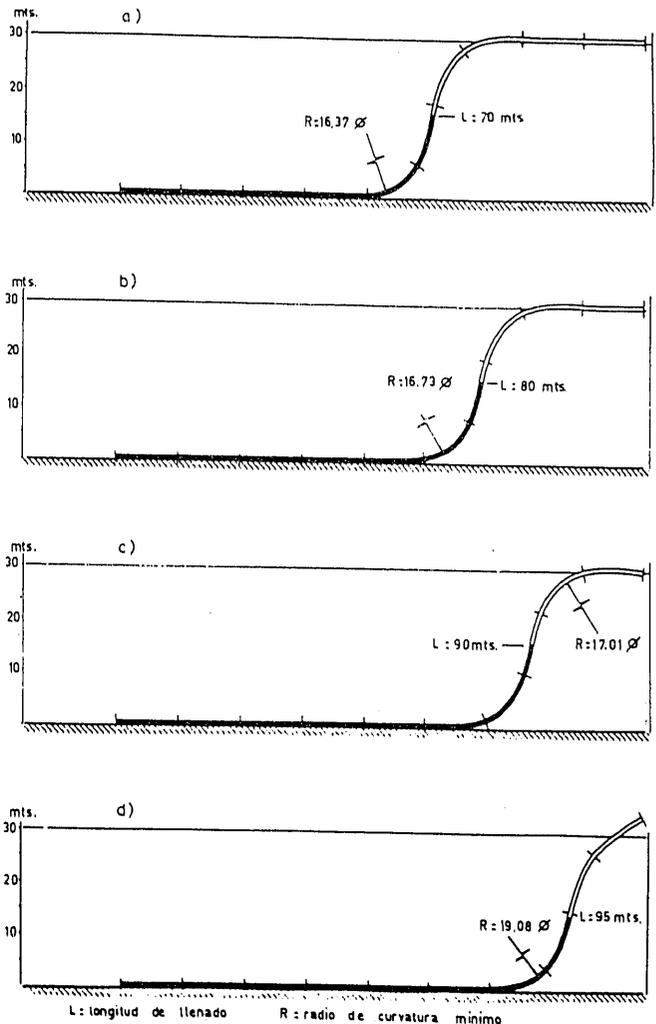


Fig. 15.—Inundación progresiva. Resultados.

UNA FORMULACION PARA EL ESTUDIO, POR EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS...

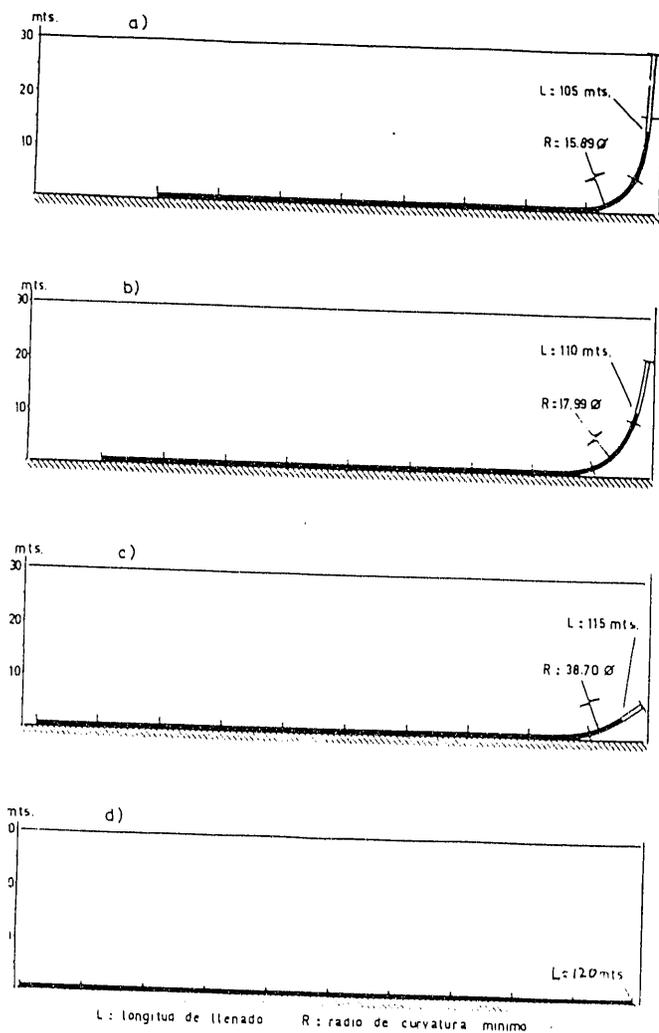


Fig. 16.—Inundación progresiva. Resultados.

determinadas zonas de la tubería para su reparación, etcétera.

Finalmente, un modelo de este tipo puede constituirse en elemento de simulación para contrastar formulaciones más sencillas o ábacos de cálculo, así como para elaborar reglas o normas para un sistema de instalación adecuado.

Ejemplo 2.

Colocación de una tubería metálica por lanzamiento desde una plataforma flotante.

Como se ha indicado en el ejemplo anterior, los resultados allí obtenidos no han podido ser contrastados numéricamente. Para poder asegurar la bondad de la formulación presentada, se

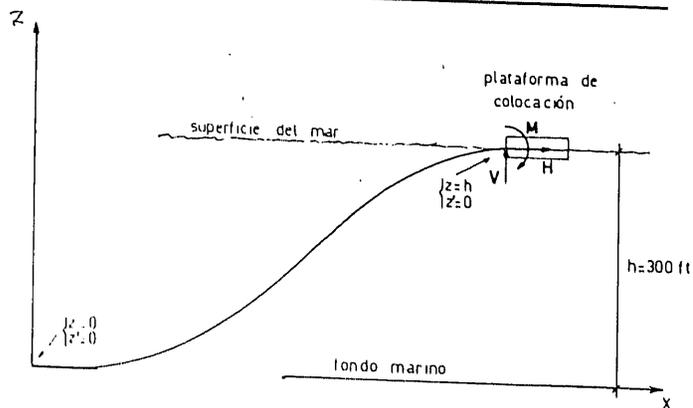


Fig. 17.—Lanzamiento desde plataforma. Condiciones de contorno.

ha aplicado la misma a un ejemplo, estudiado por Dareing y Neathery (10) y Datta Basu (11), referente a la colocación de tuberías metálicas para conducción de crudos petrolíferos.

El proceso de colocación, ya mencionado en el apartado 1, viene descrito en la figura 17 y consiste en ir lanzando la tubería desde una plataforma flotante, traccionando desde la misma con una fuerza horizontal «H» con el fin de disminuir las curvaturas producidas.

Los autores mencionados estudian el problema en la fase de la figura 17, con las condiciones de contorno allí señaladas, mediante diferencias finitas. Las incógnitas del problema son entonces: la longitud de la tubería que todavía no ha tocado fondo, la geometría de la misma y las reacciones V y M. Partiendo de la geometría aproximada correspondiente a una catenaria (de cuya acertada elección dependen las posibilidades de éxito del método), un proceso iterativo conduce al estado de equilibrio.

En nuestro caso se ha analizado este problema como un caso particular del estudiado en el ejemplo 1 (no se produce inundación progresiva de la tubería), considerando un tramo de tubería suficientemente largo, y estableciendo en el extremo derecho de la misma las condiciones de contorno de la figura 17.

Las características consideradas han sido las siguientes:

Tubería

- Metálica.
- Radio exterior: 0,6096 metros (24').

UNA FORMULACION PARA EL ESTUDIO, POR EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS...

- Radio Interior: 0,5953 metros (23,4375').
- $E = 2,1 \times 10^7$ toneladas/m².
- $\nu = 0,0$.
- Densidad (considerando el efecto de los lastres) = 5,3072 toneladas/m³.
- Longitud: 400 metros.

Discretización

10 elementos iguales de tres nodos por elemento.

Profundidad del fondo marino

91,44 metros (300 ft.).

Tensiones aplicadas

$H = 0,0$ t., 22,68 t. (50.000 lbs.), 45,36 t. (100.000 lbs.), 90,72 t. (200.000 lbs.).

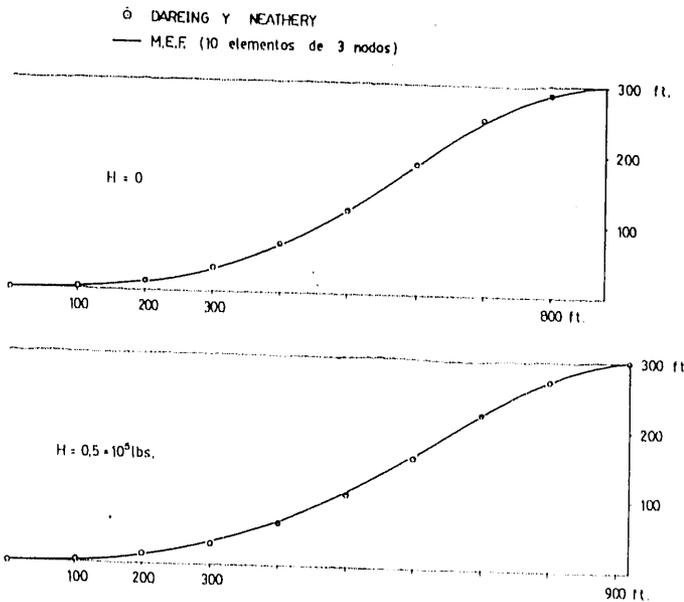


Fig. 18.—Lanzamiento desde plataforma. Resultados.

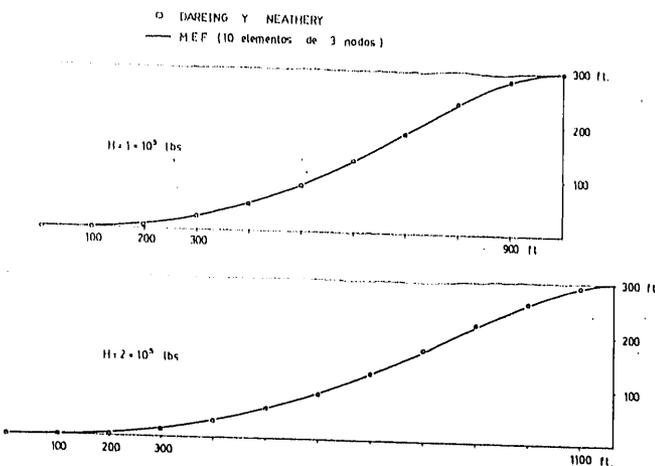


Fig. 19.—Lanzamiento desde plataforma. Resultados.

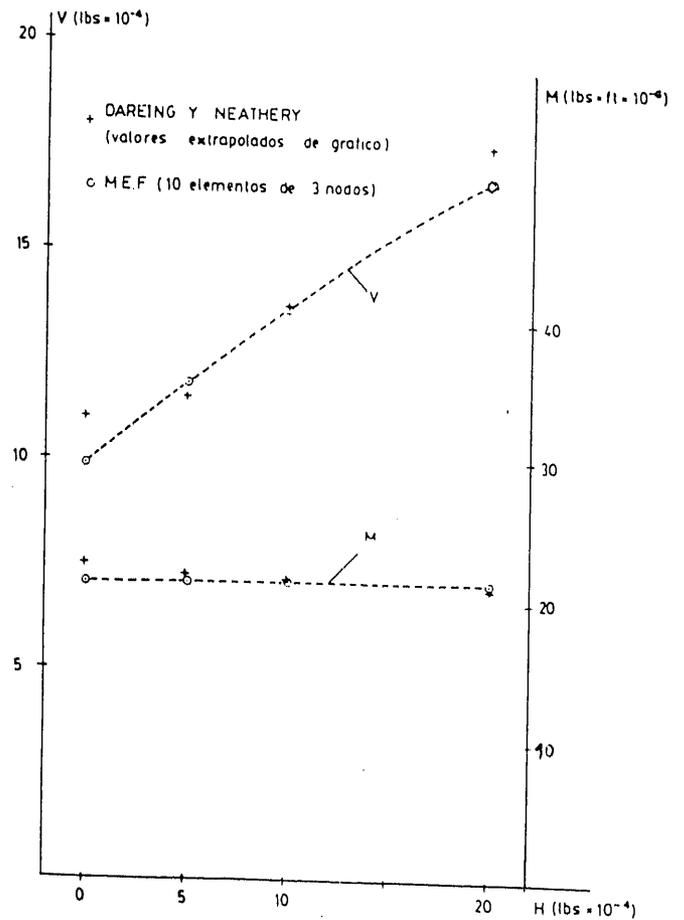


Fig. 20.—Lanzamiento desde plataforma. Resultados.

En las figuras 18 y 19 se presentan las deformadas para distintos valores de H , que muestran un buen acuerdo con los obtenidos por Dearing y Neathery.

En la figura 20, también para distintos grados de tensión aplicada, se presentan los valores de la reacción vertical V y del momento M , que concuerdan bien con los resultados de referencia, máxime si se tiene en cuenta que éstos han sido extraídos de gráficos de muy poca precisión, lo que justificaría las oscilaciones y diferencias que se observan.

7. CONCLUSIONES

Se ha presentado en este trabajo una formulación matemática de elementos finitos que permite predecir de forma sencilla la deformación de tuberías en el mar para diversas condiciones de instalación (hundimiento o levanta-

tamiento progresivo, lanzamiento desde plataformas, etc.). Los buenos resultados obtenidos en los ejemplos realizados indican que la formulación parece adecuada para obtener ábacos de cálculo o fórmulas sencillas que permitan el establecimiento de las condiciones óptimas de instalación (nivel de lastrado, tracción en los extremos, longitud de los tramos, etc.).

8. AGRADECIMIENTO

Los autores agradecen a don Leopoldo Pellón, de Saneamientos Marítimos, S. A., el haberles introducido a un tema tan interesante y la ayuda económica con la que se pudo iniciar este trabajo.

REFERENCIAS

1. PLUNKET, R.: «Static bending stress in catenaries and drill strings». Journal Eng. Ind., series B, 89, número 1: 31-56. Febrero 1967.
2. GRACIA, D. J., y otros: «Bending moments induced in laying offshore pipelines under tension». Petroleum Mech. Eng. Conference. Paper 67-PET-8. America Soc. of Mech. Eng. Philadelphia, USA, 1967.
3. DIXON, D. A., y RUTLEDGE, D. R.: «Stiffend catenary calculations in pipe laying problems». Journ. Eng. Ind., series B, 90, núm.1: 153. Febrero 1968.

4. POWERS, J. T., y FINN, L. D.: «Stress analysis of offshore pipelines during installation». Proc. First Offshore Technol. Conf., Paper 1071. Houston, 1969.
5. DALEY, G. C.: «Optimizing tension level and stinger length for pipeline installation». Proc. 5th Offshore Technol. Conf., Paper 1875. Houston, 1973.
6. SALEEB, A. F., y CHEN, W. F.: «Elastic-plastic large displacement analysis of pipes». A.S.C.E. Journ., Estr. Div., 605-626, abril 1981.
7. OVUNC, B., y MALLAREDDY, H.: «Stress analysis of offshore pipelines». Proc. 2nd Offshore Technol. Conf., Paper 1222. Houston, 1970.
8. BRANDO, P., y SEBASTIANA, G.: «Determination of sealines elastic curves and stress to be expected during laying operation». Proc. 3rd Offshore Technol. Conf., Paper 1354. Houston, 1971.
9. WILKINS, J. R., y WARTEKE, T. R.: «Offshore pipeline stress analysis». Proc. 2nd Conf. Offshore Tech., Paper 1227. Houston, 1970.
10. DAREING, D. R., y NEATHERY, R. F.: «Finite difference technique for pipeline analysis». Journ. Engin. Ind., series B, 92, núm. 1: 827, nov. 1970.
11. DATTA, T. J., y BASU, A. K.: «Stress analysis of submarine pipelines». Proc. Instn. Civ. Engr., part 2, 63: 833-841, diciembre 1977.
12. OLIVER, J.: «Una formulación cuasi-intrínseca para el estudio, por el método de los elementos finitos, de vigas, arcos, placas y láminas, sometidos a grandes corrimientos en régimen elastoplástico». Tesis doctoral, E.T.S. Ing. de Caminos, Universidad Politécnica de Barcelona.
13. ZIENKIEWICZ, O. C.: «El método de los elementos finitos». Editorial Reverté, 1980.

Javier Oliver Olivella.



Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos. Especialista en la elaboración y aplicación de modelos numéricos para la simulación y resolución por ordenador de problemas de ingeniería. En la actualidad es Profesor Adjunto del Departamento de Estructuras de la ETS. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona. Es autor de diversos artículos y comunicaciones

sobre métodos numéricos aplicados a problemas de ingeniería en revistas y congresos nacionales e internacionales.

Eugenio Oñate Ibáñez de Navarra.



Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos, Master in Science, Doctor in Philosophy Universidad de Swansea, País de Gales, U. K. Especialista en aplicaciones de los métodos de cálculo numéricos en ingeniería. En la actualidad es profesor agregado de Estructuras ETS. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona, y director de la ETS Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona. Es autor del libro "Aplicaciones del Método de los elementos finitos en ingeniería". Editado por E. Oñate, E. Alonso y M. Casteleiro (1982). Ha publicado más de 30 artículos sobre aplicaciones de los métodos numéricos en ingeniería en diversas revistas nacionales e internacionales.