

Aplicación del método del coeficiente de envejecimiento a problemas reológicos no lineales

Miguel Fernández Ruiz

MC-2 Estudio de Ingeniería, S.L.
Víctor de la Serna, 21
28016 Madrid, España
Tel.: 34-91-519 74 77; Fax: 34-91-744 06 75
e-mail: miguel.fernandez@mc2.es

Resumen

El estudio de los fenómenos de la fluencia y retracción lineal en un sistema se encuentra razonablemente bien resuelto según diferentes aproximaciones del valor de la integral de Volterra (método del coeficiente de envejecimiento, método paso a paso, ...). Sin embargo, existen numerosas ocasiones donde las hipótesis del cálculo lineal se ven superadas, requiriéndose un estudio no lineal del mismo. En este artículo se revisa la literatura clásica de la aproximación lineal y se propone una manera simplificada de abordar la resolución de la integral de Volterra en problemas no lineales (basada en las ideas del coeficiente de envejecimiento y exacta además en una serie de casos). El método se aplica a la resolución de diferentes problemas, tabulando sus soluciones y comparando la desviación obtenida respecto de las predicciones lineales.

Palabras clave: *coeficiente de envejecimiento, integral de Volterra, fluencia no lineal.*

APPLICATIONS OF THE AGEING COEFFICIENT METHOD TO NON-LINEAR RHEOLOGICAL PROBLEMS

Summary

The concrete's creep and shrinkage effect in a system can reasonably be well determined under the linear hypotheses, approximating the Volterra's integral value in several ways (ageing coefficient method, step by step method, ...). However, many times, the linear hypothesis are not satisfied and so a non-linear study is required. In this paper, the classical references of the linear approach are reviewed and a simplified method of approximating the value of the Volterra's integral in non-linear problems is proposed (based on the ideas of the ageing coefficient method and being exact in several cases). This method is applied to obtain the solution to certain problems as well as to study the differences in the results when the linear theory is applied.

Keywords: *ageing coefficient, Volterra's integral, non-linear creep.*

NOTACIÓN

χ	coeficiente de envejecimiento
$E(t)$	módulo de rigidez en el tiempo t
$\eta(\lambda_0)$	coeficiente de paso de fluencia lineal a fluencia no lineal dependiente de λ_0
$\varepsilon(t)$	deformación en el tiempo t
$\varphi(t, t_0)$	coeficiente de fluencia lineal entre t_0 y t
$\varphi^*(\lambda_0, t, t_0)$	coeficiente de fluencia no lineal entre t_0 y t para un nivel de tensiones λ_0
λ_0	relación $\frac{\sigma_0}{f_c}$
ρ	cuantía de acero $\frac{A_s}{A_c}$
$\sigma(t)$	tensión en el tiempo t
t	tiempo de evaluación
t_0	tiempo inicial

INTRODUCCIÓN Y MOTIVACIÓN DEL ESTUDIO

En este artículo se expone la teoría y resultados de un método de cálculo basado en el coeficiente de envejecimiento con el que se pueden resolver problemas tanto de retracción y fluencia no lineal como de relajación no lineal de manera exacta. Este método puede considerarse por lo tanto como un coeficiente de envejecimiento ampliado, ya que parte de la misma idea original (aproximar la historia tensional de una manera simplificada) pero superando algunas de las limitaciones en sus hipótesis iniciales. Los resultados obtenidos se comparan posteriormente con los de un análisis lineal, de manera que se pueda comprobar su aplicabilidad según el tipo de problema. De esta forma, se busca obtener unos valores sencillos con los que obtener una estimación rápida y con un grado de aproximación suficiente* del fenómeno.

Actualmente, en gran parte de los análisis que habitualmente se realizan en la ingeniería civil, se siguen empleando diferentes métodos de cálculo lineal para la obtención de los esfuerzos producidos por las deformaciones diferidas de los materiales^{15,8}. No obstante, el comportamiento reológico fuertemente no lineal bajo compresión y tracción del hormigón ha obligado al desarrollo de métodos de cálculo y modelos físicos más ajustados en multitud de situaciones. Por ejemplo, las secciones híbridas⁵ y las secciones fisuradas^{6,9} han sido dos campos donde recientemente se ha trabajado en el desarrollo de métodos de cálculo simplificados que puedan ser aplicados en el proyecto de estructuras. Este artículo viene a colaborar en esta línea, analizando de forma simplificada (pero exacta bajo ciertas condiciones) la respuesta de elementos bajo deformaciones reológicas no lineales, permitiendo por lo tanto obtener un orden de magnitud del problema y dotando de esta forma al ingeniero de cierta sensibilidad frente al fenómeno.

Los métodos lineales se basan en la aplicación directa del principio de superposición al cálculo de las deformaciones de una fibra de hormigón, resultando en la conocida ecuación de Volterra, la cual expresa la deformación de una fibra en el tiempo como

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)}(1 + \varphi(t, t_0)) + \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \frac{1 + \varphi(t, \tau)}{E(\tau)} d\sigma_c(\tau) + \varepsilon_{cs}(t, t_0) \quad (1)$$

*Lo incierto de los datos de entrada (función de fluencia, fluencia no lineal, ...) no justifica la aplicación de métodos paso a paso (refinados pero costosos en tiempo y esfuerzo de cálculo) que proporcionan finalmente un resultado similar.

El principio de superposición fue enunciado de manera general por primera vez por Boltzmann en 1876 para materiales sin envejecimiento (y por lo tanto exclusivamente dependientes de la variable $(t - t_0)$). Posteriormente, Volterra en 1913 lo formuló para materiales con envejecimiento (por lo que dependían de dos variables $(t_0$ y $(t - t_0)$). Finalmente, este principio fue introducido para el hormigón por McHenry¹⁶.

El principio de superposición se acepta como válido en el hormigón siempre que se respeten una serie de hipótesis de partida³:

- tensiones dentro del rango $\sigma \leq 0,4f_c$,
- ε no decreciente[†],
- pieza sin un secado intenso,
- no existan variaciones fuertes de σ .

En cuanto a la evaluación de la integral de Volterra puede realizarse de diferentes maneras, siendo una de las más sencillas y precisas el método del coeficiente de envejecimiento¹⁹ planteado inicialmente por Trost²¹ y ampliado posteriormente por Bažant²

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)}(1 + \varphi(t, t_0)) + \frac{1 + \chi\varphi(t, t_0)}{E(t_0)}\Delta\sigma_c(t, t_0) + \varepsilon_{cs}(t, t_0) \quad (2)$$

Este método, debido a sus hipótesis de partida, tiene una serie de limitaciones:

1. El hormigón no debe encontrarse en un régimen de fluencia no lineal debido a altas tensiones (al violar por lo tanto la primera de las suposiciones de aplicación del principio de superposición). En este caso, las deformaciones de fluencia dependen del nivel de tensiones en cada instante y debe corregirse la predicción lineal de la deformación diferida $\Delta\varepsilon(t, t_0) = \varphi(t, t_0)\varepsilon(t_0)$ mediante la inclusión por ejemplo de un coeficiente de fluencia aparente $\varphi^*(\lambda_0, t, t_0) = \eta(\lambda_0)\varphi(t, t_0)$ donde λ_0 expresa la relación tensión/resistencia. Fórmulas aproximadas de dicho coeficiente pueden encontrarse en numerosas referencias clásicas del tema^{1,4}, mostrando buenos ajustes a los resultados experimentales por ejemplo las propuestas del MC-90 $\left(\eta = \exp\left[1,5\left(\frac{\sigma}{f_c} - 0,40\right)\right]\right)$ y la propuesta en la referencia 10 $\left(\eta = 1 + 2\left(\frac{\sigma}{f_c}\right)^4\right)$.
2. Otra limitación que tiene el método del coeficiente de envejecimiento lineal es que es exacto para casos de relajación pura, aplicándose posteriormente el valor del coeficiente obtenido en este caso al estudio de otros tipos de sollicitaciones. Sin embargo, si se aplica por ejemplo a una carga triangular en el tiempo, el método del coeficiente de envejecimiento con los valores usuales no proporciona buenas estimaciones. Es decir, el método tiene un límite de aplicabilidad según sea la historia de carga de la acción solicitante y parece interesante estudiar las desviaciones que se producen con otras acciones, como la retracción, que siempre se desarrollan en las estructuras de hormigón.

[†]No así necesariamente la tensión. Puede admitirse (como por ejemplo en un caso de relajación pura) disminución en el valor de la tensión del hormigón siempre y cuando la deformación no decrezca.

3. Finalmente, y como tercera limitación del método, se encuentra el grado de armado de la fibra. La calibración del coeficiente se realiza de manera exacta para un caso de relajación pura lineal en una fibra de hormigón. Sin embargo, si la fibra se encuentra con una carga impuesta en vez de con una vinculación externa impuesta, conforme se incrementa el armado de la fibra, la respuesta debe empezar a desviarse de la predicción anterior. Esta limitación parece además seria en el caso de tirantes debido a que sus cuantías pueden ser elevadas (llegando por ejemplo al 3 % en losas de tableros mixtos). Por lo tanto, también se va a intentar evaluar la capacidad del método para reproducir estas situaciones y el grado de desviación esperable.

Otros métodos ampliamente contrastados son por ejemplo el del módulo efectivo¹⁷, el Dischinger⁷ y Dischinger mejorado²⁰, el de las $j's$ ¹⁴ y el paso a paso (con diferentes formulaciones para su evaluación^{13,18,11}).

No se quiere exponer con los tres puntos anteriores que el método del coeficiente de envejecimiento tal y como se emplea hoy día sea excesivamente limitado. Todo lo contrario, el método es perfectamente aplicable de cara a evaluar las redistribuciones que tienen lugar en una estructura debido a las deformaciones reológicas que se desarrollen. En estos casos, la tensión nunca supera el límite de proporcionalidad en compresión y se limitan las tracciones. El armado no suele ser excesivo y además la incertidumbre en el valor de los parámetros no suele justificar un análisis más detallado. Por otra parte, el propio método de cálculo en desplazamientos provoca que la acción a reaplicar sea la proveniente de la relajación de los esfuerzos iniciales, siempre que éstos sean una acción mantenida en el tiempo. Además, el método del coeficiente de envejecimiento ha demostrado ser poco sensible a variaciones en el valor del coeficiente χ . Es decir, la incertidumbre introducida por las propiedades asignadas al material es muy superior a las simplificaciones que se realizan en su cálculo.

Sin embargo, en fibras de hormigón, y por lo tanto en el elemento estructural que éstas representan, el tirante, estas tres situaciones no son casos extraños o marginales. En general, estos elementos se encuentran fuertemente armados, retraen y debido a ello generan tensiones de tracción en el hormigón de valor elevado (que pueden incluso provocar la fisuración) por lo que se alcanzan relaciones tensión/resistencia muy por encima del rango en que puede estudiarse con un sistema reológico lineal. Se requiere por lo tanto para estos elementos un estudio específico con especial atención a los puntos anteriores, ya que la evaluación de estos fenómenos y su interacción sobrepasan ampliamente los límites para los que el método del coeficiente de envejecimiento fue desarrollado. No se trata de realizar una tabulación exacta de todos los posibles casos de carga y armado, sino una revisión profunda de los principios del método y, a partir de ello, obtener valores más ajustados en una serie de situaciones fuera de las hipótesis de partida del método. De esta manera, se podrá fijar de nuevo un valor aproximado del coeficiente χ con el que abordar estos problemas de manera simplificada pero con un grado de aproximación aceptable en la respuesta.

EQUIVALENCIA DE LOS PLANTEAMIENTOS EN TIEMPOS Y TENSIONES

Para poder estudiar el efecto de la no linealidad debido a altas tensiones en una fibra de hormigón, la discretización de la historia de tensiones en el tiempo debe realizarse en incrementos de tiempo en vez de en incrementos de tensión. Este punto es necesario debido a que la no linealidad tensional sólo puede estudiarse a partir del nivel absoluto de tensiones en la fibra y no del incremento de las mismas (al perderse la proporcionalidad). Por lo tanto, se propone a continuación probar la equivalencia entre ambos desarrollos. La demostración parte de la aplicación del principio de superposición lineal y se realizará suponiendo la historia de deformaciones discretizada en una serie de n intervalos de la siguiente forma.

Sea una fibra sometida a una carga y mantenida en el tiempo (Figura 1), su deformación se ve incrementada en el tiempo de la siguiente manera

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(t_0)(1 + \varphi(t, t_0)) = \frac{\sigma(t_0)}{E(t_0)}(1 + \varphi(t, t_0)) \quad (3)$$

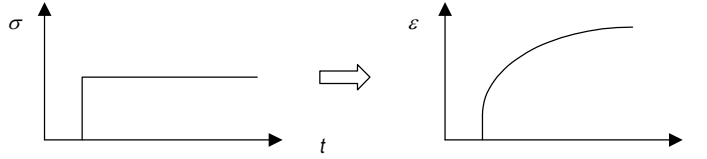


Figura 1. Carga mantenida en el tiempo

Cuando la fibra se encuentra sometida a una historia variable de tensiones (Figura 2), entonces se puede expresar

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\Delta\sigma(t_i)}{E(t_i)}(1 + \varphi(t, t_i)) \quad (4)$$

donde $\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\Delta\sigma(t_i)}{E(t_i)}(1 + \varphi(t, t_i)) = \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{\Delta\sigma(t_i)}{E(t_i)}(1 + \varphi(t, t_i)) + \frac{\Delta\sigma(t_n)}{E(t_n)}$.

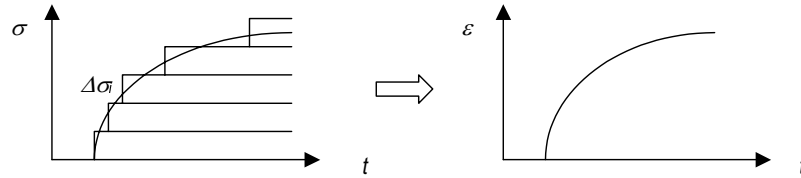


Figura 2. Carga variable en el tiempo. Descomposición en incrementos de tensión

Esta manera de descomponer la historia de tensiones y sumar sus estados es perfectamente correcta desde el punto de vista del principio de superposición. Sin embargo, sus resultados deben ser idénticos a los derivados de la descomposición de la Figura 3.

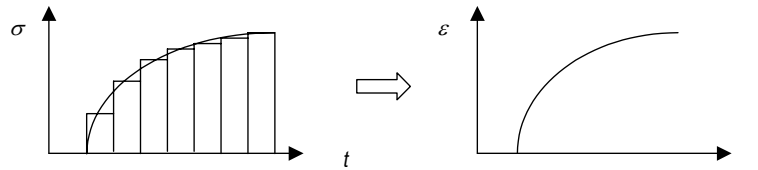


Figura 3. Carga variable en el tiempo. Descomposición en incrementos de tiempo

Expresar la historia de tensiones en esta configuración es más atípica que la anterior y puede en principio originar dudas sobre su validez, ya que al final de cada intervalo hay una descarga, lo que violaría uno de los principios necesarios para que se pueda aplicar la superposición. Sin embargo, al producirse una recarga justo inmediatamente después, la descomposición aplicada es válida como se prueba a continuación

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= \sum_{i=1}^{i=n-1} \left(\frac{\sigma(t_i)}{E(t_i)} ((1 + \varphi(t, t_i)) - (1 + \varphi(t, t_{i+1}))) \right) + \frac{\sigma(t_n)}{E(t_n)} = \\ &= \sum_{i=1}^{i=n-1} \left(\sum_{j=1}^{j=i} \frac{\Delta\sigma(t_i)}{E(t_i)} (\varphi(t, t_i) - \varphi(t, t_{i+1})) \right) + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\Delta\sigma(t_i)}{E(t_i)}\end{aligned}\quad (5)$$

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\Delta\sigma(t_i)}{E(t_i)} (1 + \varphi(t, t_i)) \right) \quad (6)$$

donde se ha aplicado

$$\sum_{j=1}^{j=i} \frac{\Delta\sigma(t_j)}{E(t_j)} = \left(\sum_{j=1}^{j=i-1} \frac{\Delta\sigma(t_j)}{E(t_j)} \right) + \frac{\Delta\sigma(t_i)}{E(t_i)} \quad (7)$$

y se han cancelado todos los términos de la serie menos el último de cada intervalo con los del intervalo anterior.

De esta forma queda probado que ambas descomposiciones son equivalentes y que calcular las deformaciones de esta manera está de acuerdo con el principio de superposición. Aplicando esta metodología de cálculo al caso de deformaciones de fluencia no lineales con la corrección del coeficiente η para que sea aplicable el principio de superposición (ya que según el empleo de este coeficiente se tiene una corrección de la predicción lineal del coeficiente de fluencia que puede considerarse como una “fluencia aparente” y operar análogamente al caso desarrollado anteriormente, es decir, basta emplear $\varphi^*(\frac{\sigma_0}{f_c}, t, t_0) = \eta(\frac{\sigma_0}{f_c})\varphi(t, t_0)$), se tendría

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^{i=n-1} \left(\frac{\sigma(t_i)}{E(t_i)} ((1 + \eta(t_i)\varphi(t, t_i)) - (1 + \eta(t_i)\varphi(t, t_{i+1}))) \right) + \frac{\sigma(t_n)}{E(t_n)} \quad (8)$$

$$\text{como } \frac{\sigma(t_i)}{E(t_i)} = \sum_{j=1}^{j=i} \frac{\Delta\sigma(t_j)}{E(t_j)} \quad (9)$$

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^{i=n-1} \left(\sum_{j=1}^{j=i} \frac{\Delta\sigma(t_i)}{E(t_i)} (\eta(t_i)\varphi(t, t_i) - \eta(t_i)\varphi(t, t_{i+1})) \right) + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\Delta\sigma(t_i)}{E(t_i)} \quad (10)$$

Por lo que finalmente $\varepsilon(t)$ sería igual a

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\Delta\sigma(t_i)}{E(t_i)} + \frac{\Delta\sigma(t_i)}{E(t_i)} \left(\eta(t_i)\varphi(t, t_i) + \sum_{j=i+1}^{j=n} (\varphi(t, t_j)(\eta(t_j) - \eta(t_{j-1}))) \right) \right) \quad (11)$$

donde el último sumando aparece al no cancelarse en este caso los términos de un intervalo con los del anterior y por lo tanto

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\Delta\sigma(t_i)}{E(t_i)} \left(1 + \eta(t_i)\varphi(t, t_i) + \sum_{j=i+1}^{j=n} (\varphi(t, t_j)\Delta\eta(t_j)) \right) \right) \quad (12)$$

Es evidente que para valores cercanos a la unidad y prácticamente uniformes del coeficiente de fluencia no lineal η , la expresión es idéntica a la obtenida para el caso de fluencia lineal. De esta forma, la ecuación engloba tanto el comportamiento lineal como el no lineal en fluencia debido a altas tensiones. La misma puede expresarse de manera integral como sigue

$$\varepsilon(t) = \int_{\tau=0}^{\tau=t} \left(\left(1 + \eta(\tau)\varphi(t, \tau) + \int_{T=\tau}^{T=t} \varphi(t, T)d\eta(T) \right) \frac{d\sigma(\tau)}{E(\tau)} \right) \quad (13)$$

donde se pasan los incrementos a diferencias y los sumatorios a integrales.

En esta última expresión puede comprenderse la naturaleza de los diferentes términos; los dos primeros corresponden a la deformación de fluencia (no lineal) cuando existe un nivel de no linealidad $\eta(\tau)$ en ese instante. El tercer término cuantifica el incremento de deformación que produce el aumento del nivel de no linealidad en el resto del tiempo. Como puede comprobarse, la expresión queda coherente y sus términos con un significado físico claro.

Efectivamente, si se aplica a un caso de $\sigma(t)=cte$ (Figura 4) considerando la fluencia no lineal, se tendría

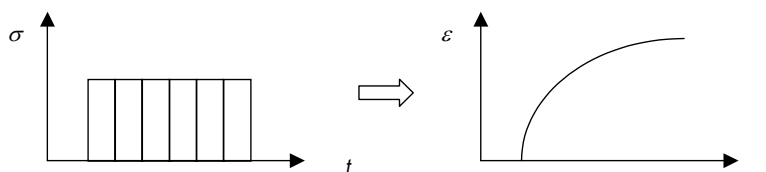


Figura 4. Carga constante en el tiempo. Descomposición en incrementos de tiempo

$$\varepsilon(t) = \Delta\varepsilon(t_0)(1 + \eta_0\varphi(t, t_0)) \quad (14)$$

donde se anula la integral anidada y la expresión lógicamente coincide con la ecuación para la que se desarrolló el método de fluencia no lineal.

Una vez identificada la ecuación que rige el fenómeno queda aún por determinar cómo poder resolverla de manera sencilla. El método que se propone emplear es análogo al del

coeficiente de envejecimiento (basado también en el principio de superposición y el más exacto en estos casos)

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= \int_{\tau=0}^{\tau=t} \left(\left(1 + \eta(\tau)\varphi(t, \tau) + \int_{T=\tau}^{T=t} \varphi(t, T)d\eta(T) \right) \frac{d\sigma(\tau)}{E(\tau)} \right) \approx \\ &\approx (1 + \chi(\eta_0, t, t_0)\eta(t_0)\varphi(t, t_0)) \frac{\Delta\sigma(t, t_0)}{E(t_0)}\end{aligned}\quad (15)$$

Esta ecuación presenta el coeficiente de envejecimiento dependiendo de los tiempos de edad de puesta en carga y evaluación así como del nivel inicial de tensiones de la fibra de hormigón.

APLICACIÓN AL MÉTODO PASO A PASO

La equivalencia anteriormente probada puede ahora aplicarse al caso en que se quiera obtener el incremento de deformaciones entre un tiempo $(i - 1)$ y el siguiente (i) . Se expresará dicho incremento como $\Delta\varepsilon(t_i)$, debiendo considerarse el mismo junto con la acción exterior (retracción, fluencia en tracción de la fibra relajada, ...) para compatibilizarlos al final del intervalo cuando se realice un cálculo paso a paso (Figura 5).

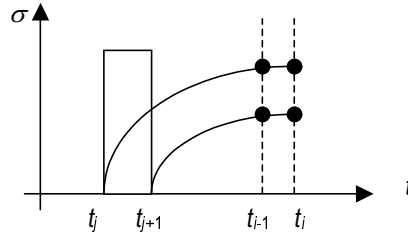


Figura 5. Incremento de tiempo

La ecuación que rige el fenómeno en este caso es, a partir de lo anteriormente expuesto

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon(t_i) &= \sum_{j=1}^{j=i} \left(\left(\frac{\sigma(t_j)}{E(t_j)} \eta(t_j) ((1 + \varphi(t_i, t_j) - \varphi(t_{i-1}, t_j)) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (1 + \varphi(t_i, t_{j+1}) - \varphi(t_{i-1}, t_{j+1})) \right) \right) + \frac{\Delta\sigma(t_j)}{E(t_j)}\end{aligned}\quad (16)$$

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon(t_i) &= \sum_{j=1}^{j=i} \left(\left(\frac{\sigma(t_j)}{E(t_j)} \eta(t_j) (\varphi(t_i, t_j) - \varphi(t_{i-1}, t_j) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \varphi(t_i, t_{j+1}) + \varphi(t_{i-1}, t_{j+1})) \right) \right) + \frac{\Delta\sigma(t_j)}{E(t_j)}\end{aligned}\quad (17)$$

Esta deformación, sumada a la de la acción exterior, es la que debe ser anulada al final del intervalo aplicando una tensión sobre el hormigón de valor $\Delta\sigma(t_i) = E(t_i)(\Delta\varepsilon(t_i) + \Delta\varepsilon_{acc}(t_i))$. Dicha tensión se reaplica sobre el conjunto hormigón-acero obteniéndose finalmente las tensiones sobre ambos materiales, siendo en el hormigón la suma de la tensión de anulación ($\Delta\sigma(t_i)$) y la tensión resultante al reaplicarla.

ESQUEMA DE CÁLCULO CON EL MÉTODO DEL COEFICIENTE DE ENVEJECIMIENTO

El anterior método paso a paso va a contrastarse con los resultados obtenidos mediante una aproximación del sumatorio con el método del coeficiente de envejecimiento. En este caso no lineal, el cálculo mediante el coeficiente de envejecimiento se va a realizar de la siguiente manera:

1. Se libera la fibra de hormigón de sus coacciones hiperestáticas de forma que pueda deformarse libremente durante el periodo estudiado bajo la historia tensional existente (Figura 6).

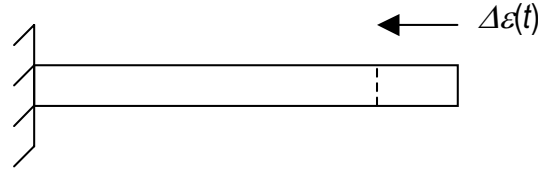


Figura 6. Libre deformación de la fibra

2. Se anula dicha deformación mediante la aplicación de unas tensiones de retenida aplicadas sobre la fibra con constantes ajustadas a la edad (Figura 7).

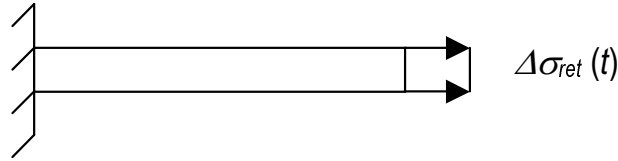


Figura 7. Anulación de la deformación

3. Se reaplican dichas tensiones sobre el sistema final con constantes nuevamente ajustadas a la edad (Figura 8).

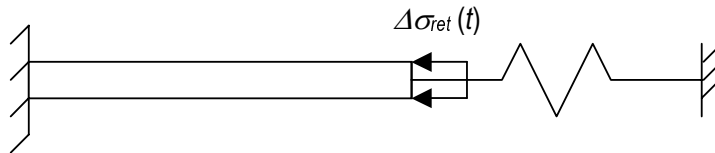


Figura 8. Reaplicación de las tensiones

Este esquema, idéntico en planteamiento al lineal, debe considerar que la relajación de las tensiones del segundo estado puede ser no lineal. Por lo tanto, se incluye el nivel de tensiones inicial de la pieza de la siguiente manera

$$\Delta\sigma_{ret} = \Delta\varepsilon(t) \frac{E(t_0)}{1 + \chi(\eta_0, t, t_0) \eta_0 \varphi(t, t_0)} \quad (18)$$

La reaplicación de las tensiones de retenida debe hacerse considerando también el estado tensional desde el que se realiza. Para ello es necesaria su inclusión en las constantes ajustadas a la edad del hormigón de la siguiente manera

$$E_c^* = \frac{E(t_0)}{1 + \chi(\eta_0, t, t_0)\eta_0\varphi(t, t_0)} \quad (19)$$

Esta forma de definir el coeficiente de envejecimiento tiene varias ventajas:

- Coincide con el caso lineal en caso de ser $\eta_0 = 1$.
- Sólo se necesita calcular una vez el efecto no lineal.
- Permite incluir de manera general el efecto de armaduras.

APLICACIÓN AL CÁLCULO DE TIRANTES

Las tensiones tanto en el hormigón como en el acero pueden obtenerse de manera analítica cerrada de la siguiente forma:

Sea $\Delta\varepsilon_{ret}$ el incremento de deformación a retener

$$E_c^* = \frac{E(t_0)}{1 + \chi(\eta_0, t, t_0)\eta_0\varphi(t, t_0)} \rightarrow n^* = \frac{E_s}{E_c^*} \quad (20)$$

$$\Delta\sigma_{ret} = \Delta\varepsilon_{ret}E_c^* \quad (21)$$

$$\begin{cases} \Delta\sigma_c(t) = \Delta\sigma_{ret} \left(1 - \frac{1}{1+n^*\rho}\right) \rightarrow \rho = \text{cuantía} \\ \Delta\sigma_s(t) = -\Delta\sigma_{ret}n^*\frac{1}{1+n^*\rho} \end{cases} \quad (22)$$

La comparación entre los valores obtenidos por este procedimiento y por el método paso a paso puede realizarse de manera exacta si se trabaja sobre la expresión de la tensión en el acero (que se supone conocida del método paso a paso)

$$\Delta\sigma_s(t) = -\Delta\varepsilon_{ret} \cdot E_c^* \frac{E_s}{E_c^*} \frac{1}{1 + \frac{E_s}{E_c^*}\rho} \quad (23)$$

$$\Delta\sigma_s(t) = -\Delta\varepsilon_{ret} \cdot E_s \frac{1}{1 + \frac{E_s}{E_c(t_0)}(1 + \chi(\eta_0, t, t_0)\eta_0\varphi(t, t_0))\rho} \quad (24)$$

$$\Delta\sigma_s(t) = -\Delta\varepsilon_{ret} \cdot E_s \frac{1}{1 + n_0(1 + \chi(\eta_0, t, t_0)\eta_0\varphi(t, t_0))\rho} \quad (25)$$

de donde despejando $\chi(\eta_0, t, t_0)$

$$\chi(\eta_0, t, t_0) = \left(\left(\frac{-\Delta\varepsilon_{ret} \cdot E_s}{\Delta\sigma_s(t)} - 1 \right) \frac{1}{n_0\rho} - 1 \right) \frac{1}{\eta_0\varphi(t, t_0)} \quad (26)$$

De esta forma, queda demostrado que dada una historia de cargas en una fibra compuesta por acero y hormigón, el método del coeficiente de envejecimiento también puede aplicarse de manera exacta para obtener su respuesta diferida, al haberse encontrado una expresión analítica cerrada y única capaz de proporcionarlo. Es decir, el método del coeficiente de envejecimiento permite obtener la misma solución que mediante una resolución directa de la integral de Volterra si se adopta un valor adecuado del mismo, cuya fórmula, con solución única, se presenta en (26).

Esta última afirmación tiene unas enormes implicaciones; sin embargo, no tiene excesivo sentido tabular todos los posibles casos de carga en todas las posibles fibras que puedan existir. En cambio sí es muy interesante como herramienta para obtener un valor medio de χ que responda de una manera correcta en la mayoría de los casos y comprobar de esta manera además la sensibilidad del método.

Queda por realizar un comentario y es que en las historias de deformaciones externas introducidas mediante coacciones (como es por ejemplo el caso de la relajación pura o cualquier otra historia de deformaciones externas impuestas que se pueda aplicar a una fibra) la historia tensional de la misma no depende de la cuantía de armadura, ya que la reaplicación de las tensiones no afecta a la fibra conjunta sino a la coacción externa. Sin embargo, en casos de fibras con cargas impuestas, la respuesta sí depende de dicha cuantía.

PROBLEMA DE RELAJACIÓN PURA

En la teoría lineal, la obtención del coeficiente de envejecimiento se realizaba según el teorema de Bazant a partir del caso de relajación pura al ser exacto para el mismo. El caso particular de $\eta = 1 = \text{cte}$ ya fue resuelto anteriormente con gran detalle y tabulado mediante ábacos. En otras palabras, dado un problema de relajación pura, siempre se podía encontrar un único coeficiente $\chi(t, t_0)$ que proporcionara el mismo resultado.

En el caso no lineal que ahora nos ocupa, se puede realizar análogamente el mismo planteamiento que en el caso lineal y obtener con ello los coeficientes $\chi(\eta_0, t, t_0)$ que resuelven el problema no lineal de manera exacta. Evidentemente, deben existir diferencias entre los mismos, ya que cuando una fibra se encuentra en un régimen no lineal relaja los esfuerzos de una manera más rápida que según una predicción lineal hasta entrar nuevamente en este último régimen. De esta forma, el problema a resolver puede plantearse como sigue:

Sea una fibra de hormigón en masa no fisurada (como se comentó anteriormente, es indistinto el que la fibra sea de hormigón en masa o se encuentre fuertemente armada, debido a que la cuantía de acero no influye en la respuesta en los casos de movimientos impuestos mediante coacciones externas), se le somete en t_0 a un desplazamiento impuesto δ el cual se mantiene constante en el tiempo

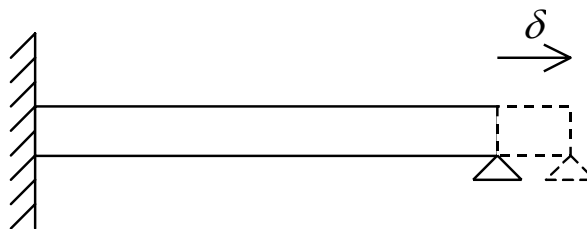


Figura 9. Problema de relajación pura

Las ecuaciones que rigen el problema son

$$\varepsilon(t) = \frac{\delta}{L} = \varepsilon(t_0) \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = \varepsilon(t_0) = \varepsilon(t_0)(1 + \eta_0\varphi(t, t_0)) + \\ + \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \left(1 + \eta(\tau)\varphi(t, \tau) + \int_{T=\tau}^{T=t} \varphi(t, T)d\eta(T) \right) \frac{d\sigma(\tau)}{E(\tau)} \end{aligned} \quad (28)$$

o bien

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = \varepsilon(t_0)(1 + \eta_0\varphi(t, t_0)) + \\ + \sum_{i=1}^{i=n} \left(\left(1 + \eta(t_i)\varphi(t, t_i) + \sum_{j=i+1}^{j=n} \varphi(t, t_j)\Delta\eta(t_j) \right) \frac{\Delta\sigma(t_i)}{E(t_i)} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = \varepsilon(t_0)(1 + \eta_0\varphi(t, t_0)) + \\ + (1 + \chi(\eta_0, t, t_0)\eta(t_0)\varphi(t, t_0)) \frac{\Delta\sigma(t, t_0)}{E(t_0)} \end{aligned} \quad (30)$$

Por lo tanto, y a partir de las dos últimas expresiones, puede obtenerse la solución exacta al problema mediante los dos procedimientos, el paso a paso y el del coeficiente de envejecimiento. En este caso, se resolverá primero mediante una integración paso a paso en el tiempo (el método paso a paso implementado corresponde a la ecuación planteada en términos de incrementos de tiempo) y posteriormente se obtendrá igualando ambas expresiones la $\chi(\eta_0, t, t_0)$ que resuelve el problema. De esta forma, la $\chi(\eta_0, t, t_0)$ obtenida volverá a ser exacta y única en casos de relajación pura en hormigón.

El método no será exacto cuando la propia relajación del hormigón induzca unas deformaciones en las fibras sobre las que se apoya y éstas por lo tanto se acorten. En general, esas deformaciones suelen ser pequeñas y el método puede considerarse como muy aproximado en un sistema hormigón - acero o bien de hormigones de características diferentes. Se debería recurrir para que fuera exacto en estos casos al método del coeficiente de envejecimiento generalizado propuesto por Lažic y Lažic¹², pero no parece necesario debido a las escasas diferencias existentes.

Queda aún por comentar dos puntos antes de entrar en la resolución de las ecuaciones:

- La relajación de la fibra tal y como se indicaba en el esquema anterior se considera que es a tracción y antes de la fisuración, es decir, el hormigón responde con un módulo de deformación que puede suponerse lineal y constante con el nivel de carga (aunque sea variable con el tiempo).
- Otro parámetro que es interesante de analizar es la evolución del coeficiente de fluencia no lineal en el tiempo, La fibra de hormigón se descarga según avanza el tiempo y eso hace que los efectos no lineales enseguida pierdan su importancia. Es decir, la fase donde la fluencia no lineal de la fibra tiene efectos significativos es en general corta pues la fluencia no lineal acelera la relajación de los esfuerzos. Como límite de validez del modelo presentado se propone una relación $\lambda_0 = 0,8$ debido a que es el límite para el que se calibró el modelo.

Los resultados obtenidos se tabulan para la definición propuesta del coeficiente de envejecimiento no lineal en forma de ábacos de manera similar a la vista en el caso lineal. El primer caso estudiado corresponde a un hormigón de características $f_{ck} = 30$ MPa, $e = 1000$ mm y HR=80 % (Figura 10) donde puede verse cómo, para valores elevados de λ_0 , las curvas proporcionan valores de χ inferiores a los obtenidos cuando dicha relación se aproxima al caso lineal.

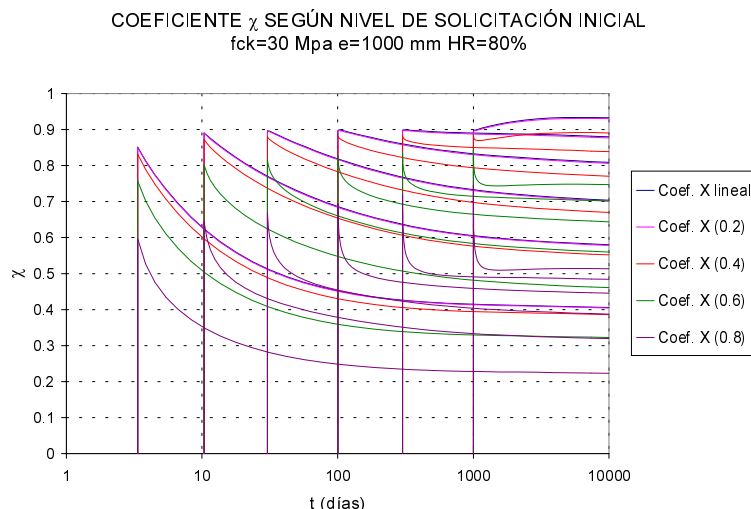


Figura 10. Coeficiente χ no lineal. $f_{ck} = 30$ MPa, $e = 1000$ mm, HR=80 %

Este primer gráfico (Figura 10) muestra el efecto para una pieza con un espesor considerable y por lo tanto con valores del coeficiente de envejecimiento bajos (al desarrollarse la fluencia más lentamente). El efecto no lineal apenas es perceptible hasta relaciones cercanas a $\lambda_0 = 0,6$. Para valores elevados de dicha relación las desviaciones se vuelven apreciables.

Otro caso resuelto donde se propone un pequeño espesor para la pieza (100 mm) y por lo tanto una mayor velocidad de desarrollo de la fluencia se detalla en la Figura 11.

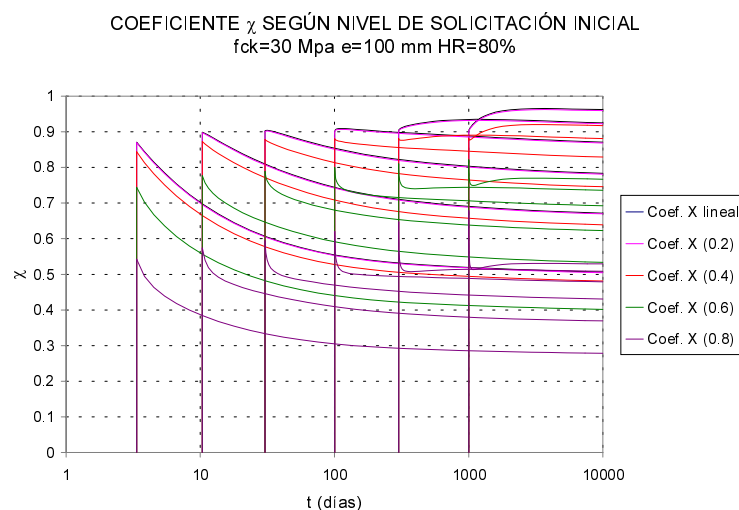


Figura 11. Coeficiente χ no lineal. $f_{ck} = 30$ MPa, $e = 100$ mm, HR=80 %

Como puede verse, el resultado es similar al del caso anterior. Puede observarse también cómo nuevamente las curvas tienden a ponerse paralelas una vez que se sale del régimen no lineal, quedando afectado χ por la historia tensional desarrollada previamente.

FÓRMULA APROXIMADA PARA EL COEFICIENTE χ

Los resultados anteriores muestran un desvío en el valor de χ respecto del obtenido suponiendo un comportamiento lineal en fluencia. Estudiando estos resultados junto a una base más amplia generada variando los diferentes parámetros del coeficiente de fluencia se estima que las desviaciones esperables respecto de la predicción lineal en el coeficiente de fluencia, donde λ representa la relación tensión/resistencia, pueden evaluarse según los valores de la Tabla I.

Relación λ_0	Desviación media
0,0	0 %
0,2	1 %
0,4	5 %
0,6	15 %
0,8	40 %

Tabla I. Desviación respecto de la predicción lineal

A partir de estos valores se ha ajustado una curva con una expresión sencilla y que reproduzca de una manera lo más correcta posible la tendencia de los mismos. La relación aproximada, que lleva un error del centésimo en el origen, propuesta por el autor para los valores medios es la siguiente

$$\chi(\eta_0, t, t_0) \approx \chi_{lin}(t, t_0) \left(1 - 100^{(\lambda-1)}\right) \rightarrow \lambda = \frac{\sigma}{f_c} \quad (31)$$

De esta forma, y aceptando la fórmula aproximada del MC-90 para dicho coeficiente de envejecimiento, se tendría

$$\chi(\eta_0, t, t_0) \approx \frac{\sqrt{t_0}}{1 + \sqrt{t_0}} \left(1 - 100^{(\lambda-1)}\right) \rightarrow \lambda = \frac{\sigma}{f_c} \quad (32)$$

El exponente que afecta a t_0 es de $\frac{1}{2}$ según el MC-90, según otros autores como Trevino dicho exponente puede estar más próximo a $\frac{1}{3}$, en cualquier caso las diferencias en los resultados de las dos fórmulas no son significativas.

Esta última fórmula parece más que suficiente para resolver los problemas de fluencia no lineal debidos a no linealidad proveniente de altas tensiones, considerando los diferentes parámetros involucrados en la misma y la incertidumbre en su determinación.

Para el caso lineal ambos coeficientes coinciden como debe ocurrir (salvo por el error de $\frac{1}{100}$ introducido en el coeficiente corrector) y queda ampliado el rango de validez del método a casos no lineales. No se encuentra en la expresión el tiempo de evaluación t , es por lo tanto una curva que proporciona los valores de χ a tiempo infinito. No obstante, los resultados no se desvían excesivamente para tiempos de curado superiores a los diez días y en cualquier caso se estabilizan rápidamente, no teniendo excesivo sentido afinar en el valor de los mismos.

PROBLEMA DE RETRACCIÓN LIBRE

Un caso interesante que debe resolverse en el día a día de la ingeniería civil es la evaluación de las tensiones y deformaciones que provoca la retracción en una fibra. Dicha retracción es capaz incluso de fisurar por sí sola un elemento (igualando las tensiones desarrolladas a la resistencia a tracción del mismo).

Es importante destacar, antes de entrar en el cálculo del fenómeno, la aplicabilidad del principio de superposición. Según dicho principio no se admiten descargas (entendidas éstas como cambios en el signo de los incrementos de deformaciones). Por lo tanto, es válido estudiar una fibra armada comprimida que retrae según el principio de superposición al aumentar con el tiempo la deformación de la misma. También es válido estudiar una fibra sin tensión inicial que retrae (el caso más usual e interesante) mediante el principio de superposición al acortarse monotónicamente. Sin embargo, este principio no es estrictamente aplicable en todos los casos de fibras traccionadas inicialmente, pues la deformación en la misma puede cambiar de signo con el tiempo. Este cambio depende de la relación de deformaciones fluencia en tracción–retracción (Figura 12).

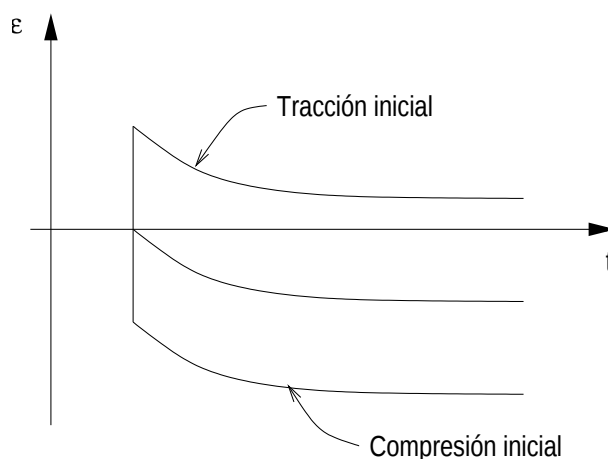


Figura 12. Historia de tensiones

En este estudio se va a analizar el efecto de la retracción suponiendo que no se encuentra cargada inicialmente y además se encuentra libre de coacciones externas y por lo tanto sí influye la cuantía de armadura en su respuesta. Este es el típico caso de un tirante hormigonado y que espera a ser puesto en carga.

A efectos de poder comprobar la importancia relativa que tiene la fluencia no lineal en un caso de retracción y fluencia de un tirante descargado, se ha realizado un estudio paramétrico en el que se han variado cuantías y propiedades reológicas del hormigón. A continuación se presentan los resultados correspondientes a los dos ejemplos anteriores que, debido a la enorme diferencia en el espesor, dan lugar a resultados muy diferentes (debido a que uno -el de mayor espesor- no entra apenas en régimen no lineal de fluencia, mientras que el otro (de pequeño espesor y mayor retracción y fluencia) entra fuertemente en la fase no lineal) y significativos del comportamiento esperable.

El primer caso que se presenta en la Figura 13 es el correspondiente a un espesor de 100 mm.

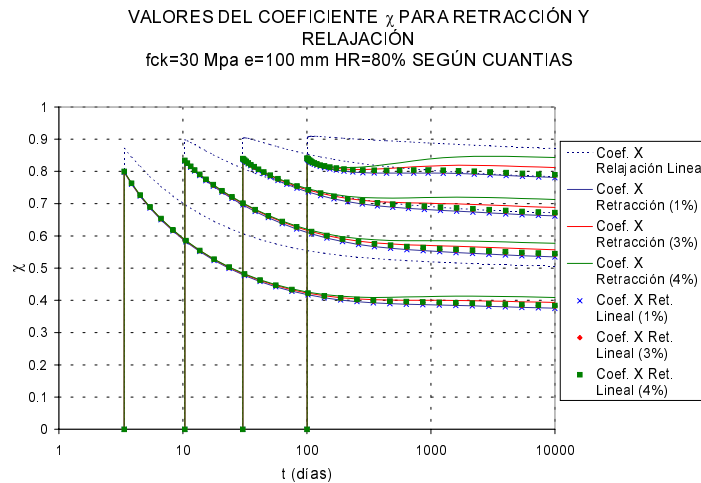


Figura 13. Coeficiente χ no lineal. $f_{ck} = 30$ MPa, $e = 100$ mm, HR=80 %

Como puede observarse, la cuantía influye en el valor del coeficiente de envejecimiento aunque su influencia no es excesiva. También se observa que el coeficiente de envejecimiento considerando una cuantía elevada es siempre superior al valor para cuantías bajas (como se explicará más adelante) y que el valor de χ es superior considerando la fluencia no lineal respecto del caso en que no se considere. Esta última observación (opuesta al caso anterior de relajación pura) es debida a que aquí el valor de η_0 es el mismo para todos los casos e igual a 1,0.

En el caso de considerar un espesor de 1000 mm el valor de la retracción disminuye fuertemente, obteniéndose los resultados de la Figura 14.

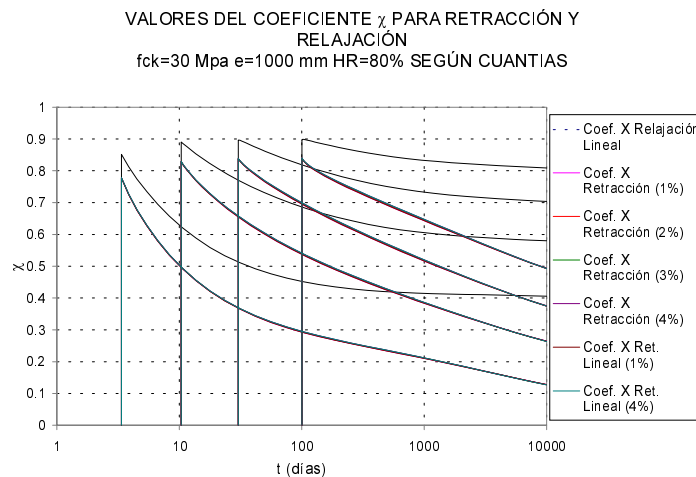


Figura 14. Coeficiente χ no lineal. $f_{ck} = 30$ MPa, $e = 1000$ mm, HR=80 %

En este caso, el valor del coeficiente es prácticamente idéntico se considere o no la no linealidad en fluencia y la cuantía de acero en la fibra.

La explicación de estos resultados es sencilla si se tiene en cuenta una serie de consideraciones. Para empezar, si no existiera armadura, la tensión en el hormigón sería constantemente igual a cero y nunca entraría en problemas de fluencia no lineal. Dichos problemas aparecen cuando la cuantía de acero es importante y el hormigón se tracciona fuertemente. Una vez que eso se produce, la no linealidad en fluencia origina que se relajen los esfuerzos más rápidamente que según una predicción lineal. Por lo tanto, para que la tensión en ambos materiales sea menor, por ejemplo en el acero, el coeficiente de envejecimiento debe ser mayor según

$$\Delta\sigma_s(t) = -\Delta\varepsilon_{ret} E_s \frac{1}{1 + n_0(1 + \chi\eta_0\varphi(t, t_0))\rho} \quad (33)$$

Este fenómeno es el que explica la desviación no lineal según la cuantía. Aunque, como se veía en el primero de los ejemplos, dicha desviación en ningún caso es acusada.

Si por el contrario la acción es pequeña (como en el segundo caso) respecto de la fluencia desarrollada en la fibra, apenas habrá desviaciones respecto de una predicción lineal. Este hecho explica el comportamiento tan diferente exhibido por las curvas de los dos casos anteriores.

Otro punto que es interesante destacar es que la forma de las curvas debe ser muy diferente de un caso a otro. Así, en el primero de los dos y para 28 días de puesta en carga y tiempo infinito de evaluación, se tiene $\Delta\varepsilon_{cs} = -3,12 \times 10^{-4}$ y $\varphi(t, t_0) = 1,86$; en el segundo de los casos apenas varía el coeficiente de fluencia disminuyendo fuertemente la retracción ($\Delta\varepsilon_{cs} = -1,50 \times 10^{-4}$ y $\varphi(t, t_0) = 1,52$). Esta falta de proporcionalidad entre acción-relajación es la que origina la diferente forma entre las curvas del coeficiente de envejecimiento.

IMPORTANCIA RELATIVA DEL FENÓMENO

Las desviaciones de las predicciones lineales en la retracción son pequeñas respecto del caso en que se considera la no linealidad en fluencia. Sin embargo, es interesante contrastar estos resultados con los que se obtendrían al aplicar el coeficiente lineal de envejecimiento del caso de relajación pura. Su importancia relativa como se verá a continuación no es tanta.

En el segundo de los casos, tal vez el más llamativo, se pueden adoptar como valores de cálculo los expuestos anteriormente para retracción y fluencia y los coeficientes χ ya tabulados para el caso de relajación pura ($\chi_{rel} = 0,70$ y $\chi_{ret} = 0,38$). Realizando los cálculos para la tensión del hormigón según las diferentes cuantías, se obtiene los errores de la Tabla II si se emplea la predicción lineal con el χ_{rel} , donde, en el cálculo de tensiones, se ha considerado

$$\Delta\sigma_c(t) = \Delta\varepsilon_{ret} E_c^* \left(1 - \frac{1}{1 + n^*\rho} \right) \quad (34)$$

ρ (%)	Error (%)
0,0	0,0
1,0	3,0
4,0	8,5

Tabla II. Errores según cuantías

El error aumenta al hacerlo la cuantía, pero en ningún caso llega a ser significativo teniendo en consideración la incertidumbre de los diferentes parámetros involucrados así como de la evolución de la ley de fluencia y retracción en el tiempo.

Si se analiza el primer caso, los errores son aún menores (máximo entorno al 4 %). Además, cuando la fibra entra en régimen no lineal, el error al aumentar la cuantía disminuye, pues el valor de χ se acerca en ambos casos (cosa que no sucedía anteriormente).

Puede por lo tanto admitirse de manera general que la tensión calculada en el hormigón empleando el coeficiente de envejecimiento de un problema lineal de relajación pura es inferior a la obtenida de manera exacta. Dichas desviaciones, del lado de la inseguridad, son sin embargo pequeñas y asumibles teniendo en cuenta el grado de incertidumbre de los parámetros involucrados. El error cometido aumenta con la cuantía si la fibra no entra en régimen no lineal y disminuye en caso de hacerlo.

Para el estudio simplificado del fenómeno de la retracción se propone emplear un coeficiente χ con un valor de 0,60 en vez de 0,80 que parece concordar mejor con los resultados numéricos obtenidos. Este valor es el que además se propone para cargas cuyo valor evoluciona en el tiempo (como un asiento diferido, por ejemplo) en el régimen lineal. De hecho, la retracción también puede considerarse como una acción cuyo valor evoluciona en el tiempo y por eso el coeficiente de envejecimiento esperado debe ser menor que el valor calculado para un problema de relajación pura.

CONCLUSIONES

Con este estudio se ha pretendido cubrir una serie de objetivos:

- Demostrar la equivalencia del planteamiento en incrementos de tensión con el planteamiento en incrementos de tiempo en la historia tensional de una fibra.
- Aplicar el coeficiente de fluencia corregido a la formulación en incrementos de tiempo.
- Incluir cualquier tipo de carga y cuantía de armado en la resolución del problema.
- Demostrar la unicidad y existencia de la solución de un coeficiente de envejecimiento para los casos anteriores. Dicho coeficiente es único para casos de fibras con cargas impuestas y es independiente de la cuantía para casos de deformaciones externas (coacciones externas) impuestas.
- Obtener el valor del coeficiente de envejecimiento para los casos más importantes en los tirantes o fibras en general, una relajación que pueda considerar la no linealidad de la fluencia y la actuación de la retracción en una fibra libre.

Tras probar y demostrar los anteriores puntos se han obtenido además una serie de conclusiones interesantes:

- Se han obtenido unas expresiones generales, presentadas en (20), (21) y (22), para el cálculo de las tensiones en el acero y hormigón de un tirante empleando el método del coeficiente de envejecimiento y considerando la no linealidad a altas tensiones.
- Se ha probado que se puede encontrar un único valor del coeficiente de envejecimiento que resuelve este tipo de problemas de manera exacta cuya expresión se presenta en la ecuación (26).
- Al aplicar estos conceptos, pueden superarse gran parte de las limitaciones del método original. Con esta nueva herramienta se ha estudiado el efecto no lineal en dos interesantes casos, la relajación pura y la retracción libre.

- El coeficiente de envejecimiento para la relajación pura es independiente de la cuantía de acero (al ser dicha acción una vinculación externa). El valor del coeficiente de envejecimiento puede corregirse de manera sencilla respecto de una predicción lineal según la expresión presentada en (32).
- El coeficiente de envejecimiento muestra también ciertas desviaciones respecto de la teoría lineal para el caso de retracción libre sobre un tirante. Sin embargo, la importancia real de estas diferencias en el valor final de las tensiones es pequeña debido principalmente a que la fibra parte con un estado tensional inicial nulo en ambos casos.

La relación entre la fluencia y retracción se vuelve un factor importante en el valor del coeficiente χ (teniendo también influencia la cuantía de armadura) pero, en cualquier caso, los errores cometidos respecto de emplear una predicción lineal en relajación son pequeños y asumibles.

Se propone para este caso un valor medio de χ de 0,60 en vez del obtenido de las curvas de relajación lineal de 0,80. En cualquier caso, el método se muestra poco sensible en sus resultados de tensiones y deformaciones frente a variaciones en el valor del coeficiente χ , tal y como sucede en el caso lineal.

REFERENCIAS

- 1 C. Avram, I. Facaoaru, I. Filimon, O. Mirsu e I. Terteau, “*Concrete strength and strain*”, Elsevier Scientific Publishing Company, (1981).
- 2 Z.P. Bazant, “Prediction of concrete creep effects using age-adjusted modulus method”, *Journal of the American Concrete Institute*, Vol. **69**, (1972).
- 3 Z.P. Bazant y otros, “*Mathematical Modeling of Creep and Shrinkage of Concrete*”, John Wiley and sons, Nueva York, (1988).
- 4 J. Becker y B. Bresler, “FIRES-RC, A computer program for the fire response of structures and reinforced concrete frames”, *UC-FRG Report*, Vol. **74-3**, University of California, Berkeley, (1974).
- 5 O. Bernard, “Comportement à long terme des éléments de structure formés de bétons d’âges différents”, Tesis doctoral (Dir. C. Huet), EPFL, Lausana, (2000).
- 6 E. Denarié, “Etude experimentale des couplages viscoelasticite-croissance des fissures dans les betons de ciment”, Tesis doctoral (Dir. E. Brühwiler), EPFL, Lausana, (2000).
- 7 F. Dischinger, “Untersuchungen ber die Knicksicherheit, die elastische Verformung und das Kriechen des Betons bei Bogenbrücken”, *Der Bauingenieur*, Vol. **18**, (1937).
- 8 M. Fernández Ruiz, “Estudio y comparación de diferentes métodos de cálculo para el análisis de redistribuciones a nivel de sección y estructura debidas a deformaciones diferidas en el hormigón”, *Hormigón y Acero*, N° 227, Madrid, (2003).
- 9 M. Fernández Ruiz, “Evaluación no lineal de los efectos estructurales producidos por las deformaciones diferidas del hormigón y el acero”, Tesis doctoral (Dir. F.J. del Pozo Vindel), UPM, Madrid, (2003).
- 10 M. Fernández Ruiz, F.J. del Pozo Vindel y J.M. Arrieta Torrealba, “Estudio sobre el comportamiento no lineal de la fluencia. Propuesta de modelo y comparación con resultados experimentales y modelos teóricos”, *Hormigón y Acero*, Madrid, (en prensa).
- 11 A. Ghali y R. Favre, “*Concrete Structures. Stresses and Deformations*”, E & FN Spon, Londres, (1994).

- 12 J.D. Lažic y V.B. Lažic, “Generalized age – adjusted effective modulus methos for creep in composite beams”, *Cement and Concrete Research*, Vol. **15**, (1985).
- 13 J. Manterola Armisen, “*Puentes*”, Colegio de Caminos de Canales y Puertos, Madrid, (2000).
- 14 J. Martínez Calzón y J. Ortiz Herrera, “*Construcción mixta hormigón-acero*”, Rueda, Madrid, (1978).
- 15 J. Martínez Calzón, “Hormigones de alta resistencia en la edificación de gran altura. Aplicación particular al Edificio Torre Espacio en el Paseo de la Castellana Madrid”, *Hormigón y acero*, N° 228–229, Madrid, (2003).
- 16 D. McHenry, “A new study of creep in concrete and its applications to design”, *ASTM Proc*, Vol. **43**, pp. 1069–1084, (1943).
- 17 F.R. McMillan, “Method and designing reinforced concrete slabs”, *Discussion by A.C. Janni*, ASCE, Vol. **80**, (1916).
- 18 A. Pérez Caldentey, “Comportamiento en servicio y rotura del hormigón estructural. Estudio teórico y experimental”, Tesis doctoral (Dir. H. Corres Peiretti), UPM, ACHE, (1996).
- 19 A. Pérez Caldentey, J.C. Arroyo Portero, “Caracterización de las propiedades diferidas del hormigón y su incidencia estructural”, *GT II/3 GEHO*, Vol. **22**, Madrid, (1998).
- 20 H. Rüsch, D. Jungwirth y H. Hilsdorf, “Kritische Sichtung der Einflüsse von Kriechen und Schwinden des Betons auf das Verhalten der Tragwerke”, *Beton - und Stahlbeton*, Vol. **68**, (1973).
- 21 H. Trost, “Auswirkungen des Superpositionsprinzips auf Kriech und Relaxations Probleme bei Beton und Spannbeton”, *Beton und Stahlbetonbau*, Vol. **62**, N° 10, (1967).